

Université Mohamed Khider – Biskra
Faculté des Sciences et de la technologie
Département : Génie-Mécanique
Ref :



جامعة محمد خيضر بسكرة
كلية العلوم و التكنولوجيا
قسم: الهندسة الميكانيكية
المرجع:

Thèse présentée en vue de l'obtention
Du diplôme de
Doctorat en sciences en : Génie Mécanique

Intitulé

**Contribution de l'approche en déformation pour l'analyse linéaire
et non-linéaire des structures**

Présentée par :
REBIAI Cherif

Soutenue publiquement le : 15/05/2013

Devant le jury composé de :

Dr. Benmebarek Sadok	Professeur	Président	Université de Biskra
Dr. Belounar Lamine	Professeur	Rapporteur	Université de Biskra
Dr. Hecini Mabrouk	Professeur	Examineur	Université de Biskra
Dr. Brioua Mourad	Professeur	Examineur	Université de Batna
Dr. Khemissa Mohamed	Professeur	Examineur	Université de Msila
Dr. Benmoussa Hocine	Professeur	Examineur	Université de Batna

Dédicaces

Je dédie ce modeste travail à :

Ma mère

Mon père

Mes frères

Mon épouse

Mes enfants : Takoua, Anfel, Amina, Amine Abderahmane

Remerciement

Un travail de thèse mérite impérativement un spécifique remerciement à ceux qui m'ont donné un soutien durant l'élaboration de ce travail.

J'exprime ma profonde reconnaissance et mon remerciement tout d'abord à mon directeur de thèse : Mr Belounar Lamine, Professeur à l'université de Biskra, pour son soutien constant et son aide qu'il m'a apporté tout le long de cette étude.

Je tiens à remercier particulièrement :

Tous ceux qui m'ont aidé de près ou de loin, et spécialement le président de jury Mr Bemebarek Sadok : Professeur à l'université de Biskra d'avoir accepté de présider cette soutenance.

Je tiens à exprimer ma gratitude aux membres de jury qui ont accepté d'examiner ce travail.

Je dois aussi remercier tous les enseignants du département de génie-mécanique de l'université de Biskra, ainsi que mes amis Haoues Nourreddine, Guerraiche Khelifa.

Je tiens aussi à remercier en particulier mes collègues de travail : Ziani Ridha, Aouici Hamdi.

SOMMAIRE

ملخص.....	ii
RESUME.....	iii
ABSTRACT.....	iv
NOTATIONS.....	v
LISTE DES FIGURES.....	vi
LISTE DES TABLEAUX.....	viii
INTRODUCTION GENERALE.....	1

Chapitre 1.

ETUDE BIBLIOGRAPHIQUE

Introduction.....	5
Rappel de la MMC et de la MEF.....	5
1.1.1. Cinématique des milieux continus.....	5
1.1.1.1. Définition d'un milieu continu.....	6
1.1.1.2. Description Lagrangienne.....	6
1.1.1.3. Contraintes, déformation, et équilibre	7
1.2.1.3.1. Vecteur de contraintes.....	7
1.2.1.3.2. Tenseur de contraintes de Cauchy.....	9
1.2.1.4. Lois de comportement.....	10
1.2.2. Formulation directe des caractéristiques d'éléments finis.....	11
1.2.2.1. Fonction de déplacement.....	11
1.2.2.2. Déformations.....	12
1.2.2.3. Contraintes.....	12
1.2.2.4. Forces nodales équivalentes.....	13
1.2.2.5. Discrétisation.....	14
1.3. Eléments finis à modèles en déformation existants.....	14
1.4. Conclusion.....	21

Chapitre 2.

DEVELOPPEMENT D'UN NOUVEL ELEMENT FINI BASE SUR L'APPROCHE EN DEFORMATION AVEC ROTATION DANS LE PLAN

2.1. Introduction.....	22
-------------------------------	-----------

2.2. Construction de l'élément SBREDR.....	23
2.2.1. Définition.....	23
2.2.2. Formulation matricielle.....	23
2.2.3. Intégration numérique.....	26
2.2.4. Evaluation de la matrice de rigidité élémentaire $[K^e]$	27
2.2.5. Conditions axisymétriques.....	28
2.3. Chargement axisymétrique.....	29
2.4. Calcul des contraintes.....	30
2.5. Conclusion.....	30

Chapitre 3.

VALIDATION NUMERIQUE DU NOUVEL ELEMENT FINI SBREDR EN LINEAIRE

3.1. Cas test en linéaire.....	31
3.1.1. Poutre console élancée de Mak Neal.....	31
3.1.2. Poutre console courte d'Allman.....	33
3.1.3. Flexion plane d'une poutre console encastree.....	34
3.1.4. Poutre console encastree simple.....	35
3.1.5. Tube cylindrique épais sous pression.....	38
3.2. Conclusion.....	40

Chapitre 4.

VALIDATION NUMERIQUE DE L'ELEMENT SBREDR EN NON-LINEAIRE

4.1. Introduction.....	41
4.2. Seuil de plasticité.....	43
4.3. Invariants de contrainte.....	45
4.4. Critères de rupture.....	47
4.4.1. Critère de Von-Mises.....	47
4.4.2. Critères de Mohr-Coulomb et Tresca.....	49
4.5. Matrice constitutive (méthode des contraintes initiales).....	50
4.6. Méthode Viscoplastique (méthode des déformations initiales).....	51
4.7. Validation numérique de l'élément SBREDR en non-linéaire.....	52

4.7.1. Cas tests non-linéaire matériaux.....	52
4.7.1.1. Analyse de la capacité portante d'un sol purement cohérent.....	52
4.7.1.2. Poutre console soumise à une force concentrée.....	55
4.7.1.3. Analyse passive des terres.....	56
4.7.1.4. Analyse axisymétrique non drainée.....	57
4.8. Conclusion.....	59

Chapitre 5.

FORMULATION ISOPARAMETRIQUE ET VALIDATION NUMERIQUE DE L'ELEMENT SBRIE EN NON-LINEAIRE ET EN DYNAMIQUE

5.1. Introduction.....	60
5.2. Transformation géométrique.....	61
5.3. Formulation isoparamétrique.....	62
5.4. Validation numérique de l'élément SBRIE en non-linéaire.....	67
5.4.1. Analyse de la capacité portante d'un sol purement cohérent.....	67
5.4.2. Analyse de la stabilité d'un talus.....	69
5.4.3. Poutre console soumise à une charge répartie.....	71
5.4.4. Poutre console soumise à une force concentrée.....	72
5.4.5. Analyse passive des Terres.....	73
5.4.6. Analyse axisymétrique non drainée.....	75
5.5. Validation numérique de l'élément SBRIE en Dynamique.....	76
5.5.1. Valeurs propres en vibration libre d'un solide rectangulaire.....	77
5.5.2. Vibration forcée d'un solide rectangulaire.....	79
5.5.3. Vibration forcée d'un solide elasto-plastique rectangulaire.....	80
5.6. Conclusion.....	81
Conclusion générale.....	82
Bibliographie.....	84
Annexe.....	90

ملخص

في هذه الأطروحة وفي الجزء الأول منها تم تطوير وتقييم عنصر محدود غشائي جديد مستطيل الشكل من أجل دراسة مسائل في المجال المرن وغير المرن للهياكل ذات بعدين.

حققت الانتقالات لهذا العنصر قد تم تطويره باستعمال مبدأ التشوه ، ويستند هذا العنصر على الوظائف التي تؤدي لمختلف مكونات التشوه بينما ترضي معادلة التوافق. هذا العنصر المستطيل الشكل المسمى SBREDR يحتوي على ثلاث درجات للحرية في كل عقدة من الأربع عقد (درجتين للانتقال ودرجة للدوران) ، ووظائف الحركة لهذا العنصر الذي تم تطويره تلي التمثيل الدقيق لحركات الأجسام الصلبة.

بالنسبة لدراسة المسائل المرنة — البلاستيكية (Problèmes Elasto-plastiques) ثلاثة معايير تم اعتمادها: (VonMises, Tresca et Mohr-Coulomb) وتم استخدام طريقي (الإجهاد المبدئي والتشوه المبدئي) في هذه الدراسة.

لكي نعكس بدقة السلوك المرن وغير المرن لهذا العنصر في مشاكل التحليل البنيوي تم اختيار مسائل كل من التشوه والإجهاد المسطح والمسائل ذات التناظر.

تم تقييم أداء هذا العنصر من خلال سلسلة من الاختبارات الصارمة في كل من التحليلين ، النتائج المتحصل عليها والمقارنة مع تلك المتوفرة وكذلك مع النتائج التحليلية أظهرت سرعة التقارب والأداء الجيد لهذا العنصر.

في الجزء الثاني تم دراسة السلوك الديناميكي وكذلك السلوك المرن وغير المرن للهياكل ذات بعدين باستعمال عنصر التشوه SBRIE . السلوكين لهذا العنصر تم دراستهما لأول مرة، ومن أجل أن تكون دراسة جيدة لهذا السلوك اتضح أنه يجب إدخال صياغة (I'isoparametrie) على هذا العنصر، و للتحقق من صحته ودقته تم حل بعض الأمثلة باستعماله ومقارنتها مع الحلول الموجودة.

كلمات المفاتيح / المسائل المرنة — البلاستيكية، نهج التشوه، عنصر محدود غشائي، معيارتمزق، درجة استدارة إضافية

RESUME

Dans ce travail de thèse, en première partie un nouvel élément fini de type membranaire pour l'analyse linéaire et non linéaire des structures est développé. Le champ de déplacement de cet élément a été développé en utilisant l'approche en déformation. Cet élément est basé sur des fonctions assumées pour les différentes composantes de déformation. Cet élément fini rectangulaire nommé SBREDR (**S**train **B**ased **R**ectangular **E**lement with **D**rilling **R**otation) possède trois degrés de liberté dans chacun des quatre nœuds de coin (deux translations et une rotation dans le plan), et les fonctions de déplacement de cet élément développé satisfaisaient la représentation exacte des mouvements du corps rigide. Pour l'analyse elasto-plastique les trois critères de VonMises, Tresca et Mohr-Coulomb sont adoptés, et les deux méthodes : contrainte initiale et déformation initiale sont employés. Dans le but de refléter exactement le comportement élastique et elasto-plastique du présent élément dans l'analyse structurale, des problèmes en déformation plane, contrainte plane et axisymétriques sont considérés. La performance de cet élément est évaluée à travers une série de tests sévères dans les deux analyses. Les résultats obtenus comparés aux résultats analytiques, ont montré la rapidité de convergence et la bonne performance de cet élément.

Dans la seconde partie nous avons étudié le comportement dynamique et elasto-plastique des structures membranaires en utilisant l'élément basé sur le champ de déformation SBRIE. Les deux comportements de cet élément sont étudiés pour la première fois, et dans le but d'avoir une bonne étude des comportements, il s'est avéré qu'une formulation isoparamétrique soit introduite sur cet élément. Pour la validation, quelques exemples numériques choisis sont résolus en utilisant l'élément SBRIE à la fois dans les deux analyses, et comparés aux solutions de référence et aux solutions analytiques rapportées dans la littérature.

Mots Clés/ Analyse elasto-plastique, approche en déformation, élément fini membranaire, critère de rupture, rotation Drilling.

ABSTRACT

In this thesis a new membrane finite element for linear and materially nonlinear analysis is developed. The displacement field of this element has been developed by the use of the strain based approach, and it is based on the assumed functions for the various components of strain which satisfy the compatibility equation. This rectangular finite element named SBREDR (**S**train **B**ased **R**ectangular **E**lement with **D**rilling **R**otation) has the three degrees of freedom at each of the four corner nodes (the two translations and the in-plane rotation) and the displacement functions of the developed element satisfy the exact representation of the rigid body modes. For elastoplastic analysis, Von Mises, Tresca and Mohr-Coulomb yield criteria are adopted, and both initial stress and initial strain methods are employed. In order to reflect exactly both elastic and elastoplastic behaviors of the developed element in the structural analysis, plane stress, plane strain, and axisymmetrical problems are considered. Numerical experiments in both linear and nonlinear analysis have been conducted to assess accuracy and reliability of the developed element compared to the theoretical results and other membrane finite elements. The performance of this element is evaluated through a series of tests in both analyzes. Numerical results obtained using this element agree well with those from theoretical solutions and show that this element has quite rapid rate of convergence to the reference solutions for all tests.

In the second part we numerically study the elastoplastic and dynamic behaviors of membrane structures using the strain based approach through a finite element named SBRIE. Both behaviors of this element were investigated for the first time, and in order to have a good study of behaviors, it proved necessary that a new isoparametric formulation will be introduced on this element. For validation purposes some selected numerical examples are solved using the SBRIE element in both analysis and compared to the reference and to the analytical solutions reported in the literature.

Keywords: Elastoplastic analysis, Strain approach, Membrane element, Yields criteria, Drilling rotation

NOTATIONS

$[K^e]$	Matrice de rigidité élémentaire
$[K]$	Matrice de rigidité globale
$[B]$	Matrice de déformation
$[K_0]$	Matrice de rigidité $[K_0]$
ddl	Degrés de liberté
F_C	Fonction ou surface de charge
S	1 ^{er} Invariant
t	2 ^{er} Invariant
θ	3 ^{er} Invariant
$\bar{\sigma}$	Contrainte déviatorique dans les conditions triaxiales
σ	Contrainte moyenne dans les conditions triaxiales
C_u	Cohésion non drainée
Q	Fonction du P otentiel plastique
σ_Y	Contrainte limite
$[J]$	Matrice Jacobéenne
$[N]$	Matrice des fonctions de forme
γ	Poids volumique
F	Coefficient de sécurité
D_p	Matrice plastique
D_e	Matrice d'élasticité
K_0	Pression du sol
Ψ	Angle de dilatation
ϕ	Angle de frottement

LISTE DES FIGURES

Chapitre 1.

Figure 1.1	Cinématique des milieux continus	6
Figure 1.2	Facette de normale n.....	8

Chapitre 2.

Figure 2.1	Élément SBREDR avec rotation dans le plan.....	24
Figure 2.2	Élément SBREDR sous chargement.....	30

Chapitre 3.

Figure 3.1	Poutre console élancée de Mac-Neal soumise à (1) cisaillement pur et (2) flexion pure.....	31
Figure 3.2	Poutre console d'Allman.....	33
Figure 3.3	Poutre console sous chargement vertical uniforme.....	34
Figure 3.4	Poutre console soumise à différents chargements.....	36
Figure 3.5	Coupe transversale de tube cylindrique épais sous pression interne...	38
Figure 3.6	Maillage d'une tranche de tube cylindrique épais.....	39
Figure 3.7	Cylindre épais sous pression : solutions nodales calculées et exactes..	39

Chapitre 4.

Figure 4.1	Méthode de rigidité constante.....	42
Figure 4.2	Méthode de rigidité variable.....	42
Figure 4.3	Comportement élastique parfaitement plastique.....	44
Figure 4.4	Espace des contraintes principales.....	46
Figure 4.5	Critères de Von Mises et de Tresca.....	48
Figure 4.6	Critère de Mohr-Coulomb.....	49
Figure 4.7	Géométrie et maillage de la semelle flexible.....	53
Figure 4.8	Contrainte portante par rapport au déplacement central.....	54
Figure 4.9	Géométrie et maillage de la poutre console soumise à une force	55

Figure 4.10	Maillage et données pour le test analyse des terres.....	56
Figure 4.11	Force passive par rapport au déplacement horizontal.....	57
Figure 4.12	Maillage du problème axisymétrique non drainé.....	58
Figure 4.13	Déplacement vertical par rapport au contrainte déviatorique pour ($\psi = 0$ et $\psi = 30^\circ$) pour l'élément SBREDR.....	59

Chapitre 5.

Figure 5.1	Transformation géométrique.....	62
Figure 5.2	Coordonnées des nœuds de l'élément SBRIE.....	62
Figure 5.3	Géométrie et maillage de la semelle flexible.....	67
Figure 5.4	Contrainte portante par rapport au déplacement central.....	68
Figure 5.5	Analyse de la stabilité d'un talus.....	70
Figure 5.6	Déplacement maximal par rapport au coefficient de sécurité.....	71
Figure 5.7	Géométrie et maillage de la poutre soumise à une charge répartie.....	71
Figure 5.8	Géométrie et maillage de la poutre soumise à une force concentrée..	72
Figure 5.9	Relation entre déplacement du point du milieu et le chargement à l'extrémité de la poutre.....	73
Figure 5.10	Maillage et données pour le test analyse des terres.....	74
Figure 5.11	Force passive par rapport au déplacement horizontal.....	74
Figure 5.12	Maillage du problème axisymétrique non drainé.....	75
Figure 5.13	Déplacement vertical par rapport au contrainte déviatorique pour ($\psi = 0$ et $\psi = 30^\circ$) pour l'élément SBRIE.....	76
Figure 5.14	Géométrie et maillage de la poutre	77
Figure 5.15	Géométrie et maillage de la poutre cantilever.....	79
Figure 5.16	Vibration forcée d'un solide rectangulaire méthode de réponse com...	80
Figure 5.17	Géométrie et maillage de la poutre cantilever elasto-plastique.....	80

LISTE DES TABLEAUX

Chapitre 3.

Tableau 3.1	Déflexion normalisée de la poutre élancée de MacNeal ‘cisaillement pure’	32
Tableau 3.2	Déflexion normalisée de la poutre élancée de MacNeal ‘flexion pure’..	32
Tableau 3.3	Déplacement vertical au point A.....	34
Tableau 3.4	Déplacement vertical normalisé au point A.....	34
Tableau 3.5	Déplacement V_A de la poutre en flexion plane.....	35
Tableau 3.6	Déplacement vertical et rotation au point B de la poutre.....	37

Chapitre 4.

Tableau 4.1	Déplacement vertical du nœud chargé (coordonnée 0,0).....	54
Tableau 4.2	Déplacement vertical de la poutre soumise à une force concentrée.....	55

Chapitre 5.

Tableau 5.1	Fonctions de forme de l’élément SBRIE.....	65
Tableau 5.2	Composantes de la matrice [B] de l’élément SBRIE.....	65
Tableau 5.3	La matrice [B*] de l’élément SBRIE cas axisymétrique.....	66
Tableau 5.4	Déplacement vertical du nœud chargé (coordonnée 0,0).....	69
Tableau 5.5	Déplacements verticaux de plusieurs nœuds de la poutre soumise à une charge répartie.....	72
Tableau 5.6	Déplacement vertical de la poutre soumise à une force concentrée.....	73
Tableau 5.7	Valeurs propres de la poutre cantilever ‘‘déformation plane’’	78
Tableau 5.8	Valeurs propres de la poutre cantilever ‘‘contrainte plane’’.....	78
Tableau 5.9	Déplacements au nœud 13 de la poutre cantilever elasto-plastique.....	81

INTRODUCTION GENERALE

Introduction générale

Le contexte de la crise économique actuelle associée à la mondialisation, pousse forcément les industriels dans une politique de minimisation des coûts de recherche pour le développement de leurs produits. En particulier l'ingénieur dans différents domaines industriels à de plus en plus recours aux outils numériques de simulation par les éléments finis à la place du procédé de prototypage ou expérimental qui est très coûteux. Le besoin de développer des éléments finis membranaires pour le calcul des structures, constitue une recherche intéressante et pleine de défis. Le calcul par ces éléments est devenu très répandu dans de nombreux domaines de technologie, (la mécanique, le transfert de chaleur, la mécanique des sols, le génie civil, etc...). Les éléments membranaires sont des éléments avec trois nœuds, quatre nœuds ou plus utilisés pour modéliser des structures d'une épaisseur spécifiée qui ne présentent aucune contrainte normale à cette épaisseur.

Ces éléments sont formulés selon plusieurs approches, parmi lesquelles on peut citer l'approche en déformation. Le concept de cette approche fut originalement introduit pour la modélisation des structures dans les années 70. Dès lors, la méthode a connu une progression tellement rapide, qu'elle est devenue l'un des outils les plus puissants disponibles pour l'analyse des structures. Plusieurs auteurs ont entamé cette approche, parmi lesquels on peut citer son fondateur Sabir. L'utilisation de cette approche pour l'analyse des structures à plusieurs avantages dont on peut citer ; la représentation des déplacements par des termes polynomiaux d'ordre élevé sans la nécessité de l'introduction de degrés de liberté internes inutiles ; une bonne convergence peut également être obtenue lorsque les résultats sont comparés à ceux obtenus à partir des éléments basés sur le modèle en déplacement correspondants, ayant le même nombre total de degrés de liberté.

La recherche en éléments finis membranaires et notamment ceux avec degrés de rotation additionnels, basés sur d'autres formulations se poursuit aussi d'une façon active que ce soit pour les triangles que pour les quadrilatères. Parmi les auteurs qui ont investi dans ces éléments on peut citer à titre d'exemples : Allman [Allm.84, 88a, 88b], Bergan [Berg. 85], Cook [Cook.86], Yunus [Yunu.89], Aminpour [Amin.92], Ibrahimbegovic [Ibra.90], Felippa [Felip.03], Pimpinelli [Pimp.04], Madeo [Made.12], et Ming Huang [Ming.10].

En effet, la modélisation par des éléments membranaires connaît une extension fantastique, qui va de paire avec le développement et l'accroissement de puissance des ordinateurs. Ce développement s'est accompagné de la mise au point de programmes de calcul capables de résoudre des problèmes d'une étonnante complexité, et de résoudre les équations générales décrivant les phénomènes physiques.

Aspects actuels

Concernant le modèle éléments finis, deux principaux aspects, auxquels la recherche en éléments finis de membranes jusqu'à un temps récent continue de faire appel :

- Aspect concernant les éléments membranaires triangulaires et quadrilatères mais sans degrés de liberté additionnels.
- Aspect concernant les éléments membranaires triangulaires et quadrilatères enrichis avec l'introduction de ddl rotationnels autour de la normale avec différents concepts (vertex rotations, Drilling...)

But du développement de nouveaux éléments membranaires basés sur l'approche en déformation

De façon générale nous avons deux objectifs pour développer un élément plan membranaire ; le premier est d'améliorer la précision élémentaire et le deuxième de fournir un élément de membrane idéale pour former l'élément coque.

Dans notre travail le premier but est visé. En effet pour obtenir une convergence satisfaisante, les éléments membranaires dérivant de l'approche en déplacement exigent un grand nombre d'éléments dans le maillage des structures, par conséquent, ceux basés sur le modèle en déformation n'exigent qu'un petit nombre d'éléments en maillage pour avoir une bonne convergence. Alors l'idée de base était en premier de développer un élément de membrane avec degré de liberté additionnel "Drilling rotation", basé sur le modèle en déformation avec une très bonne performance, comparé à d'autres éléments de même type considérés comme des éléments robustes dans l'analyse des structures, ensuite faire l'extension de l'approche en déformation à l'analyse elasto-plastique à travers cet élément.

Objectif de la thèse

Ce travail entre dans le cadre général du développement et de la validation d'éléments finis de type membranaires efficaces pour le calcul des structures.

Pour l'analyse des déplacements des solides, l'élément Q4 peut être assez rigide dans certains modes de déformations, alors que l'élément Q8 qui met en jeu 16 degrés de liberté peut être très coûteux à utiliser, dans ce contexte, nous proposons dans ce travail de thèse :

- Le développement d'un élément fini membranaire rectangulaire intermédiaire qui, dans le premier but améliore l'analyse en termes de résultats et de temps de calcul " pour l'analyse linéaire", nommé SBREDR (**S**train **B**ased **R**ectangulaire **E**lement with **D**rilling **R**otation), et qui possède quatre nœuds de coin avec trois degrés de liberté en chaque nœud adapté à l'analyse des problèmes classiques d'élasticité plane.

- Faire l'extension de cet élément SBREDR a l'analyse elasto-plastique des structures ce qui sera étudié pour la première fois.

- Formulation iso-paramétrique de l'élément SBRIE cité dans [Sabi.95] et sa validation en analyse non linéaire matérielle ainsi qu'en analyse dynamique ce qui est investi aussi pour la première fois.

En effet, pour refléter exactement le comportement à la fois élastique, elasto-plastique et dynamique de l'élément SBREDR développé et de l'élément SBRIE dans l'analyse structurale, des problèmes en contraintes planes, en déformations planes, et axisymétriques sont considérés.

Plan de la thèse

La thèse est divisée en cinq chapitres :

Le premier chapitre est consacré à une analyse bibliographique dont laquelle on donne un contexte historique et technique sur les travaux antérieurs et notamment sur tous les éléments à modèles en déformation développés durant les quatre dernières décennies.

Le deuxième chapitre est purement consacré à la formulation et le développement d'un élément fini de type membranaire avec quatre nœuds et trois ddl par nœud, basé sur l'approche en déformation pour l'analyse linéaire et non linéaire des structures membranaires.

Le troisième chapitre est dédié à la validation numérique de l'élément membranaire développé en analyse linéaire. Une série de cas-tests sévères considérés par les ingénieurs comme des outils importants de validation des éléments de membranes est utilisée.

Dans le quatrième chapitre, on expose d'abord la théorie de base de l'analyse elasto-plastique des structures en membranes, en citant les différents critères de rupture et les différents algorithmes utilisés, ensuite une série de tests réputés sévères pour la validation de l'élément développé est considérée.

Dans le cinquième chapitre une formulation isoparamétrique de l'élément de Sabir 'SBRIE' avec sa validation dans l'analyse non-linéaire matérielle et en dynamique sont considérées. Dans l'analyse dynamique l'élément SBRIE est utilisé pour déterminer les valeurs propres d'un solide rectangulaire avec les deux modes de vibrations libres et forcées.

CHAPITRE 1

ETUDE BIBLIOGRAPHIQUE

Chapitre 1. ETUDE BIBLIOGRAPHIQUE

1.1. Introduction

En conception et validation des structures la méthode des éléments finis est certainement la méthode la plus répandue et la plus utilisée de nos jours. L'intérêt des éléments finis est qu'ils représentent un outil puissant d'analyse numérique pour arriver à des solutions approchées des problèmes que rencontrent les ingénieurs qui ne cherchent plus des solutions exactes et fermes car elles nécessitent énormément d'efforts intellectuels et de temps lorsqu'elles sont possibles.

Dans l'objectif de développer des éléments finis performants et efficaces basés sur le modèle en déformation, pouvant refléter réellement le comportement des structures en analyse linéaire et non-linéaire, et ayant moins de degrés de liberté en comparaison avec ceux basés sur le modèle en déplacement, une bibliographie concernant le développement de ces éléments s'est avérée très nécessaire. Cette étude bibliographique sur le développement de l'approche en déformation réalisée le long des quatre dernières décennies, à pour but d'éclaircir et de visionner les avantages et les inconvénients de cette approche, ce qui nous permet d'avoir une direction de travail assez pertinente.

Nous avons trouvé utile de rappeler dans ce chapitre, quelques notions de base de la mécanique des milieux continus (MMC), et de la méthode des éléments finis MEF, et ensuite décrire les éléments à modèles en déformation existants durant les quatre dernières décennies.

1.2. Rappel de la MMC et de la MEF

Notons ici que ce paragraphe résulte d'une petite synthèse des références suivantes : [Jean.97], [Zien.73].

1.2.1 Cinématique des milieux continus

1.2.1.1. Définition d'un milieu continu

Un milieu continu est un milieu dont le comportement macroscopique peut être schématisé en supposant la matière répartie sur tout le domaine qu'il occupe, et non, comme dans la réalité, concentrée dans une partie de volume très petite.

Soit un corps solide qui est soumis à des différentes sollicitations, et qui se transforme au cours du temps t . A un instant t quelconque, il arrive à un nouvel état appelé configuration actuelle E_t (voir Figure (1.1)).

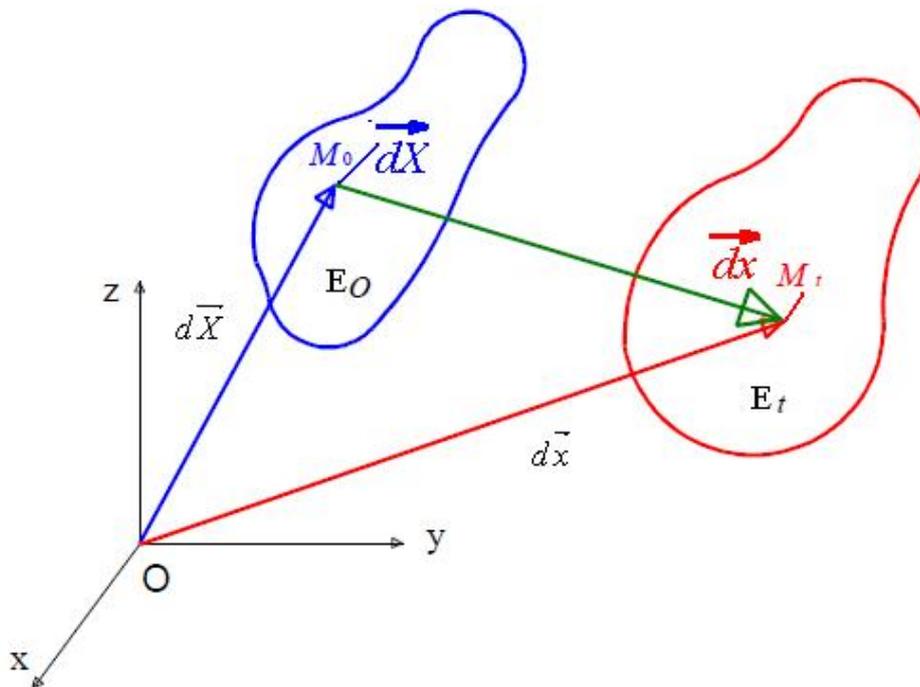


Figure 1.1 : *Cinématique des milieux continus*

1.2.1.2. Description Lagrangienne

La description Lagrangienne du mouvement consiste à :

Identifier les particules matérielles constitutives du système à partir de leur position géométrique dans une configuration prise comme référence E_0 , et à exprimer la valeur de toute grandeur physique dans une configuration actuelle E_t .

