République Algérienne Démocratique et Populaire

Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

UNIVERSITÉ MOHAMED KHIDER, BISKRA

FACULTÉ des SCIENCES EXACTES et des SCIENCES de la NATURE et de la VIE

DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES

Mémoire présenté en vue de l'obtention du Diplôme **:**

MASTER en Mathématiques

Option : **Analyse**

Par

Saadallah Ouijdane Chahinez

Titre :

Méthode de perturbation pour résoudre des équations différentielles

Membres du Comité d'Examen :

Dr.	**Silabdi Noureddine**	UMKB	Président
Dr.	**Laiadi Abdelkader**	UMKB	Encadreur
Dr.	**Rahmani Nacer**	UMKB	Examinateur

Juin 2018

Dédicace

Je dédie ce humble travail a mes chers parents à qui je dois compte tout ce

travail est le fruit de

leur

amour, leurs encouragement et sacrifces.

A ma chère mère.

A mon cher père.

A ma chère grande mère.

A mes chères soeurs Ania Ritadj,et Anfal Rodeina.

A mes chers frères Mostefa hichem, Abdennour Nizar.

A toute personne qui ont contribué à la réalisation de

ce travail.

REMERCIEMENTS

J'aimerais en premier lieu remercier mon dieu Allah qui m'a donné la volonté et le courage pour la réalisation de ce travail.

Je tiens { remercier tout d'abord mon encadreur Monsieur **Laiadi Abdelkader** pour m'avoir proposé le thème de ce mémoire et m'avoir dirigée tout le long de mon travail, ses critiques et ces conseils m'ont été précieux.

Je remercie également Mr **Silaabdi Noureddine** de l'honneur qu'il accepté d'etre le président de jury.

Je remercie une autre fois et vivement **Rahmani Naceur** qui a bien voulu d'éxaminer ce travail

Et en fin j'adresse mes s'incère remerciments à mes parents, mes frères et mes soeurs, mes amis et à tous qui sont contribué de prés ou de loin à l'élaboration de ce travail.

Table des matières

Table des figures

Introduction

La théorie des perturbations est un domaine des mathématiques, qui consiste à étudier les contextes où il est possible de trouver une solution approchée à une équation en partant de la solution d'un problème plus simple. Plus précisément, on cherche une solution approchée à une équation (E_ϵ) (dépendante d'un paramètre ε), sachant que la solution de l'équation(E_0) (correspondant à la valeur $\epsilon = 0$) est connue exactement. L'équation mathématique (E_ϵ) peut être par exemple une équation algébrique ou une équation différentielle. La méthode consiste à chercher la solution approchée de l'équation (E_ϵ) sous la forme d'un développement en série des puissances du paramètre ε, cette solution approchée étant supposée être une approximation d'autant meilleure de la solution exacte, mais inconnue, que la valeur absolue du paramètre ε est plus « petite ». La question de la convergence de cette série se pose alors. Ce problème a été réglé pour l'astronomie par Poincaré en 1892 : la « série » de perturbation doit être comprise mathématiquement comme un développement asymptotique au voisinage de zéro, et non comme une série ordinaire convergente uniformément.

Ce travail est composé de trois chapitres :

Le premier chapitre contient quelques notions préliminaires concernant l'Analyse asymptotique et les développements asymptotiques.

Dans **le deuxième chapitre,** on présente quelques définitions sur les pertubations regulières et singulières et aussi on traite quelques problèmes aux limites (équation différentielle ordinaire) en utilisant la méthode de pertubation (solution approchée).

Le troisième chapitre traite le problème d'un écoulement potentiel d'un fluide incompressible et non visqueux. La solution exacte du problème envisagée est impossible à obtenir à cause de la présence du terme non linéaire. On peut résoudre ce problème numériquement en se basant sur la même méthode décrite dans le chapitre précédent.

Chapitre 1

Méthode asymptotique

La méthode asymptotique numérique présente un outil de calcul pour résoudre numériquement des équations non linéaire. Les approximations tangentes classiques sont remplacées par des séries entières tronquées à un ordre relativement élevé. Le principe avantage des méthodes asymptotique numérique (MAN) est de permettre un pilotage automatique a posteriori de la longueur de pas de continuation d'une manière claire, On se propose, dans ce chapitre de définir les outils essentiels pour aboutir à la notion de développement asymptotique. Plusieurs approches sont possibles mais comme l'esprit de cette analyse est conduire à des méthodes utilitaires. On utilise un système de fonctions d'ordre sur lequel existe un ordre total.

1.1 Analyse asymptotique

Analyse asymptotique est une méthode d'analyse qui permet de classer les comportements de fonctions dans un voisinage donnée en se concentrant sur certaines tendances caractéristique. On l'exprime en générale au moyen des relations grand (O), petit (o) et équivalent $(\sim)$.

1.1.1 Relation de comparaison

Dans toute la suite, D designe un intervalle de $\mathbb{R}$ et $a \in \overline{\mathbf{D}}$.

les fonctions f et g sont définies sur un voisinage de a.

La relation prépondérance (petit) (o) :

f est négligéable devant g au voisinage de a, noté $\mathbf{f} = \mathbf{o_a}(\mathbf{g})$, s'il existe un voisinage V de a et une fonction Φ telle que :

$\lim\limits_{a} \Phi(x) = 0$ et $f\ (x) = \Phi(x)\ g(x), \forall x \in V \cap\ D$.

La relation équivalent ($\sim$) :

f et g sont équivalentes au voisinage de a, noté $\mathbf{f} \underset{a}{\sim} \mathbf{g}$, s'il existe un voisinage V de a et une fonction K telle que :

$\lim\limits_{a} K\,(x) = 1$ et $f(x) = K\,(x)\, g(x), \forall x \in V \cap\ D$

La relation domination (grand) (O) :

f est dominé par g de a, noté $\mathbf{f} = \mathbf{O}_a(\mathbf{g})$, s'il existe un voisinage V de a et une fonction U bornée au voisinage de a telle que :

$f\ (x) = U(x)g(x), \forall x \in V \cap\ D$.

- $\exp\left(\dfrac{-1}{x}\right) = \underset{x \longrightarrow 0}{o}(x^m)$, pour tout m
- $cosx + x^{20} + exp(x) \underset{x \longrightarrow \infty}{\sim} exp(x)$
- $\log\left(1 + \dfrac{1}{x}\right) \underset{x \longrightarrow \infty}{\sim} \dfrac{1}{x}$
- $\cos(x) = \underset{x \longrightarrow 0}{O}(\dfrac{1}{x})$.

une fonction f est bornée sur un voisinage de a si et seulement si $f\ (x) = \underset{x \longrightarrow a}{O}(1)$

1.1.2 Quelques propriétés :

Propriété1 :

On suppose que g ne s'annule pas sur un voisinage de a sauf éventuelement en a

1. $f = o_a(g) \Longleftrightarrow \dfrac{f}{g}$ tend vers 0 en a.
2. $f \sim_a g \Longleftrightarrow \dfrac{f}{g}$ tend vers 1 en a.
3. $f = O_a(g) \Longleftrightarrow \dfrac{f}{g}$ est bornée sur un voisinage de $a \in D$.

Propriété 2 :

- si $f = o(g) \Longrightarrow f = O(g)$
- si $f \sim g \Longrightarrow \ f = O(g)$
- si $f \sim g \Longleftrightarrow f - g = o(g)$
- si $f_1 = O(g)$ et $f_2 = O(g) \Longrightarrow f_1 + f_2 = O(g)$
- si $f_1 = O(g)$ et $f_2 = O(g) \Longrightarrow f_1 f_2 = O(g)$
- si $f_1 = o(g)$ et $f_2 = o(g) \Longrightarrow f_1 + f_2 = o(g)$
- si$f_1 = o(g)$ et $f_2 = o(g) \Longrightarrow f_1 f_2 = o(g)$
- si $f_1 \sim g_1$ et $f_2 \sim g_2 \Longrightarrow f_1 f_2 \sim g_1 g_2$
- si $f_1 \sim g_1$ et $f_2 \sim g_2$ De plus g_1, g_2 ne s'anunulent pas au voisinage de $a \Longrightarrow \dfrac{f_1}{f_2} \sim_a \dfrac{g_1}{g_2}$
- si $f = O(g)$ et $g = O(h) \Longrightarrow f = O(h)$.
- si $f = o(g)$ et $g = o(h) \Longrightarrow f = o(h)$.

