



Université Mohamed Khider de Biskra  
Faculté des Sciences et de la Technologie  
Département de Génie Civil et d'Hydraulique

# MÉMOIRE DE MASTER

Sciences et Technologies  
Travaux publics  
Voie et ouvrage d'art

Réf. : Entrez la référence du document

---

Présenté et soutenu par :  
**DIDICHE Dhaouadi**

Le : dimanche 24 juin 2018

## Formulation utilisation de l'élément finie SBTIE\* pour l'étude des problèmes de l'élasticité plane

---

### Jury :

Pr.	BLOUNAR Lamin	Pr	Université de Biskra	Président
Dr.	BENSMAIN Aissa	MCB	Université de Biskra	Examineur
Dr.	BOUREZANE Massaoud	MCA	Université de Biskra	Rapporteur

Année universitaire : 2017 - 2018

بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ

# **DEDICACES**

**Je dédie ce travail à mes parents qui me sont  
très chers.**

**A mes frères et sœurs et à toute ma famille. A  
tous mes amis et collègues de la promotion de  
Génie Civil 2018/2019.**

## ***REMERCIEMENTS :***

Tout d'abord, je remercie Allah, le tout grand puissant de m'avoir donné la force, le courage, la patience et la volonté de mener à bien ce modeste travail.

Tout d'abord, j'adresse mes remerciements à mes précieux parents les plus chers au monde de leur aide et leur soutien pour leur encouragement durant la réalisation de ce mémoire.

Je tiens à remercier vivement et sincèrement mon encadreur **Dr. M. BOUREZANE** qui a contribué et a assuré la direction de ce travail, pour tout le soutien, les orientations et la patience qu'il a manifesté durant son encadrement tout le long de la réalisation de ce mémoire.

Je tiens à remercier Monsieur **Pr. S . BENMEBAREK**, président de jury, qui m'a fait le grand honneur de présider ce jury.

Je tiens à remercier aussi Messieurs **Dr. L . BELOUNAR** et **Dr. M.S .RMADNA** et qui m'ont fait l'honneur d'examiner mon travail.

Je saisis aussi l'occasion pour rendre hommage à tous mes enseignants auprès desquels j'ai reçu ma formation.

Mes remerciements vont aussi à toutes les personnes qui ont contribué de près ou de loin à la réalisation de ce mémoire.

## RESUME

La modélisation des structures dont le comportement est membranaire a fait l'objet de nombreuses études et travaux de recherches, surtout en ce qui concerne l'approche en déformation.

L'efficacité des éléments rectangulaires membranaires à quatre nœuds avec deux DDL/nœud basées sur l'approche en déplacement, ainsi que les éléments ayant trois DDL par nœud comprise la rotation dans le plan basées sur l'approche en déformation à été démontrée.

Les éléments testés sont l'élément triangulaire CST, Q8 à deux DDL/nœud, et l'élément triangulaire STRIEIR avec trois DDL/nœud a comportement membranaire.

La confrontation des résultats des éléments de STRIEIR, l'élément classique Q8, et les éléments ABAQUS avec les résultats analytiques, à été élaborée pour la validation numérique des problèmes traités en contrainte plane, Notre objectif est d'évaluer l'approche en déformation dans la modélisation des structures Pour les problèmes d'élasticité plane.

**Mots clés :** éléments finis l'approche en déformation, corps rigide, variables dépendantes.

## ملخص

دراسة الهياكل ذات السلوك الغشائي كانت و ما زالت موضوع العديد من الأبحاث خاصة استعمال مقارنة التشوه .

فعالية العناصر الغشائية ذات الأربعة عقد مع درجتى حرية أو ثلاث لكل عقدة كانت ضمنة موضوع البحث .

العناصر المختبرة هي العنصر المستطيل Q8 ذو درجتى حرية فى العقدة ,و العنصر المستطيل STRIERIR ذو ثلاث درجات حرية فى كل عقدة حيث هذه العناصر ذات سلوك غشائي .