Nous sommes ainsi amenés à considérer la transformation suivante :

$$d\vec{X} \rightarrow d\vec{x}$$

D'autre part, nous avons les relations suivantes :

$$x_i = x_i(X_J, t) \text{ et } X_I = X_I(x_J, t) \quad (1.1)$$

Sous forme différentielle nous obtenons :

$$dX_I = \frac{\partial X_I}{\partial x_J} dx_J \text{ et } dx_i = \frac{\partial x_i}{\partial X_J} dX_J \quad (1.2)$$

Ces relations nous permettent de mettre en évidence les composantes d'un tenseur déterminé par :

$$dx_i = F_{ij} dX_J \quad (1.3)$$

$$\text{Et } F_{ij} = \frac{\partial x_i}{\partial X_J} \quad (1.4)$$

On peut donc écrire :

$$d\vec{x} = [F] \cdot d\vec{X} \quad (1.5)$$

Ou F est le tenseur gradient de transformation. Il permet de caractériser les différentes transformations.

Les composantes de ce tenseur peuvent être calculées à partir du champ de déplacement en différenciant la relation suivante :

$$\vec{u}(X_J, t) = \overrightarrow{OM_t} - \overrightarrow{OM_0} = \vec{x} - \vec{X} \quad (1.6)$$

On a donc:

$$F_{ij} = \frac{\partial x_i}{\partial X_J} = \delta_{ij} + \frac{\partial u_i}{\partial X_J} \quad (1.7)$$

1.2.1.3. Contraintes, déformations, équilibre

1.2.1.3.1. Vecteur des contraintes

Considérons la force Δf qui s'exerce sur un élément de surface ΔS de normale \mathbf{n} au point M dans la configuration Ω_t , figure (1.2)

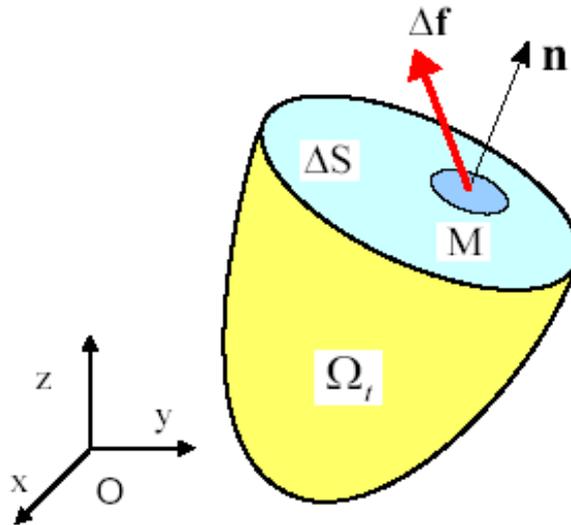


Figure 1.2 : Facette de normale \mathbf{n}

Cauchy définit le vecteur des contraintes au point M par :

$$\sigma(M, \mathbf{n}) = \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \left(\frac{\Delta f}{\Delta S} \right) \quad (1.8)$$

Il existe ainsi une infinité de vecteurs des contraintes au point M dépendant de l'orientation du vecteur \mathbf{n} . Soient $\sigma(i), \sigma(j), \sigma(k)$ les vecteurs des contraintes agissant, respectivement, sur les facettes de normales i, j, k du repère cartésien $O(x, y, z)$. Leurs composantes sont définies de la manière suivante en coordonnées cartésiennes :

$$\begin{aligned} \sigma(i) &= \sigma_{xx}i + \sigma_{yx}j + \sigma_{zx}k \\ \sigma(j) &= \sigma_{xy}i + \sigma_{yy}j + \sigma_{zy}k \\ \sigma(k) &= \sigma_{xz}i + \sigma_{yz}j + \sigma_{zz}k \end{aligned} \quad (1.9)$$

En prenant les conditions de l'équilibre des moments autour des axes passant par M , en l'absence de couples répartis à l'intérieur et à la surface du solide conduit à :

$$\sigma_{xy} = \sigma_{yx}; \sigma_{xz} = \sigma_{zx}; \sigma_{yz} = \sigma_{zy} \quad (1.10)$$

Ainsi on peut définir le vecteur des contraintes σ par :

$$\sigma = [\sigma_{xx} \ \sigma_{yy} \ \sigma_{zz} \ \sigma_{xy} \ \sigma_{xz} \ \sigma_{zy}] \quad (1.11)$$

1.2.1.3.2. Tenseur des contraintes de Cauchy

Cauchy définit le tenseur des contraintes au point M par :

$$\sigma = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} & \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} & \sigma_{zy} & \sigma_{zz} \end{bmatrix} \quad (1.12)$$

Le solide dans la configuration actuelle Ω_t est soumis à des sollicitations comme des forces surfaciques f_s appliquées sur une partie de la frontière $\partial_1\Omega_t$, des déplacements imposés U_d appliqués sur une partie de la frontière $\partial_2\Omega_t$, et des forces volumiques f_v (qui peuvent contenir des termes d'inertie). La somme des parties de la frontière $\partial_1\Omega_t$ et $\partial_2\Omega_t$ représente la frontière totale fermée $\partial\Omega_t$ de Ω_t . Dans le cas général de la statique les équations d'équilibre du système s'écrivent de la façon suivante :

$$\begin{cases} \operatorname{div}(\sigma) + f_v = 0 \quad \forall M \in \Omega_t \\ u(M) = u_d \quad \forall M \in \partial_2\Omega_t \\ \sigma(M) \cdot n = f_s \quad \forall M \in \partial_1\Omega_t \end{cases} \quad (1.13)$$

$$\text{Ou } \text{div} = \left[\frac{\partial}{\partial x} \quad \frac{\partial}{\partial y} \quad \frac{\partial}{\partial z} \right] \quad (1.14)$$

Dans l'analyse des structures membranaires en (2D), subissant des transformations élastiques caractérisées par de petites déformations, on a :

$$\varepsilon = \begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \end{bmatrix} \quad (1.15)$$

Où $\varepsilon_x, \varepsilon_y$ sont les déformations normales et γ_{xy} la déformation de cisaillement.

1.2.1.4. Lois de comportement

La relation liant le tenseur des contraintes au tenseur des déformations est la loi de comportement. Sous l'Hypothèse de Petites Perturbations, pour un matériau homogène, linéaire et isotrope, la loi de comportement est un opérateur linéaire du 4^{ième} ordre. La loi d'élasticité, ou loi de Hooke introduit deux paramètres matériaux : le module de Young E et le coefficient de Poisson ν . La relation tensorielle s'exprime comme suit :

$$[\varepsilon] = \frac{1+\nu}{E} \sigma - \frac{\nu}{E} \text{tr} \sigma \cdot \text{Id} \quad (1.16)$$

Id est le tenseur identité, $\text{tr} \sigma$ désigne la trace de σ . À l'inverse, la relation exprimant la contrainte à la déformation, en fonction des coefficients de Lamé (λ et μ) est :

$$\sigma = 2\mu\varepsilon + \lambda \text{tr} \varepsilon \cdot \text{Id} \quad (1.17)$$

Les paramètres d'élasticité et les coefficients de Lamé sont liés par les relations :

$$\lambda = \frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \quad (1.18)$$

$$\mu = \frac{E}{2(1+\nu)} \quad (1.19)$$

En écrivant les tenseurs des contraintes et déformations en vecteur colonne de taille 6, on peut exprimer la loi de Hooke de manière matricielle, plus simple d'interprétation.

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{zz} \\ \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} \\ \sigma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 2\mu + \lambda & \lambda & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & 2\mu + \lambda & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & \lambda & 2\mu + \lambda & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mu & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mu & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mu \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \varepsilon_{zz} \\ 2\varepsilon_{yz} \\ 2\varepsilon_{zx} \\ 2\varepsilon_{xy} \end{Bmatrix} \quad (1.20)$$

Dans un cas de chargement bidimensionnel, la loi de comportement se retrouve sous forme simplifiée et condensée. Dans un cas d'hypothèse de contrainte plane ou déformation plane la matrice d'élasticité est donnée dans la formule (1.24 et 1.25)

1.2.2. Formulation directe des caractéristiques d'élément fini

1.2.2.1. Fonction de déplacement

Un élément fini est défini par des nœuds i, j, m, \dots et des frontières rectilignes. Les déplacements en tous points intérieurs à l'élément sont définis sous forme d'un vecteur colonne $\{f(x,y)\}$:

$$\{f\} = [N] \cdot \{\delta_e\} = \begin{bmatrix} N_i & N_j & N_m & \dots \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \delta \\ \delta_j \\ \delta_m \\ \cdot \\ \cdot \end{Bmatrix} \quad (1.21)$$

Où les composantes de N sont généralement des fonctions des positions et $\{\delta_e\}$ est le vecteur des déplacements nodaux. Dans le cas de contrainte plane on a :

$\{f\} = \begin{Bmatrix} u(x, y) \\ v(x, y) \end{Bmatrix}$ qui représente les composantes verticales et horizontales du déplacement d'un

point quelconque intérieur à l'élément et $\{\delta_e\} = \begin{Bmatrix} u_i \\ v_i \end{Bmatrix}$ les déplacements correspondants d'un nœud donné i .

1.2.2.2. Déformations

Lorsque l'on connaît les déplacements en tout point intérieur à l'élément, on peut déterminer les déformations en un point quelconque. Cela est traduit en notation matricielle par :

$$\{\varepsilon\} = [B]\{\delta_e\} \quad (1.22)$$

Dans le cas de contrainte plane les déformations sont celles qui se produisent dans le plan : elles sont définies en fonction des déplacements par (eq1.15).

1.2.2.3. Contraintes

En général, le matériau compris à l'intérieur des frontières de l'élément peut être soumis à des déformations initiales telles que celle pouvant être provoquées par les changements de température, retrait, croissance cristallines etc... Si l'on désigne par $\{\varepsilon_0\}$ de telles déformations, les contraintes proviennent alors de la différence entre déformations réelles et déformations initiales.

Il est commode de supposer au départ, que le corps est soumis à des contraintes initiales résiduelles $\{\sigma_0\}$ qui peuvent être mesurées, mais dans la prévision est impossible si l'on ne connaît pas parfaitement l'histoire du matériau.

Si l'on suppose que le comportement est élastique, la relation contrainte-déformation est linéaire sous la forme :

$$\{\sigma\} = [D](\{\varepsilon\} - \{\varepsilon_0\}) + \{\sigma_0\} \quad (1.23)$$

Où $[D]$ est matrice d'élasticité donnée soit en :

Contrainte plane :

$$[D] = \frac{E}{(1-\nu^2)} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} \quad (1.24)$$

Déformation plane

$$[D] = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} (1-\nu) & \nu & 0 \\ \nu & (1-\nu) & 0 \\ 0 & 0 & \frac{(1-2\nu)}{2} \end{bmatrix} \quad (1.25)$$

1.2.2.4 Forces nodales équivalentes

Lorsque la structure est sous des charges réparties, on doit remplacer ces charges réparties par des forces ponctuelles équivalentes appliquées aux nœuds. Pour cela il faut que les travaux des charges réparties et les forces ponctuelles nodales soit égaux.

Soit un élément qui subit une charge répartie $q(x, y, z)$ sur le volume ayant comme composantes q_1, q_2, q_3 .

Le travail de la charge répartie est donnée par :

$$W_q = \int (q_1 U + q_2 V + q_3 W) dv = \int \{\mu(x, y, z)\}^T q(x, y, z) dv \quad (1.26)$$

$$W_q = \mu(x, y, z) = [\varphi(x, y, z)] \{\alpha_i\} = [\varphi(x, y, z)] [C]^{-1} \{\delta_e\} \quad (1.27)$$

$$W_q = \{\delta_e\}^T [C]^{-T} \int [\varphi(x, y, z)]^T q(x, y, z) dv \quad (1.28)$$

Le travail des forces nodales est :

$$W = [\delta_e]^T \{F_e\} \quad (1.29)$$

En égalisant les deux travaux obtenus on trouve :

$$\{F_e\} = \{C\}^{-T} \int [\varphi(x, y, z)]^T q(x, y, z) dv \quad (1.30)$$

1.2.2.5. Discrétisation

La discrétisation fournit un modèle numérique à partir du modèle mathématique, donc l'opération de discrétisation est aussi importante que celle de la modélisation. Pour discrétiser, on subdivise la structure en éléments dont les caractéristiques et la forme dépendent de la modélisation. La principale difficulté de la méthode des éléments finis se situe au niveau de la formulation des éléments (forme de l'élément, nombre de nœuds et de degré d'interpolation).

1.3. Eléments finis à modèles en déformation existants

Les études menées par Ashwell [Ashw.71a] sur la convenance d'éléments simples basés sur les déplacements destinés aux structures courbes, ont montrées que la bonne convergence des résultats est liée directement au grand nombre d'éléments. Cela a motivé les chercheurs pour le développement de l'approche en déformation afin de palier à ce type de problèmes.

D'autres parts, Ashwell [Ashw.71b] à montré en analysant les problèmes d'oscillation libres dans le plan des anneaux circulaires que les résultats obtenus en utilisant les éléments basés sur le modèle en déformation sont précis et par conséquent ces éléments sont très efficaces dans cette analyse. Un peu plus tard l'approche en déformation à été utilisée pour une étude concernant une comparaison d'élément fini type poutre courbe quand elle est utilisée dans les problèmes de vibration [Sabi.71c]. Les travaux antérieurs sur les fonctions de forme des éléments finis utilisés pour les structures courbes, comme les arcs, sont prolongés de la statique à des problèmes de vibrations. Dans cette étude les vibrations libres d'un anneau sont prises en considération et quatre fonctions de forme sont utilisées. La convergence trouvée est plus rapide.

Une année après Ashwel [Ashw.72a] à développé un nouvel élément fini de type coque cylindrique. La méthode propose de former des fonctions de forme d'élément fini courbe à partir des fonctions de déformations indépendantes simples appliquées à un élément coque rectangulaire. L'élément résultant possède 20 degrés de liberté et satisfaisant les conditions pour les déplacements de corps rigides et de déformation constante dans la mesure où cela est permis par les équations de compatibilité.

Le nouvel élément avec un petit maillage à une convergence supérieure à celle de tous les autres éléments rectangulaires dont les résultats sont disponibles, et mieux qu'aux éléments triangulaires si un paramètre temps est utilisé comme base pour des comparaisons. La supériorité du nouvel élément est particulièrement marquée quand il est appliqué aux coques minces. De sa part Sabir [Sabi.72b] à développé un élément coque cylindrique courbe pour l'analyse linéaire. Cet élément est une forme simplifiée de l'élément coque de Cantin et Clough [Cant.68], et il est présenté en réduisant la taille de sa matrice de rigidité de (24×24) à (20×20) . Les deux éléments sont comparés pour résoudre des problèmes sévères. Le nouvel élément à l'avantage sur celui de "Cantin et de Clough" et sur tous les autres éléments finis qui ont des fonctions de déplacement de degré élevés, qu'il évite les conditions aux limites qui ne sont pas forcément évidentes.

Plus récemment Sabir et Lock [Sabi.73] présentaient une investigation dans le comportement géométrique non linéaire des arcs circulaires. L'élément courbe est utilisé, basé sur la satisfaction de la condition selon laquelle la déformation circonférentielle et le changement de courbure, plutôt que les déplacements, doivent être des simples fonctions indépendantes sur les axes des coordonnées. Le comportement d'une gamme d'arcs est alors considéré, et les résultats sont comparés et déclarés en bon accord avec les méthodes analytiques. Un peu plus après Ashwell et Sabir ont montré que dans des études précédentes, les propriétés d'un certain nombre d'éléments coques cylindriques ont été étudiées en les appliquant à des arcs circulaires. Des travaux plus récents ont montré la nécessité d'une étude plus détaillée de la précision avec laquelle la

distribution des contraintes (par opposition aux déplacements) peut être calculée. Une telle étude est décrite dans cette référence [Ashw.74].

L'approche en déformation était aussi présente dans différents actes de conférences. Parmi lesquelles on peut citer celles de [Sabi.75, Sabi.78, Sabi.82, Sabi.83a, Sabi.83c]. En novembre 1983 une solution par éléments finis pour les problèmes de répartition des contraintes pour les coques cylindriques avec des trous de formes circulaires et elliptiques et aussi pour des coques cylindriques élastiques minces est décrite dans la référence [Sabi.83b]. Pour cette étude des éléments finis courbes quadrilatères et triangulaires sont utilisés dans l'analyse. Les éléments sont d'une classe nouvelle, basée sur de simples fonctions indépendantes, de contraintes généralisées vérifiant les équations de compatibilité.

Les éléments également satisfaisants exactement les besoins de déplacement du corps rigide et n'utilisent que les degrés de liberté "géométriques" externes afin d'éviter les difficultés liées à l'association de degrés de liberté internes inutiles. Les résultats trouvés sont rapidement convergents pour les déplacements aussi bien que pour les contraintes.

La recherche en éléments finis basés sur le modèle en déformation se poursuit d'une façon très active. Plusieurs éléments ont été également présentés dans des actes de conférences : Eléments finis basé sur l'approche en déformation pour l'analyse de cisaillement des murs [Sabi.84], éléments rectangulaires et triangulaires pour l'élasticité plane avec degré de liberté de rotation [Sabi.85a], élément fini pour l'analyse des coques [Sabi.85b], et élément fini pour l'élasticité plane en coordonnées polaires [Sabi.86]. En parallèle avec cette dernière conférence, Sabir [Sabi.86a] a développé deux éléments rectangulaires et triangulaires basés sur le modèle en déformation utilisés pour le calcul des contraintes dans le plan avant flambage. Une combinaison de ces deux éléments avec l'élément connu de flexion est présentée pour produire des résultats d'une précision acceptable sans l'utilisation d'un nombre excessivement élevé d'éléments. Plus tard une étude sur les fréquences propres de vibrations libres d'un pont en arc est présentée dans la

référence [Sabi.94a]. Le pont est constitué de deux composantes structurelles à savoir un arc circulaire et un pont plat, reliés entre eux au sommet de l'arc. Un modèle mathématique bidimensionnel est utilisé dans l'analyse ; la composante courbe est modélisée par éléments finis de type poutres courbes, et le pont par éléments finis de types poutres droites. L'effet de la variation des rigidités relatives sur les deux composantes des modes de vibrations, est également présenté et comparé avec les fréquences correspondantes de l'élément arc. Un peu plus après une étude sur l'effet de la déformation de cisaillement sur la vibration des arcs circulaires par la méthode des éléments finis est envisagée dans la référence [Sabi.94b]. Dans cette étude les fréquences propres de vibration libre d'arcs circulaires, ayant un nombre considérable d'angles au centre sont obtenues. Les deux modes symétriques et antisymétriques de vibration sont étudiés et les valeurs de fréquences d'un mode à l'autre sont obtenues. Un élément fini type poutre courbe basé sur le modèle en déformation utilisant la formulation des poutres droites de Timoshenko dans un système de coordonnées curvilignes est obtenu, et ensuite employé dans l'analyse. Les courbes de convergence montrent que des résultats précis et stables sont obtenus par l'utilisation d'un nombre minime d'éléments, ce qui permet l'emploi d'une méthode simple, pour obtenir les valeurs propres et les vecteurs propres représentant les fréquences et leurs modes de vibrations correspondants. Durant cette même année les fréquences propres de vibration libre des coques cylindriques, ayant des conditions limites différentes, et des panneaux cylindriques ont été étudiées par Sabir [Sabi.94c]. Dans cette investigation la méthode des éléments finis est utilisée dans laquelle un élément coque cylindrique basé sur le champ de déformation est employé. L'élément répond à la représentation exacte du MCR et ne dispose que de degrés de liberté externes, cinq à chaque nœud de coins, pour éviter les difficultés liées à des éléments d'ordre supérieur.

Plus récemment, l'attention s'est tournée vers le développement des éléments finis de types membranaires pour l'élasticité plane. Une des meilleures contributions est celle proposée par Sabir [Sabi.95a] dont laquelle deux éléments membranaires rectangulaires et triangulaires basés sur le

modèle en déformation sont développés pour l'analyse linéaire. Ces éléments sont utilisés sous diverses formes, y compris la condensation statique et peuvent satisfaire les équations d'équilibre pour obtenir des solutions aux problèmes d'élasticité bidimensionnelle, où la contribution de la contrainte de cisaillement sur la déformation peut être importante. En parallèle une étude sur la grande déflexion, et sur le comportement non linéaire géométrique des coques est effectuée par Sabir [Sabi.95b]. Dans cette étude la méthode des éléments finis est utilisée en conjonction avec l'incrément linéarisée, et la technique itérative de Newton-Raphson. L'élément fini résultant utilisé présente seulement les degrés de liberté extérieurs essentiels, et satisfait les déplacements du mouvement du corps rigide MCR. Il peut également être utilisé pour la représentation des coques cylindriques, sphériques et hyperboliques.

Venue ensuite une autre investigation concernant l'application de deux éléments rectangulaires et triangulaires basés sur l'approche en déformation pour l'analyse des barrages doublement courbes. Les deux éléments ayant seulement les cinq degrés de liberté essentiels par nœud, et peuvent satisfaire la représentation exacte de MCR, et sont basés sur la formulation des coques [Djou.95c].

Plus tard l'analyse des structures complexes par éléments finis basés sur le modèle en déformation a pris une grande part de recherche par plusieurs auteurs [Sabi.96, 97a]. Au cours de la même année 97 Sabir [Sabi.97b, 97c] a utilisé en premier article l'analyse par MEF pour déterminer les fréquences propres de la plaque avec des trous carrés excentriques. La répartition des contraintes dans le plan à l'intérieur de la plaque, nécessaire à l'analyse, est déterminée à l'aide d'un élément fini rectangulaire ayant les degrés de liberté essentiels à chacun des quatre nœuds. Les fonctions de déplacement de l'élément sont basées sur les fonctions assumées et peuvent satisfaire la représentation exacte de MCR des déplacements. Dans le second article les fréquences propres et les charges de flambement élastique des plaques carrées, contenant des trous carrés est soumise à des charges renforcées dans le plan, sont déterminées par la méthode des éléments

finis. En effet pour cela un élément de flexion non-conforme rectangulaire basé sur des hypothèses de déformation est utilisé.

Une extension de l'approche en déformation à l'analyse des plaques relativement épaisses à l'aide d'un élément simple basé sur le modèle en déformation est présentée dans une conférence par Belarbi [Bela.97] en vue d'améliorer les résultats existants dans la littérature. Un peu plus tard de sa part Belarbi [Bela.98] à développé un nouvel élément secteur basé sur l'approche en déformation avec rotation dans le plan pour l'analyse linéaire.

Une autre extension de cette approche à l'étude des plaques minces et épaisses à été établie plus récemment par les mêmes auteurs [Bela.99]. Afin d'éviter l'utilisation des éléments tridimensionnels (hexaédriques et prismatiques) d'ordre élevé pour l'étude de la flexion des plaques, les auteurs proposent le développement d'un nouvel élément hexaédrique simple à huit nœuds et trois degrés de liberté par nœuds (U,V,W) basé sur l'approche en déformation avec modification de la matrice d'élasticité. La modification de constantes élastiques vise à adoucir la matrice de rigidité dans le but de représenter exactement le comportement réel des plaques en flexion qu'elles soient minces ou épaisses. Cet élément s'est trouvé numériquement plus performant que celui du modèle en déplacement. A la fin de cette année une autre analyse à l'aide des éléments à champ de déformation de plusieurs structures coques rigides est effectuée par [Assa.99]. En effet l'élément fini de coque utilisé dans cette analyse a été développé à l'origine par [Asch.72a], et il a été modifié par la suite, de façon indépendante, par [Char.82] et [Ass.84] dans le but d'améliorer sa performance. Cet élément à cinq degrés de liberté nodaux et il est basé sur des fonctions de déformation généralisées simples satisfaisants l'exigence de déformations constantes et indépendantes plutôt que la formulation habituelle basée sur les déplacements indépendants.

Le manque de compatibilité entre les degrés de liberté des différents éléments est un problème fréquemment rencontré dans la pratique lors de la modélisation des structures complexes. Le

couplage d'éléments de membrane avec d'autres éléments barres ou poutres, est un exemple classique illustré. Le problème est généralement traité à travers un degré de liberté additionnel. A cet effet une autre amélioration dans le comportement linéaire de l'élément de [Sabi.85a] à été présenté par [Bela.05]. Un nouvel élément triangulaire basé sur le modèle en déformation avec trois degrés de liberté par nœuds (deux translations et une rotation) est développé. La bonne performance de cet élément est évaluée à travers une série de cas de tests.

En parallèle un élément fini rectangulaire basé sur l'approche en déformation, possédant les deux degrés de liberté essentiels pour chacun des nœuds sommets, est développé pour la résolution des problèmes d'élasticité linéaire plane par Belarbi [Bela.05]. L'adoption de variations linéaires pour les composantes normales de la déformation et une déformation de cisaillement constante permettent d'améliorer la précision des éléments. Cependant toute singularité est éliminée par l'utilisation d'un repère local orienté d'une manière optimale. A partir d'exemples numériques d'une poutre soumise à la flexion et au cisaillement et en utilisant le concept de condensation statique, des solutions exactes peuvent être obtenues. Quelques applications ont été abordées et ont permis de mettre en évidence la fiabilité et la précision de cet élément.

L'approche en déformation a été également prolongée à l'analyse des plaques, et cela durant la même année, une fameuse contribution de l'approche en déformation pour l'analyse des problèmes de flexion des plaques minces et épaisses à été présentée par [Belo.05].

Cette contribution traite du développement d'un nouvel élément fini rectangulaire à quatre nœuds pour l'analyse linéaire de la flexion des plaques avec effet de cisaillement transverse. Le champ des déplacements de l'élément a été développé par l'utilisation de l'approche en déformation et il est basé sur les fonctions supposées indépendantes pour les différentes composantes de déformation, tout en vérifiant les équations de compatibilité. L'élément possède trois degrés de liberté essentiels extérieurs en chacun des quatre nœuds de coin, et satisfait la représentation exacte des MCR de déplacements. Cet élément est trouvé numériquement plus efficace que celui à

champ de déplacement correspondant, et sa précision est évaluée à travers une série de cas de test liés aux problèmes des plaques minces et épaisses.

L'approche en déformation a connu depuis l'année 2005 une certaine stagnation au niveau de sa prolongation. De sa part Himeur [Hime.11], a développé un nouvel élément fini de plaque triangulaire d'élasticité plane. Cet élément est développé dans la perspective de construction des éléments de coques. Sa formulation utilise des concepts relatifs à l'approche en déformation, au quatrième nœud fictif, à la condensation statique, à l'intégration analytique et se base sur les hypothèses de la théorie des plaques minces (Théorie de Kirchhoff). La démarche adoptée a permis d'aboutir à un élément fini de plaque concurrentiel, robuste et performant.

1.4. Conclusion

En conclusion, cette bibliographie passe en revue tous les types d'éléments finis développés durant les quatre dernières décennies, des méthodes utilisées, et des performances de ces éléments et techniques développées. La grande diversité des résultats obtenus montre que l'approche en déformation était toujours efficace en calcul des structures, mais ne cache pas le fait qu'aucune extension de cette approche à l'analyse elasto-plastique a été entamée.

CHAPITRE 2

DEVELOPPEMENT D'UN NOUVEL ELEMENT FINI AVEC ROTATION DANS LE PLAN

Chapitre 2. DEVELOPPEMENT D'UN NOUVEL ELEMENT FINI BASE SUR L'APPROCHE EN DEFORMATION AVEC ROTATION DANS LE PLAN.

2.1. Introduction

Plusieurs tentatives de développement d'éléments finis de membrane avec rotation dans le plan ont été essayées durant les années 70 mais sans réussite. La première tentative pour circonvenir à cette difficulté d'introduire une rotation dans le plan fut celle d'Allman [Allman 84]. En effet un élément fini triangulaire remarquablement simple pour l'analyse de l'élasticité plane avec 'vertex rotation' a été développé. Les résultats numériques de cet élément montrent que sa précision est tout à fait acceptable pour des applications pratiques.

Après cette première contribution plusieurs autres auteurs ont contribué au développement de nouveaux éléments finis de types membranaires avec différents concepts; 'vertex rotation' [Car.85 ; Cook.91 ; Tay.85 ; Jett.86 ; Cook.86, 87 ; Raza.87 ; MacN.88] ; 'Drilling rotation' qui est dû à Bergan [Berg. 85] et ensuite utilisé par les auteurs [Allm.86 ; Sabi.85a ; Jaam.88] ; et le concept 'Fibre plane rotatoire' dû à Ayad [Ayad.93].

Durant les quatre décennies précédentes, une attention particulière a été accordée au développement d'éléments finis basés sur l'approche en déformation, dans laquelle les champs de déplacement peuvent être obtenus par intégration des déformations. Cette approche offre de nombreux avantages dont: la satisfaction facile des critères de convergence, des fonctions indépendantes pour les différentes composantes de contrainte dans la mesure où il est permis par les équations de compatibilité, et l'enrichissement du champ des déplacements par des termes d'ordre élevé sans introduire des degrés de liberté non essentiels.