Propriété 3 :

On suppose que $f \sim_a g$

1. Si g est strictement positive (respectivement strictement négative) au voisinage de a, Alors f est strictement positive (respectivement strictement négative) au voisinage de a.
2. Si g ne s'annule pas sur $D/\{a\}$, alors $f_{\mathbf{D/\{a\}}}$ ne s'annule pas sur un voisinage de a.

Propriété 4 :

1. $f = O(g)$, si $\alpha > 0 \Longrightarrow |f|^{\alpha} = O(|g|^{\alpha})$.
2. Soit $\mathbf{x} \in \mathbb{R}$, $D =]n, m[$ et $f = O(g(x))$ quand $x \longrightarrow m$
3. Si de plus f et g sont mésurable sur D, alors :

$$\int_x^m f(t)dt = O\left(\int_x^m |g(t)dt|\right) \qquad \text{quand } x \longrightarrow m$$

L'opération dérivée n'est pas valable ni par rapport à la variable ni par rapport au paramètre.

Théorème (Equivalent et Dérivation) :

Si f est une fonction dérivable en a et $f'(a) \neq 0$ alors

$$f(x) - f(a) \sim_a f'(a).(x-a)$$

Théorème de Substitution des équivalents :

Si $f(x) \sim_a g(x)$ et $\lim\limits_{x \longrightarrow b} U(x) = a \Longrightarrow f(U(x)) \sim_b g(U(x))$

Relation uniforme :

Si les fonctions f et g dépendent de la variable $x \in D$ et d'un paramètre $\varepsilon \in I$ (i,e : $f = (x, \varepsilon)$, $g = (x, \varepsilon)$, $x \in D$, $\varepsilon \in I$).

Alors les relations précédentes, si les constantes et les voisinages sont indépendantes du paramètre ε, dites uniformes, si non elles sont non-uniformes.

Opérations sur les relations d'ordre :

1. $f_i = O\ (g_i)$, $i = 1, ..., n$, pour des constantes r_i on a :

$$\sum_{i=1}^{n} r_i f_i = \ O(\sum_{i=1}^{n} |r_i\ ||g_i\ |)$$

2. $f_i = O(g_i)$, $i = 1, ..., n$, et s'il existe g tel que $|g_i\ | \leq |g\ |$, alors :

$$\sum_{i=1}^{n} r_i f_i = O(\sum_{i=1}^{n} = |g\ |)$$

$\mathbf{r}_i$ sont des constantes.

3. $f_i = O\ (g_i)$, $i = 1, ..., n$, alors $\prod_{i=1}^{n} f_i = O\ (\ \prod_{i=1}^{n}\ g_i)$

4. Soit $n < \varepsilon < m$ un paramètre et $f = (x, \varepsilon) = O\ (g = (x, \varepsilon))$ uniformément quand $x \longrightarrow a$ alors :

$$\int_{n}^{m} f = (x, \varepsilon) d\varepsilon = O(\int_{n}^{m} |\ g = (x, \varepsilon)|\ d\varepsilon) \quad \text{quand } x \longrightarrow a.$$

Remarque 1.1.1

1. Toutes les opérations précédentes sont aussi vrais pour <<**o**>> et <<$\sim$>>**.**
2. Lopération dérivé n'est pas valable ni par rapport à la variable ni par rapport au paramètre.

1.2 Suite Asymptotique

une suite de fonctions d'ordre S_n est dite suite asymptotique ou séquence asymptotique si :

$$\forall n, S_{n\ +1} < S_n$$

Ou bien on la définie comme suit :

Soit $(S_n(x))$ une suite définie au voisinage d'un point a. $(S_n(x))_{n\geq 1}$ est dite une suite asymptotique, si on a :

$$\forall n, S_{n\ +1}(x) = o\ (S_n(x)), x \longrightarrow a$$

Exemple 1.2.1

1. On prend $S_n(x) = x^n$, on a :

$$S_{n\ +1}(x) = \ x^{n+1} = o\ (x^n) = o\ (S_n(x)), x \longrightarrow 0$$

2. On prend $L_n(x) = \dfrac{1}{x^n}$, on a :

$$L_{n-1}(x) = \frac{1}{x^{n-1}} = o\ (\frac{1}{x^n}) = o\ (L_n(x))$$

Remarque 1.2.1

1. Une suite asymptotique n'est pas obligatoirement convergente vers 0.
2. Si $f\ (x)$ est une fonction continue au point a et $S_n(x)$ est une suite asymptotique au point a, alors : $f\ \ (x).S_n(x)$ est une suite asymptotique.

$\triangleright$Toutes sous suite d'une suite asymptotique est une suite asymptotique.

$\triangleright$ Si $(S_n(x))_{n\geq 1}$ est une suite asymptotique quand $x \longrightarrow a$ et $\alpha > 0$, alors : $(|S_n(x)|^\alpha)_{n\geq 1}$ est aussi une suite asymptotique.

1.3 Développement asymptotique

1.3.1 Série asymptotique

Soit $S_n(x)_{n \geq 1}$ une suite asymptotique lorsque $x \longrightarrow a$, $(\alpha_n)_{n \geq 1}$ une suite numérique. La série $\sum_{n=1}^{+\infty} \alpha_n S_n(x)$ est appelée une série asymptotique quand $x \longrightarrow a$.

1.3.2 Développement asymptotique

En mathématique un développement asymptotique d'une fonction f donnée dans un voisinage fixé est une somme finie de fonctions de référence qui donne une bonne approximation du comportement de la fonction f dans le voisinage considéré.

Le concept de D.A a été introduit par poincaré a propos de l'étude du problème de N corps de la mécanique par la théorie de la perturbation.

Soit f une fonction définie dans D, $a \in \overline{D}$ et $S_i(x)_{i \geq 1}$ une série asymptotique lorsque $x \longrightarrow a$. On dit que f admet un développement asymptotique à l'ordre N par rapport à $S_n(x)_{n \geq 1}$ quand $x \longrightarrow a$, s'il existe des constantes α_i, $i = 1, ..., N$ tel que :

$$\begin{aligned} f \ (x) - \sum_{i=1}^{+\infty} \alpha_i S_i(x) &= o(S_i(x) \\ &= O(S_{n+1}(x)), x \longrightarrow a \text{ et } n = 1, ..., N \end{aligned}$$

• Si $N = 1$ alors le développement asymptotique s'écrit :

$$f(x) = \alpha_1 S_1(x) + o(S_n(x))$$

• Si le développement asymptotique est valable $\forall N = 1, 2, 3, ...$ On écrit alors :

$$f \quad (x) \sim \sum_{i=1}^{+\infty} \alpha_i S_i(x), x \longrightarrow a$$

Théorème (Formule de Taylor-Young) Soit $f \in C^n(I, C), a \in I$ alors f admet au voisinage de a le développement asymptotique écrit sous forme

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k + o(x-a)^n, x \longrightarrow a$$

1. $\sin(2x) = 2x - \frac{4}{3}x^3 + \frac{4}{15}x^5 + ..., x \longrightarrow 0$

2. $\exp(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}, x \longrightarrow 0$

3. $\log(1+x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} + O(x^{n+1}), x \longrightarrow 0$

4. $\frac{1}{1+x} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n, x \longrightarrow 0$

1.3.3 Fonctions régulières

Si $\phi(x, \varepsilon)$ et $\phi_1(x, \varepsilon)$ sont deux fonctions continues dans un domaine D, fermé et borné et sur $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0$ telles que :

$$\phi = O_S(\delta_1), \phi_1 = O_S(1), \phi = \delta_1\phi_1 + o(\delta_1)$$

alors, nécessairement, dans D, on a uniformément :

$$\lim_{\epsilon \longrightarrow 0} \left| \frac{\phi(x, \varepsilon)}{\delta_1(\varepsilon)} - \phi_1(x, \varepsilon) \right| = 0$$

C'est de cette façon que l'on vérifie queles fonctions ϕ et $\delta_1\phi_1$ sont asymptotiquement équivalentes.

est obtenu lorsque, uniformément dans D, ona :

$$\lim_{\epsilon \longrightarrow 0} \frac{\phi(x,\varepsilon)}{\delta_1(\varepsilon)} = \phi_1(x,\varepsilon)$$

Ceci permet d'écrire une approximation asymptotique de ϕ sous la forme :

$$\phi(x,\varepsilon) = \delta_1(\varepsilon)\phi_1(x,\varepsilon) + o(\delta_1)$$

Une fonction ϕ ayant une telle propriété est dite régulière.