Généralement il ya deux buts essentiels pour développer des éléments de membranes avec un degré additionnel de rotation ; le premier est d'améliorer la précision élémentaire, et l'autre pour avoir un élément de membrane idéal pour former l'élément coque, ou se connecter avec d'autres types d'éléments avec des degrés de liberté additionnels comme les éléments poutres pour faire des analyses complexes en ingénierie.

Pour l'analyse des déplacements, l'élément Q4 peut être assez rigide dans certains modes de déformation, alors que l'élément Q8 peut être très cher pour l'utilisation, qui met en jeu 16 degrés de liberté. Dans ce contexte nous proposons dans ce travail un élément fini membranaire intermédiaire rectangulaire, qui améliore l'analyse en termes de précisions de résultats, et aussi en termes de temps de calcul.

Dans ce chapitre, nous allons alors présenter le développement de cet élément nommé SBREDR adapté à l'analyse des structures. La formulation de cet élément est à base du modèle en déformation.

2.2. Construction de l'élément SBREDR

2.2.1. Définition

L'élément développé dans ce chapitre est basé sur l'approche en déformation plutôt que sur celle en déplacement. C'est un élément membranaire rectangulaire à quatre nœuds avec trois degrés de liberté par nœuds (deux translations (u , v) et une rotation θ_i dans le plan). Il est basé sur les fonctions assumées des différentes composantes de déformation, et satisfaisait l'équation de compatibilité. L'élément développé nommé SBREDR (Strain Based Rectangular Element with Drilling Rotation) satisfaisait aussi exactement la représentation des mouvements du corps rigides.

2.2.2. Formulation matricielle

La géométrie de l'élément SBREDR avec les variables cinématiques nodales correspondantes sont schématiquement représentées sur la figure (2.1), avec a et b sont respectivement les

dimensions de l'élément dans les deux directions x et y . A chaque nœud i de ddl U_i et V_i est attribué une rotation additionnelle θ_i .

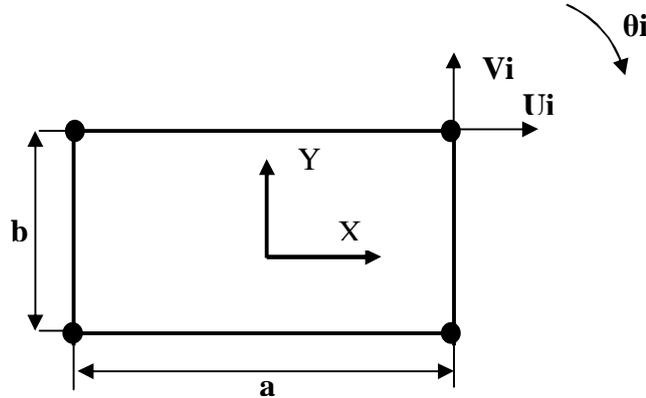


Figure 2.1 : Elément SBREDR avec rotation dans le plan

Les trois composantes de la déformation sont données par :

$$\begin{aligned}\varepsilon_x &= U_{,x} = \frac{\partial U}{\partial x} \\ \varepsilon_y &= V_{,y} = \frac{\partial V}{\partial y} \\ \gamma_{xy} &= U_{,y} + V_{,x} = \frac{\partial U}{\partial y} + \frac{\partial V}{\partial x}\end{aligned}\tag{2.1}$$

Les composantes de la déformation données par l'équation (2.1) ne peuvent pas être considérées comme indépendantes car elles sont en fonction de deux déplacements U et V , et donc la déformation doit satisfaire à une équation supplémentaire appelée l'équation de compatibilité.

Cette équation peut être formée par l'élimination de U , V à partir de l'équation (2.1), d'où:

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y} = 0\tag{2.2}$$

Avec tous les trois déformations données par l'équation (2.1) sont égales à zéro, nous devons intégrer ces équations pour obtenir les expressions suivantes:

$$\begin{aligned}
U &= a_1 - a_3 y \\
V &= a_2 + a_3 x \\
\theta &= \frac{1}{2} (V, x - U, y) \\
\theta &= a_3
\end{aligned} \tag{2.3}$$

Equation (2.3) donne les trois composantes des déplacements du corps rigide. Cet élément développé est de forme rectangulaire avec quatre nœuds et chaque nœud possède trois degrés de liberté (U, V, θ), ainsi le champ de déplacement doit contenir 12 constantes indépendantes. Après avoir utilisé trois (a_1, a_2, a_3) pour la représentation des composantes du corps rigide, il reste donc neuf constantes (a_4, a_5, \dots, a_{12}) pour exprimer le déplacement dû à la déformation de l'élément.

Celles-ci sont réparties entre les déformations en tant que:

$$\begin{aligned}
\varepsilon_x &= a_4 + a_6 y + a_8 x + a_{10} y^2 + 2a_{11} xy^3 \\
\varepsilon_y &= a_7 + a_8 x + 2a_9 y - a_{10} x^2 - 2a_{11} yx^3 \\
\gamma_{xy} &= 2a_5 + 2a_6 x + 2a_8 y + 2a_9 y + 2a_{10} (y - x) + 2a_{12} x
\end{aligned} \tag{2.4}$$

Les déformations données par équations (2.4) satisfaisaient l'équation de compatibilité (2.2). Les expressions données par les équations (2.4) sont assimilées à des équations en termes de U, V des équations (2.1) et les équations qui en résultent sont intégrés, pour donner :

$$\begin{aligned}
U &= a_4 x + a_5 y + a_6 xy + a_8 (y^2 / 2 + x^2 / 2) + a_9 y^2 + a_{10} (xy^2 + y^2) + a_{11} x^2 y^3 \\
V &= a_5 x + a_6 x^2 / 2 + a_7 y + a_8 xy + a_9 y^2 - a_{10} (x^2 y + x^2) - a_{11} x^3 y^2 + a_{12} x^2 \\
\theta &= -a_9 y - 2a_{10} (xy + (x + y)) - 3a_{11} x^2 y^2 + a_{12} x
\end{aligned} \tag{2.5}$$

Les fonctions finales de déplacement sont obtenues en additionnant les équations (2.3) et (2.5) pour obtenir

$$\begin{aligned}
U &= a_1 - a_3 y + a_4 x + a_5 y + a_6 xy + a_8 (y^2 / 2 + x^2 / 2) + a_9 y^2 + a_{10} (xy^2 + y^2) + a_{11} x^2 y^3 \\
V &= a_2 + a_3 x + a_5 x + a_6 x^2 / 2 + a_7 y + a_8 xy + a_9 y^2 - a_{10} (x^2 y + x^2) - a_{11} x^3 y^2 + a_{12} x^2 \\
\theta &= a_3 - a_9 y - 2a_{10} (xy + (x + y)) - 3a_{11} x^2 y^2 + a_{12} x
\end{aligned} \tag{2.6}$$

Les fonctions de déplacement de l'élément développé SBREDR données par l'équation (2.6) peuvent être écrites sous forme matricielle :

$$\{U\} = [C]\{A\} \quad (2.7)$$

Où U est le vecteur de déplacement nodal, A est le vecteur des paramètres constants $\{A_i\} = 1, \dots, 12$ et la matrice $[C]_{12 \times 12}$ de transformation est donnée en Annexe A.

2.2.3. Intégration numérique

L'utilisation de l'intégration analytique pour la construction de la matrice de rigidité des éléments à modèles en déformations et plus particulièrement pour les éléments de membrane jusqu'à un temps récent reste évidente, alors que l'intégration numérique a pour but de palier à plusieurs problèmes, dont on peut citer :

- L'intégration numérique permet une évaluation directe des caractéristiques des éléments courbes et complexes.
- La description simultanée de la géométrie et de la variation des déplacements par les mêmes fonctions de forme conduit à un effort de programmation réduit.
- Le fait d'avoir des bords courbes indique la nécessité d'avoir des maillages fins dans les régions où les côtés sont courbes. Cependant, dans certains cas l'utilisation d'un nombre réduit d'éléments complexes peut s'avérer inadéquate pour représenter correctement toutes les géométries d'un problème particulier.

Il s'agit de choisir, en fonction de la forme et du degré de l'interpolation de l'élément fini, une formule d'intégration et de définir, dans l'élément un réseau de points d'intégration. L'ensemble s'appelle le schéma d'intégration. Dans le domaine en forme de ligne, de quadrilatère et d'hexaèdre, l'intégration numérique de Gauss est la plus pratiquée, car elle minimise le volume des calculs. Rappelons ici qu'une intégration de Gauss d'ordre n_G (n_G points dans une direction) intègre exactement un polynôme de degré $2n_G - 1$.

Ici dans la construction de l'élément SBREDR on a utilisé le concept d'intégration numérique, avec la quadrature de Gauss.

2.2.4. Evaluation de la matrice de rigidité élémentaire $[K_e]$

La matrice de rigidité élémentaire $[K^e]$ peut être calculée par la formule :

$$[K^e] = [C^{-1}]^T \left(\int \int [Q]^T [D] [Q] dx dy \right) [C]^{-1} = [C^{-1}]^T [K_0] [C]^{-1} \quad (2.8)$$

La transformation de l'élément réel à l'élément de référence est assurée par la transformation suivante :

$$\begin{Bmatrix} \frac{\partial}{\partial \xi} \\ \frac{\partial}{\partial \eta} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \end{Bmatrix} = [J] \begin{Bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \end{Bmatrix} \quad (2.9)$$

Le déterminant de la matrice Jacobéenne doit être aussi évalué, car il est utilisé dans la transformation d'intégrale. En passant en variables locales nous aurons :

$$\int \int dx dy = \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} \det |J| d\xi d\eta \quad (2.10)$$

En pratique équations (2.10) sont évaluées numériquement, en utilisant la quadrature de Gauss.

Ainsi la matrice $[K_0]$ est numériquement évaluée, et puisque la matrice $[C]$ de l'élément développé n'est pas singulière, son inverse peut être également évalué numériquement et la matrice de rigidité élémentaire $[K^e]$ peut être obtenue par:

$$[K^e] = [C^{-1}]^T \left(\int_{-1}^1 \int_{-1}^1 [Q]^T [D] [Q] \det |J| d\xi d\eta \right) [C]^{-1} \quad (2.11)$$

Pour les problèmes en contrainte plane la matrice d'élasticité D s'écrit :

$$[D] = \frac{E}{(1-\nu^2)} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} \quad (2.12)$$

Pour les problèmes en déformation plane la matrice d'élasticité D s'écrit :

$$[D] = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} (1-\nu) & \nu & 0 \\ \nu & (1-\nu) & 0 \\ 0 & 0 & \frac{(1-2\nu)}{2} \end{bmatrix} \quad (2.13)$$

Équations (2.4) peuvent être écrites sous la forme matricielle par :

$$\{\varepsilon\} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = [Q][A] \quad (2.14)$$

Où chacun des ε et γ correspond respectivement à la déformation normale et de cisaillement et

$[Q]$ la matrice de déformation donnée par :

$$[Q] = [L][C] \quad (2.15)$$

Où $[L]$ est l'opérateur différentiel et la matrice de transformation $[C]$ sont donnés dans l'annexe A.

Ainsi la matrice de déformation est donnée par :

$$[Q] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & y & 0 & x & 0 & y^2 & 2xy^3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & x & 2y & -x^2 & -2x^3y & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 2x & 0 & 2y & 2y & 2(y-x) & 0 & 2x \end{bmatrix} \quad (2.16)$$

2.2.5. Conditions Axisymétriques

Dans le passage aux conditions axisymétriques, nous substituons respectivement x et y par r et z dans la matrice $[C]$, ainsi la matrice de déformation axisymétrique $[Q^*]$ de l'élément développé SBREDR dans ce cas sera exprimée par :

$$[Q^*] = [L^*][C] \quad (2.17)$$

Ou $[L^*]$ est l'opérateur différentiel défini par :

$$[L^*] = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial r} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{\partial}{\partial z} & \frac{\partial}{\partial r} \\ \frac{1}{r} & 0 \end{bmatrix} \quad (2.18)$$

Ainsi la matrice de déformation $[Q^*]$ est donnée par :

$$[Q^*] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & z & 0 & r & 0 & z^2 & 2rz^3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & r & 2z & -r^2 & -2r^3z & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 2r & 0 & 2z & 2z & 2(z-r) & 0 & 2r \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{r} & 0 & \frac{z}{r} & 0 & 1 & 0 & \frac{z^2}{r} & 2z^3 & 0 \end{bmatrix} \quad (2.19)$$

Et la matrice contrainte-déformation sera redéfinie par :

$$[D] = \frac{E(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1 & \frac{\nu}{1-\nu} & 0 & \frac{\nu}{1-\nu} \\ \frac{\nu}{1-\nu} & 1 & 0 & \frac{\nu}{1-\nu} \\ 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2(1-\nu)} & 0 \\ \frac{\nu}{1-\nu} & \frac{\nu}{1-\nu} & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.20)$$

2.3. Chargement axisymétrique 'sur 1 radian'

Le chargement ici est décrit pour le cas de l'élément SBREDR avec 4 nœuds figure (2.2).

Les forces nodales équivalentes sont données par

$$F_1 = \frac{r_1 - r_0}{6} (2r_0 + r_1) \quad (2.21)$$

$$F_2 = \frac{r_1 - r_0}{6} (r_0 + 2r_1)$$

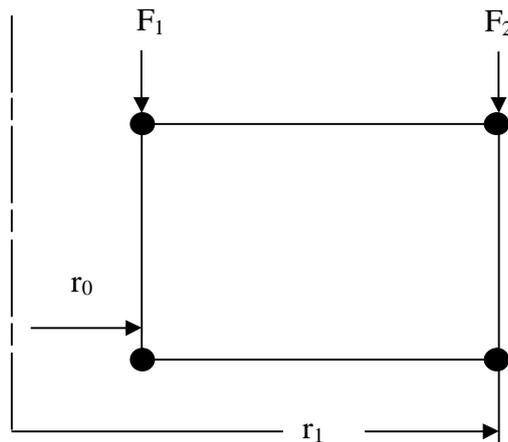


Figure 2.2 : Élément SBREDR sous chargement

2.4. Calcul des contraintes

Pour ce modèle au niveau des nœuds le champ de déplacement est totalement continu sur toute la structure, contrairement au champ de contrainte qui est discontinu d'un élément à un autre. La relation contrainte – déformation est donnée par :

$$[\sigma] = [D][Q][C]^{-1} \{U_i\} \quad (2.22)$$

2.5. Conclusion

Dans ce chapitre nous avons développé un nouvel élément fini basé sur l'approche en déformation destiné pour l'analyse linéaire et matériellement non-linéaire des structures membranaires. L'élément développé est avec trois degrés de liberté dans chaque nœud de coin (deux translations et une rotation dans le plan). Il satisfaisait les équations de compatibilité, et il est basé sur les fonctions assumées pour les différentes composantes de la déformation. Les fonctions de déplacement de cet élément satisfaisaient la bonne représentation du MCR. L'intégration numérique pour la construction de la matrice de rigidité élémentaire de cet élément est utilisée dans cette formulation.

CHAPITRE 3

VALIDATION NUMERIQUE DU NOUVEL ELEMENT SBREDR EN LINEAIRE

Chapitre 3. VALIDATION NUMERIQUE DU NOUVEL ELEMENT FINI SBREDR EN LINEAIRE.

3.1. Cas de tests numériques en linéaire

Divers exemples de problèmes d'élasticité plane sont présentés pour valider le niveau de précision et l'efficacité des calculs obtenus avec l'élément développé SBREDR. Le comportement de l'élément proposé est numériquement étudié ici par comparaison avec:

- Q8: élément quadrilatère à 8 nœuds avec 16 degrés de liberté.
- LST (T6): élément triangulaire avec déformation linéaire avec six nœuds et 12 ddl.
- SBRIEIR: élément à modèle en déformation rectangulaire à 4 nœuds avec rotation dans le plan avec 12 ddl [Sabi.85a]
- Formulation type Mixed : éléments avec rotation dans le plan [Ibra.90].
- Kugler: élément avec rotation dans le plan [Kugl.10].
- SBRIE and SBRIE1: éléments à modèles en déformation, rectangulaires à 8 ddl et 4 nœuds [Sabi.95a].

3.1.1. Poutre console élancée de Mac Neal

Le problème d'une poutre console élancée Figure 3.1 a été traité par Mac-Neal et Harder [MacN.85].

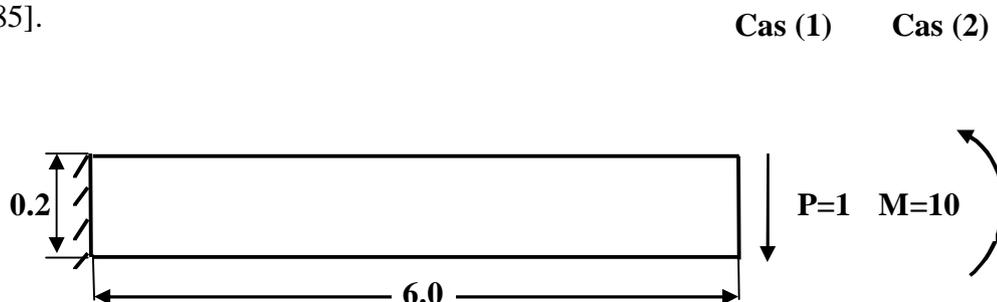


Figure 3.1 : Poutre console élancée de Mac-Neal soumise à (1) cisaillement pur et (2) flexion pure

La poutre est soumise à une force concentrée à l'extrémité libre ($P = 1$) et à un moment de flexion pure ($M = 10$). Elle a un module de Young $E = 10^7$, le coefficient de poisson $\nu = 0,3$, et une épaisseur $t = 0,1$.

charge cas (1): Force de cisaillement à l'extrémité $P=1$						
Maillage	LST(T6)	Q8	SBRIE	SBRIE1	SBRIEIR	SBREDR
6 x 1	0.9830	0.9868	0.9035	0.9035	0.9035	0.9633
12 x1	0.9930	0.9933	0.9083	0.9083	0.9083	0.9984
Solution de reference			1,000 (0.1081)			

Tableau 3.1 : Déflexion Normalisée de la poutre console élancée de MacNeal (cisaillement pure).

charge cas (2): moment de flexion pure $M=10$						
Maillage	LST(T6)	Q8	SBRIE	SBRIE1	SBRIEIR	SBREDR
6 x 1	0.9932	0.9919	0.91	0.91	0.91	0.9730
12 x1	0.9967	0.9962	0.91	0.91	0.91	1.000
Solution de reference			1,000 (0.270)			

Tableau 3.2 : Déflexion Normalisée pour la poutre console élancée de MacNeal (flexion pure).

Les résultats de la déflexion normalisée à l'extrémité libre présentés dans les tableaux (3.1) et (3.2) montrent que:

- L'élément SBREDR donne de meilleurs résultats que les éléments, SBRIEIR, SBRIE, et SBRIE1 et il est plus précis que l'élément Q8 et l'élément T6.

- L'élément développé a atteint une convergence excellente à la solution de référence dans les deux problèmes (force de cisaillement et de flexion pure).
- Le SBREDR utilise moins de degré de liberté que le Q8 et le T6 et par conséquent, il est plus économique

3.1.2. Poutre console courte d'Allman

Ce test est un outil de validation des éléments membranaires dans les problèmes de flexion. La poutre console courte est soumise à une charge verticale uniforme (avec résultante W) comme représentée sur la Figure (3.2), et elle est modélisée par 4 éléments rectangulaires.

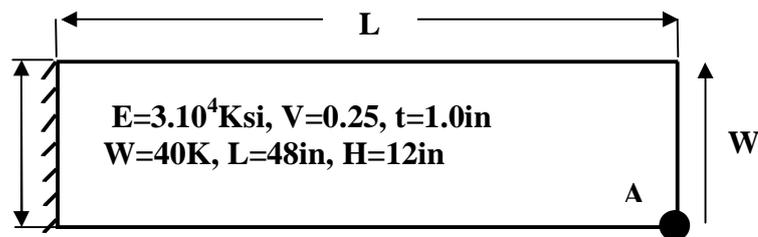


Figure 3.2: Poutre console d'Allman

Les résultats du déplacement à l'extrémité libre présentés dans le tableau (3.3) montrent que la précision de l'élément développé est encore bonne. En raison du petit maillage, sa précision est légèrement inférieure à celle du Q8 et du T6, mais elle est très acceptable.

Dans le tableau (3.4) plusieurs rapports d'aspect (a / b) sont considérés dans cette étude. L'élément SBREDR à une convergence meilleure que celle d'Allman [Allm.88a] vers la solution de référence [Timo.51] pour le déplacement vertical normalisé au point A.

Déplacement Normalisé au point A						
Maillage	Q8	LST(T6)	SBRIE	ALLMAN	SBRIEIR	SBREDR
4x1	0.3495	0.3480	0.3293	0.3027	0.3300	0.3412
Solution de référence [Timo.51]				1,000 (0.3553)		

Tableau 3.3 : Déplacement vertical au point A

a/b	Maillage	V_A/V_{exact} déplacement Normalisé au point A	
		SBREDR	ALLMAN
1	8x2	0.985	0.95
2	4x2	0.964	0.91
2.667	3x2	0.948	0.87
4	2x2	0.912	0.77
8	2x1	0.75	/
solution de référence [Timo.51] $V_A = (PL^3/3EI) + ((4+5\nu) PL)/2EH$ 1,000 (0.3553)			

Tableau 3.4 : Déplacement vertical normalisé au point A

3.1.3. Flexion plane d'une poutre console encastree

L'objectif de ce problème est de calculer la déflexion V_A de l'extrémité libre d'une poutre cantilever, avec section transversale uniforme, soumise à une charge verticale uniforme P_y avec le module de Young $E = 10^7$, le coefficient de Poisson $\nu = 0,3$ comme indiqué dans la Figure (3.3).

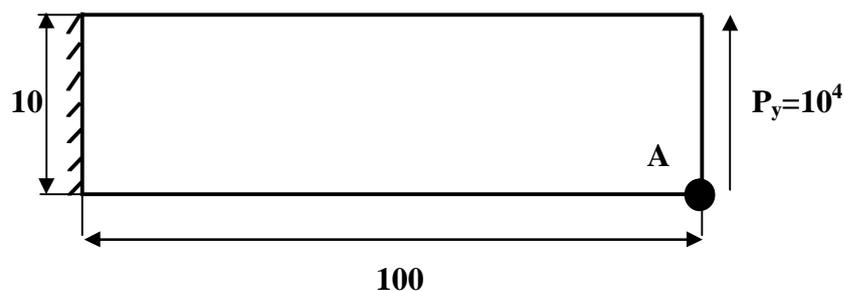


Figure 3.3 : Poutre console sous chargement vertical uniforme

Ce problème a été traité par Batoz dans la référence [Bato.90] pour tester les performances des éléments CST, LST, Q4, Q4WT [Wils.73 ; Tayl.76], Q4PS [Pian.84] et l'élément Q8. Ayad dans [Ayad.93] a fait une étude similaire pour tester la capacité de deux nouveaux éléments finis FRQ, et FRT (Fiber rotation :Triangle et quadrilatéral), qui sont basés sur le concept "fibre plane rotatoire".

Maillage	Elements					
	FRQ	Q8	LST(T6)	CST(T3)	SBRIEIR	SBREDR
	RI:2×2	EI:3×3	IE:3HP	IE:1HP	AI	EI:4×4
1x1	2.76* (12)**	3.03 (16)	3.00 (18)	0.05 (8)	2.75 (12)	2.78 (12)
2x1	3.44 (18)	3.70 (26)	3.70 (30)	0.13 (12)	3.43 (18)	3.52 (18)
3x1	3.56 (24)	3.84 (36)	3.84 (42)	0.25 (16)	3.56 (24)	3.74 (24)
Theorie des poutres	$V_A = 4,03$					
	* V_A déplacement vertical en A; EI: intégration exacte; AI: intégration analytique; HP point hamper; ** TNDDL: nombre of degrés de liberté Total					

Tableau 3. 5 : Déplacement V_A de la poutre en flexion plane

Les résultats présentés dans le tableau 3.5 montrent que:

- L'élément actuel donne de meilleurs résultats que les éléments FRQ, SBRIEIR et CST.
- Les résultats de SBREDR sont similaires à ceux obtenus par les éléments Q8 et T6,

mais ces derniers éléments utilisent plus de degrés de liberté.

3.1.4. Poutre console encastree simple

Ce problème a été traité dans les références [Kugl.10 ; Made.12 ; Ibra.90 ; Tayl.85] dans lequel une poutre modélisée par 6 éléments rectangulaires avec un module de Young $E = 100$, coefficient de poisson $\nu = 0$, est soumise à deux types de chargement différents : une force $P = 1$, et un moment $M = 0,5$, comme il est montré dans la Figure (3.4). Le déplacement vertical et la rotation au point B sont calculés dans l'exemple numérique.

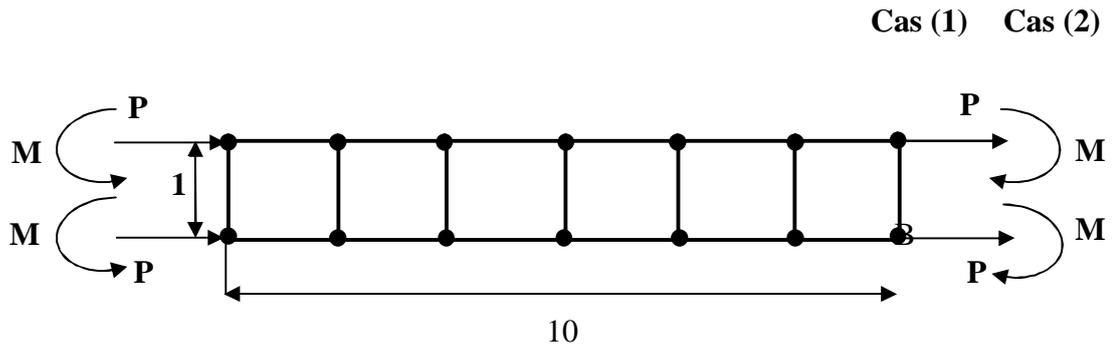


Figure 3.4 : Poutre console soumise à deux différents chargements (maillage 6×1)

Les résultats présentés dans le tableau (3.6) montrent que l'élément développé donne la solution exacte pour les deux cas de charges. Les résultats en termes de rotations dans le plan montrent une amélioration significative comparés avec ceux de [Ibra.90 ; Tayl.85].

Formulations / éléments	Cas de charge	Déplacement Vertical	Rotation au point B
Type Mixte [Ibra. 90]	(1)	1.5000	0.6000
	(2)	1.5000	0.6207
Déplacement Type [Ibra.90]	(1)	1.5000	0.6000
	(2)	1.5000	0.6207
Taylor et Simo [Tayl.85]	(1)	1.5000	1.2000
	(2)	1.5000	2.1898
SBREDR	(1)	1.5000	0.6000
	(2)	1.5000	0.6000
SBRIER [Sabi. 85]	(1)	1.5000	0.6000
	(2)	1.5000	0.6000
SBRIE [Sabi. 95]	(1)	1.5000	/
	(2)	1.5000	/
Q8	(1)	1.5000	/
	(2)	1.5000	/
LST (T6)	(1)	1.5000	/
	(2)	1.5000	/
Kugler [Kugl.10]	(1)	1.5000	0.6000
	(2)	1.5101	0.6000
Solution de reference		1.5000	0.6000

Tableau 3.6: Déplacement vertical et rotation au point B de la poutre

3.1.5. Tube cylindrique épais sous pression

Cet exemple est utilisé comme un problème axisymétrique de référence. Un tube cylindrique creux de rayon intérieur a et un rayon extérieur b est soumis à une pression interne $P = 40$. La section transversale de ce tube cylindrique épais est montrée dans la Figure (3.5).

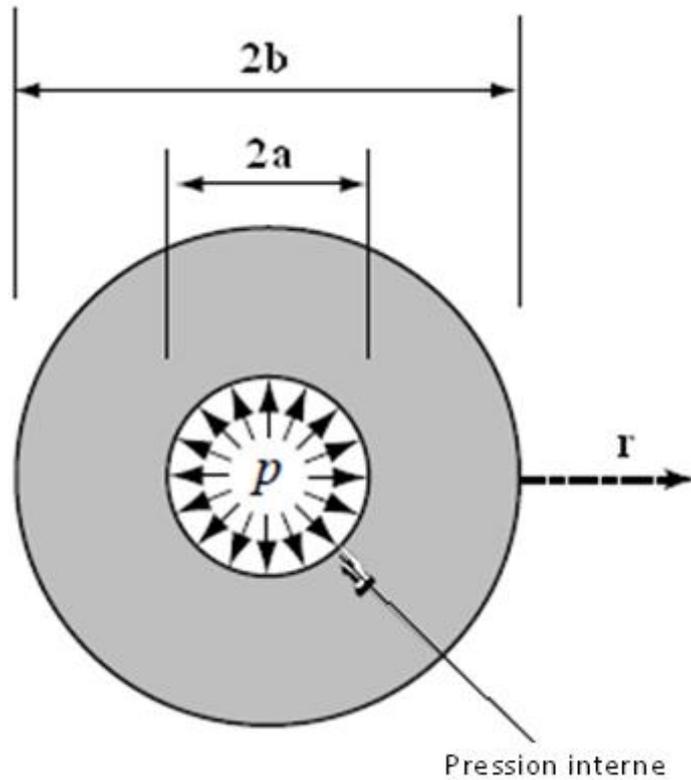


Figure 3.5 : Coupe transversale de tube cylindrique épais sous une pression interne

Le tube se prolonge indéfiniment le long de l'axe z et il est dans un état de déformation plane le long de cette direction avec un module de Young $E = 1000$, le coefficient de poisson $\nu = 0,3$, $a = 4$ et $b = 10$. Une tranche de l'épaisseur d est extraite et discrétisée comme le montre la Figure (3.6).

Les résultats montrés dans la figure (3.7) évaluent les déplacements des nœuds de la structure maillée d'une tranche du cylindre.

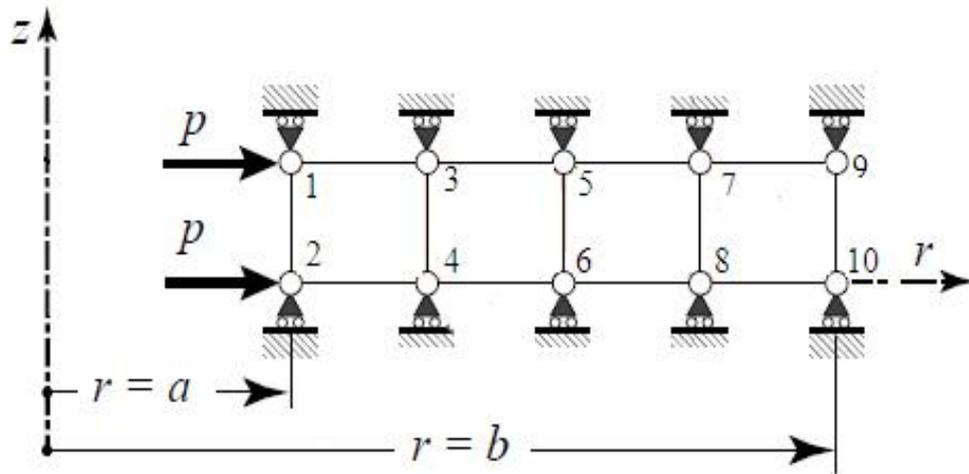


Figure 3.6 : Maillage d'une tranche de tube cylindrique épais

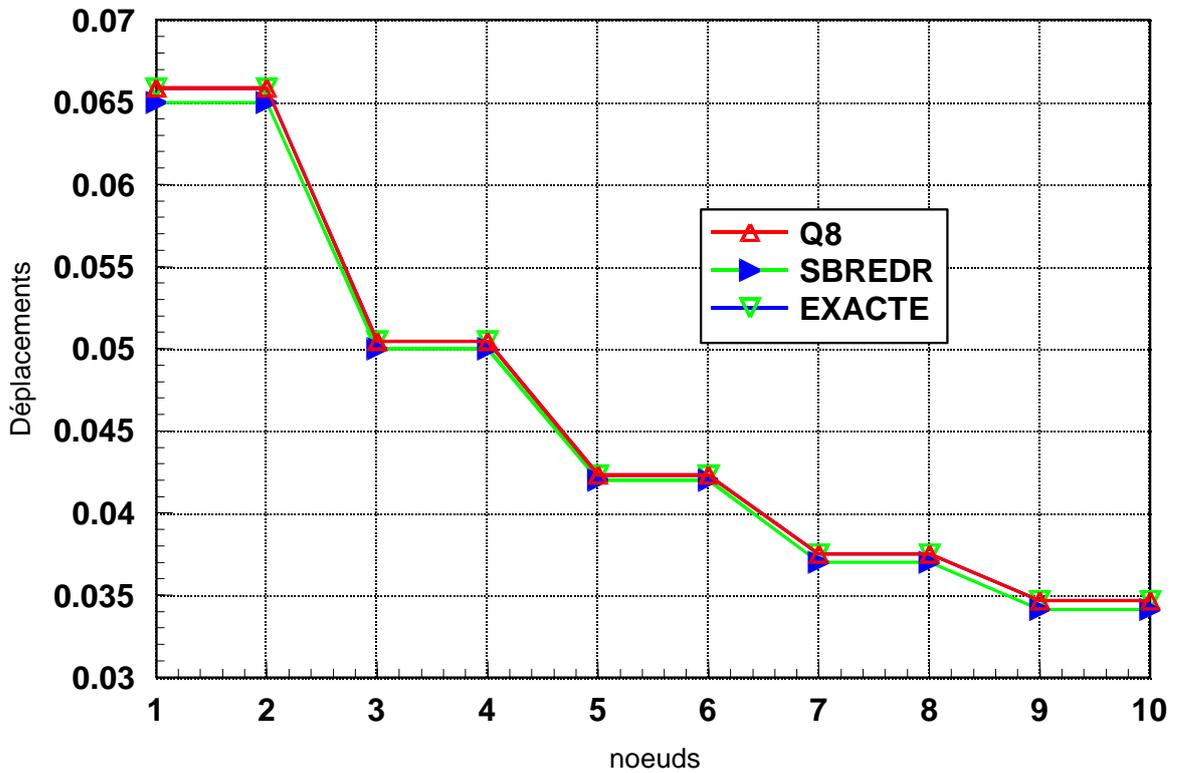


Figure 3.7 : Cylindre épais sous pression : solutions nodales calculées et exacte

(Maillage 4×1)

Les résultats représentés sur la Figure (3.7) montrent les bonnes performances de l'élément développé. Ces résultats sont en bon accord avec celles de l'élément Q8 et de la solution exacte donnée dans [Timo.51]. En conclusion, on peut constater que l'élément SBREDR est très fiable pour ce type de problèmes axisymétriques.

3.2. Conclusion

Dans ce chapitre on a montré la bonne convergence ainsi que la bonne précision de l'élément développé à travers une série d'exemples numériques choisis dans la littérature. L'exactitude de l'élément dans les problèmes dominés par la flexion pure et le cisaillement pure dans les cas linéaire est très remarquable comparée avec celles des éléments Q8 et T6. En effet l'élément développé est similaire à ces deux éléments dans tous les autres tests, mais avec un temps de calcul moins grand. Les résultats du nouvel élément sont en bon accord aussi avec celles des résultats analytiques dans tous les tests ce qui montre son efficacité dans l'analyse linéaires des structures.

CHAPITRE 4

VALIDATION NUMERIQUE DE L'ELEMENT SBRDER EN NON-LINEAIRE

Chapitre 4. VALIDATION NUMERIQUE DE L'ELEMENT SBREDR EN NON LINEAIRE

Le contenu théorique de ce paragraphe résulte d'une petite synthèse des références consultées suivantes: [Smit.88], [Smit.04] ; [Owen.86].

4.1. Introduction

Dés le début du 19^{ème} siècle, de nombreuses expériences sur les matériaux ont permis de mettre en évidence le seuil de la plasticité ainsi que sa variabilité en fonction du processus de fabrication. La théorie de l'elasto-plasticité s'est mise en place à partir de la deuxième moitié du 19^{ème} siècle. Grace au progrès des méthodes numériques, l'application pratique de cette théorie sur des structures complexes n'est devenue possible que dans les années 1980.

Les lois fondamentales qui régissent le comportement du matériau elasto-plastique des solides en 2D doivent être présentées avant que les aspects numériques du problème peuvent être considérés à la fin de ces nouveaux concepts, comme le potentiel plastique et la condition de normalité qui doivent être introduits.

Dans l'analyse elasto-plastique, le problème est encore compliqué par la dépendance de la déformation plastique sur l'histoire du matériau en termes (contrainte-déformation). Dans cette étude, trois critères différents de rupture sont employés. Les critères de Tresca et Von Mises, qui approximent exactement le comportement plastique des métaux, sont considérés, et le critère de Mohr Coulomb, qui est applicable aux roches et aux sols en béton, est utilisé. Dans la pratique de l'analyse par éléments finis deux principaux types de procédure de solution peuvent être adoptés pour modéliser la non linéarité matérielle. La première approche est celle de la rigidité constante, et la deuxième avec rigidité variable voir figure (4.1, 4.2). Dans ce travail de thèse la méthode de rigidité constante est adoptée pour le bien de sa simplicité. L'habituelle matrice de

rigidité élastique globale dans une telle analyse est formée seule. La convergence est dite de se produire lorsque les contraintes générées par les charges satisfaisaient certains critères de rendement selon les tolérances prescrites. Le vecteur de charges à chaque itération se compose de charges externes et de charges auto-équilibrantes. Cette analyse utilise deux méthodes pour générer les chargements du corps: la méthode viscoplastique (nommée déformation initiale) et la méthode de contrainte initiale pour prédire la réponse au chargement d'un matériau élastique parfaitement plastique.

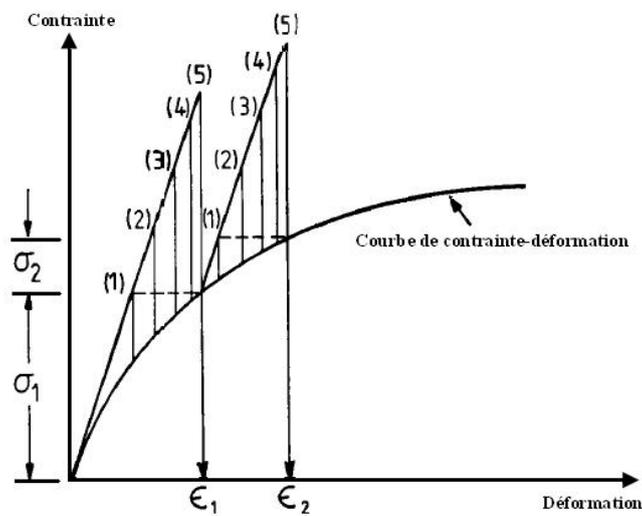


Figure 4.1 : Méthode de rigidité constante

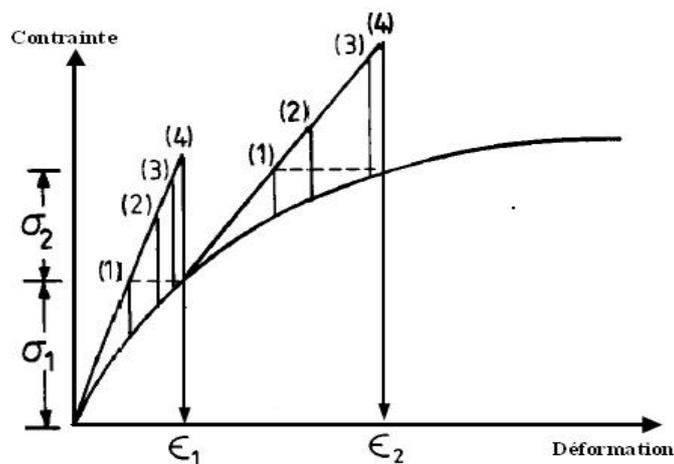


Figure 4.2 : Méthode de rigidité variable ou (tangente)

Le nombre entre parenthèses dans les figures (4.1, 4.2) indique le nombre d'itérations nécessaire pour la convergence. Dans l'ordre de formuler une théorie qui modélise les déformations elasto-plastiques, trois exigences doivent être remplies :

- une relation explicite entre contrainte et déformation doit être formulée pour décrire le comportement du matériel sous conditions élastiques, avant le début de la déformation plastique.
- le critère de rendement doit être postulé, indiquant le niveau de contrainte au cours de laquelle l'écoulement plastique commence.
- une relation entre contrainte et déformation doit être mise au point, quand la déformation est constituée de composantes à la fois élastiques et plastiques.

Avant le début de l'écoulement plastique, la relation entre la contrainte et la déformation est donnée par l'expression linéaire élastique :

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl} \varepsilon_{kl} \quad (4.1)$$

Où σ_{ij} et ε_{kl} sont respectivement les composantes de la contrainte et déformation et C_{ijkl} est le tenseur des constantes élastiques qui pour un matériau isotropique à la forme explicite :

$$C_{ijkl} = \lambda \delta_{ij} \delta_{kl} + \mu \delta_{ik} \delta_{jl} + \mu \delta_{il} \delta_{jk} \quad (4.2)$$

Où λ et μ sont les constantes de Lamé et δ_{ij} est le delta Kronecker défini par :

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{if } i = j \\ 0 & \text{if } i \neq j \end{cases} \quad (4.3)$$

4.2. Seuil de plasticité

Bien que les relations constitutives non linéaires élastiques ont été appliquées dans l'analyse par éléments finis, la principale caractéristique physique du comportement du matériau non linéaire est généralement l'irrécouvrabilité de la déformation. Un cadre pratique mathématique pour décrire ce phénomène se trouve dans la théorie de la plasticité. La plus simple loi contrainte-déformation de ce type qui pourrait être implémentée dans une analyse par éléments finis

implique un comportement de matériel élastique parfaitement plastique figure (4.3). il est commode d'introduire une surface de charge dans l'espace des contraintes principales qui séparent les états de contrainte donnant lieu à des déformations élastiques et plastiques. Algébriquement, les surfaces sont exprimées en termes de fonctions de charge ou de (rupture) F_c . Cette fonction, dispose d'unités de contrainte, de la résistance des matériaux et des combinaisons invariantes des composantes de contraintes. La fonction F est désignée de telle sorte qu'elle est négative à l'intérieur de la surface de rupture et zéro sur la surface. La valeur positive de F_c implique que les contraintes sont situées à l'extérieur de la surface de rupture qui est illégales et qui doivent être redistribuées par le processus itératif.

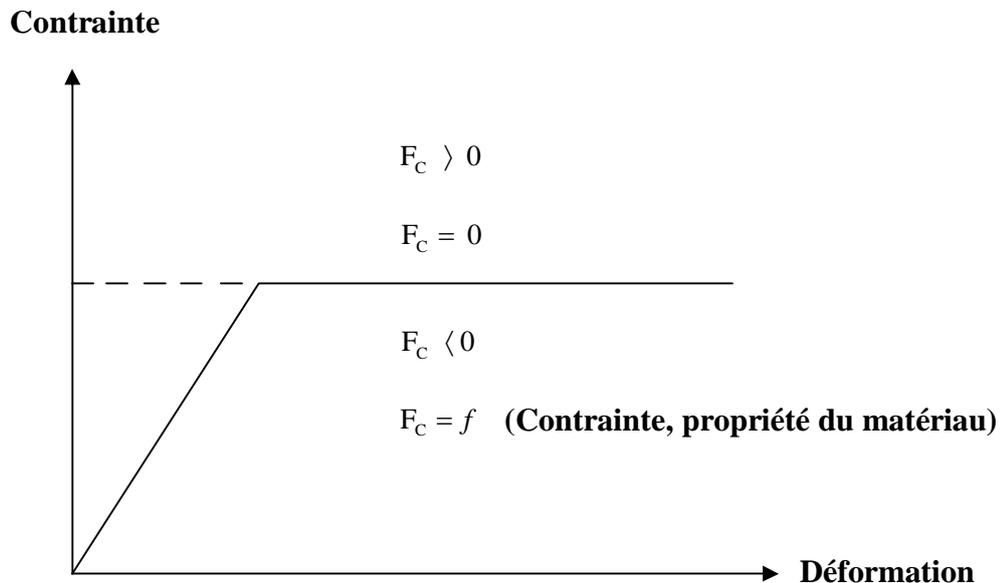


Figure.4.3 : Comportement élastique-parfaitement plastique (contrainte-déformation)

Au cours de la déformation plastique, le matériau peut s'écouler d'une manière associée, le vecteur de l'incrément de déformation plastique peut être normal à la surface de charge ou d'échec. Alternativement, la normalité peut ne pas exister et l'écoulement peut être non associé.

L'écoulement associé conduit à diverses simplifications mathématiques attrayantes et, lorsque allié aux critères de Von-Mises ou de Tresca, prédit avec précision un changement de volume plastique nul lors de rupture pour les argiles non drainées. Pour les matériaux de friction, dont

l'état ultime est décrit par le critère de Mohr-coulomb, l'écoulement associé entraîne une expansion volumétrique physiquement irréaliste ou une dilatation durant la rupture. Dans de tels cas, des règles de flux non associés peuvent être préférés dans lesquels la déformation plastique est décrite par une fonction de potentiel plastique appelée Q . Cette fonction Q toujours géométriquement similaire à la fonction de rupture F_c mais avec l'angle de friction ϕ remplacé par l'angle de dilatation ψ .

4.3. Invariants de contrainte

Le tenseur de contrainte cartésien est une représentation utilisée en mécanique des milieux continus pour caractériser l'état de contrainte, c'est-à-dire les efforts intérieurs mis en jeu entre les portions déformées du milieu. Ce tenseur de contrainte est donné par :

$$\begin{bmatrix} \sigma_x & \sigma_y & \sigma_z & \tau_{xy} & \tau_{yz} & \tau_{zx} \end{bmatrix}^T \quad (4.4)$$

Ce tenseur est équivalent aux trois contraintes principales agissant dans les plans orthogonaux :

$$\begin{bmatrix} \sigma_1 & \sigma_2 & \sigma_3 \end{bmatrix}^T \quad (4.5)$$

L'espace des contraintes principales est obtenu en traitant les contraintes principales en coordonnées tridimensionnelles et un tel complot représente un moyen utile de définir la contrainte agissante en un point. Il convient de noter que, bien que l'espace des contraintes principales défini l'ampleur des contraintes principales, aucune indication n'est donnée sur leur orientation dans l'espace physique. La définition d'un point dans l'espace des contraintes principales avec les coordonnées $(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$ est donnée par les trois invariants:

$$s = \frac{1}{\sqrt{3}}(\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z) \quad (4.6)$$

$$t = \frac{1}{\sqrt{3}}[(\sigma_x - \sigma_y)^2 + (\sigma_y - \sigma_z)^2 + (\sigma_z - \sigma_x)^2 + 6\tau_{xy}^2 + 6\tau_{yz}^2 + 6\tau_{zx}^2]^{\frac{1}{2}} \quad (4.7)$$

$$\theta = \frac{1}{3} \arcsin\left(\frac{-3\sqrt{6J_3}}{t^3}\right) \quad (4.8)$$

Ou

$$J_3 = S_x S_y S_z - S_x \tau_{yz}^2 - S_y \tau_{zx}^2 - S_z \tau_{xy}^2 + 2\tau_{xy} \tau_{yz} \tau_{zx} \quad (4.9)$$

Et

$$S_x = (2\sigma_x - \sigma_y - \sigma_z)/3$$

$$S_y = (2\sigma_y - \sigma_z - \sigma_x)/3 \quad (4.10)$$

$$S_z = (2\sigma_z - \sigma_x - \sigma_y)/3$$

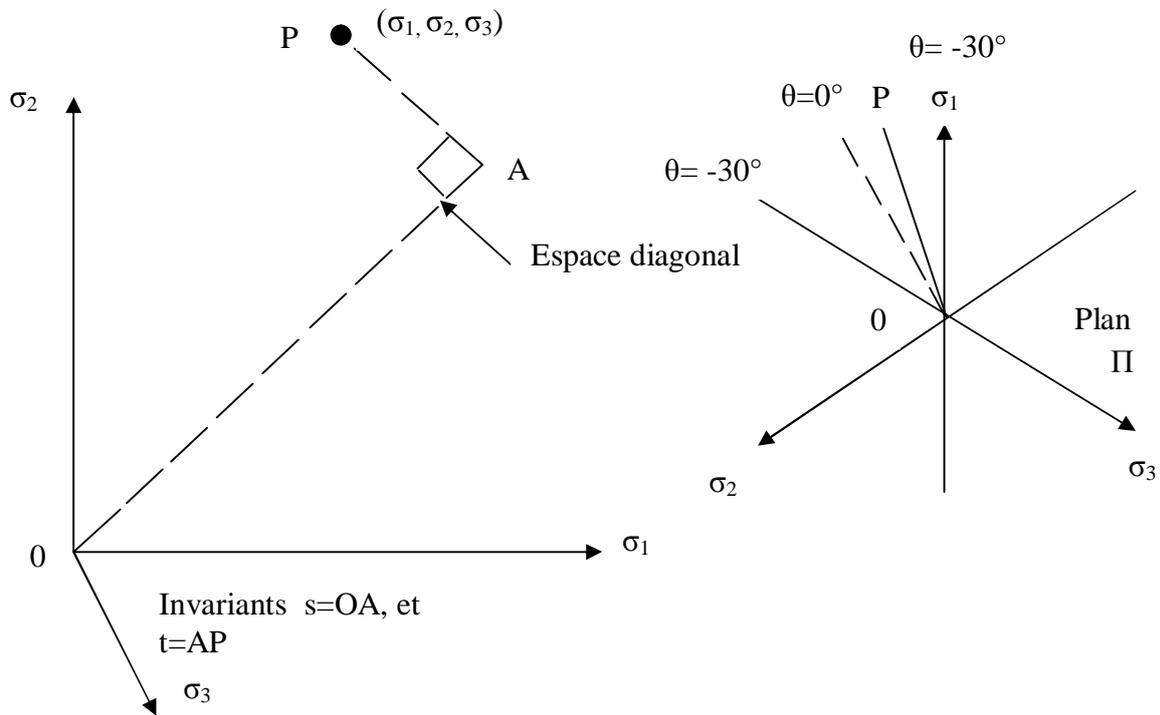


Figure 4.4 : Espace des contraintes principales

La figure (4.4) montre que S donne la distance de l'origine jusqu'au plan π dans lequel se trouve le point de contrainte et t représente la distance perpendiculaire du point de contrainte à partir de l'espace diagonal. L'angle de Lode θ est une mesure de la position angulaire du point de contrainte dans le plan.

Notons ici que dans plusieurs applications de la mécanique des sols l'équation (4.7) sera simplifiée car $\tau_{yz} = \tau_{zx} = 0$

La contrainte déviatorique est donnée par :

$$\bar{\sigma} = t\sqrt{3/2} = \frac{[(\sigma_x - \sigma_y)^2 + (\sigma_y - \sigma_z)^2 + (\sigma_z - \sigma_x)^2 + 6\tau_{xy}^2 + 6\tau_{yz}^2 + 6\tau_{zx}^2]^{\frac{1}{2}}}{\sqrt{2}} \quad (4.11)$$

Ainsi la contrainte moyenne est donnée par :

$$\sigma_M = \frac{s}{\sqrt{3}} = \frac{(\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z)}{3} \quad (4.12)$$

La relation existante entre les contraintes principales et les invariants de contrainte est donnée par :

$$\begin{aligned} \sigma_1 &= \sigma_M + \sqrt{\frac{2}{3}}\sigma \sin\left(\theta - \frac{2\pi}{3}\right) \\ \sigma_2 &= \sigma_M + \sqrt{\frac{2}{3}}\sigma \sin\theta \\ \sigma_3 &= \sigma_M + \sqrt{\frac{2}{3}}\sigma \sin\left(\theta + \frac{2\pi}{3}\right) \end{aligned} \quad (4.13)$$

4.4. Critères de plasticité (Rupture)

Le critère de rupture (plasticité) détermine le niveau de contrainte à une déformation plastique qui commence et peut s'écrire sous la forme générale :

$$f(\sigma_{ij}) = K(k) \quad (4.14)$$

Où f est une fonction et k le paramètre du matériau à déterminer expérimentalement.

4.4.1. Critère de Von Mises

Dans la mesure où la trace du tenseur des contraintes n'intervient pas, le critère le plus simple est celui qui n'utilise que le second invariant du déviateur de contraintes, ou encore t. Ce critère prend la forme d'un cylindre droit circulaire se trouvant le long de l'espace diagonal. Figure (4.5).

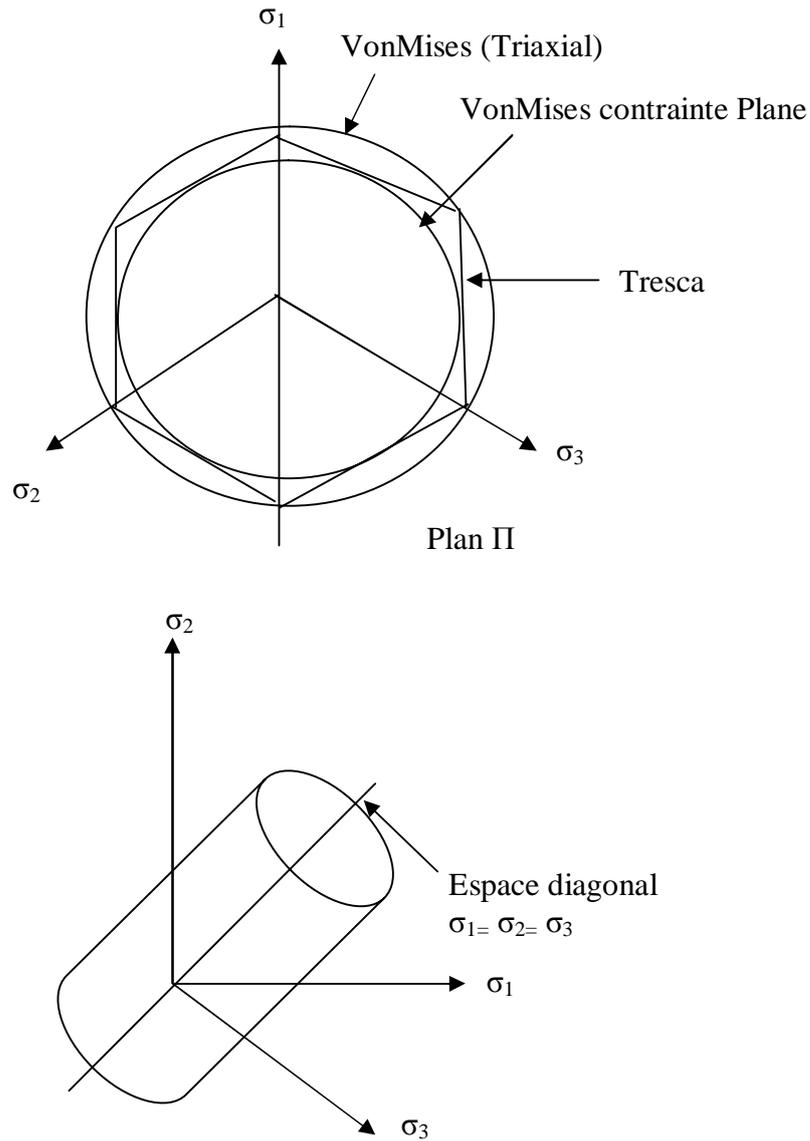


Figure 4.5 : Critère de Von Mises et de Tresca

Von Mises suggère que la phase de rupture plastique se produit lorsque t atteint une valeur critique, ou

$$t = K(k) \quad (4.15)$$

Dans lequel k est le paramètre du matériau à déterminer.

Pour les problèmes en déformation plane et pendant la rupture plastique nous avons

$$\sigma_2 = \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2} \quad (4.16)$$

Ainsi le critère de VonMises s'écrit alors

$$F_C = \bar{\sigma} - \sigma_y \quad (4.17)$$

Ou σ_y est la contrainte limite et $\bar{\sigma}$ est l'invariant de contrainte déviatorique.

Pour le cas du sol

$$F_C = \bar{\sigma} - \sqrt{3}c_u \quad (4.18)$$

Ou C_u représente la cohésion non drainée du sol.

Sous conditions triaxiales et lorsque $\sigma_2 = \sigma_3$ on a :

$$F_C = \bar{\sigma} - 2c_u \quad (4.19)$$

4.4.2. Critères de Mohr-Coulomb et Tresca

Dans l'espace des contraintes principales ce critère prend la forme d'un cône hexagonal irrégulier comme il est montré dans la figure (4.6).

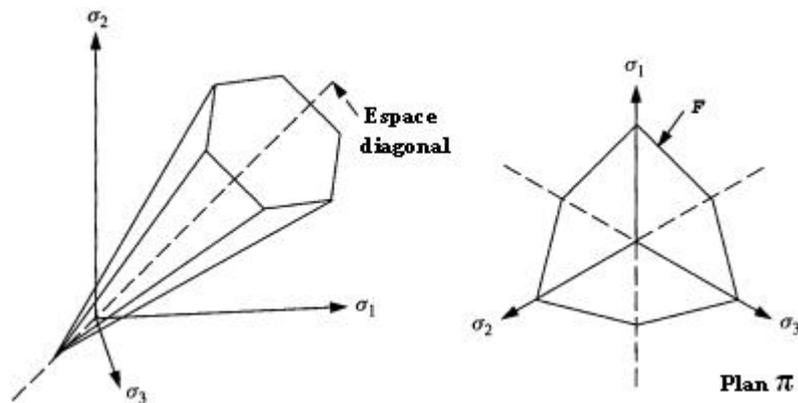


Figure 4.6 : Critère de rupture de Mohr-Coulomb

Afin d'en tirer la forme invariante de ce critère, il faut d'abord être écrite en termes de contraintes principales de la géométrie du cercle de Mohr ; ainsi

$$\frac{\sigma_1 + \sigma_3}{2} \sin \phi - \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} - c_u \cos \phi = 0 \quad (4.20)$$

ϕ : Angle de frottement interne du sol

Substituons σ_1 et σ_3 des équations (4.13) donnent la fonction :

$$F_C = \sigma_m \sin \phi + \bar{\sigma} \left(\frac{\cos \theta}{\sqrt{3}} - \frac{\sin \theta \sin \phi}{3} \right) - c_u \cos \phi \quad (4.21)$$

En mettant $\phi = 0$ dans l'équation (4.21) on peut obtenir le critère de Tresca ; ainsi

$$F_C = \frac{\bar{\sigma} \cos \theta}{\sqrt{3}} - c_u \quad (4.22)$$

4.5. Matrice Constitutive (méthode des contraintes initiales)

La relation incrémentale de la déformation et la contrainte peut être formulée comme suit :

$$d\sigma = D_{ep} d\varepsilon \quad (4.23)$$

Où: D_{ep} est la matrice elasto-plastique, $d\sigma$ est le vecteur d'incrément de contrainte, et $d\varepsilon$ est composé de composantes d'incrément élastiques plastiques ou ;

$$d\varepsilon = d\varepsilon^e + d\varepsilon^p \quad (4.24)$$

Pendant ce temps, l'augmentation de contrainte peut être déterminée par la loi de Hook en tant que :

$$d\sigma = D_e d\varepsilon^e \quad (4.25)$$

Où D_e est la matrice d'élasticité et l'équation (4.23) peut être réécrite comme :

$$d\sigma = D_e (d\varepsilon - d\varepsilon^p) \quad (4.26)$$

La déformation plastique est proportionnelle au gradient de contrainte d'une quantité appelée le potentiel plastique Q ainsi

$$d\varepsilon^p = d\lambda \left(\frac{\partial Q}{\partial \sigma} \right) \quad (4.27)$$

Où $d\lambda$ est un scalaire non négatif dans l'histoire de chargement plastique.