1.3.4 Développements asymptotiques réguliers et généralisés

Lorsqu' une fonction est régulière, l'approximation asymptotique que l'on peut définir comme ci-dessus est objectivement plus simple que la fonction ϕ elle-même puisque ϕ_1 ne dépend que de x. Plus précisément, si dans la construction d'un développement asymptotique chaque étape revient à construire une approximation asymptotique *régulière*, le développement asymptotique correspondant est dit *régulier*. Cette terminologie particulière sera poussée jusqu'à son terme : bienque ce ne soit pas nécessaire, un développement asymptotique sera dit *non régulier* lorsqu'il n'est pas régulier ; pour éviter des confusions avec d'autres notions, on parler a plutôt de développement asymptotique généralisé.
Un exemple de développement asymptotique non régulier ou généralisé est la forme

$$\varphi(x,\varepsilon) = 1 + \sum_{n=1}^{m} \delta_n(\varepsilon)\,\varphi_n(x,\varepsilon) + O\left(\delta_{m+1}(\varepsilon)\right)$$

1. La fonction $\varphi(x,\varepsilon) = \dfrac{1}{1-\epsilon x}$ admet un développement asymptotique généralisé suivant :

$$\varphi(x,\varepsilon) = 1 + \sum_{n=1}^{m} \epsilon^{2n+1} x^{2n+1} (1+\epsilon x) + O\left(\epsilon^{2m+3}\right)$$

et un développement asymptotique regulier sous forme

$$\phi = 1 + \sum_{n=1}^{m} \epsilon^n x^n + O\left(\epsilon^{m+1}\right)$$

2. Si l'on considère la fonction : $\varphi(x,\varepsilon) = \left(1 - \frac{\varepsilon}{\varepsilon+1}x\right)^{-1}$ on peut construire aisément deux développements asymptotiques réguliers sous la forme :

$$\varphi(x,\varepsilon) = 1 + \sum_{n=1}^{m} \delta_n(\varepsilon)\, x^n + o\left(\delta_m(\varepsilon)\right) \text{ avec } \delta_n(\varepsilon) = \left(\frac{\varepsilon}{\varepsilon+1}\right)^n$$

$$\varphi(x,\varepsilon) = 1 + \sum_{n=1}^{m} \epsilon^n x\,(x-1)^{n-1} + o\left(\epsilon^m\right)$$

Théorème 1.3.1

Le développement par rapport à une suite asymptotique $S_i(x)_{i\,\geq 1}$ d'une fonction donnée $f\ \ (x)$ -s'il existe -est unique.

Calcul des coefficients d'un développement asymptotique

Soit $S_i(x)_{i\,\geq 1}$ une suite asymptotique, $x \longrightarrow a$, f une fonction définie sur D, $a \in \overline{\mathbf{D}}$. Supposons que f admet un développement asymptotique par rapport à $S_i(x)_{i\,\geq 1}$écrit sous forme :

$$f\ \ (x) \sim \sum_{i=1}^{+\infty} \alpha_i S_i(x) = \alpha_1 S_1(x) + \alpha_2 S_2(x) + ...$$

On dévise les deux membres par $S_1(x)$ (on suppose toujours que les limites existent), on trouve :

$$\frac{f\ \ (x)}{S_1(x)} \sim \alpha_1 + \alpha_2 \frac{S_2(x)}{S_1(x)} + ... \text{ quand } x \longrightarrow a$$

$$\Longrightarrow \quad \alpha_1 = \lim_{x \longrightarrow a} \left(\frac{f\ \ (x)}{S_1(x)} - \alpha_2 \frac{S_2(x)}{S_1(x)} + ... \right)$$

donc

$$\alpha_1 = \lim_{x \longrightarrow a} \frac{f\ \ (x)}{S_1(x)} \text{ puisque} \lim_{x \longrightarrow a} \frac{S_n(x)}{S_1(x)} = 0, n \geq 2$$

de même

$$\frac{f\ \ (x) - \alpha_1 S_1(x)}{S_2(x)} \sim \alpha_2 + \alpha_3 \frac{S_2(x)}{S_1(x)} + ...\text{quand } x \longrightarrow a$$
$$\Longrightarrow \quad \alpha_2 = \lim_{x \longrightarrow a} \left(\frac{f\ \ (x) - \alpha_1 S_1(x)}{S_2(x)}\right)$$

et par récurrence :

$$\begin{cases} \alpha_1 = \lim\limits_{x \longrightarrow a} \dfrac{f\ \ (x)}{S_1(x)} \\ \alpha_n = \lim\limits_{x \longrightarrow a} \left(\dfrac{f\ \ (x) - \sum_{i=1}^{n-1} \alpha_i S_i(x)}{S_n(x)}\right), n = 2, 3, 4, ... \end{cases}$$

,

1.3.5 Opérations sur les développements asymptotiques

On considère la suite asymptotique $S_i(x)_{i\ \geq 1}$ et supposons que f et g deux fonctions ont des développments asymptotiques au voisinage de a

$$f\ \ (x) \sim \sum_{i=1}^{+\infty} \alpha_i S_i(x), x \longrightarrow a$$
$$g\ (x) \sim \sum_{i=1}^{+\infty} \beta_i S_i(x), x \longrightarrow a$$

On a les propriété suivantes

1. L'addition et produit avec constante :

$$f\ \ (x)+g\ (x)\sim\sum_{i=1}^{+\infty}\left[\alpha_i+\beta_i\right]S_i(x), x\longrightarrow a$$
$$kf\ \ (x)+lg\ (x)\sim\sum_{i=1}^{+\infty}\left[k\ \alpha_i+l\ \beta_i\right]S_i(x), x\longrightarrow a, k, l=cte$$

où k et l sont deux réels.

2. L'intégration :

$$f\ \ (x;\varepsilon)\sim\sum_{i=1}^{+\infty}\alpha_i(x)S_i(\varepsilon), \varepsilon\longrightarrow 0$$

• Si $f\ \ (x\ ;\varepsilon), \alpha_i(x)$ intégrable par rapport à x, on a :

$$\int_k^l f\ \ (x;\varepsilon)dx\sim\sum_{i=1}^{+\infty}S_i(\varepsilon)\int_k^l\alpha_i(x)dx, \varepsilon\longrightarrow 0$$

• Si $f\ \ (x\ ;\varepsilon), \alpha_i(x)$ intégrable par rapport à ε, on a :

$$\int_0^\zeta f\ \ (x;\varepsilon)d\varepsilon\sim\sum_{i=1}^{+\infty}\alpha_i(x)\int_0^\zeta S_i(\varepsilon)d\varepsilon, \zeta\longrightarrow 0$$

3. Le produit de deux fonctions :

$$f\ \ (x).g\ (x)=(\sum_{i=1}^{+\infty}\alpha_iS_i(x)).(\sum_{i=1}^{+\infty}\beta_iS_i(x)), x\longrightarrow a$$

4. la différentibilité :

Si $f \ (x\ ;\varepsilon) \sim \sum_{i=1}^{+\infty} \alpha_i(x)S_i(\varepsilon)$, $\varepsilon \longrightarrow 0$ et si :

$$\frac{\partial\ f \ \ (x;\varepsilon)}{\partial x} \sim \sum_{i=1}^{+\infty} \beta_i S_i(\varepsilon), \varepsilon \longrightarrow 0$$

Alors

$$\beta_i = \alpha_i'(x) = \frac{d\ \alpha_i(x)}{dx}$$

1.3.6 Convergence et précision

L'exemple le plus connu d'un développement asymptotique pour une fonction $\phi(\varepsilon)$ est son développement de Taylor pour ε petit. Pour une fonction m fois continûment dérivable au voisinage de $\varepsilon = 0$, on obtient un développement asymptotique à $m + 1$ termes :

$$\phi(\varepsilon) \ = \phi(\varepsilon) + \varepsilon\phi(0) + ... + \varepsilon^m \frac{\phi^{(m)}(0)}{m!} + O_s(\varepsilon^{m+1})$$

Si m devient infini, on obtient une série, série qui peut être convergente ou divergente ; si elle est convergente, elle peut ne pas converger vers la fonction développée. En fait, un développement asymptotique n'a rien à voir avec une série.

Une série a un nombre infini de termes alors qu'un développement asymptotique est un développement limité avec un nombre fini de termes.

il se peut que l'on puisse construire un développement asymptotique avec un nombre de termes infini (série asymptotique) mais, le problème de la convergence de la série est sans rapport avec le comportement de la fonction au voisinage de $\varepsilon = 0$.

1. Le développement en série de Taylor de la fonction exponentielle est :

$$e^{\varepsilon} = 1 + \varepsilon + \frac{\varepsilon^2}{2} + ... + \frac{\varepsilon^m}{m!} + ...$$

Cette série asymptotique converge quel que soit ε. Le développement asymptotique :

$$f = 1 + \varepsilon + \frac{\varepsilon^2}{2} + ... + \frac{\varepsilon^m}{m!} + O_s(\varepsilon^{m+1})$$

est valable au voisinage de $\varepsilon = 0$ et pas ailleurs.