Substituons équation (4.27) dans l'équation (4.26) donne

$$d\sigma = D_e \cdot \left(d\varepsilon - d\lambda \frac{\partial Q}{\partial \sigma} \right) \quad (4.28)$$

Comme le point de contrainte dans la phase plastique est sur la surface de charge, il faut

$$dF_c(\sigma) = \left(\frac{\partial F_c}{\partial \sigma} \right)^T \cdot d\sigma = 0 \quad (4.29)$$

Substituons équation (4.28) dans l'équation (4.29) conduit à

$$D_p = \left[\frac{D_e \cdot \left(\frac{\partial Q}{\partial \sigma} \right) \cdot \left(\frac{\partial F_c}{\partial \sigma} \right)^T \cdot D_e}{\left(\frac{\partial F_c}{\partial \sigma} \right)^T \cdot D_e \cdot \left(\frac{\partial Q}{\partial \sigma} \right)} \right] \quad (4.30)$$

Ou D_p est la matrice plastique

Les chargements du corps "F_{ib}" dans le processus de redistribution des contraintes sont reformées à chaque itération en additionnant l'intégrale ci dessous de tous les éléments, ainsi

$$F_b^i = \sum_{elements} \iint B^T D_p (d\varepsilon)^i dx dy \quad (4.31)$$

4.6. Méthode Visco-plastic (méthode des déformations initiales)

Le chargement des corps "F_{ib}" accumulés à chaque pas de temps et à chaque étape de charge, en sommant les intégrales suivantes pour tous les éléments :

$$F_b^i = F_b^{i-1} + \sum_{elements} \iint B^T D_e (d\varepsilon^{vp})^i dx dy \quad (4.32)$$

Ou

B est la matrice de déformation et D_e la matrice d'élasticité, et $(d\varepsilon^{vp})^i$ est l'incrément de déformation viscoplastique, et il est donné par la multiplication du taux de la déformation viscoplastique par un pas de temps comme suit:

$$(d\varepsilon^{vp})^i = dt \dot{\varepsilon}^{vp}{}^i \quad (4.33)$$

Ou dt est donné pour chaque critère comme

Critère de VonMises

$$dt = 4(1 + \nu) / 3E \quad (4.34)$$

Critère de Mohr-Coulomb

$$dt = 4(1 + \nu)(1 - 2\nu) / (1 - 2\nu + \sin^2 \phi) \quad (4.35)$$

Et $(\dot{\varepsilon}^{vp})$ est la déformation viscoplastique donnée par:

$$(\dot{\varepsilon}^{vp}) = F \left\{ \frac{\partial Q}{\partial \sigma} \right\} \quad (4.36)$$

Ou F est la fonction de rupture (ou de charge) et $\left\{ \frac{\partial Q}{\partial \sigma} \right\}$ sont les dérivées de la fonction du potentiel plastique Q tout en respectant les contraintes et qui est donnée en référence [Smit.88].

4.7. Validation Numérique de l'élément SBREDR en non linéaire

Le but de cette étude est de montrer les performances de l'élément développé SBREDR comparé à l'élément Q8, aux solutions analytiques, et à d'autres méthodes d'analyses elasto-plastiques. Plusieurs problèmes numériques sont présentés et l'intégration réduite dans chaque problème est utilisée pour la quadrature de Gauss.

4.7.1. Cas tests non linéaires matériaux

4.7.1.1. Analyse de la capacité portante d'un sol purement cohérent

Le premier problème à considérer est d'une semelle filante flexible poinçonnée sur un sol purement cohérent représentée sur la Figure (3.7). Le sol elasto-plastique est décrit par trois paramètres, à savoir les propriétés élastiques : le module de Young $E = 10^5 \text{ kN/m}^2$, le coefficient de Poisson $\nu = 0,3$ et la cohésion non drainée $C_u = 100 \text{ kN/m}^2$. La semelle soutient une contrainte uniformément répartie $q = 1 \text{ kN/m}^2$, qui est augmentée progressivement jusqu'à la rupture. Le problème est en déformation plane, la méthode viscoplastique, et le critère de Von Mises sont

utilisés pour cet exemple numérique. La rupture dans ce problème se produit lorsque q atteint la charge de Prandtl donnée par

$$q_{ultime} = (2 + \pi)Cu \quad (4.37)$$

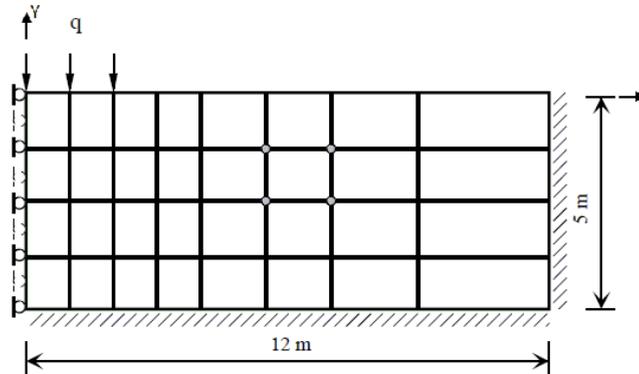


Figure 4.7 : Géométrie et maillage de la semelle flexible

Ce problème a été traité dans la référence [Smi.04], en utilisant l'élément Q8. Les résultats de ce problème ont été tracés dans la Figure (3.8) sous la forme de facteur de capacité portante q / Cu par rapport au déplacement central. Ces résultats montrent que:

- L'élément SBREDR a une convergence très rapide vers la solution de référence.
- Le SBREDR avec 12 degrés de liberté et l'élément quadrilatère Q8 avec 16 degrés de liberté ont des résultats similaires, mais ce dernier élément utilise plus de degrés de liberté.

Lorsque les critères de rupture de Tresca et de Von Mises sont utilisés, les solutions numériques correspondantes aux deux éléments SBREDR et Q8 sont données dans le tableau (4.1). L'utilisation de l'élément SBREDR sous les différents critères de rupture montre que cet élément est robuste et précis dans l'analyse elasto-plastique.

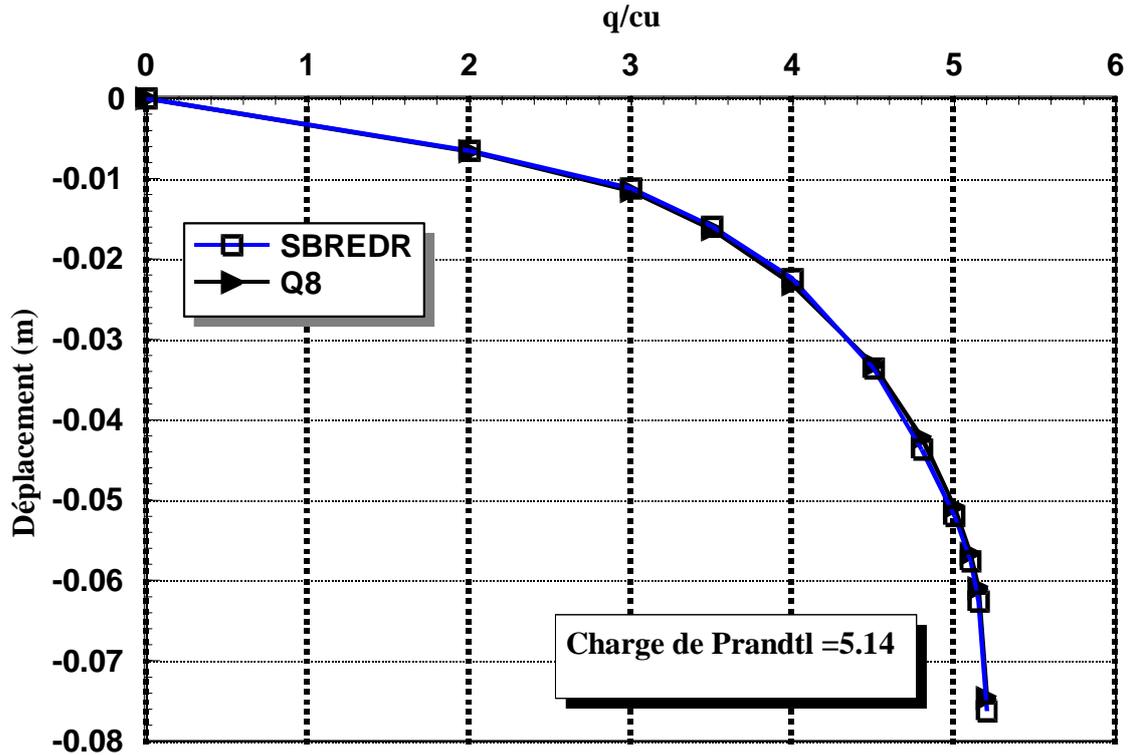


Figure 4.8 : Contrainte portante par rapport au déplacement central

Charges kN	Déplacements (m) Von Mises		Déplacements (m) Tresca	
	SBREDR	Q8	SBREDR	Q8
200	-0.006504	-0.006592	-0.006504	-0.006592
300	-0.01122	-0.01155	-0.01099	-0.01118
350	-0.01595	-0.01630	-0.01500	-0.01587
400	-0.02247	-0.02316	-0.02119	-0.02249
450	-0.03363	-0.03317	-0.03261	-0.03213
480	-0.04370	-0.04227	-0.04279	-0.04100
500	-0.05195	-0.05084	-0.05118	-0.04934
510	-0.05759	-0.05665	-0.05596	-0.05498
515	-0.06263	-0.06093	-0.06115	-0.05862
520	-0.07627	-0.07459	-0.06981	-0.06669

Table 4.1 : Déplacements verticaux du nœud chargé (coordonnée 0,0)

4.7.1.2. Poutre console soumise à une force concentrée.

Miaojuan dans [Mia.11] a étudié le comportement d'une poutre cantilever en utilisant la méthode CVEFG (Complexe Variable Element Free Galerkin) pour les problèmes elasto-plastiques 2D. La figure (4.9) montre la géométrie et le maillage de cette poutre console, qui est chargée par une force P concentrée et fixée à son extrémité gauche. Le comportement elasto-plastique de la poutre a été étudié pour les propriétés suivantes: la limite élastique $\sigma_y = 25 \text{ Pa}$, le module de Young $E = 10^5 \text{ Pa}$ et le coefficient de Poisson $\nu = 0,25$, la force concentrée $P = 1 \text{ N}$. La géométrie est décrite par ; la longueur de la poutre $L = 8 \text{ m}$, la hauteur $h=1\text{m}$ et l'épaisseur $t = 1\text{m}$. Les Conditions de contrainte plane, la méthode visco-plastique et le critère de Von Mises, sont supposés pour ce problème numérique.

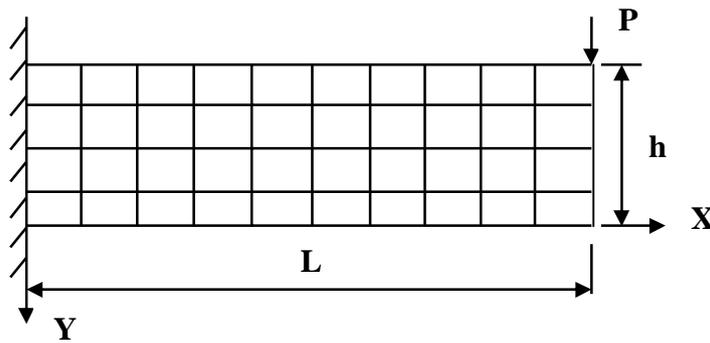


Figure 4.9 : Géométrie et maillage de la poutre console soumise à une force concentrée

Les solutions numériques des déplacements verticaux dans certains nœuds obtenus en utilisant l'élément développé SBREDR sont présentées dans le tableau (4.2). Par rapport à la méthode CVEFG, la méthode EFG (Element Free Galerkin) et ANSYS, nous pouvons voir que les résultats en utilisant cet élément développé sont en bon accord avec ceux de : ANSYS, et CVEFG.

Coordo des noeuds	(1.6,0.5)	(3.2,0.5)	(4.8,0.5)	(6.4,0.5)	(8.0,0.5)
ANSYS [Mia.11]	2.020	6.837	13.227	20.600	28.460
EFG [Mia.11]	1.946	6.728	13.077	20.409	28.236
CVEFG [Mia.11]	2.068	6.904	13.303	20.666	28.524
SBREDR	1.617	6.259	12.680	20.140	28.140

Table 4.2 : Déplacements verticaux de la poutre soumise à une force concentrée (mm)

4.7.1.3. Analyse passive des terres

Le test montré dans la figure (4.10) représente un sable avec les paramètres de résistance: angle de frottement $\varphi = 30^\circ$, la cohésion $c = 0$, angle de dilatation $\psi = 0$ est soumis à un déplacement imposé le long de la face gauche. Les contraintes initiales dans le sol sont calculées en supposant que le poids unitaire $\gamma = 20 \text{ kN/m}^3$ et un coefficient de pression des terres au repos $K_0 = 1$. Ce problème a été utilisé pour évaluer la capacité de l'élément SBREDR pour représenter un déplacement de la paroi et la force résultante. Ce problème a été étudié par Smith dans la référence [Smit.88] en utilisant l'élément Q8. Les conditions de déformation plane, la méthode des contraintes initiales et le critère de Mohr-Coulomb sont supposés pour ce problème numérique.

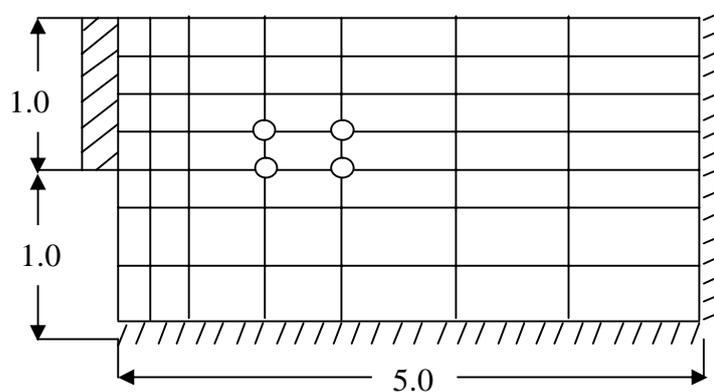


Figure 4.10 : Maillage et données pour le test analyse des terres

Les résultats représentés sur la Figure (4.11) montrent que pour l'élément SBREDR, la force à une valeur maximale de 29.34 kN / m , mais pour l'élément Q8 la force est de 30.68 kN / m , ainsi les résultats des deux éléments sont en bon accord avec la forme clos de la solution Rankine (30 kN / m) donnée dans la référence [Grif.86].

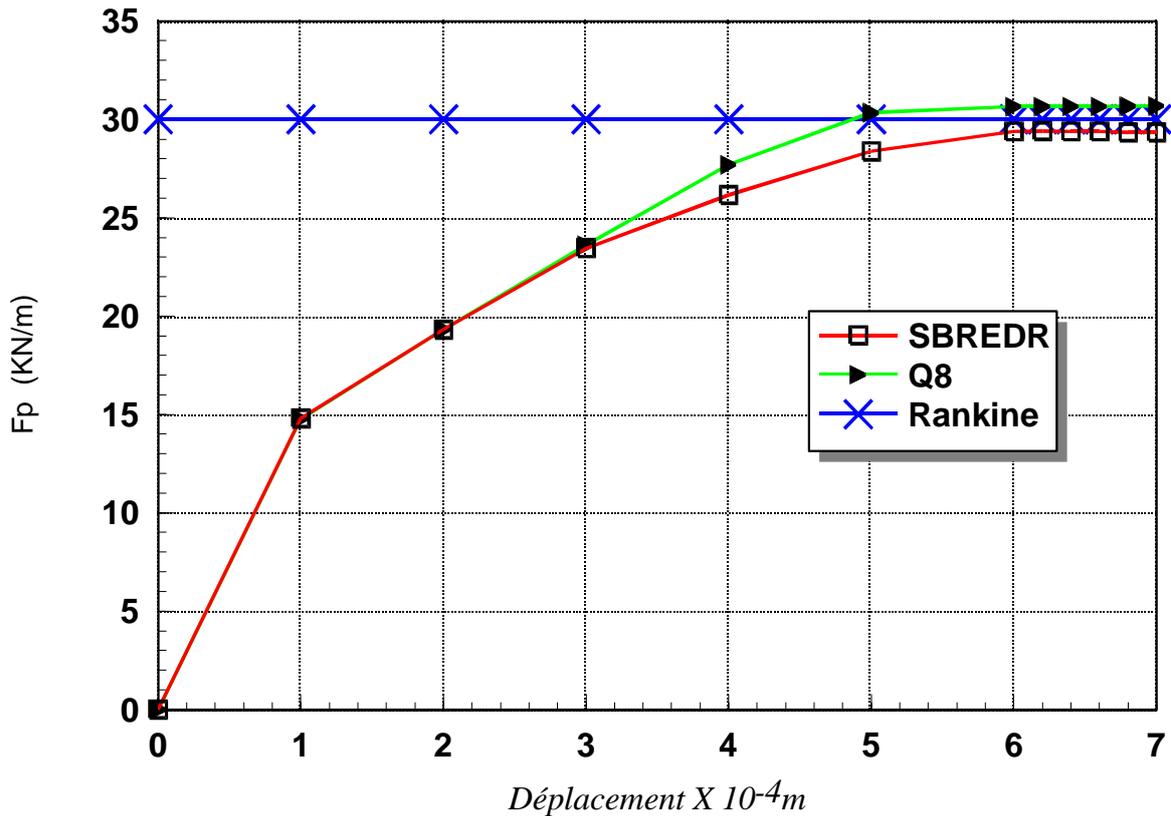


Figure 4.11 : Force passive par rapport au déplacement horizontal

4.7.1.4. Analyse axisymétrique non drainée

Ce test est traité dans la référence [Smi.04] en utilisant l'élément Q8. La figure (4.12) représente un seul élément SBREDR soumis à des incréments de déplacements verticaux de compression le long de sa face supérieure.

L'analyse est d'un essai triaxial, dans lequel l'échantillon a été consolidé sous une pression de 100 kN/m^2 , suivie par une charge axiale non drainée. Deux types d'analyse sont pris en compte dans ce problème. Dans la première analyse l'angle de dilatation $\psi = 0$, et dans la seconde analyse $\psi = 30^\circ$.

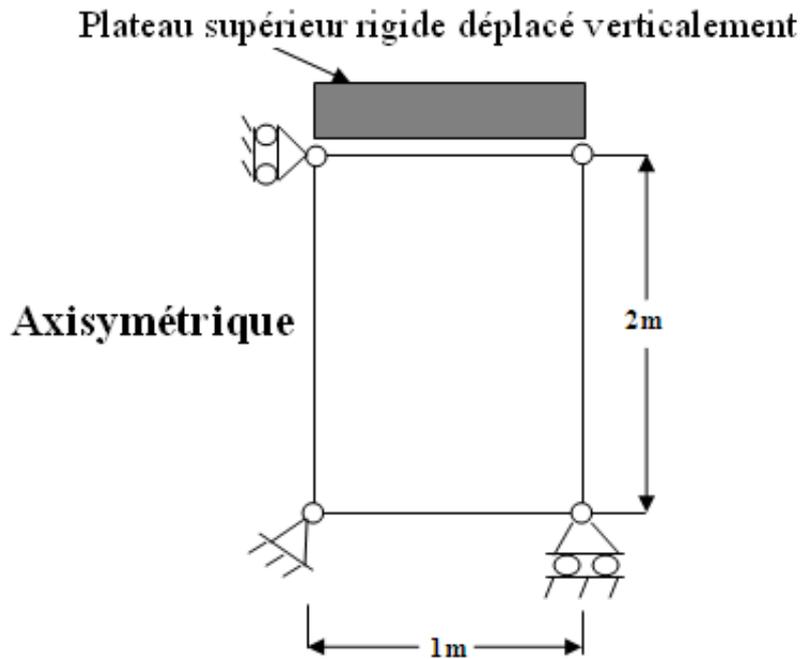


Figure 4.12 : Maillage du problème axisymétrique non drainé

Les propriétés de l'échantillon pour ce problème sont les suivantes: angle de frottement $\varphi = 30^\circ$ le module de Young $E = 2.5 \cdot 10^5 \text{ kN/m}^2$, le coefficient de Poisson $\nu = 0,25$, la cohésion $C = 0$, et le module de compressibilité $K_e = 10^6 \text{ kN/m}^2$. La méthode viscoplastique et le critère de Mohr-Coulomb sont utilisés pour ce problème numérique.

Les résultats de la contrainte déviatorique par rapport au déplacement vertical sont tracés sur la Figure (4.13) pour les deux analyses non drainée et drainée.

Dans la première analyse, ($\psi = 0$), la contrainte déviatorique obtenue en utilisant l'élément SBREDR atteint un pic de $120,2 \text{ kN/m}^2$, ce qui est en bon accord avec la solution ferme $120,8 \text{ kN/m}^2$ donnée dans [Griff.85], et avec la valeur de 121 kN/m^2 de l'élément Q8 donnée dans la référence [Smi.04]. La seconde analyse, qui comprend une règle d'écoulement associée ($\psi = 30^\circ$), ne montre aucun signe d'échec (rupture) due à la tendance à la dilatation. Dans ce cas, les pressions interstitielles ont continués à se produire et la contrainte déviatorique continue d'augmenter, ce qui est de l'influence de la dilatation sur le comportement des deux éléments.

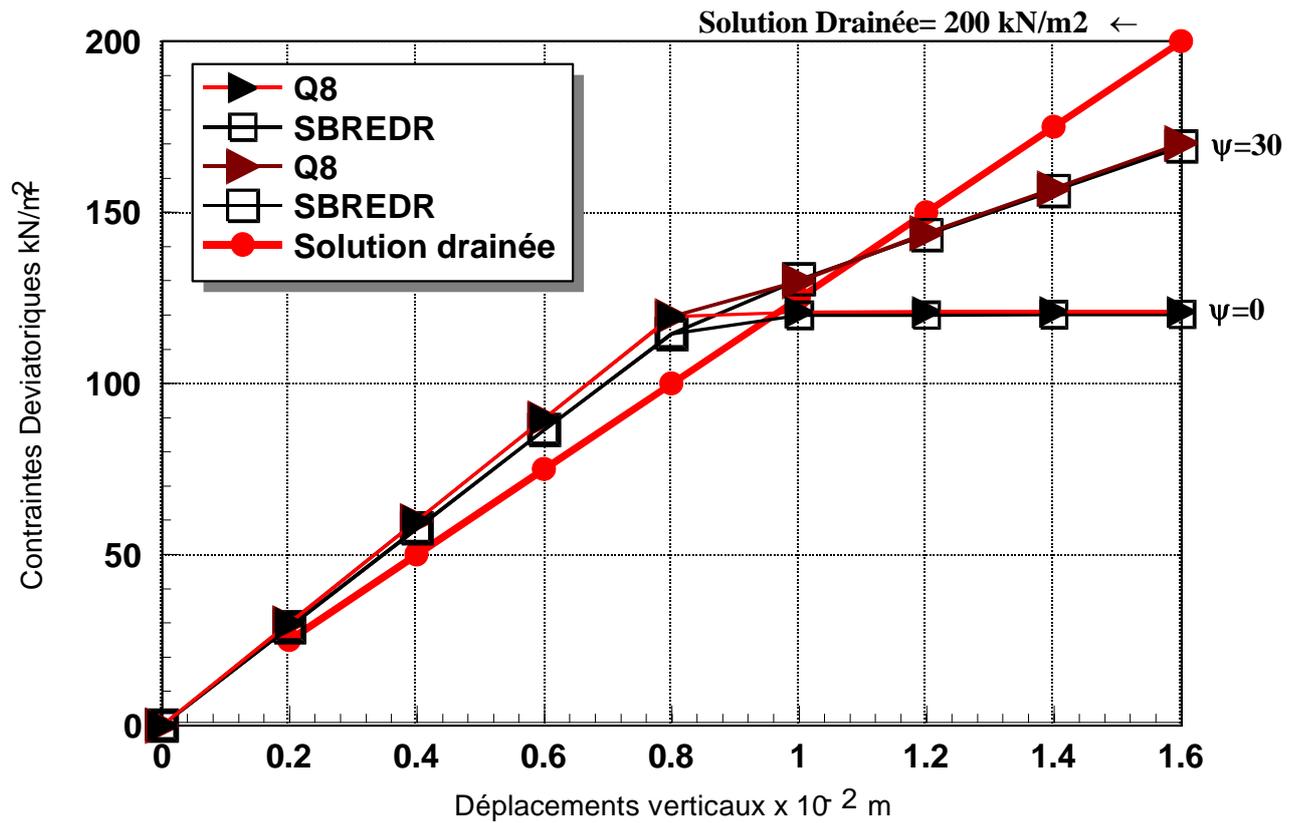


Figure 4.13 : Les déplacements verticaux par rapport aux contraintes Déviatoriques pour le chargement triaxial drainé et non drainé ($\psi = 0$ et $\psi = 30^\circ$).

4.8. Conclusion

Dans ce chapitre on a montré la bonne convergence ainsi que la bonne précision de l'élément développé à travers une série d'exemples numériques non linéaires choisis dans la littérature. En effet l'élément développé est similaire à l'élément Q8 dans tous les tests, mais avec un temps de calcul moins grand. Les résultats du nouvel élément sont en bon accord aussi avec celles des résultats analytiques, ce qui montre sa robustesse dans l'analyse elasto-plastique.

CHAPITRE 5

FORMULATION ISOPARAMETRIQUE ET VALIDATION DE L'ELEMENT SBRIE EN NONLINEAIRE ET EN DYNAMIQUE

Chapitre 5. FORMULATION ISOPARAMETRIQUE ET VALIDATION NUMERIQUE DE L'ELEMENT SBRIE EN NON-LINEAIRE ET EN DYNAMIQUE

5.1. Introduction

La famille des éléments isoparamétriques a été introduite pour la première fois par Taig [Taig.61], d'où provient le premier élément isoparamétrique rectangulaire à 4 nœuds, par la suite Irons [Iron.68] a prolongé ces idées pour formuler des éléments isoparamétriques à polynômes élevés. Cette famille est appelée isoparamétrique car les mêmes fonctions d'interpolations sont utilisées pour définir aussi bien la variation des déplacements de l'élément que sa géométrie. La procédure de base consiste à exprimer les coordonnées de l'élément et ses déplacements par des fonctions exprimées en termes de coordonnées naturelles de l'élément. Un système de coordonnées naturelles est un système local défini par la géométrie de l'élément et non pas par son orientation dans le système global, de plus ces systèmes sont habituellement arrangés de telle façon à ce que les coordonnées naturelles aient la valeur unité à la première limite externe.

D'habitude dans la MEF on choisit un maillage carré ou triangulaire mais rien n'interdit de choisir des maillages plus complexes. Il n'est pas non plus nécessaire que le maillage soit régulier et l'on a tendance à resserrer le maillage près des endroits d'intérêt (par exemple aux endroits où l'on pense que la solution va beaucoup varier) ; cependant, il faut veiller à avoir des éléments faiblement distordus (se rapprocher d'un polygone régulier). Plus ce maillage est resserré, plus la solution que l'on obtient par la méthode des éléments finis sera précise et proche de la « vraie » solution de l'équation aux dérivées partielles.

Différentes familles d'éléments finis isoparamétriques basées sur différentes formulations, notamment la formulation en déplacement et en contraintes, ont été proposées dans la littérature, cependant, l'utilisation de l'intégration analytique pour la construction de la matrice de rigidité

pour les éléments à modèles en déformation jusqu'à un temps récent reste évidente, ce qui est dans la plus part des cas un inconvénient majeur.

Dans cette optique l'objectif de ce chapitre est donc de faire en premier lieu une reformulation de l'élément rectangulaire SBRIE cité dans la référence [Sabir 95a] et faire introduire sur cet élément la notion d'isoparamétrie, ensuite valider cet élément en analyse non linéaire matérielle et en dynamique.

Cet élément basé sur le champ de déformation à une forme rectangulaire, cependant on peut imaginer qu'il peut avoir une forme irrégulière ou distordue dont le domaine géométrique serait défini par des interpolations quadratiques ou cubiques.

La bonne représentation des bords courbes est exigée souvent pour une modélisation correcte au contraire des éléments à bords droits qui exigent des maillages fins et grossiers.

L'isoparamétrie donc à pour but de systématiser l'utilisation des variables réduites et de générer des éléments à bords courbes ce qui est efficace pour certaines discrétisations.