2. On considère la fonction $f\ (x, \varepsilon)$ définie par :

$$f\ (x, \varepsilon)\ = e^{-x/\varepsilon} + e^{-\varepsilon x} \quad \text{pour} \ \ 2 \leq x \leq 3 \tag{1.1}$$

Une approximation asymptotique de cette fonction est :

$$f_{app} = 1 - \varepsilon x + \varepsilon^2 \frac{x^2}{2} \tag{1.2}$$

obtenue en prenant les trois premiers termes de la série :

$$g\ (x, \varepsilon) = 1 - \varepsilon x + \varepsilon^2 \frac{x^2}{2} + ... + (-1)^m \varepsilon^m \frac{x^m}{m!} + ...$$

La figure 4.1montre la fonction $log\ \frac{\mid f_{app} - f \mid}{f}$ pour différentes valeurs de ε. L'erreur relative commise avec l'approximation f_{app} tend vers zéro quand $\varepsilon \longrightarrow 0$.

On remarque que la série $g\ (x, \varepsilon)$ est convergente pour toutes valeurs de x et ε, mais ne converge pas vers $f\ (x, \varepsilon)$. En effet, on a : $g = e^{-\varepsilon x}$

Cependant, la série g est une approximation asymptotique de f lorsque $\varepsilon \longrightarrow 0$.

La raison est que le terme $e^{-x/\varepsilon}$ de la fonction f est un terme exponentiellement petit

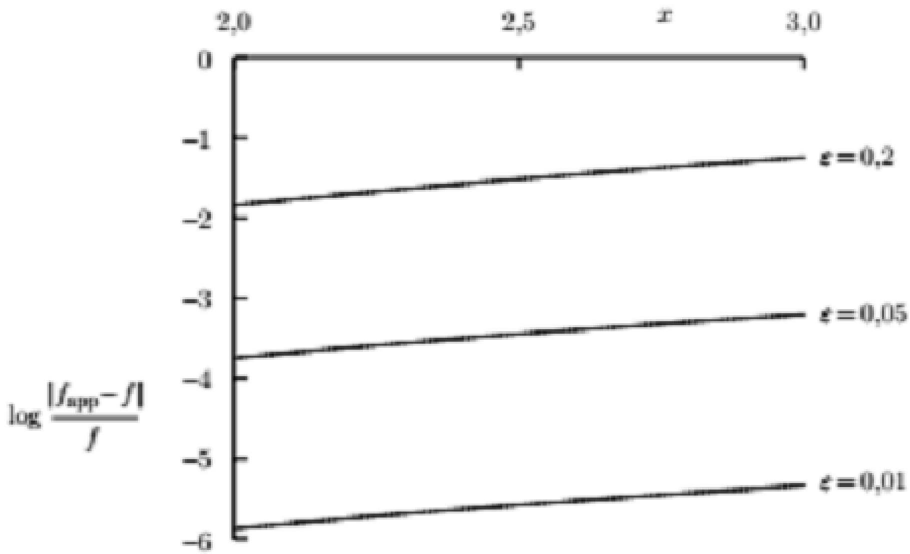

FIG. 1.1 – Exemple d'une approximation asymptotique. Les courbes donnent la fonction $log\ \frac{|\ f_{app}-f|}{f}$ pour différentes valeurs de ε ; les fonctions f et f_{app} sont données par (1.1) et (1.2).

pour $\varepsilon \longrightarrow 0$ et pour$x$ fixé, strictement positif.

Plus généralement, il se peut, pour une série asymptotique, que les limites

$\varepsilon \longrightarrow 0$ et $m \rightarrow \infty$ ne soient pas commutatives . On touche là une propriété importante des séries divergentes. En effet, si la série est divergente, elle peut toujours être considérée, du point de vue asymptotique, comme convergente ; il suffit de choisir ε assez petit.

Ainsi, si une série diverge, plus on prend de termes, plus il faut prendre ε petit. D'une certaine façon, on aboutit à une remarque heuristique paradoxale : plus une série asymptotique diverge, plus l'information sur la fonction développée est contenue dans les premiers termes. En poussant encore un peu plus le paradoxe, on arrive à dire que les séries divergentes sont en général beaucoup plus rapidement convergentes que les séries convergentes.

Conclusion :

La recherche d'un développement asymptotique est liée à la détermination d'une suite asymptotique de fonctions d'ordre.

La construction d'une suite asymptotique n'est pas toujours simple ; elle dépend du problème considéré. Si, dans certains cas, elle apparaît de façon naturelle, dans d'autres elle ne peut être réalisée que terme à terme, au fur et à mesure de l'établissement du développement asymptotique.

Chapitre 2

Méthode de perturbation

2.1 Bref historique sur la théorie des pertubations

Dès le début du **xviii**^{e} siècle, la théorie des perturbations a été utilisée par les astronomes pour les besoins de la mécanique céleste : en effet, les équations différentielles décrivant un système de N corps en interaction gravitationnelle n'a pas de solution exacte générale pour $N \geq 3$. Cet aspect de la théorie des perturbations a été synthétisé à la fin du **xix**^{e} siècle dans les ouvrages classiques de *Laplace, Tisserand* et *Poincaré*, avant de connaître de nouveaux développements dans la seconde moitié du xxe siècle avec l'avènement en 1954 de la « théorie KAM », du nom de ses trois concepteurs : *Kolmogorov, Arnold* et *Moser.*

La méthode a par ailleurs été abondamment utilisée au xx^{e} siècle pour les besoins de la physique quantique, d'abord en mécanique quantique non relativiste, puis en théorie quantique des champs perturbative.

2.2 Problème de perturbation

D'un point de vue heuristique, la théorie des perturbations est une méthode mathématique générale qui permet de trouver une solution approchée d'une équation mathématique

(E_ε) dépendante d'un paramètre ε lorsque la solution de l'équation (E_0) (problèm réduit $E(u,0) = E_0(u)$), correspondant à la valeur $\varepsilon = 0$, est connue exactement.

L'équation mathématique (E_ε) peut être une équation algébrique, une équation différentielle, une équation aux valeurs propres, ... La méthode consiste à chercher la solution approchée de l'équation (E_ε) sous la forme d'un développement en série des puissances du paramètre ε, cette solution approchée étant supposé être une approximation d'autant meilleure de la solution exacte, mais inconnue, que la valeur absolue du paramètre ε est plus « petite ».

De façon générale, on va trouver une fonction $u(x)$, $x \in D \subset \mathbb{R}^n$, qui satisfait un certain problème $E(u,\varepsilon) = E_\varepsilon(u)$ avec des conditions aux limites ; en terme d'un développement asymptotique, c'est-à-dire :

$$u(x,\varepsilon) \sim u_0(x) + u_1(x)\delta_1(\varepsilon) + u_2(x)\delta_2(\varepsilon) + ..., \varepsilon \longrightarrow 0$$

Où u_i $(i = 1, 2, ...)$ ne dépendent pas de ε, et u_0 est la solution du problème réduit pour $\varepsilon = 0$. La suite $(\delta_i\ (x))_{i\ \geq 1}$ est une suite asymptotique, on commence souvent d'essayer la suite des puissances, x est une variable appartenant à un domaine D de $\mathbb{R}^n$ et $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_1$, ε_1 étant un nombre positif fixé aussi petit que souhaité, ε est sans dimension, ce qui implique que le problème a été, au préalable, rendu sans dimension.

2.3 Perturbation régulière et singulière

Si la solution du problème ne tende pas uniformément vers la solution du problème réduit quand $\varepsilon \to 0$. On est alors confronté à un problème dit de perturbation singulière pour lesquels de grandes difficultés mathématiques peuvent se poser. Sinon la perturbation est réguliere.

2.3.1 Les Perturbation régulière

La meilleure façon de s'habituer aux calcul des perturbations est à travers des exemples.

Les racines d'un polynômes :

Supposons que nous ne connaissons pas la résolutions des équations algébriques de second ordre, mais que nous savons résoudre l'équation

$$x^2 - x = 0$$

dont les racines sont $x_0 = 0$ et$x_0 = 1$. Nous cherchons la solution de l'équation

$$x^2 - x + \varepsilon = 0 \tag{2.1}$$

Où nous supposons ε petit. Cherchons la solution sous forme

$$X = x_0 + x_1\varepsilon + \varepsilon^2 x_2 + ... \tag{2.2}$$

Nous cherchons la solution sous cette forme puisque nous pensons que comme ε est petit, la nouvelle racine ne doit pas être trop loin de l'ancienne, et l'écart doit être justement fonction de ε, pour $\varepsilon = 0$, nous devons trouver la solution originale. Nous connaissons déjà x_0, et il nous faut trouver une méthode pour calculer $x_1; x_2; ...$ Injectons maintenant (1.2) dans (1.1) et regroupons les en fonction des puissances de ε :

$$(x_0^2 - x_0) + [(2x_0 - 1)x_1 + 1]\varepsilon + (x_1^2 + 2x_0x_2 - x_2)\varepsilon^2 + ... = 0 \tag{2.3}$$

Le membre de droite de l'équation ci-dessus est un polynôme en ε et il est uniformément nul. Nous en déduisons donc que tous les coefficients du polynôme doivent être nuls, c'est-à-dire :

$$x_0^2 - x_0 = 0 \tag{2.4}$$

$$(2x_0 - 1)x_1 + 1 = 0 \tag{2.5}$$

$$x_1^2 + 2x_0x_2 - x_2 = 0 \tag{2.6}$$

$$... = 0$$

L'équation (2.4) donnée par le coefficient de ε^0 et appelé le terme d'ordre zéro, est notre équation originale non perturbée que nous savons résoudre. l'équation (2.5) nous donne x_1 :

$$x_1 = \frac{1}{1 - 2x_0}$$

Comme nous connaissons déjà x_0, nous déterminons facilement que $x_1 = 1$ ou -1. L'équation (2.6) nous détermine le coefficient x_2 :

$$x_2 = \frac{x_1^2}{1 - 2x_0}$$

et donc $x_2 = 1$ ou -1. Nous pouvons continuer ainsi (cela dépend de notre patience) et trouver les coefficient x_n. Ce que nous devons remarquer est que :

1. Pour déterminer x_k, nous n'avons que besoin des $x_{k-1}; x_{k-2}; ...$

2. L'équation qui détermine x_k est linéaire en x_k, c'est à dire ne comporte que des puissances unité dex_k. C'est deux points nous permettent assez aisément de calculer la solution aussi précisément que l'on souhaite.

Donc pour les deux racines de l'équation (2.1) :

$$X_1 = 0 + \varepsilon + \varepsilon^2 + ... \tag{2.7}$$

$$X_2 = 1 - \varepsilon - \varepsilon^2 + ... \tag{2.8}$$

Pour $\varepsilon = \quad 0,0000001$

$X_1 = 0 + 0,0000001 + (0,0000001)^2 \simeq 1.0000001^{-7} \simeq x_0 = 0$

$X_2 = 1 - 0,0000001 - (0,0000001)^2 \simeq 0.9999999 \simeq x_0 = 1$

Généralisation

Nous pouvons généraliser l'approche ci-dessus, sans la formaliser plus : on cherche la solution d'un problème avec perturbation comme un développement en puissance de la perturbation. Il faut alors que les coefficients de chaque puissance de la perturbation soit nulle. Le mieux reste encore d'illustrer cela à travers des exemples.

2.3.2 Les perturbations singulières.

Nous avons supposé, lors de l'étude des perturbations singulières, que la solution perturbée est proche de celle non perturbée. Cela n'est pas toujours le cas et l'ajout d'un petit terme peut radicalement changer la solution.

On considère le problème suivant

$$P\ (x, \varepsilon) \quad : \qquad \varepsilon x^2 + x - 1 = 0$$

le problème réduit est :

$$P\ (x, 0) \quad : \qquad x - 1 = 0 \Longrightarrow x = 1$$

La solution exacte pour $\varepsilon \neq 0$ s'écrit : $x = \dfrac{-1 \pm \sqrt{1+4\varepsilon}}{2\varepsilon}$

On constate que $P\ (x,\varepsilon)$ est une équation du deuxième degré tandis que $P\ (x,0)$ est une équation de premier degré, donc c'est un problème singulier.

Supposons que $x_1(\varepsilon) \sim \alpha_0 + \alpha_1\varepsilon + \alpha_2\varepsilon + ...$, on trouve $\alpha_0 = 1$, $\alpha_1 = -1$, $\alpha_2 = 2$, Alors :

$$x_1(\varepsilon) = 1 - \varepsilon + 2\varepsilon^2 + \ O(\varepsilon^3)$$

Si $\varepsilon = 0$,on a une seule racine $x = 1$, tandis que $\varepsilon \neq 0$ le problème (2.16) admet deux solutions, on a donc un problème de perturbation singulière.

Une idée très utile pour des problème de perturbation singulière est de changement d′échelle (rescale) avant de faire d'une développement asymptotique, dans ce cas on pose :

$$x{=}\frac{X}{\delta(\varepsilon)}, \delta(\varepsilon) \longrightarrow 0 \text{ lorsque } \varepsilon \longrightarrow 0$$

alors :

$$P\ (x,\varepsilon) \Leftrightarrow P\ _{\delta(\varepsilon)}(X,\varepsilon) : \quad \varepsilon(\frac{X}{\delta(\varepsilon)})^2 + \frac{X}{\delta(\varepsilon)} - 1 = 0$$

en multipliant les deux membres par $\delta(\varepsilon)$ on trouve :

$$P\ (X,\varepsilon) : \frac{\varepsilon}{\delta(\varepsilon)}X^{\ 2}\ + X - \delta(\varepsilon) = 0$$

pour capter la solution singulière on pose $\delta(\varepsilon) = \varepsilon$:

$$P\ (X,\varepsilon) : X^{\ 2}\ + X - \varepsilon = 0 \tag{2.9}$$

et le problème réduit :

$$P\ (X,0) : X^{\ 2}\ \ + X = 0 \Longleftrightarrow X = 0 \text{ ou } X = -1$$

$X = 0$ donne la solution régulière et $X = \alpha_0 = -1$, on fait un développement de la forme :

$$X = \varepsilon.x_2(\varepsilon) \sim -1 + \alpha_1\varepsilon + \alpha_2\varepsilon^2 + \alpha_3\varepsilon^3 + ...$$

Si on remplace cette formule dans l'équation (2.9) on trouve :

$$(1-1)\ \varepsilon^0 + (-\alpha_1 - 1)\ \varepsilon + (\alpha_1^2 - \alpha_2)\ \varepsilon^2 + (2\alpha_1\alpha_2 - \alpha_3)\ \varepsilon^3 + ... = 0,$$

d'où :

pour $\varepsilon^0 : 1 - 1 = 0$

pour $\varepsilon : -\alpha_1 - 1 = 0 \Longrightarrow \alpha_1 = -1$

pour $\varepsilon^2 : \alpha_1^2 - \alpha_2 = 0 \Longrightarrow \alpha_2 = 1$

pour $\varepsilon^3 : 2\alpha_1\alpha_2 - \alpha_3 = 0 \Longrightarrow \alpha_3 = -2$

donc :

$$\begin{aligned} X &= \varepsilon.x_2(\varepsilon) \sim -1 + -\varepsilon + \varepsilon^2 + -2\varepsilon^3 + O(\varepsilon^4) \\ &\Longrightarrow \frac{X}{\varepsilon} = x_2(\varepsilon) = \frac{-1}{\varepsilon} - 1 + \varepsilon - 2\varepsilon^2 + O(\varepsilon^3) \end{aligned}$$

finalement, on choisit $\varepsilon = 0.001$

$$x_2(0.001) = \frac{-0.001}{\varepsilon} - 1 + 0.001 - 2(0.001)^2 = 1001.0$$

en remplaçant par $\varepsilon = 0.001$, on trouve la racine x_2 avec une erreur d'ordre 10^{-9}.