5.2. Transformation Géométrique

La transformation géométrique permet de définir la forme de l'élément réel à partir d'un certain nombre de points dans l'élément, appelés "points géométriques"

Les transformations géométriques sont tout simplement des fonctions d'interpolation de la géométrie figure (5.1).

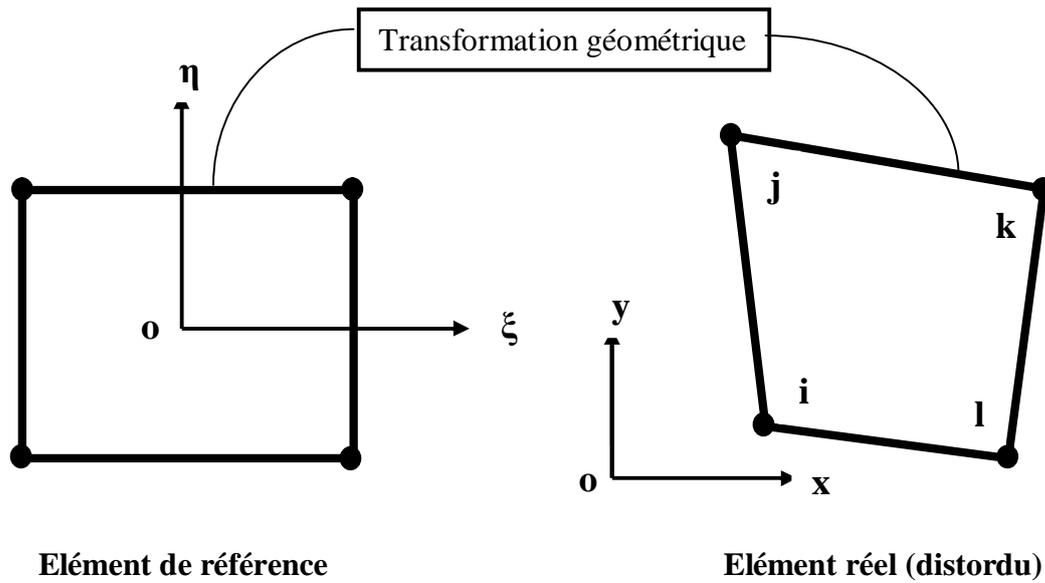


Figure 5.1 : Transformation géométrique

5.3. Formulation isoparamétrique

Pour une mise en œuvre pratique de l'isoparamétrie, il faut passer par plusieurs étapes spécifiques:

1. La construction des fonctions de forme de l'élément formulé.
2. Calculs des dérivées des fonctions de forme pour former la matrice de contrainte-déplacement.
3. L'intégration numérique sur l'élément (avec quadrature de Gauss).

L'élément SBRIE à deux degrés de liberté dans chacun des quatre nœuds de coins et il est représenté schématiquement sur la figure (5.2). Les longueurs a et b sont respectivement les dimensions de l'élément dans les directions x et y .

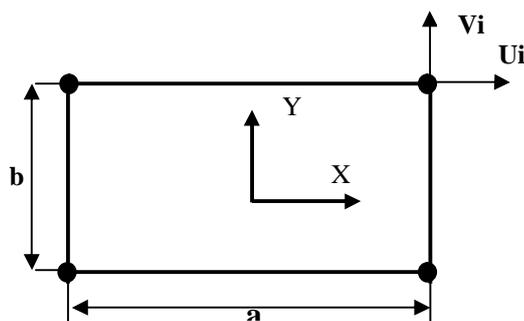


Figure 5.2 Coordonnées des nœuds de l'élément SBRIE

Les fonctions de déformation et le champ de déplacement correspondant de cet élément en coordonnées cartésiennes sont donnés respectivement par

$$\varepsilon_x = a_4 + a_5 y \quad (5.1)$$

$$\varepsilon_y = a_6 + a_7 x$$

$$\gamma_{xy} = a_8$$

$$u = a_1 - a_3 y + a_4 x + a_5 xy - a_7 y^2 / 2 + a_8 y / 2 \quad (5.2)$$

$$v = a_2 + a_3 x - a_5 x^2 / 2 + a_6 y + a_7 xy + a_8 x / 2$$

Le champ de déplacements est donné en termes de déplacements nodaux comme suit

$$\{U\} = [N]\{q\} \quad (5.3)$$

Ou

$$\{q\} = \{u_1 \ v_1 \ u_2 \ v_2 \ u_3 \ v_3 \ u_4 \ v_4\}^T \quad (5.4)$$

Et la matrice des fonctions de forme peut être exprimée par

$$[N] = [\varphi(x, y)][\phi_e]^{-1} \quad (5.5)$$

Dont la matrice $[\varphi(x, y)]$ et la matrice des coordonnées $[\phi_e]$ sont données respectivement :

$$[\varphi(x, y)] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -y & x & xy & 0 & -y^2/2 & y/2 \\ 0 & 1 & x & 0 & -x^2/2 & y & xy & x/2 \end{bmatrix} \quad (5.6)$$

$$[\phi_e] = \begin{bmatrix} \varphi(x_1, y_1) \\ \varphi(x_2, y_2) \\ \varphi(x_3, y_3) \\ \varphi(x_4, y_4) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -y_1 & x_1 & x_1 y_1 & 0 & -0.5 y_1^2 & 0.5 y_1 \\ 0 & 1 & x_1 & 0 & -0.5 x_1^2 & y_1 & x_1 y_1 & 0.5 x_1 \\ 1 & 0 & -y_2 & x_2 & x_2 y_2 & 0 & -0.5 y_2^2 & 0.5 y_2 \\ 0 & 1 & x_2 & 0 & -0.5 x_2^2 & y_2 & x_2 y_2 & 0.5 x_2 \\ 1 & 0 & -y_3 & x_3 & x_3 y_3 & 0 & -0.5 y_3^2 & 0.5 y_3 \\ 0 & 1 & x_3 & 0 & -0.5 x_3^2 & y_3 & x_3 y_3 & 0.5 x_3 \\ 1 & 0 & -y_4 & x_4 & x_4 y_4 & 0 & -0.5 y_4^2 & 0.5 y_4 \\ 0 & 1 & x_4 & 0 & -0.5 x_4^2 & y_4 & x_4 y_4 & 0.5 x_4 \end{bmatrix} \quad (5.7)$$

Ainsi la déformation assumée

$$\{\varepsilon\} = [Q(x, y)]\{A\} \quad (5.8)$$

Avec la matrice de déformation Q donnée par

$$[Q(x, y)] = [L][\varphi(x, y)] \quad (5.9)$$

Ou $[L]$ est l'opérateur différentiel défini par

$$[L] = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix} \quad (5.10)$$

Ainsi l'équation (5.9) devient

$$[Q(x, y)] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & y & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & x & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (5.11)$$

Et le champ de déplacement sera exprimé par

$$\begin{Bmatrix} u \\ v \end{Bmatrix} = [\varphi(x, y)]\{a\} \quad (5.12)$$

Dans la formulation isoparamétrique l'interpolation du champ de déplacements peut être écrite comme

$$\begin{aligned} u &= \sum_{i=1}^n N_{2i-1}^U(\xi, \eta) u_i + \sum_{i=1}^n N_{2i}^U(\xi, \eta) v_i \\ v &= \sum_{i=1}^n N_{2i-1}^V(\xi, \eta) u_i + \sum_{i=1}^n N_{2i}^V(\xi, \eta) v_i \end{aligned} \quad (5.13)$$

Et les fonctions de forme données par l'équation (5.5) peuvent être écrites sous la forme

$$[N] = \begin{bmatrix} N_1^u & N_2^u & N_3^u & N_4^u & N_5^u & N_6^u & N_7^u & N_8^u \\ N_1^v & N_2^v & N_3^v & N_4^v & N_5^v & N_6^v & N_7^v & N_8^v \end{bmatrix} \quad (5.14)$$

Les fonctions de forme obtenues de l'élément SBRIE en coordonnées naturelles sont données dans le tableau (5.1), ainsi que les composantes de la matrice de déformation [B] sont données dans le tableau (5.2).

$N_1^u = 1/4(1-\xi)(1-\eta)$	$N_1^v = 1/8(1-\xi^2)(a/b)$
$N_2^u = 1/8(1-\eta^2)(b/a)$	$N_2^v = 1/4(1-\xi)(1-\eta)$
$N_3^u = 1/4(1-\xi)(1+\eta)$	$N_3^v = 1/8(\xi^2 - 1)(a/b)$
$N_4^u = 1/8(\eta^2 - 1)(b/a)$	$N_4^v = 1/4(1-\xi)(1+\eta)$
$N_5^u = 1/4(1+\xi)(1+\eta)$	$N_5^v = 1/8(1-\xi^2)(a/b)$
$N_6^u = 1/8(1-\eta^2)(b/a)$	$N_6^v = 1/4(1+\xi)(1+\eta)$
$N_7^u = 1/4(1+\xi)(1-\eta)$	$N_7^v = 1/8(\xi^2 - 1)(a/b)$
$N_8^u = 1/8(\eta^2 - 1)(b/a)$	$N_8^v = 1/4(1+\xi)(1-\eta)$

Tableau 5.1 : Fonctions de forme de l'élément SBRIE

$B_{11} = N_{1,x}^u$	$B_{21} = N_{1,y}^v$	$B_{31} = N_{1,y}^u + N_{1,x}^v$
$B_{12} = N_{2,x}^u$	$B_{22} = N_{2,y}^v$	$B_{32} = N_{2,y}^u + N_{2,x}^v$
$B_{13} = N_{3,x}^u$	$B_{23} = N_{3,y}^v$	$B_{33} = N_{3,y}^u + N_{3,x}^v$
$B_{14} = N_{4,x}^u$	$B_{24} = N_{4,y}^v$	$B_{34} = N_{4,y}^u + N_{4,x}^v$
$B_{15} = N_{5,x}^u$	$B_{25} = N_{5,y}^v$	$B_{35} = N_{5,y}^u + N_{5,x}^v$
$B_{16} = N_{6,x}^u$	$B_{26} = N_{6,y}^v$	$B_{36} = N_{6,y}^u + N_{6,x}^v$
$B_{17} = N_{7,x}^u$	$B_{27} = N_{7,y}^v$	$B_{37} = N_{7,y}^u + N_{7,x}^v$
$B_{18} = N_{8,x}^u$	$B_{28} = N_{8,y}^v$	$B_{38} = N_{8,y}^u + N_{8,x}^v$

Tableau 5.2 : Composantes de la matrice [B] de l'élément SBRIE

Pour le cas de l'axisymétrie la matrice de déformation $[B^*]$ de l'élément SBRIE est exprimée comme

$$[B^*] = [L][N] \quad (5.15)$$

Où [L] est l'opérateur différentiel défini par

$$[L] = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial r} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{\partial}{\partial z} & \frac{\partial}{\partial r} \\ \frac{1}{r} & 0 \end{bmatrix} \quad (5.16)$$

Les composantes de la matrice $[B^*]$ sont données dans le tableau (5.3)

$B^*_{11} = N^u_{1,r}$	$B^*_{21} = N^v_{1,z}$	$B^*_{31} = N^u_{1,z} + N^v_{1,r}$	$B^*_{41} = N^u_1 / r$
$B^*_{12} = N^u_{2,r}$	$B^*_{22} = N^v_{2,z}$	$B^*_{32} = N^u_{2,z} + N^v_{2,r}$	$B^*_{42} = N^u_2 / r$
$B^*_{13} = N^u_{3,r}$	$B^*_{23} = N^v_{3,z}$	$B^*_{33} = N^u_{3,z} + N^v_{3,r}$	$B^*_{43} = N^u_3 / r$
$B^*_{14} = N^u_{4,r}$	$B^*_{24} = N^v_{4,z}$	$B^*_{34} = N^u_{4,z} + N^v_{4,r}$	$B^*_{44} = N^u_4 / r$
$B^*_{15} = N^u_{5,r}$	$B^*_{25} = N^v_{5,z}$	$B^*_{35} = N^u_{5,z} + N^v_{5,r}$	$B^*_{45} = N^u_5 / r$
$B^*_{16} = N^u_{6,r}$	$B^*_{26} = N^v_{6,z}$	$B^*_{36} = N^u_{6,z} + N^v_{6,r}$	$B^*_{46} = N^u_6 / r$
$B^*_{17} = N^u_{7,r}$	$B^*_{27} = N^v_{7,z}$	$B^*_{37} = N^u_{7,z} + N^v_{7,r}$	$B^*_{47} = N^u_7 / r$
$B^*_{18} = N^u_{8,r}$	$B^*_{28} = N^v_{8,z}$	$B^*_{38} = N^u_{8,z} + N^v_{8,r}$	$B^*_{48} = N^u_8 / r$

Tableau 5.3 : La matrice $[B^*]$ de l'élément SBRIE dans le cas axisymétrique

La transformation de l'élément réel à l'élément de référence est assurée par la transformation suivante :

$$\begin{Bmatrix} \frac{\partial}{\partial \xi} \\ \frac{\partial}{\partial \eta} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \end{Bmatrix} = [J] \begin{Bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \end{Bmatrix} \quad (5.17)$$

La transformation inverse est assurée par la matrice Jacobéenne inverse J^{-1} telle que :

$$\begin{Bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \end{Bmatrix} = \mathbf{J}^{-1} \begin{Bmatrix} \frac{\partial}{\partial \xi} \\ \frac{\partial}{\partial \eta} \end{Bmatrix} \quad (5.18)$$

En passant en variables local nous aurons :

$$\iint dx dy = \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} \det |\mathbf{J}| d\xi d\eta \quad (5.19)$$

L'équation (5.19) est évaluée numériquement, en utilisant la quadrature de Gauss.

Ainsi la matrice de rigidité élémentaire $[K^e]$ de l'élément SBRIE peut être obtenue par:

$$[K^e] = \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} [B]^T [D] [B] \det |\mathbf{J}| d\xi d\eta \quad (5.20)$$

5.4. Validation numérique de l'élément SBRIE en non linéaire

Plusieurs exemples de problèmes elasto-plastiques sont présentés pour valider l'élément isoparamétrique SBRIE en non linéaire.

5.4.1 Analyse de la capacité portante d'un sol purement cohérent

Le premier problème à considérer est d'une semelle filante flexible à la surface d'une couche d'argile non drainée uniforme représentée sur la Figure (5.3).

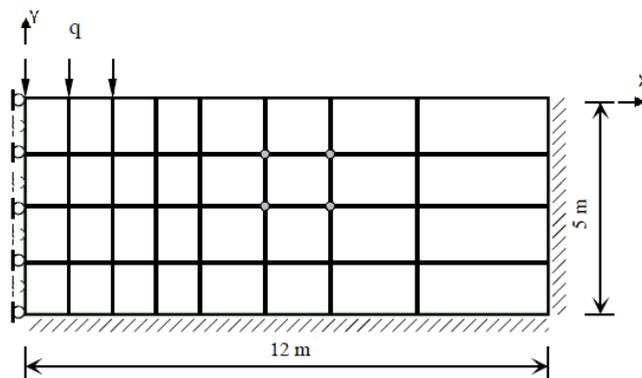


Figure 5.3 : Géométrie et maillage de la semelle flexible

Le module de Young $E = 10^5 \text{ kN/m}^2$, le coefficient de Poisson $\nu = 0,3$ et la cohésion non drainée $C_u = 100 \text{ kN/m}^2$. La semelle soutient une contrainte uniformément répartie $q = 1 \text{ kN/m}^2$. Les mêmes conditions sont prises que l'exemple de [Smit.04].

Les résultats de la figure (5.4) montrent que:

- L'élément iso-paramétrique SBRIE a une convergence très rapide vers la solution de référence.
- L'élément SBRIE et l'élément Q8 ont des résultats similaires, alors le SBRIE peut être utilisé en analyse elasto-plastique.

Quand les critères de Tresca et Von-Mises sont utilisés les solutions numériques avec les éléments SBRIE et Q8 sont données dans le tableau (5.4). L'utilisation de l'élément SBRIE sous différents critères montre sa robustesse dans l'analyse elasto-plastique.

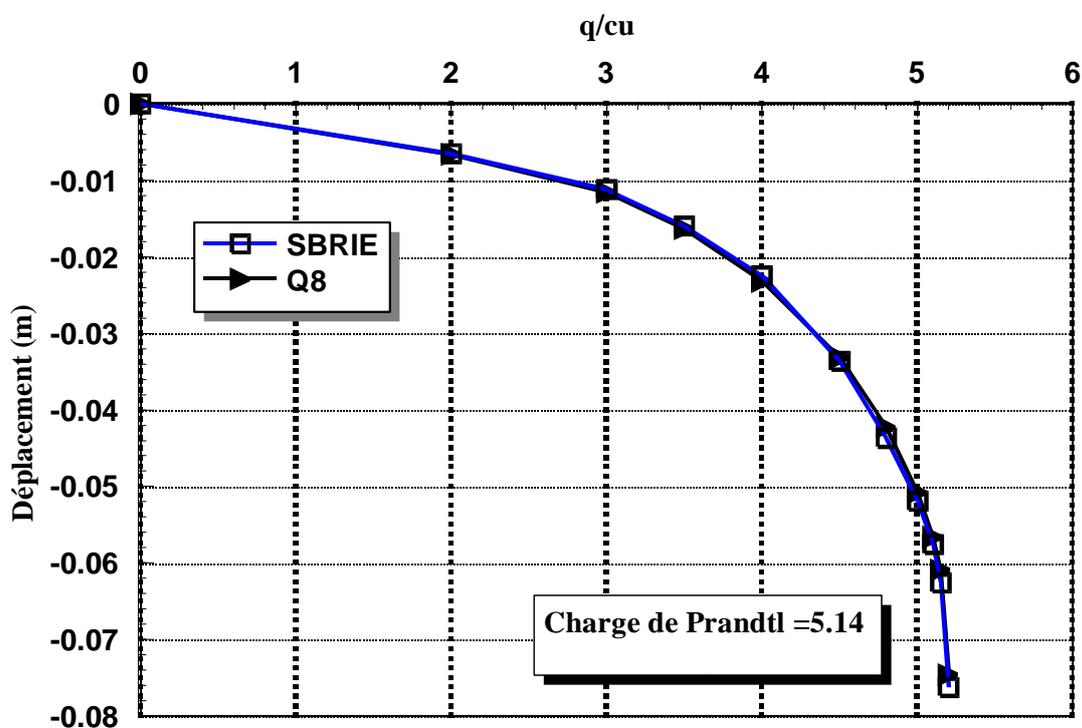


Figure 5.4 : Contrainte portante par rapport au déplacement central

Charges kN	Displacements(m) Von Mises	Displacements(m) Von Mises	Displacements(m) Tresca	Displacements(m) Tresca
	SBRIE	Q8	SBRIE	Q8
200	-0.006504	-0.006592	-0.006504	-0.006592
300	-0.01120	-0.01155	-0.01098	-0.01118
350	-0.01594	-0.01630	-0.01501	-0.01587
400	-0.02246	-0.02316	-0.02117	-0.02249
450	-0.03361	-0.03317	-0.03260	-0.03213
480	-0.04371	-0.04227	-0.04278	-0.04100
500	-0.05194	-0.05084	-0.05117	-0.04934
510	-0.05757	-0.05665	-0.05595	-0.05498
515	-0.06261	-0.06093	-0.06114	-0.05862
520	-0.07626	-0.07459	-0.06980	-0.06669

Tableau 5.4 : Déplacements Verticaux du nœud chargé (coordonnée (0, 0))

5.4.2. Analyse de la stabilité d'un talus

La stabilité d'un talus soumis à un chargement gravitationnel est étudiée. Il est traité en déformation plane par la méthode viscoplastique en utilisant le critère de rupture de Mohr-Coulomb figure (5.5). Il s'agit de déterminer le coefficient de sécurité F (rapport des moments résistants aux moments moteurs) qui est défini au moyen d'une proportion dans laquelle la cohésion C et la tangente de l'angle de frottement $tg\phi$ doivent être réduits afin de causer la rupture du talus. La boucle de l'incrément de charge est remplacée par la boucle du coefficient de sécurité, chaque entrée dans cette boucle correspond à un coefficient de sécurité différent, de manière à obtenir une diminution des valeurs des paramètres C et $tg\phi$.

Le chargement gravitationnel est donné par la relation :

$$P_a = \gamma \sum \iint N^T dx dy \quad (5.21)$$

Où γ est le poids volumique du sol

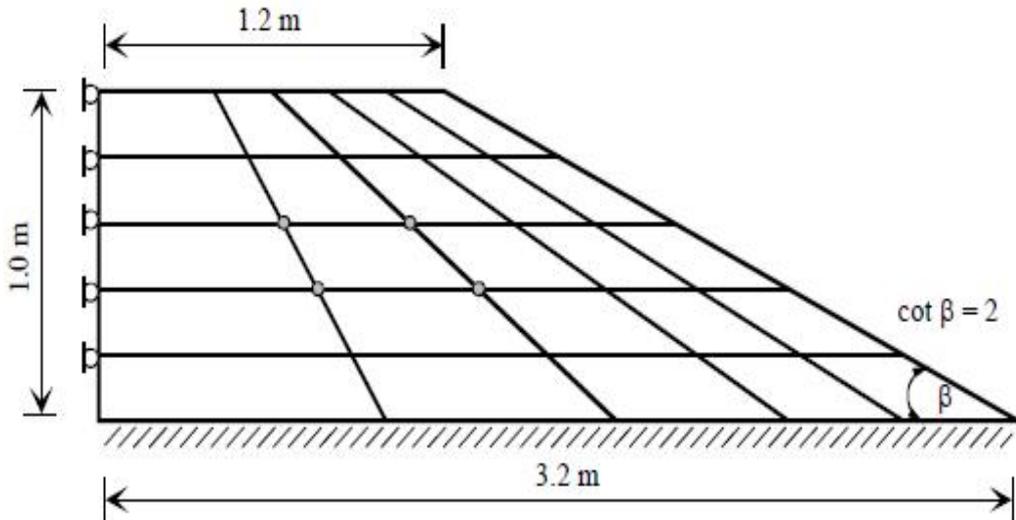


Figure 5.5 : Analyse de la stabilité d'un talus

Les résultats représentés sur la Figure (5.6) montrent que l'élément isoparamétrique SBRIE converge bien à la solution analytique donnée par [Bish.60]. Notons ici que même l'élément Q8 à une bonne convergence à la valeur du coefficient de sécurité $F = 2.505$.

En fin nous pouvons conclure que le comportement de l'élément SBRIE dans ce test est pratiquement similaire à celui de l'élément robuste Q8 étudié par Smith [Smit.88].

Néanmoins en termes de ddl, nous remarquons que l'élément SBRIE est avec 8 ddl seulement contrairement à l'élément Q8 qui utilisent 16 ddl.

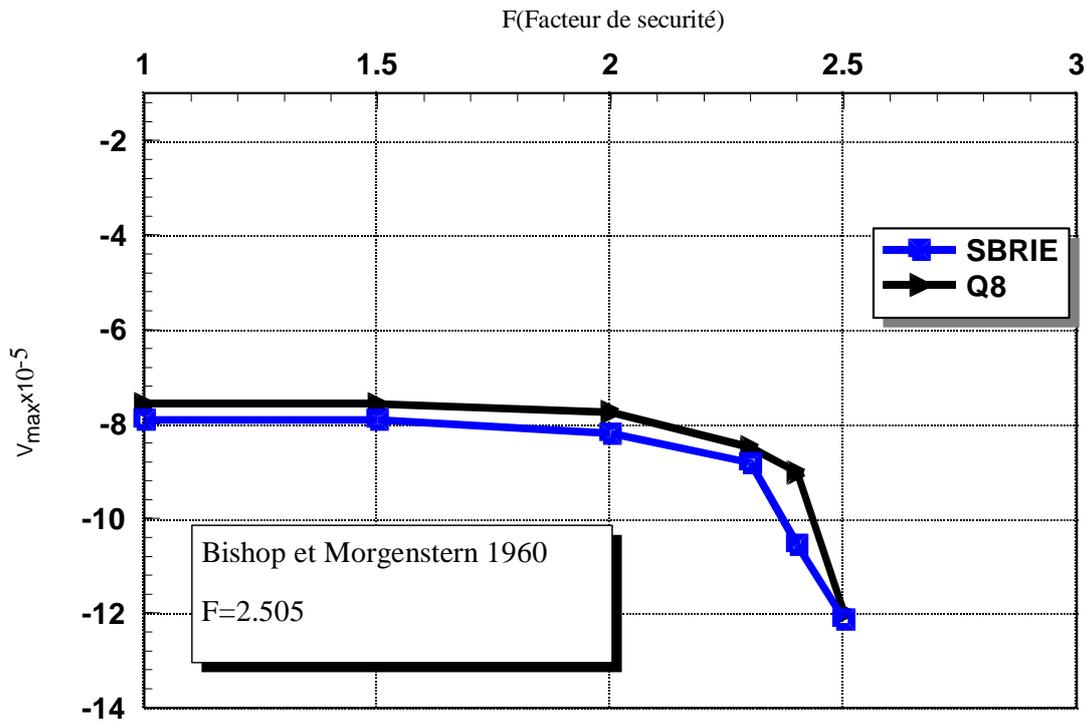


Figure 5.6 : Déplacement maximal par rapport au facteur de sécurité.

5.4.3. Poutre console soumise à une charge répartie

Ce problème a été traité par Miaojuan dans [Miao.11]. Une poutre en porte à faux soumise à un chargement réparti est considérée, comme représentée sur la Figure (5.7). La longueur de la poutre est de $L = 8$ m, la hauteur h est égale à 1 m. Le problème est en contrainte plane, la méthode viscoplastique et le critère de Von Mises, sont supposés pour ce problème numérique. La charge répartie $q = 1$ N / m et le module de Young $E = 10^5$ Pa, le coefficient de Poisson $\nu = 0,25$ et la contrainte limite $\sigma_y = 25$ Pa.

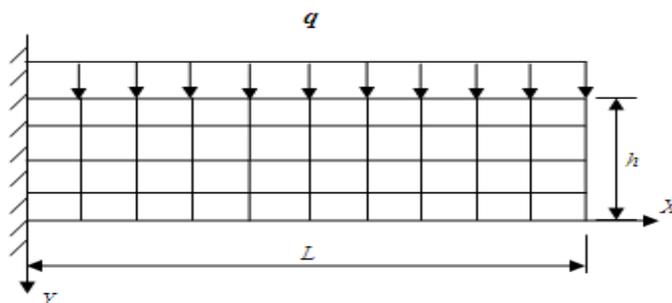


Figure 5.7 : Géométrie et maillage de la poutre soumise à une charge répartie

Les solutions numériques des déplacements verticaux à certains nœuds obtenus en utilisant l'élément SBRIE sont indiquées dans le tableau (5.5). Par rapport à la méthode CVEFG

(complexe variable element free Galerkin), et ANSYS, nous pouvons également voir que les résultats en utilisant l'élément SBRIE sont plus proches de ceux d'ANSYS et la méthode CVEFG.

Coordonnées des nœuds	(1.6,0.5)	(3.2,0.5)	(4.8,0.5)	(6.4,0.5)	(8.0,0.5)
ANSYS	18.279	60.587	113.120	167.960	223.190
CVEFG	18.554	60.310	111.814	166.413	221.317
SBRIE	19.200	64.460	115.800	168.100	221.200

Tableau 5.5 : Déplacements verticaux de plusieurs nœuds de la poutre soumise à une charge répartie

5.4.4. Poutre console soumise à une force concentrée

Ce problème a été traité aussi par Miaojuan [Miao.11]. Une poutre en porte à faux soumise à une force concentrée est considérée, comme représentée sur la Figure (5.8). Les caractéristiques de la poutre sont : la contrainte limite $\sigma_y = 25$ Pa, le module de Young $E = 10^5$ Pa, le coefficient de Poisson $\nu = 0.25$, la force $P=1$ N, la longueur $L=8$ m, la hauteur $h=1$ m, l'épaisseur $t=1$ m. Le problème est en contrainte plane, et le critère de VonMises avec la méthode viscoplastique sont utilisées.

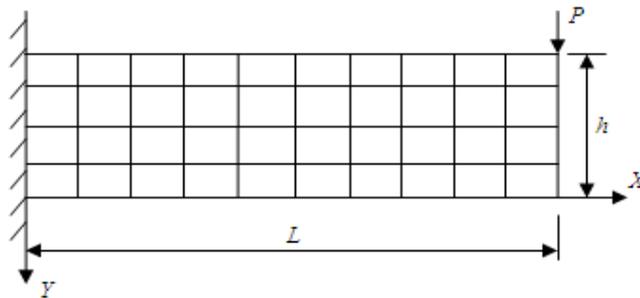


Figure 5.8 : Géométrie et maillage de la poutre soumise à une force concentrée

Les résultats obtenus du déplacement vertical en certains nœuds sont donnés dans le tableau (5.6). Nous pouvons voir que l'élément SBRIE se comporte pratiquement comme les résultats obtenus par ANSYS et par la méthode CVEFG.

Coordonnées des nœuds	(1.6,0.5)	(3.2,0.5)	(4.8,0.5)	(6.4,0.5)	(8.0,0.5)
ANSYS	2.020	6.837	13.227	20.600	28.460
EFG	1.946	6.728	13.077	20.409	28.236
CVEFG	2.068	6.904	13.303	20.666	28.524
SBRIE	2.048	6.917	13.250	20.530	28.381

Tableau 5.6 : Déplacements verticaux de la poutre soumise à une charge concentrée

La Figure (5.9) montre la relation entre les déplacements du point du milieu à l'extrémité de la poutre et le chargement. On peut voir clairement que lorsque la charge est supérieure à la limite élastique, le matériau commence à se plastifier et entre dans l'état plastique.