2.3.3 Problèmes de perturbations pour les EDOs

Exemples de perturbation régulière

On considère le problème très simple :

$$p\ (y,\varepsilon) = \frac{dy}{dx} + \varepsilon y = 0 \quad \text{avec} \quad y\ (0,\varepsilon) = 1 \tag{2.10}$$

dont on cherche la solution pour $x \geq 0$

Alors on cherche une approximation de y sous la forme :

$$y(x,\varepsilon) = y_0(x) + \varepsilon y_1(x) + \varepsilon^2 y_2(x) + \cdots + \varepsilon^n y_n(x) + \cdots$$

Le report dans l'équation et l'identification des puissances successives de ε conduit aux problèmes :

1. $\dfrac{dy_0}{dx} = 0$ avec la condition initiale $y_0(0) = 1$

2. $\dfrac{dy_1}{dx} = 0$ avec la condition initiale $y_1(0) = 0$

3. $\dfrac{dy_n}{dx} = 0$ avec la condition initiale $y_n(0) = 0$

Le résultat est évidemment bien connu :

$$y(x,\varepsilon) = 1 - \varepsilon x + \varepsilon^2 \frac{x^2}{2} + ... + (-1)^n \varepsilon^n \frac{x^n}{n!} + ... \tag{2.11}$$

sur la solution exacte est :

$$y(x,\varepsilon) = e^{-\varepsilon x} \tag{2.12}$$

On voit clairement le problème. Dès que x est grand, le développement limité ci-dessus n'est pas une approximation uniformément valable de la solution,

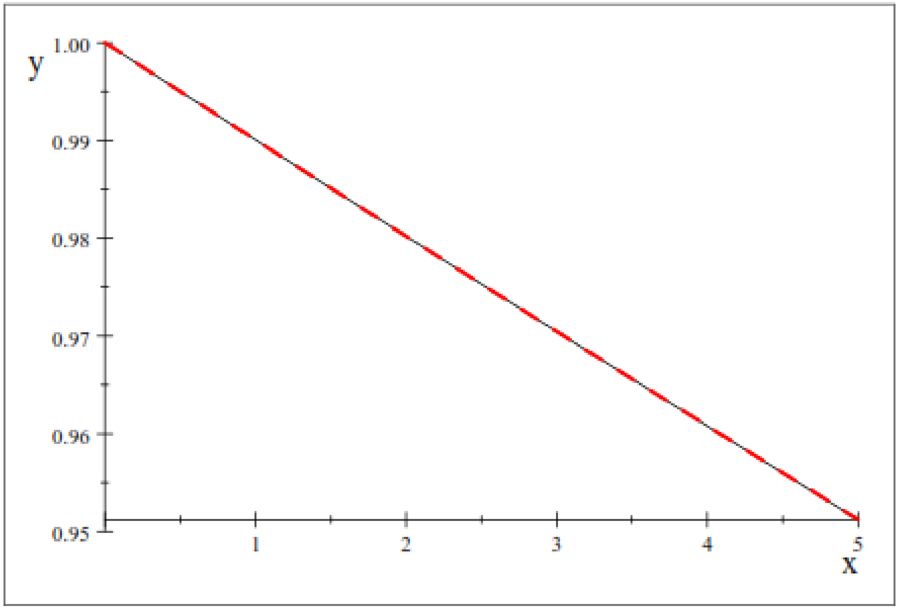

FIG. 2.1 – Approximations de la solution du problème (2.10) données par (2.11) ; la solution exacte y est donnée par (2.12)

quel que soit le nombre fini de termes pris en compte (Fig.2.1). Ce qu'il y a de curieux, c'est que la série infinie converge bien vers la solution et ceci, quel

que soit ε, alors qu'un développement limité n'est une approximation de la solution que si ε est petit et que si x reste borné. Le développement considéré est une série convergente alors que le développement limité est la forme la plus simple d'un développement asymptotique. Une remarque intéressante est liée au changement de variable :

$$t = \frac{1}{x+1}$$

qui transfère la singularité pour x grand au voisinage de l'origine. En posant :

$$Y\ (t, \varepsilon) = y\ (x, \varepsilon)$$

il vient :

$$Y\ (t, \varepsilon) = t^2 \frac{dY}{dx} - \varepsilon Y = 0 \quad \text{avec} \quad Y\ (1, \varepsilon) = 1 \tag{2.13}$$

Un développement direct du type :

$$Y\ (t,\varepsilon) = Y_0(t) + \varepsilon Y_1(t) + \varepsilon^2 Y_2(t) + ...$$

conduit à l'approximation :

$$Y\ (t,\varepsilon) = 1 + \varepsilon(1 - \frac{1}{t}) + \varepsilon^2(\frac{1}{2} - \frac{1}{t} + \frac{1}{2t^2}) + ... \tag{2.14}$$

Les approximations successives sont de plus en plus singulières au voisinage de l'origine (Fig.2.2). Ceci est très clair si l'on développe la solution exacte :

$$Y\ (t,\varepsilon) = \exp\ \left[-\varepsilon(\frac{1}{t} - 1)\right] \tag{2.15}$$

Cette caractéristique est aussi présente dans des problèmes analogues susceptibles d'un traitement particulier. On considère l'équation :

$$y\ (x,\varepsilon) = (x + \varepsilon y)\frac{dy}{dx} + y = 0 \quad \text{avec} \quad y|_{x=1} = 1 \tag{2.16}$$

La solution est recherchée sur l'intervalle $0 \leq x \leq 1$.

Le développement direct :

$$y\ (x,\varepsilon) = y_0(x) + \varepsilon y_1(x) + ...$$

conduit aux problèmes :

1. $x\dfrac{dy_0}{dx} + y_0 = 0 \quad \text{avec} \quad y_0|_{x=1} = 1$

2. $x\dfrac{dy_1}{dx} + y_1 = -y_0\dfrac{dy_0}{dx} \quad \text{avec} \quad y_1|_{x=1} = 0$

Le résultat :

$$y\ (x,\varepsilon) = \frac{1}{x} + \varepsilon\frac{1}{2x}(1 - \frac{1}{x^2}) + ... \tag{2.17}$$

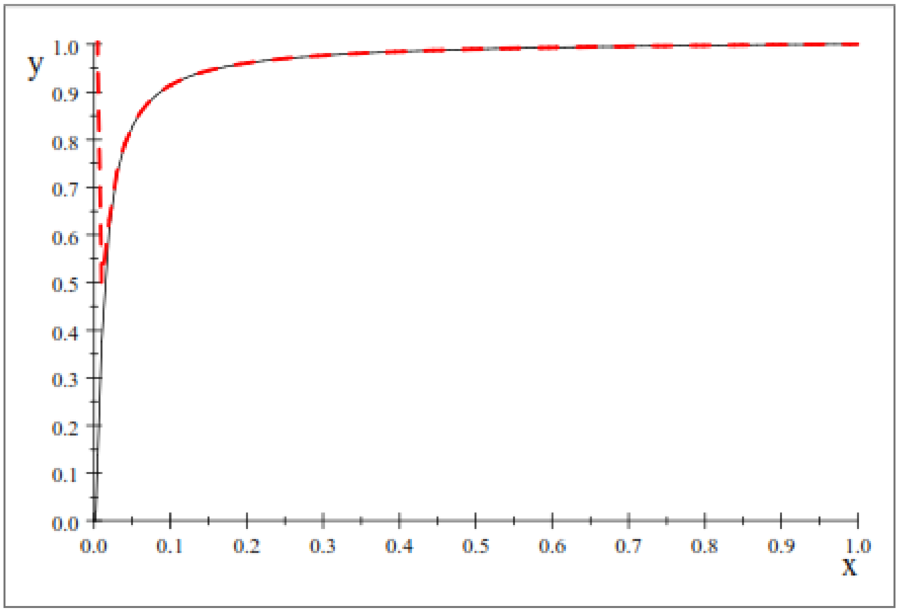

FIG. 2.2 – Approximations de la solution du problème (2.13) données par (2.14) ; la solution exacte Y est donnée par (2.15).

montre bien que la seconde approximation est plus singulière que la première au voisinage de l'origine (Fig.2.3). La solution exacte :

$$y\ (x,\varepsilon) = -\frac{x}{\varepsilon} + \sqrt{\frac{x^2}{\varepsilon^2} + \frac{2}{\varepsilon} + 1} \tag{2.18}$$

est bornée à l'origine :

$$y\ (0,\varepsilon) = \sqrt{\frac{2}{\varepsilon} + 1}$$

quel que soit $\varepsilon > 0$.

Exemples de perturbation singulière

On considère l'équation et les conditions initiales :

$$P\ \ (u;x) : \quad \left\{ \begin{array}{c} u'' + 2\varepsilon + u = 0 \\ u(0,\varepsilon) = 0,\ \ u\prime(0,\varepsilon) = 1 \end{array} \right\}$$

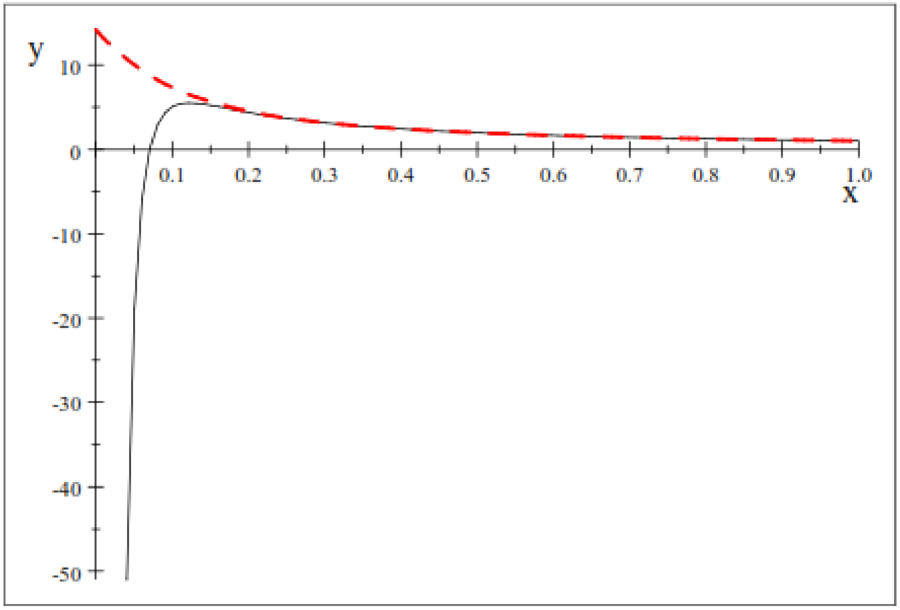

FIG. 2.3 – Approximations de la solution du problème (2.16) données par (2.17) ; la solution exacte y est donnée par (2.18).

la solution exacte du problème est :

$$u\ (x) = \frac{e^{-\varepsilon x}}{\sqrt{1-\varepsilon^2}} \sin\left[\sqrt{1-\varepsilon^2}x\right]$$

Résolvons l'équation par la méthode des perturbations.

Si on pose $\varepsilon = 0$, on trouve :

$$u'' + u = 0, u(0) = 0,\ \ u\prime(0) = 1$$

La solution est :

$$u(x) = \sin x$$

est la limite de la solution exacte du problème précédent lorsque $\varepsilon \longrightarrow 0$

$$\lim_{\varepsilon \longrightarrow 0} \left(\frac{e^{-\varepsilon x}}{\sqrt{1-\varepsilon^2}} \sin \left[\sqrt{1-\varepsilon^2} x \right] \right) = \sin x$$

on va chercher maintenant une solution sous la forme :

$$u(x;\varepsilon) \sim u_0(x) + \varepsilon u_1(x) + \varepsilon^2 u_2(x) + ..., \varepsilon \longrightarrow 0$$

en substituant dans l'équation précédente, on trouve :

pour ε^0 : $u_0(0) = 0, u'_0(0) = 1$, et $u_0 + u'_0 = 0 \Longrightarrow u_0(x) = \sin x$

pour ε^1 : $u_1(0) = u'_1(0) = 0$, et $u''_1 + u_1 = -2u'_0 \Longrightarrow u_1(x) = -x \sin x$

:

:

pour ε^i : $u_i(0) = u'_i(0) = 0$, et $u''_i + u_i = -2u'_{i-1} = 0, i \geq 1$

d'où :

$$u(x;\varepsilon) = \sin x - \varepsilon x \sin x + O(\varepsilon^2 x^2)$$

Exemples de perturbation singulière

On considère le problème aux limites suivant :

$$P\ (u;\varepsilon) : \quad \left\{ \begin{matrix} \varepsilon u'' + (1+2\varepsilon)u\prime + 2u = 0 \\ u\ (0,\varepsilon) = 0,\ u\ (0,\varepsilon) = 1 \end{matrix} \right\}$$

On recherche la solution sur l'intervalle $0 \leq x \leq 1$, le problème réduit pour $\varepsilon = 0$ s'écrit :

$$u\prime_0 + 2u_0 = 0 \Longrightarrow u_0(x) = Ce^{-2x}$$

où C est une constante qui'il faut déterminer avec deux conditions aux limites ce qui n'est, en gnérale n'est pas possible

En $x = 0$, on obtient, $u_0(x) = 0$. cette approximation ne peux etre uniformément valable puisque, $u_0(1) = 1$. De meme, en vérifiant la condition en $x = 1$,on obtient :

$$u_0(x) = e^{2(1-x)}$$

qui est telle que, $u_0(x) = e^2$, la condition à l'origine n'est pas vérifié. Ce qui indique nécessairement une zone de non-uniformité.

La solution exacte s'écrit :

$$u(x) = \frac{e^{-2} - e^{-\frac{x}{\varepsilon}}}{e^{-2} - e^{-\frac{1}{\varepsilon}}}$$

Dès que $x > 0$, on voit qu'une bonne approximation de la solution exacte est donné par :

$$u(x) \simeq e^{2(1-x)}$$

Ceci montre qu'il fallait se placer dans le second cas est vérifié, pour le problème réduit, la condition en $x = 1$

L'approximation précédente est dite solution externe :

$$u_{ext}(x) = e^{2(1-x)}$$

au voisinage de $x = 0$, on va chaner l'échelle, et on pose :

$$X = \frac{x}{\delta(\varepsilon)}, \delta(\varepsilon) \longrightarrow 0, \text{lorsque } \varepsilon \longrightarrow 0$$

Le problème devient :

$$u"(X)+(1+2\varepsilon)u\prime(X)+2\varepsilon u(X)=0 \text{ pour } \delta(\varepsilon)=\varepsilon$$

on trouve, le problème réduit :

$$u"(X)+u\prime(X)=0, u(0)=0$$

Alors

$$u_{int}(x)=A_1[1-e^{-x/\varepsilon}]$$

$u_{int}(x)$ est dite solution interne au voisinage D_ε de $x=0$, ce voisiage est appelé couche limite (boundary layer).

Le principe de matching (sera préciser au paragraphe suivante) donne :

$$\begin{aligned} u_{match}(x) &= \lim_{x\longrightarrow 0} u_{ext}(x) \\ &= \lim_{x\longrightarrow\infty} u_{int}(X)=A_1=e^2 \end{aligned}$$

d' où :

$$u_{unif}(x)=u_{ext}(x)+u_{int}(x)-\quad u_{match}(x)$$

donc :

$$u_{unif}(x)=\ e^{2(1-x)}+e^2[1-e^{-x/\varepsilon}]-\ e^2$$

on trouve :

$$\begin{cases} u_{unif}(x) = e^{2(1-x)} - e^2.e^{-x/\varepsilon} \\ u_{unif}(0) = 0 \\ u_{unif}(1) = 1 - e^{2-1/\varepsilon} \end{cases}$$

$u_{unif}(x)$ est dite solution uniformément valable.

Chapitre 3

Application de la Méthode de pertubation

3.1 Notions préliminaires sur la mécanique des fluides

3.1.1 Écoulement irrotationnel

On dit qu'un écoulement est irrotationnel si :

$$rot\overrightarrow{V} = 0$$

Où $\overrightarrow{V}$ est le vecteur de vitesse.

Nous rappelons qu'un champ vectoriel $\overrightarrow{V}(x; y)$ dont le rotationnel est nul peut être toujours représentée par le gradient d'une fonction scalaire. C-à-dire qu'il existe une fonction $\phi(x; y)$ telle que :

$$\overrightarrow{V} = \overrightarrow{\mathrm{grad}}\phi$$

ϕ représente le potentiel de vitesse.

3.1.2 Fluide incompressible

un fluide est dit incompressible si :

$$\operatorname{div} \overrightarrow{V} = 0$$

3.1.3 Fonction de courant dans le cas d'un écoulement plan

Dans un domaine D, un écoulement du fluide est dit :

a) Plan (ou bidimensionnel) si en tout point de ce domaine, à l'instant t, le vecteur vitesse $\overrightarrow{V}$ est parallèle à un plan donné (p).

Dans le cas des fluides incompressibles on a :

$$\operatorname{div} \overrightarrow{V} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \tag{1.4}$$

L'équation précédente exprime la condition pour qu'il existe une fonction $\psi(x, y, t)$, dite fonction de courant et définie, à une constante près, par les expressions

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} = -v \quad , \quad \frac{\partial \psi}{\partial y} = u \tag{1.5}$$

3.1.4 Potentiel de vitesse

1. Tandis que le caractère irrotationnel du mouvement i.e $rot\overrightarrow{V} = 0$, que traduit l'équation :

$$\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} = 0 \tag{1.7}$$

entraîne l'existence d'une fonction potentiel $\phi(x, y, t)$ vérifiant

$$u = \frac{\partial \phi}{\partial x} \quad , \quad v = \frac{\partial \phi}{\partial y}$$

2. Quand le double caractère d'incompressibilité et d'irrotationnalité est rempli, les fonctions ϕ et ψ, vérifient :

$$\begin{cases} u = \dfrac{\partial \phi}{\partial x} = \dfrac{\partial \psi}{\partial y} \\ v = \dfrac{\partial \phi}{\partial y} = -\dfrac{\partial \psi}{\partial x} \end{cases} \tag{3.1}$$

Ces relations sont connues sous le nom de *Cauchy-Riemann*, qui permettent de trouver le potentiel de vitesse à partir de la fonction de courant ou inversement. On déduit aussi de la relation (3.1), que les fonctions ϕ et ψ vérifient toutes les deux l'équation de *Laplace* :

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} = 0$$

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = 0$$

3.2 Problème d'un écoulement à surface libre

3.2.1 Position et résolution du problème

Soit un écoulement bidimensionnel, irrotationnel sur un plan horizontal $x'ox$ d'un fluide incompressible et non visqueux.