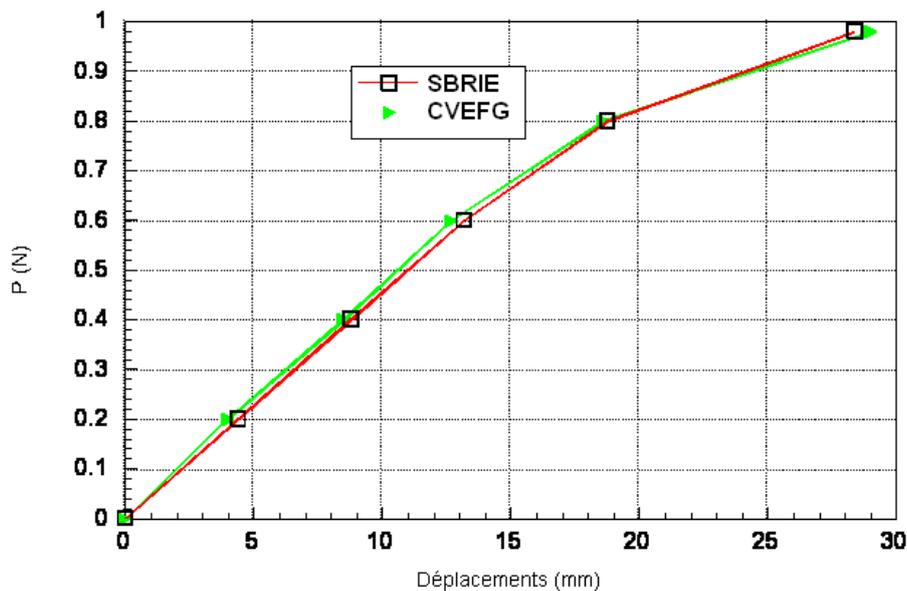


Figure 5.9 : Relation entre déplacements du point du milieu et le chargement à l'extrémité de la poutre

5.4.5. Analyse passive des terres

Le test montré dans la figure (5.10) représente un sable avec les paramètres de résistance: angle de frottement $\phi = 30^\circ$, la cohésion $c = 0$, angle de dilatation $\psi = 0$ est soumis à un déplacement

imposé le long de la face gauche. Les contraintes initiales dans le sol sont calculées en supposant que le poids unitaire $\gamma = 20 \text{ kN/m}^3$ et un coefficient de pression au repos $K_0 = 1$. Ce problème a été utilisé pour évaluer la capacité de l'élément SBRIE pour représenter un déplacement de la paroi et la force résultante. Ce problème a été étudié dans [Smit.88] en utilisant l'élément Q8. Les conditions de déformation plane, la méthode des contraintes initiales et le critère de Mohr-Coulomb sont supposés pour ce problème numérique.

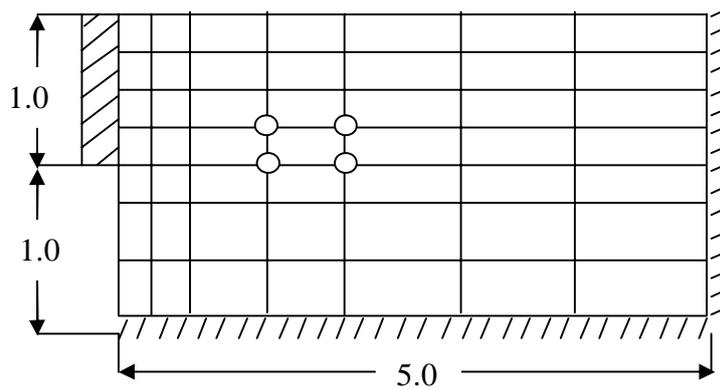


Figure 5.10 : Maillage et données pour le test analyse des terres

Les résultats représentés sur la Figure (5.11) montrent que pour l'élément SBRIE, la force à une valeur maximale de 29.78 kN / m , mais pour l'élément Q8 la force est de 30.68 kN / m , ainsi les résultats des deux éléments sont en bon accord avec la forme clos de la solution Rankine (30 kN / m) donnée dans la référence [Grif.86].

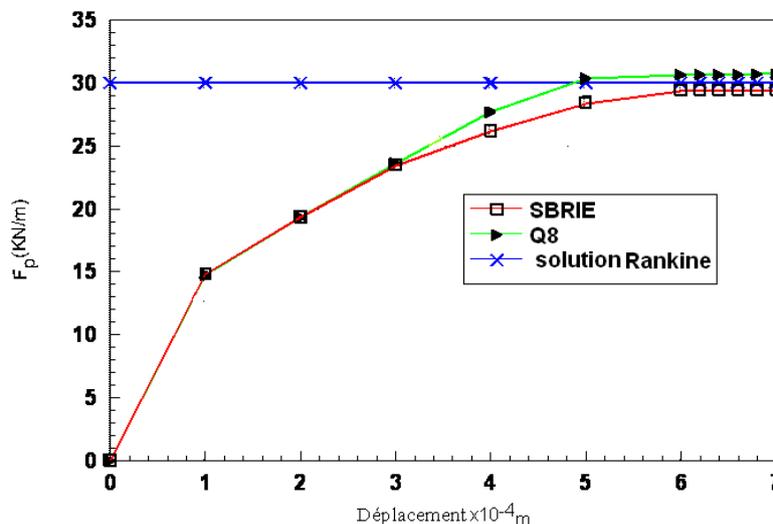


Figure 5.11 : Force passive par rapport au déplacement horizontal

5.4.6. Analyse axisymétrique non drainée

Ce problème à été traité dans la référence [Smit.04] en utilisant l'élément Q8. La figure (5.12) représente un seul élément SBRIE soumis à des incréments de déplacements verticaux de compression le long de sa face supérieure.

Les mêmes propriétés sont prises que celles de l'exemple de validation (4.8.1.4) du chapitre 4.

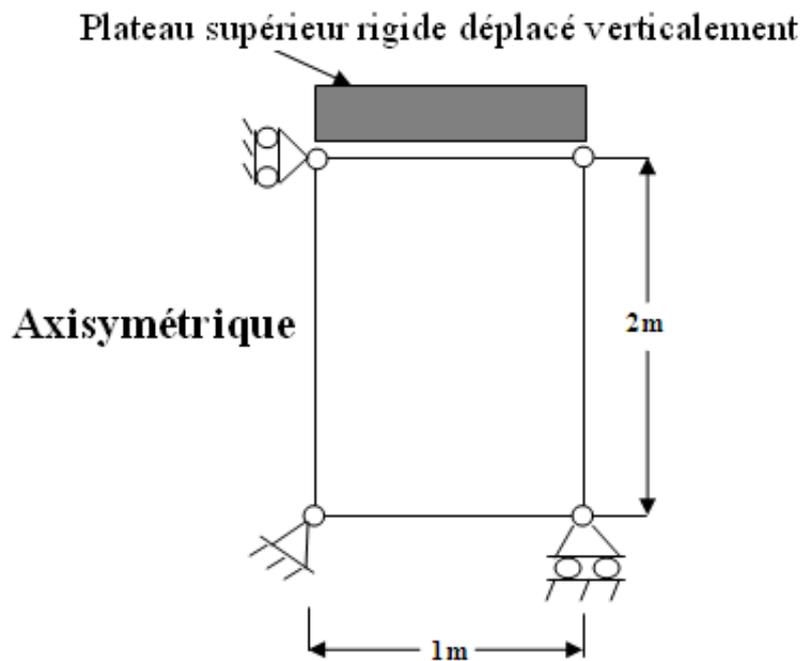


Figure 5.12 : Maillage du problème axisymétrique non drainé

Les résultats de la contrainte déviatorique par rapport au déplacement vertical sont tracés sur la Figure (5.13) pour les deux analyses non drainée et drainée.

Dans la première analyse, ($\psi = 0$), la contrainte déviatorique obtenue en utilisant l'élément SBRIE atteint un pic de 120,1 kN/m², ce qui est en bon accord avec la solution ferme 120,8 kN/m² donnée dans [Grif.85], et avec la valeur de 121kN / m² de l'élément Q8 donnée dans la référence [Smit.04]. La seconde analyse, qui comprend une règle d'écoulement associée ($\psi = 30^\circ$), ne montre aucun signe d'échec (rupture) due à la tendance à la dilatation. Dans ce cas, les pressions

interstitielles ont continués à se produire et la contrainte déviatorique continue d'augmenter, ce qui est de l'influence de la dilatation sur le comportement des deux éléments.

Déplacement vertical

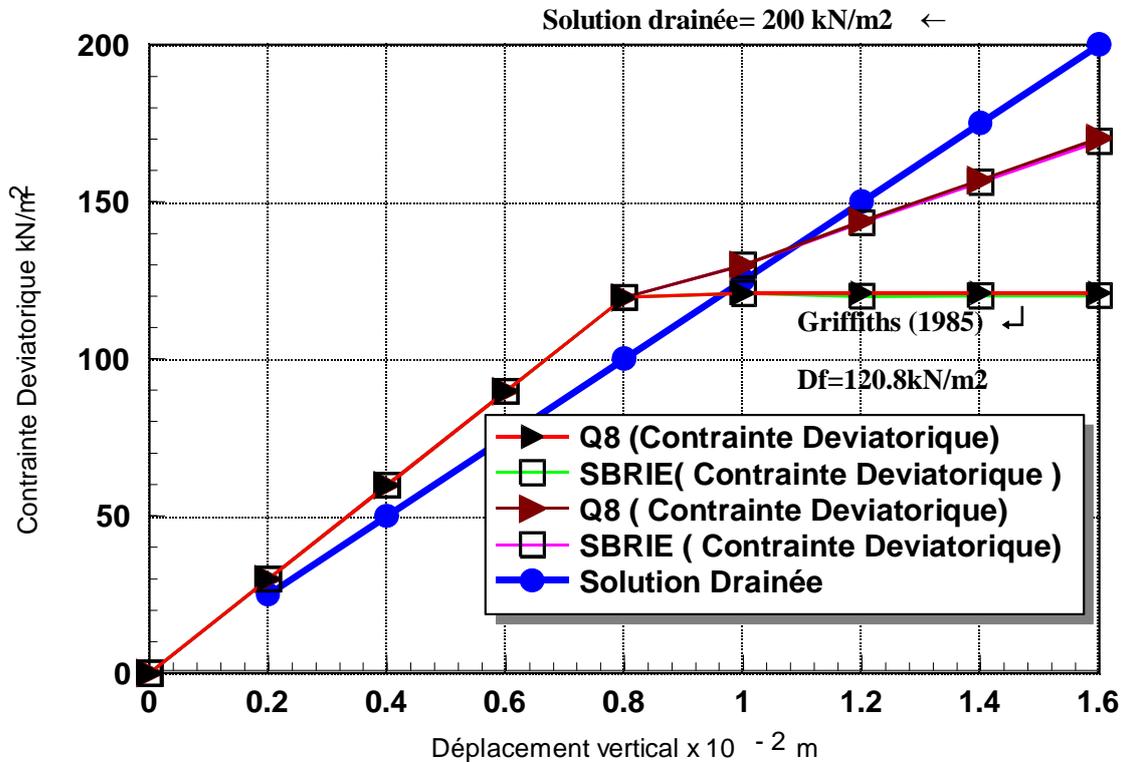


Figure 5.13 : Le déplacement vertical par rapport au contrainte déviatorique pour le chargement triaxial drainé et non drainé ($\psi = 0$ et $\psi = 30^\circ$).

5.5. Validation numérique de l'élément SBRIE en Dynamique.

La capacité pour résoudre les problèmes des valeurs propres et vecteurs propres est importante dans de nombreux aspects du travail par éléments finis. Par exemple, le nombre de valeurs propres nulles de la matrice de rigidité est un guide important pour la pertinence de cette matrice.

Dans ce contexte, le problème à résoudre est tout simplement

$$[K]\{u\} = \lambda\{u\} \quad (5.22)$$

Qui est un problème de valeurs propres dans une forme standard.

Mais le plus souvent, l'équation des valeurs propres va décrire une situation physique telle que les vibrations libres ou forcées d'un solide ou d'un fluide.

Pour un solide élastique en vibration libre l'équation est

$$[K_m]\{X\} - \omega^2 [M_m]\{X\} = 0 \quad (5.23)$$

Avec $[K_m]$ la rigidité du système, $[M_m]$ la matrice des masses globale, $\{X\}$ l'amplitude de déplacement, et ω^2 la fréquence angulaire.

Qui, bien que cette équation n'étant plus sous sa forme standard, elle peut facilement être convertie en cette forme standard. Dans ce cas la matrice de masse globale $[M_m]$ peut être concentrée ou consistante.

Dans ce paragraphe nous procédons à la validation de l'élément SBRIE en analyse vibratoire libre et forcée. Pour cela différents tests sont illustrés dans cette étude.

5.5.1 Valeurs propres en vibration libre d'un solide rectangulaire

Nominalement ce test traité par [Smit.04] représente un problème d'un solide élastique en porte à faux (Poutre cantilever) figure (5.14), la longueur dans la direction x est 4.0 et suivant y est de 1.0 avec une section transversale de 1.0 et une rigidité à la flexion de 1/12 soit 0.08333. Le coefficient de poisson est $\nu=0.3$ pour le maillage (3×1), et $\nu=0$ pour le maillage (5×1), et le module de Young est pris $E=1.0$. Le problème est en déformation plane avec masse concentrée. La masse par unité de surface est $\rho=1$.

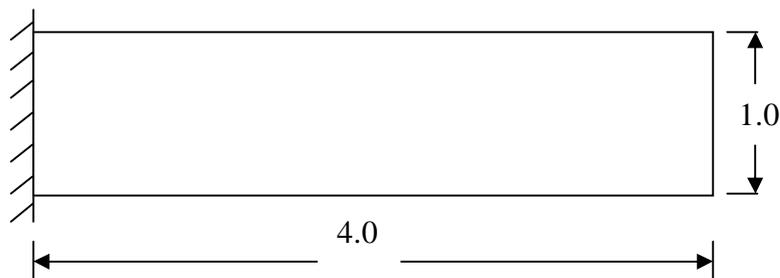


Figure 5.14 : Géométrie et maillage de la poutre.

Les résultats des valeurs propres sont illustrés dans le tableau (5.7) pour déformation plane. La fréquence fondamentale ω_1 et la fréquence axiale ω_2 sont calculées avec les différents éléments Q4, Q8, et SBRIE. Les résultats obtenus par l'élément SBRIE montrent que les valeurs des fréquences sont en bon accord avec celles obtenues par l'élément Q8 et avec celles de la solution analytique. La fréquence fondamentale obtenue par l'élément Q4 est considérablement plus

grande que celle de la solution analytique, ainsi l'élément Q4 est une mauvaise représentation du solide (la poutre élancée), au moins dans les modes de flexion.

Fréquences		Q4	Q8	SBRIE
Maillage 3×1	ω_1	0.0805	0.064	0.065
	ω_2	0.353	0.413	0.414
Maillage 5×1	ω_1	0.068	0.060	0.0593
	ω_2	0.391	0.391	0.391
Solution exacte	ω_1	$1.875^4 \times EI / \rho AL^4$	0.063	
	ω_2	$\pi / 2L\sqrt{E / \rho}$	0.393	

Tableau 5.7 : Valeurs propres de la poutre cantilever ''déformation plane''

Pour le cas en contrainte plane tableau (5.8), nous remarquons que les résultats des deux éléments SBRIE et Q8 et pour un maillage simple (3×1) convergent vers la solution de référence [Smit.88] alors que celles de l'élément Q4 et surtout pour la fréquence fondamentale ω_1 , l'élément Q4 est une mauvaise représentation de la poutre.

Fréquences		Q4	Q8	SBRIE
Maillage 3×1	ω_1	0.075	0.060	0.060
	ω_2	0.391	0.392	0.391
Maillage 5×1	ω_1	0.068	0.060	0.060
	ω_2	0.391	0.393	0.392

Tableau 5.8 : Valeurs propres de la poutre cantilever'' contrainte plane''

5.5.2 Vibration forcée d'un solide rectangulaire

Dans l'étude des vibrations forcées en analyse dynamique des structures, généralement on cherche à calculer la réponse du système à une perturbation dépendante du temps imposé. Pour valider l'emploi de l'élément SBRIE en vibration forcée on a proposé deux tests qui ont été traité par [Smit.88].

Pour le premier test figure (5.15) dans l'analyse vibratoire forcée on utilise la méthode de la réponse complexe décrite dans la référence [Smit.88]. La poutre cantilever est soumise à une force verticale harmonique $\cos \omega t$ au nœud 8 (ddl 12). Le taux d'amortissement γ est de 0,005 soit 5 % appliqué à tous les modes du système, le module de Young est $E=1$, le coefficient de Poisson $\nu=0.3$, fréquence forcée $\omega=0.3$ et la masse par unité de surface est $\rho=1$. Ici le pas de temps est pris égal à $1/20$ de la période ($2\pi/\omega$) soit disant 1.047. Le problème est en déformation plane.

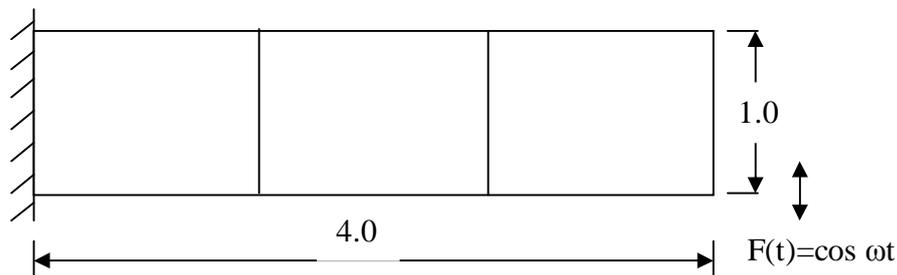


Figure 5.15 : Géométrie et maillage de la poutre cantilever soumise à une vibration forcée

La courbe illustrée dans la figure (5.16) montre les déplacements à l'extrémité de la poutre par rapport au pas de temps imposé (time-step) par l'utilisation des deux éléments Q8 et SBRIE. Nous pouvons voir que le comportement de l'élément SBRIE est strictement similaire à celui de l'élément Q8 en analyse vibratoire forcée.

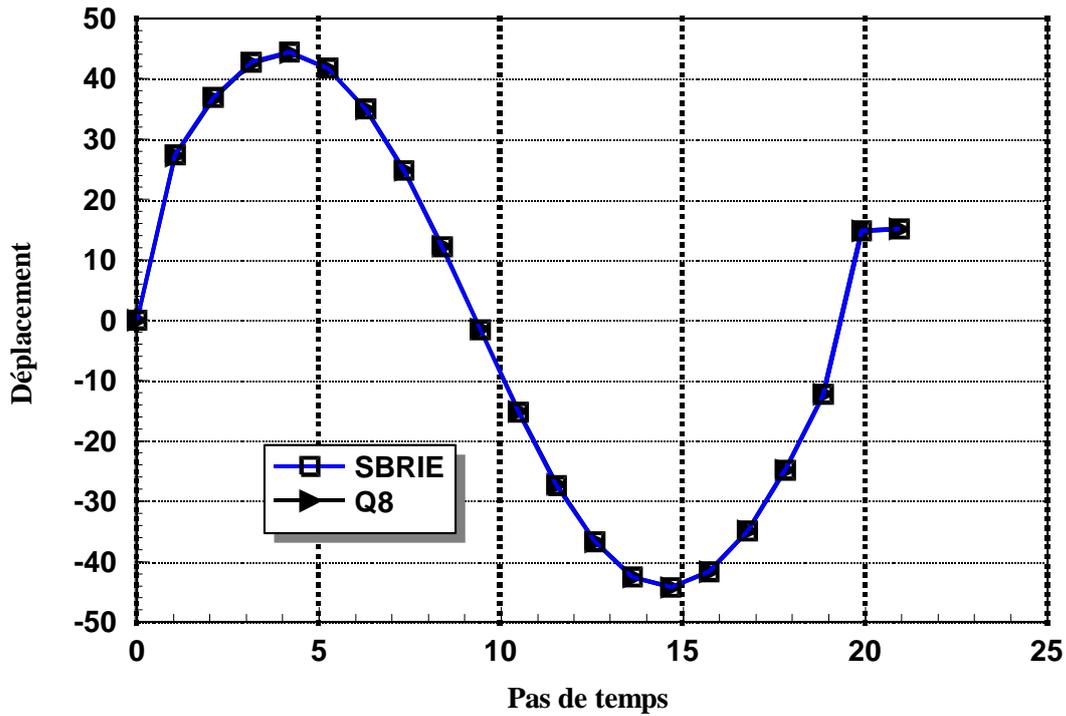


Figure 5.16 Vibration forcée d'un solide rectangulaire "déplacement par rapport au temps"

5.5.3 Vibration forcée d'un solide elasto-plastique rectangulaire

Pour le deuxième test figure (5.17), dans l'analyse vibratoire forcée on a utilisé la méthode d'intégration explicite décrite dans la référence [Smit.88]. La contrainte maximale de VonMises est $\sigma_{\max} = 50.000$, le module de Young est $E = 3.10^7$, le coefficient de Poisson $\nu = 0.3$ et la masse par unité de surface est $\rho = 0.7333.10^{-3}$, le multiplicateur de charge est $P_{ch} = 180$, le nombre de pas de temps $I_{step} = 700$. Le problème est en déformation plane.

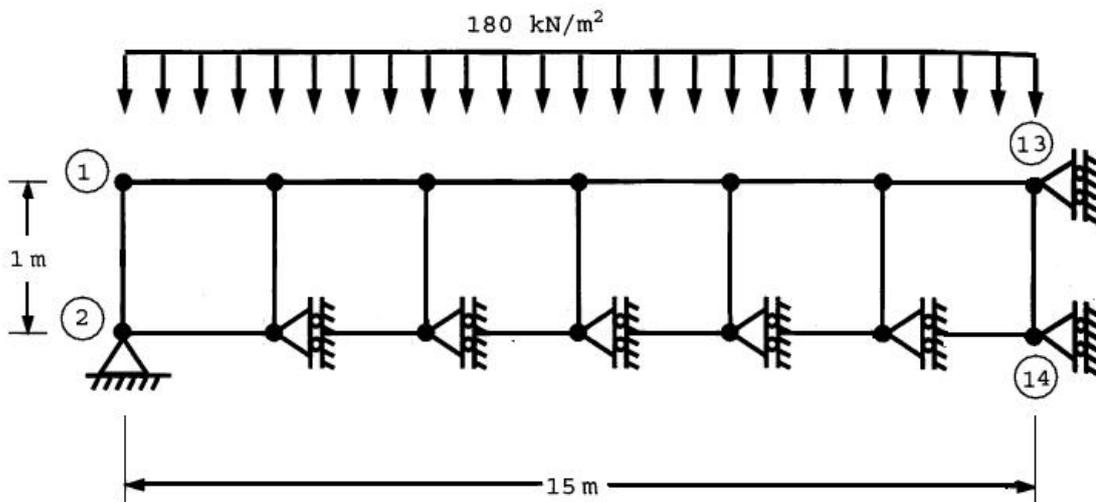


Figure 5.17 : Géométrie et maillage de la poutre cantilever "elasto-plastique"

Temps	Déplacements au nœud 13	
	Q8	SBRIE
0	0	0
$0.5000.10^{-4}$	$-0.2995.10^{-3}$	$-0.3087.10^{-3}$
$0.1000.10^{-3}$	$-0.1214.10^{-2}$	$-0.1222.10^{-2}$
$0.1500.10^{-3}$	$-0.2684.10^{-2}$	$-0.2697.10^{-2}$
$0.2000.10^{-3}$	$-0.4867.10^{-2}$	$-0.4977.10^{-2}$
$0.2500.10^{-3}$	$-0.8084.10^{-2}$	$-0.8259.10^{-2}$
$0.3000.10^{-3}$	$-0.1231.10^{-1}$	$-0.1251.10^{-1}$
$0.3500.10^{-3}$	$-0.1742.10^{-1}$	$-0.1759.10^{-1}$
$0.4000.10^{-3}$	$-0.2331.10^{-1}$	$-0.2342.10^{-1}$
$0.4500.10^{-3}$	$-0.2991.10^{-1}$	$-0.3004.10^{-1}$
$0.5000.10^{-3}$	$-0.3724.10^{-1}$	$-0.3715.10^{-1}$
$0.5500.10^{-3}$	$-0.4494.10^{-1}$	$-0.4457.10^{-1}$
$0.6000.10^{-3}$	$-0.5287.10^{-1}$	$-0.5229.10^{-1}$
$0.6500.10^{-3}$	$-0.6113.10^{-1}$	$-0.6047.10^{-1}$
$0.7000.10^{-3}$	$-0.6982.10^{-1}$	$-0.6917.10^{-1}$

Tableau 5.9 : Déplacements au nœud 13 de la poutre cantilever elasto-plastique

Les résultats des déplacements sont illustrés dans le tableau (5.9). Ces résultats montrent bien que le comportement de l'élément SBRIE est similaire à l'élément Q8.

5.6. Conclusion

Dans ce chapitre nous avons pu faire en premier lieu une reformulation de l'élément rectangulaire SBRIE cité dans la référence [Sabi.95a] et faire introduire sur cet élément la notion d'isoparamétrie, ensuite valider cet élément en d'autres analyses. A travers plusieurs tests numériques réputés sévères nous avons constaté que l'élément SBRIE est similaire à l'élément Q8 en analyse non-linéaire matérielle et en analyse vibratoire libre et forcée. L'extension de l'approche en déformation à travers l'élément membranaire SBRIE à l'analyse elasto-plastique et dynamique à été parmi les buts essentiels de ce chapitre.

5.6. Conclusion générale

Nous avons présenté dans ce travail une étude bibliographique détaillée sur les éléments à modèles en déformation existants, de types membranaires, solides, plaques, et coques.

Un nouvel élément nommé SBREDR rectangulaire à 4 nœuds avec un degré de liberté additionnel de rotation dans le plan basé sur l'approche en déformation à été développé pour l'analyse élastique et elasto-plastique des structures en membranes. Nous avons utilisé l'intégration numérique pour la première fois à la place de l'intégration analytique dans la construction de la matrice de rigidité élémentaire de l'élément développé. L'élément est simple et avec uniquement 12 degrés de liberté et contient des termes polynômiaux de degrés élevés. Nous avons essayé d'améliorer le comportement en membrane des structures à travers ce nouvel élément. En effet les résultats numériques obtenus en utilisant cet élément sont en bon accord avec les résultats analytiques. Ce nouvel élément à été trouvé numériquement similaire aux éléments Q8 et T6, mais ces derniers utilisent plus de degrés de liberté. Cela conduit à un gain considérable en temps de calcul, et alors l'élément SBREDR peut être plus précis "dans quelques cas" et moins coûteux, à la fois dans les deux analyses élastique et elasto-plastique. Cet élément a un taux de convergence assez rapide vers les solutions de référence pour tous les tests, et il peut être facilement appliqué à la solution de problèmes techniques linéaires et matériellement non linéaires.

Dans le chapitre 4 nous avons présenté avant d'entamer la validation en non-linéaire un bref aperçu sur l'analyse elasto-plastique. Nous avons utilisé dans cette analyse le concept de rigidité constante ainsi que les méthodes viscoplastiques et contraintes initiales. Trois critères de ruptures sont utilisés ; VonMises, Tresca, et Mohr-Coulomb. Pour la validation, l'élément développé à été testé par plusieurs tests numériques non-linéaires réputés sévères. Les résultats obtenus confirment sa bonne performance dans cette analyse.

Dans le dernier chapitre l'introduction de la notion d'isoparamétrie sur l'élément SBRIE, avait pour but de palier à plusieurs problèmes rencontrés dans l'ancienne formulation des éléments à modèles en déformation. En effet l'intégration numérique à été introduite en faisant une

reformulation de cet élément. Nous avons calculé ces fonctions de formes ainsi que sa matrice de déformation. La validation de l'élément SBRIE en non-linéaire à été présentée dans le même chapitre 5. A travers une série de tests numériques en elasto-plasticité, l'élément s'est avéré très efficace dans ce type d'analyse. Une autre extension de l'élément à l'analyse dynamique s'est faite à travers des exemples numériques. L'élément SBRIE à remarquablement montré sa fiabilité et son efficacité dans l'analyse vibratoire libre et forcée. En effet pour cette validation l'élément possède de très bonnes capacités pour résoudre les problèmes des valeurs propres. Les résultats obtenus par l'élément montrent que les valeurs des fréquences sont en bon accord avec celles obtenues par l'élément Q8 et avec celles de la solution analytique. Pour valider l'emploi de cet élément en vibration forcée on à proposé deux tests qui ont été traités par [Smi.88]. Le premier utilise la méthode de la réponse complexe, et le deuxième utilise la méthode d'intégration explicite décrites toutes les deux dans cette même référence [Smi.88]. Les résultats montrent que le comportement de l'élément SBRIE est similaire à celui de l'élément Q8 en réponse vibratoire forcée.