Le plan $x'ox$, $y'oy$ du couple (x, y) sera considéré comme plan de la variable complexe $z = x + i\ y$. Soit $\overrightarrow{V} = (u\ \ (x, y), v\,(x, y))$ le champ du vecteur vitesse de l'écoulement.

Nous introduisons la fonction potentielle de vitesse ϕ et la fonction de courant ψ, alors les conditions de *Cauchy-Riemann* sont données par :

$$\begin{cases} u = \dfrac{\partial \phi}{\partial x} = \dfrac{\partial \psi}{\partial y} \\ v = \dfrac{\partial \phi}{\partial y} = -\dfrac{\partial \psi}{\partial x} \end{cases} \tag{3.2}$$

La fonction potentielle complexe f définie par :

$$f = \phi\,(x, y) + i\ \psi\,(x, y)$$

La dérivée de la fonction z par rapport à f est donnée par :

$$\begin{aligned}\frac{dz}{df} &= \frac{dx}{d\phi} + i\frac{dy}{d\phi} \\ &= x_\phi + iy_\phi\end{aligned}$$

Le problème est de déterminer la fonction complexe $z\left(f\right) = x\left(\phi,\psi\right) + i\, y\left(\phi,\psi\right)$ qui satisfait les équations suivantes :

$$\begin{cases} \quad \Delta\phi = 0 \quad \text{sur } \psi = 0 \\ y\left[\left(\dfrac{\partial x}{\partial \phi}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial y}{\partial \phi}\right)^2\right] + \epsilon = 0 \quad \text{sur } \psi = 0 \\ y\left(0,0\right) = 0 \end{cases} \tag{3.3}$$

La fonction inconnue $z\left(f\right)$ est un fonction de la variable ϵ, on peut utiliser le développement asymptotique suivant :

$$z\left(f\right) = \sum_{n\geq 0} z_n\left(f\right)\varepsilon^n$$

On prend les parties reélle et imaginaire avec $f = \phi$, on obtient :

$$\begin{aligned}x\left(\phi,0\right) &= \sum_{n\geq 0} x_n\left(\phi\right)\varepsilon^n \\ y\left(\phi,0\right) &= \sum_{n\geq 0} y_n\left(\phi\right)\varepsilon^n\end{aligned}$$

On a :

$$\begin{aligned}x_\phi^2 + y_\phi^2 &= \left(\sum_{n\geq 0} x_n'\left(\phi\right)\varepsilon^n\right)^2 + \left(\sum_{n\geq 0} y_n'\left(\phi\right)\varepsilon^n\right)^2 \\ &= \sum_{n\geq 0} Q_n\varepsilon^n\end{aligned}$$

Où

$$Q_n(\phi) = \sum_{m=0}^{n} x'_m x'_{n-m} + y'_m y'_{n-m}$$

$$\text{pour } n = 0, Q_0 = (x'_0)^2 + (y'_0)^2$$

$$\text{pour } n = 1, Q_1 = 2x'_0 x'_1 + 2y'_0 y'_1$$

Donc, la deuxiéme condition de l'équation (3.3) écrit sous forme

$$\sum_{n\geq 0} y_n(\phi)\,\varepsilon^n \sum_{n\geq 0} Q_n \varepsilon^n + \epsilon = 0$$

D'après les puissances de ε, on trouve des équations suivantes :

$$y_0 Q_0 = 0 \tag{3.4}$$

$$y_0 Q_1 + y_1 Q_0 + 1 = 0 \tag{3.5}$$

et pour $n = 2, 3, ...$

$$y_n Q_0 + y_{n-1} Q_1 + y_{n-2} Q_2 + ... + y_1 Q_{n-1} + y_0 Q_n = 0 \tag{3.6}$$

l'équation (3.4) implique $y_0(\phi) = 0$ et (3.5) donne

$$\begin{aligned} y_1 &= -\frac{1}{Q_0} \\ &= -\frac{1}{(x'_0)^2} \end{aligned} \tag{3.7}$$

et pour $n = 2$, l'équation (3.6) devient :

$$y_2 Q_0 + y_1 Q_1 = 0 \tag{3.8}$$

Donc

$$y_2 = \frac{Q_1}{Q_0^2}$$

On définit la fonction $x_0(\phi)$ par la relation, (d'après ref [2]),

$$x_0(\phi) = 2\sqrt{\phi}, \phi \geq 0$$

alors $y_1 = -\phi$ et $y_2 = Q_1\phi^2 = 2x_1'\sqrt{\phi}\phi^2$.

On pose pour $n = 1$

$$y = y_0 + y_1\epsilon = -\phi\varepsilon \tag{3.9}$$

$$x = x_0 + x_1\varepsilon = 2\sqrt{\phi} + x_1\varepsilon$$

En remplacant (3.9) dans la deuxiéme condition de (3.3) on trouve $x_1 = x_1' = 0$ alors $y_2 = 0$.

Donc la solution asymptotique du problème (3.3) est

$$z(f) = 2\sqrt{\phi} - i\phi\varepsilon, \phi \geq 0 \tag{3.10}$$

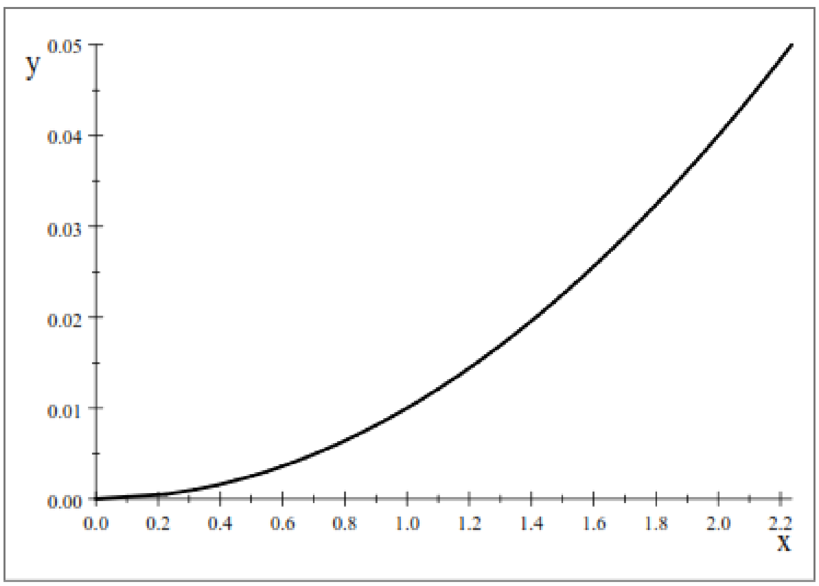

FIG. 3.1 – Approximations de la solution du problème (3.3) données par (3.10).

Bibliographie

[1] Ali Hasan Nayfehb, *Perturbation methods.* John Wiley & Sons, Inc. New York, 1973.

[2] J Cousteix,J Mauss, *Analyse Asymptotique et couche Limite.* Mathématiques & Applications 56, Springer-verleg Berlin, 2006.

[3] Mr. Guermoul Bilal, Thèse Magister (Comportement asymptotique d'un écoulement des fluides). U.F.A Sétif, 2009.

[4] S. Jonathan Chapman et J.-M. Vanden Broeck, *Exponential asymptotics and gravity waves.* Journal of Fluid Mechanics / Volume 567 / November 2006, pp 299 - 326.

[5] Ji-HuanHe, *Some asymptotic methods for strongly nonlinear equations.* International Journal of Modern Physics B Vol. 20, No. 10 (2006) 1141-1199.

[6] Milton Van Dyke, *Perturbation methods in fluid mechanics.* Stanford University, New York, 1975.

[7] J.-M. Vanden Broeck, L. W. Schwartz and E. O. Tuck, *Nonlinear Free-Surface Flow Problems Divergent Low-Froude-Number Series Expansion.* 361. Proc. R. Soc. Lond. A (1978) 207-224.