BIBLIOGRAPHIE

BIBLIOGRAPHIE

- [Allm.84] Allman D.J. A compatible triangular element including vertex rotations for plane elasticity. *Compt.struct.* 19, 1-8 (1984).
- [Allm.86] Allman D.J. The constant strain triangle with drilling rotations: a simple prospect for shell analysis. Royal Aircraft Establishment. Technical report 86051, Farnborough, U.K. (1986).
- [Allm.88a] Allman D.J. A quadrilateral finite element including vertex rotations for plane elasticity analysis. *IJNME* 26, 717-730 (1988).
- [Allm.88b] Allman D.J. Evaluation of the constant strain triangle with drilling rotations. *IJN* 26, 2645-2655 (1988).
- [Amin.92] Aminpour M.A. Direct formulation of a hybrid 4-node shell element with drilling degrees of freedom. *Int. J. Numer. Methods Eng.* 35, 997-1013 (1992).
- [Ashw.71a] Ashwell D.G, Sabir A.B. Limitation of certain curved finite elements applied to arches. *IJMS* 13, 133-139 (1971)
- [Ashw.71b] Ashwell D.G, Sabir A.B, Roberts T.M. Further studies in application of curved finite elements to circular arches. *International Journal of Mechanics Science* 13, 507-17 (1971).
- [Ashw.72a] Ashwell D.G, Sabir A.B. A new cylindrical shell finite element based on simple indépendant strain functions. *IJMS* 14, 171-183 (1972)
- [Ashw.74] Ashwell D.G, Sabir A.B. On the finite element calculation of stress distribution in arches. *International Journal of Mechanical Sciences* 16, 21-29 (1974).
- [Assa.84] Assan AE. Reservatorios com parede ondulada- um enfoque pelo método dos elementos finitos. Doctoral Dissertation, Sao Carlos, SP (Brasil): Escola de Engenharia de Sao Carlos (1984).
- [Assa.99] Assan A.E. Analysis of multiple cylindrical stiffened barrel shell structures by strain based finite element. *Thin-Walled Structures* 35, 233-253 (1999).
- [Ayad.93] Ayad R. Eléments finis de plaque et coque en formulation mixte avec projection en cisaillement. Thèse de Doctorat soutenue le 14 03 (1993).
- [Bato.90] Batoz J.L, Dhatt G, Modélisation des structures par éléments finis, Solides élastiques, Edition Hermès, Paris.1, (1990).
- [Bela.97] Belarbi M.T, Charif .A. Analyse des plaques relativement épaisses à l'aide d'un élément cubique simple basé sur le modèle en déformation. 1er Congrès arabe de la mécanique. Damas (Syrie) 1-3 Juin 2, 25-30 (1997).
- [Bela.98] Belarbi M.T, Charif .A. Nouvel élément secteur basé sur le modèle de déformation avec rotation dans le plan. *Revue européenne des éléments finis.* 7, 439-458 (1998).

- [Bela.99] Belarbi M.T, Charif .A. Développement d'un nouvel élément hexaédrique simple basé sur le modèle en déformation pour l'étude des plaques minces et épaisses. *Revue européenne des éléments finis*. 8, 135-157 (1999).
- [Bela.05] Belarbi M.T, Bourezane.M. On improved Sabir triangular element with drilling rotation. *Revue européenne de Génie Civil*. 9, 1151-1175 (2005).
- [Bela.05] Belarbi M.T, Maalam.T. On improved rectangular finite element for plane linear elasticity analysis, *Revue Européenne des Eléments Finis* 40, 985–997 (2005).
- [Belo.05] Belouar. L, Guenfoud M. A new rectangular finite element based on the strain approach for plate bending. *Thin-Walled Structures* 43, 47–63 (2005).
- [Berg.85] Bergan P.G, Felipa C.A. A triangular membrane element with rotational degrees of freedom. *CMAME*. 50, 25-69 (1985).
- [Bish.60] Bishop A.W, Morgenstern N. Stability coefficients for earth slops. *Geotechnique* 10, N°4, 129-150 (1960).
- [Cant.68] Cantin G, Clouth.R.W. A curved cylindrical shell finite element. *AIAA Journal* 6, 1057-1062 (1968).
- [Carp.85] Carpenter N, Stolarski M, Belytschko T. A flat triangular shell element with improved membrane interpolation. *Comm.App.Num.Meth*. 1, 161-169 (1985).
- [Char.82] Charchafchi T.A. Curved rectangular and general quadrilateral shell elements for cylindrical shells. In: Whitman J, editor. *Mathematical of Finite Elements and Applications IV*. London: Academic Press, 231–239 (1982).
- [Cook.91] Cook. R.D. Modified formulations for nine-dof plane triangles that include vertex rotations. *INJNM* 31, 825-835 (1991).
- [Cook.86] Cook. R.D. On the Allman triangle and a related quadrilateral element. *Computers & Structures*. 22, 1065-1067 (1986).
- [Cook.87] Cook. R.D. A plane hybrid element with rotational d.o.f and adjustable stiffness. *IJNME* 24, 1499-1508 (1987).
- [Felip.03] Fellipa. C.A. A study of optimal membrane triangles with drilling freedoms. *Comput. Methods Appl. Mech. Eng*. 192, 2125–2168 (2003).
- [Grif.85] Griffith D.V, The effect of pore fluid compressibility on failure loads in elastic plastic soil, *International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics* 9, 253–259 (1985).
- [Grif.86] Griffiths D.V, Willson S.M, An explicit form of the plastic matrix for Mohr–Coulomb materials, *Communications in Applied Numerical Methods* 2, 523–529 (1986).

- [Hime.11] Himeur M, Guenfoud M. Bending triangular finite element with a fictitious fourth node based on the strain approach, *European Journal of Computational Mechanics* 20, 455–485 (2012).
- [Ibra.90] Ibrahimovic A., Taylor. R.L, Wilson E.L. A robust quadrilateral membrane finite element with drilling degrees of freedom, *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 30, 445–457 (1990).
- [Iron.68] Irons, B. M. and Zienkiewicz O. C. “The Isoparametric Finite Element System “ A New Concept in Finite Element Analysis”. Proc. Conf. Recent Advances in Stress Analysis. Royal Aeronautical Society. London (1968).
- [Jaam.88] Jaamei S. JET thin shell finite element with Lausanne, July (1988).
- [Jean.97] Jean C. Mécanique des milieux continus, cours et exercices corrigés. 2eme edition. Dunod, Paris (1997).
- [Jett.86] Jetteur Ph. A shallow shell element with in-plane rotational degrees of freedom. IREM Internal report 86/3, Swiss Federal Institute of Technology, Lausanne, March (1986).
- [Kugl.10] Kugler S, Fotiu P, Murin J. A highly efficient membrane finite element with drilling degrees of freedom. *Acta Mechanica* 213, 323–348 (2010).
- [MacN.85] Mac-Neal R.H, Harder R.L, A proposed standard set of problems to test finite element accuracy. *Finite Element in Analysis and Design* 11, 3–20 (1985).
- [MacN.88] Mac Neal R.H, Harder R.L. A refined four noded membrane element with rotational degrees of freedom. *Computers & Structures*. 28, 75-84 (1988).
- [Made.12] Madeo A, Zagari G, Casciaro R. An isostatic quadrilateral membrane finite element with drilling rotations and no spurious modes. *Finite Element in Analysis and Design* 50, 21–32 (2012).
- [Miao.11] Miaojuan P, Dongming L, Yumin C., The complex variable element-free Galerkin (CVEFG) method for elasto-plasticity problems. *Engineering Structures* 33 127–135 (2011).
- [Ming.10] Ming H, Zhenfeng Z, Changyu S. An effective planar triangular element with drilling rotation. *Finite Element in Analysis and Design* 46, 1031–1036 (2010).
- [Owen.86] Owen. D.R.J, Hinton. E. Finite elements in plasticity. Pineridge Press, Swansea (1986).
- [Pian.84] Pian T.H, Sumihara K. Rational approach for assumed stress finite elements, *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 20, 1685–1695. (1984).
- [Pimp.04] Pimpinelli G. An assumed strain quadrilateral element with drilling degrees of freedom. *Finite Element in Analysis and Design*. 41, 267–283 (2004).

- [Sabi.71c] Sabir A.B, Ashwell D.G. A comparison of curved beam finite elements when used in vibration problems. *Journal of Sound and Vibration*, Volume 18, Issue 4, 22 October 1971, Pages 555-563 766-775(1972).
- [Sabi.72b] Sabir A.B, Lock AC. The application of finite element to the large deflection geometrically nonlinear behavior of cylindrical shells. *International Journal of Variational Methods in Engineering Southampton* 766-775(1972).
- [Sabi.73] Sabir A.B, Lock AC. Large deflection geometrically nonlinear finite elements analysis of circular arches. *International Journal of Mechanical Sciences* 15, 37-47 (1973).
- [Sabi.75] Sabir A.B. Stiffness matrices for the general deformation (out of plane and inplane) of curved beam elements based on independent strain functions. *The mathematics of finite elements and applications II*. Editor J.R.Whiteemen, Chapter 34, 411-421 Academic Press (1975).
- [Sabi.78] Sabir A.B, Ashwell D.G. Diffusion of concentrated loads into thin cylindrical shells, the mathematics of finite elements and application III, Editor J.R.Whiteemen, Academic Press (1978).
- [Sabi.82] Sabir A.B, Charchafchi T.A. Curved rectangular and quadrilateral shell element for cylindrical shell. *The mathematics of finite elements and application IV* Editor. JR.Whiteman 231- 239 (1982).
- [Sabi.83a] Sabir A.B. A new class of finite elements for plane elasticité problems, CAFEM 7th, international Conf, structures. Mechanics. In reactor Technology Chicago (1983).
- [Sabi.83c] Sabir A.B. Strain based finite elements for the analysis of cylinders ith holes and normally intersecting cylinders. *Nuclear engineering and design*. 76, 111-120 (1983).
- [Sabi.83b] Sabir A.B, Chow F.Y. Elastic buckling of flat panels containing circular and square holes. *International conference on instability and plastic collapse of steel structures*. Manchester University (1983).
- [Sabi.84] Sabir A.B. Strain based elements for the analysis of shear walls, *Proceeding International Conference on building*. Hong Kong University, 447-453 (1984).
- [Sabi.85a] Sabir A.B. A rectangular and triangular plane elasticity element with drilling degrees of freedom, Chap 9 in *Proceeding of the 2nd International Conference on Variational Methods in Engineering*. Southampton University, Springer-Verlag, Berlin, 17-25 (1985).
- [Sabi.85b] Sabir A.B, Ramadhani F. A shallow shell finite element for general shell analysis, *Variational Methods in Engineering Proceeding of the 2nd International Conference*, University of Southampton England (1985).
- [Sabi.86] Sabir A.B, Salhi H.Y.A strain based finite element for general plane elasticity in polar coordinates, *Res. Mechanica* 19, 1-16 (1986).
- [Sabi.86a] Sabir A.B, F.Y.Chow. Elastic buckling of plates containing eccentrically located

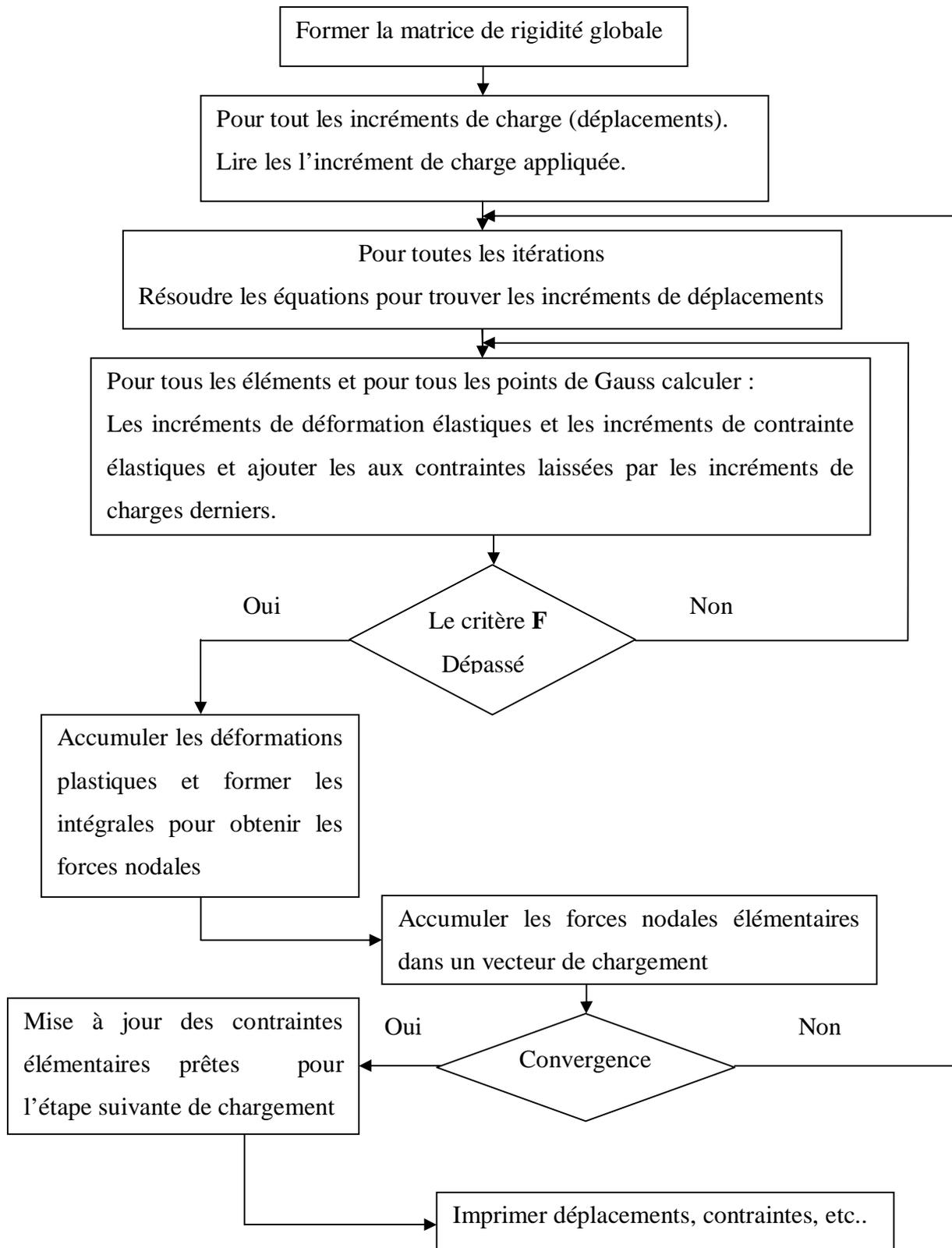
- circular holes. *Thin-Walled Structures* 4, 135-149 (1986).
- [Sabi.94a]** Sabir A.B, M.S. Djoudi, A.Sfendji. Natural frequencies of arch bridges with slab decks by the finite element method. *Thin-Walled Structures* 18, 31-45 (1994).
- [Sabi.94b]** Sabir A.B, M.S. Djoudi, A.Sfendji. The effect of shear deformation on the vibration of circular arches by the finite element method. *Thin-Walled Structures* 18, 47-66 (1994).
- [Sabi.94c]** Sabir A.B, A.Sfendji, T.G. Hughes. Strain-based finite element for the natural frequencies of cylindrical shells. *Thin-Walled Structures* 18, 67-82 (1994).
- [Sabi.95a]** Sabir A.B, A.Sfendji. Triangular and Rectangular plane elasticity finite elements. *Thin-Walled Structures* 21, 225-232 (1995).
- [Sabi.95b]** Sabir A.B, M.S. Djoudi. Shallow shell finite element for the large deflection geometrically non-linear analysis of shells and plates. *Thin-Walled Structures* 21, 253-267 (1995).
- [Sabi.95c]** M.S. Djoudi, Sabir A.B. Finite element analysis of singly and doubly curved dams of constant or variable thickness. *Thin-Walled Structures* 21, 279-289 (1995).
- [Sabi.96]** Sabir A.B, Moussa.A.I. Finite element analysis of cylindrical conical storage tanks using strain based elements. *Structural Engineering Review*. 8, 367-374 (1996).
- [Sabi.97a]** Sabir A.B, Moussa.A.I. Analysis of fluted conical shell roofs using the finite element method. *Computers and structures*. 64, 239-251 (1997).
- [Sabi.97b]** Sabir A.B, Davies G.T. Natural frequencies of plates when subjected to in-plane uniaxial, biaxial or shear loading. *Thin-Walled Structures* 28, 321-335 (1997).
- [Sabi.97c]** Sabir A.B, Davies G.T. Natural frequencies of square plates with reinforced central holes subjected to in-plane loads. *Thin-Walled Structures* 28, 337-353 (1997).
- [Smit.88]** Smith I.M, Griffith D.V. *Programming the Finite Element Method*, second ed., John Wiley & Sons, UK, (1988).
- [Smit.04]** Smith I.M, Griffith D.V. *Programming the Finite Element Method*, 4th ed., John Wiley & Sons, Ltd, UK, (2004).
- [Taig.61]** Taig. I.C. *Structural analysis by the matrix displacement method*. Report S017, English Electric Aviation Report, England, (1961).
- [Tayl.76]** Taylor R.L, Beresford P.J, Wilson E.L, Non conforming element for stress analysis, *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 10 1211–1219 (1976).
- [Tayl.85]** Taylor R.L, Simo J.C. Bending an membrane elements for analysis of thin shells. *Proceeding of the NUMETA 85 Conference*. Middleton & pande (eds), Rotterdam 587-591 (1985).

- [Timo.51]** Timoshenko S, Goodier J.N, Theory of Elasticity, 2nd ed., McGraw-Hill, New York, 1951.
- [Wils.73]** Wilson E.L, Taylor R., Doherty W.P, Ghaboussi J. Incompatible displacement models, in: Fenves et al. (Ed.), Numerical and Computer Methods in Structural Mechanics, Academic Press, New York, 43–57 (1973).
- [Yunu.89]** Yunus S.M, Saigal S, Cook R.D. On improved hybrid finite element with rotational degrees of freedom. IJNME 28, 785-800 (1989).
- [Zien.73]** Zienkiewicz, O.C. La méthode des éléments finis appliquée à l'art de l'ingénieur. Ediscience, Paris (1973).

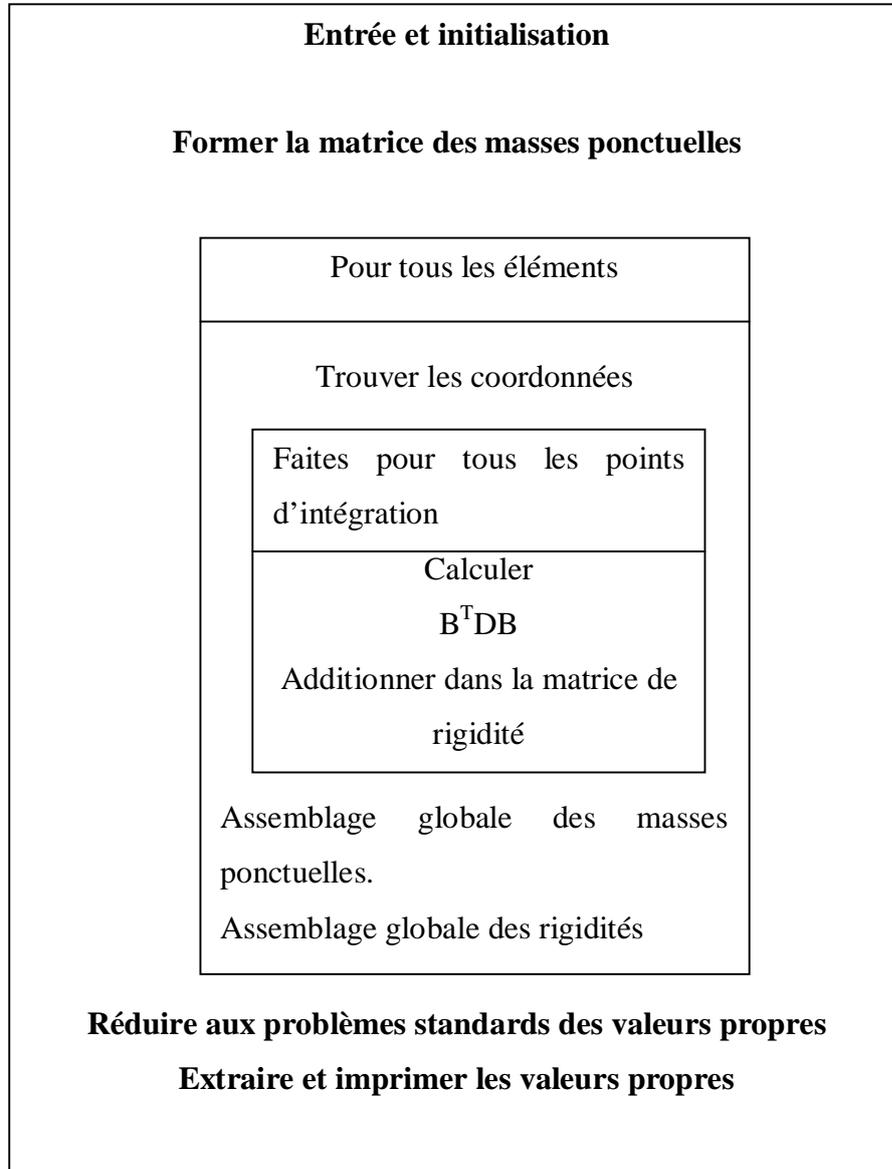
ANNEXE

Annexe A

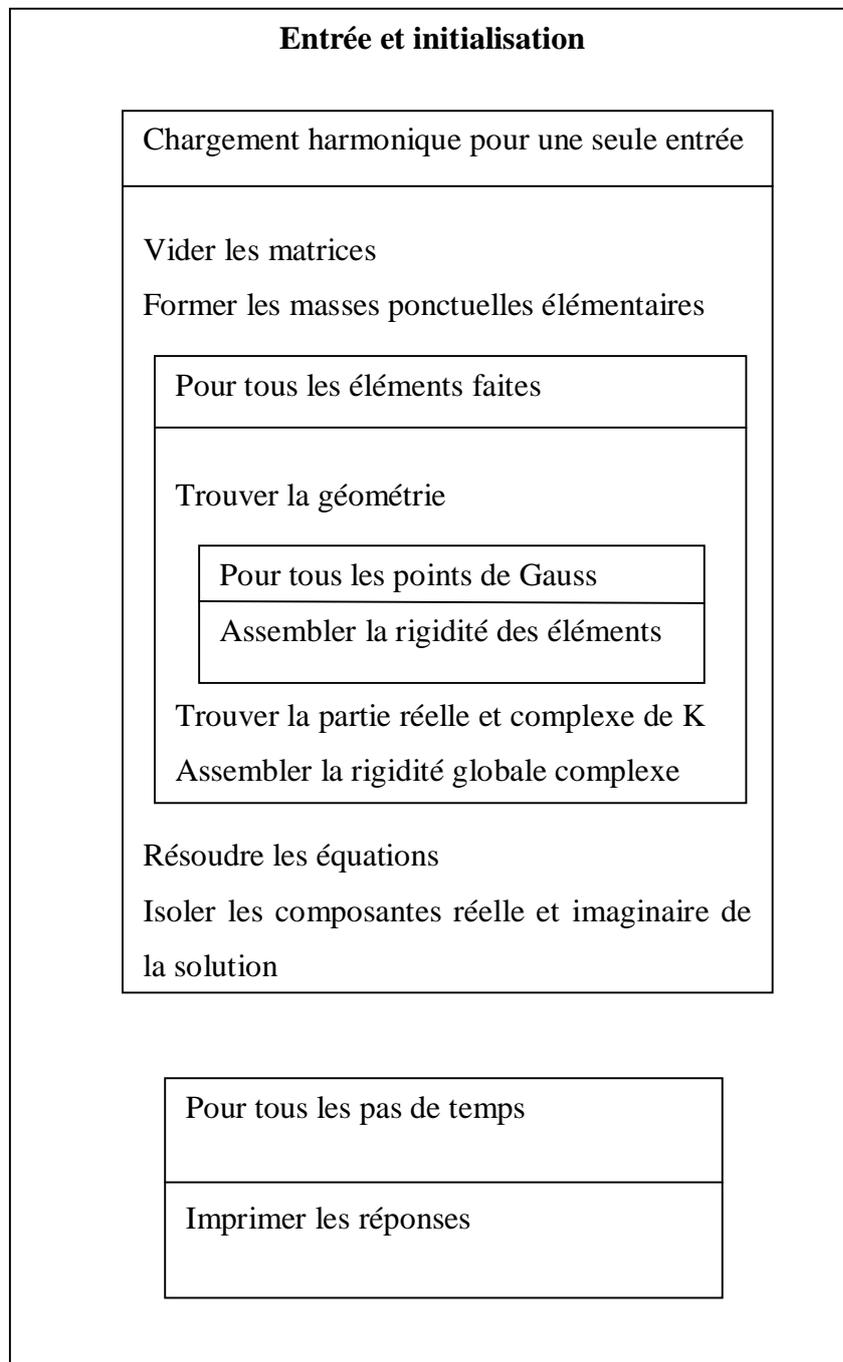
Organigramme de l'algorithme visco-plastique



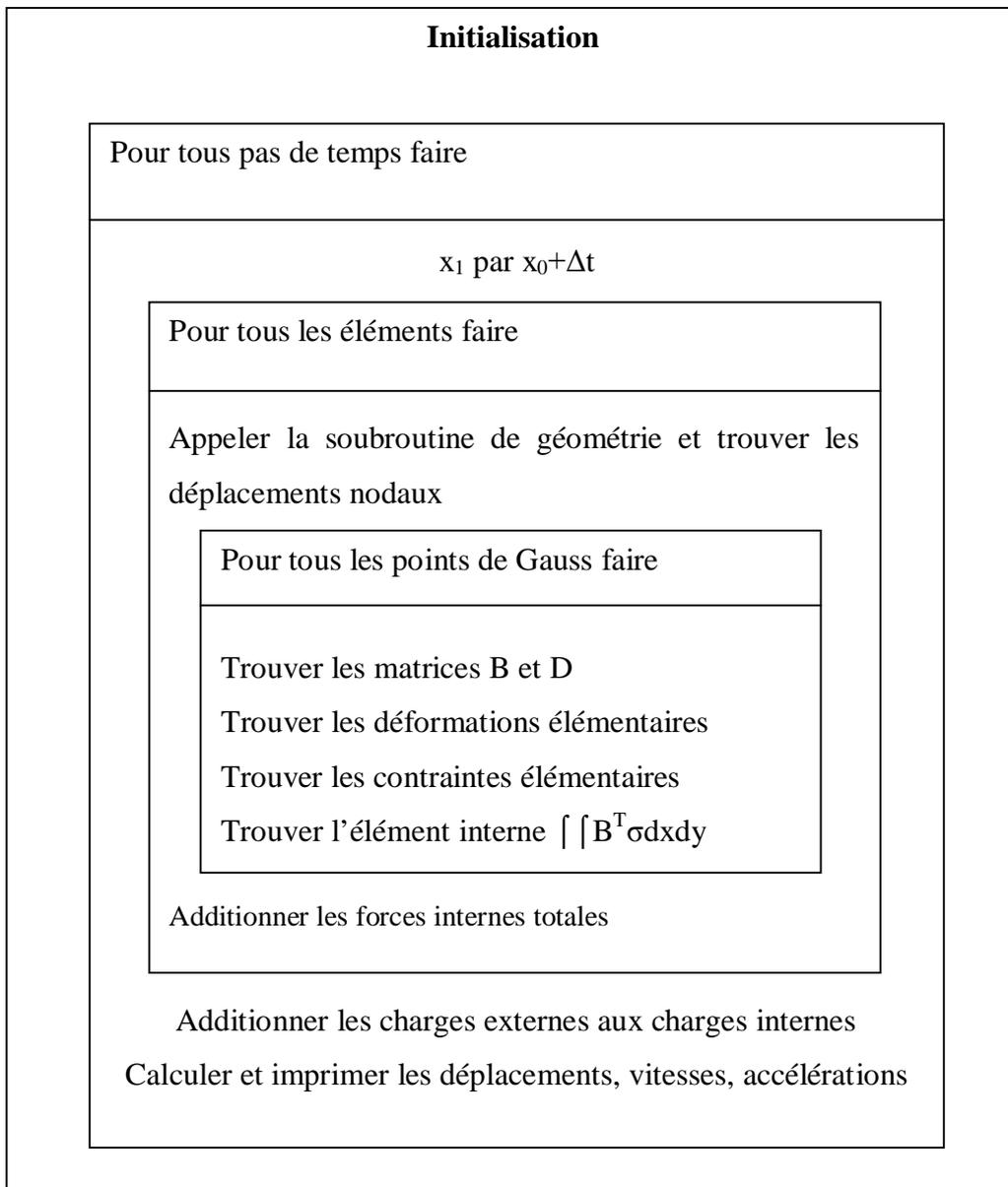
Organigramme du programme de vibration libre d'un solide rectangulaire



Organigramme du programme de vibration forcée d'un solide rectangulaire



Organigramme du programme de vibration forcée d'un solide elasto-plastique rectangulaire



Les composantes de la matrice [C] de dimensions [12×12] de l'élément SBREDR sont:

$$[C] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -y & x & y & xy & 0 & 0.5(y^2 + x^2) & y^2 & xy^2 + y^2 & x^2 y^3 & 0 \\ 0 & 1 & x & 0 & x & x^2/2 & y & xy & y^2 & -(x^2 y + x^2) & -x^3 y^2 & x^2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -y & -2xy - 2(x + y) & -3x^2 y^2 & x \end{bmatrix}$$

Où x_i et y_i sont les coordonnées des nœuds i ($i=1,4$), et la matrice [C] est donnée par :

$$[C] = [[C_1][C_2][C_3][C_4]]^T.$$

L'opérateur différentiel est

$$[L] = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix}$$