مقارنة نتائج STRIERIR , و العنصر Q8 مع النتائج النظرية و هذا من أجل التقييم للتحقق من المسائل التي تمت معالجتها فى حالة الاجهاد المستوي .

الكلمات المفتاحية : عنصر محدود , مقارنة التشوه , جسم صلب , متغيرات غير مستقلة .

# Sommaire

Introduction générale.....	01
----------------------------	----

## **Chapitre 01 : La théorie d'élasticité plane**

Introduction .....	03
1/Contrainte normale et contrainte tangentielle.....	04
2/Les deux états plan d'élasticités .....	05
2-1- Etat plan de contrainte .....	05
2-2-état plan de déformation.....	06
3/ Les équation fondamentales de l'élasticité plane.....	07
3-1- Les équations d'équilibre .....	07
3-1-1- Les équations différentielles d'équilibre.....	07
3.1.2. les conditions des contour .....	07
3-1-3 changement d'axe .....	08
4. Les équations de compatibilité et le potentiel des contraintes .....	09
Conclusion.....	10

## **Chapitre 2 : Généralité sur la méthode des éléments finis**

Introduction.....	11
1/La méthode des éléments finis.....	13
2/L'historique .....	13
3/Définition de la M.E.F .....	14
3-1-Les nœuds géométriques .....	15
3-2-Attributs d'un élément fini.....	15
4/Etapes de la M.E.F .....	16

5/Type d'éléments finis .....	18
6/Modélisation et discrétisation .....	21
7/Modèles d'éléments finis .....	21
7-1-Modèle déplacement .....	21
7-2-Modèle équilibre .....	21
7-3-Modèle mixte .....	22
7-4-Modèle hybride .....	22
8/Modèles d'éléments finis .....	22
8-1-modèle déplacement .....	22
8-2-modèle en déformation .....	23
9/Modèle en déformation .....	23
9-1-Définition .....	23
9-2-Critères de convergence.....	23
9-3-Avantages du modèle en déformation .....	23
10/Étude bibliographique sur la M.E.F. en déformation .....	24
CONCLUSION .....	26

### **Chapitre 3 : Formulation de l'élément SBTIE\* basée sur l'approche en déformation**

Introduction.....	27
1/Description de l'élément membranaire.....	28
2/Développement des éléments finis basée sur l'approche en déformation .....	28
3/La rotation dans le plane .....	<b>28</b>
4/Élément triangle basé sur l'approche en déformation SBTIEIR.....	30
- Formulation triangulaire S3 dans l'élasticité plan.....	31
1.Equation de compatibilité.....	31
2.Déformations.....	31
3-Champ de déplacement sans déformation.....	31
4.Définition de rotation dans le plan.....	32
5-Matrice qui relie les déplacements nodaux aux vecteur $\{\alpha\}$ .....	32
6-Champ de déplacement avec déformation.....	32

7-Champ de déplacement.....	34
Conclusion.....	36

#### **Chapitre 4 : Présentation de l’outil informatique**

Introduction.....	37
1/Présentation de l’outil informatique.....	38
1-1- ABAQUS/Standard .....	38
1-2 - ABAQUS/Explicit .....	38
2-Compléments de modules.....	38
3-Interfaces .....	38
4 -Fonctionnement du code ABAQUS .....	39
4-1-ABAQUS.....	40.
4-2-Le fichier (« texte ») de données.....	40..
4-3-Le fichier de résultats.....	40.
4-4-Les autres fichiers créés pendant le calcul.....	40
5- Réalisation d’une simulation numérique .....	41
6- Description de l’interface ABAQUS CAE .....	41
7- Réalisation d’une simulation numérique .....	41
7-1- Passage successif dans .....	41.
7-2- Visualisation des résultats.....	42
8- Module Part .....	42
8-1- La fonction du module part .....	42
8-2- Module Property .....	42
8-3- Module assembly .....	43

8-4- Module step .....	43
8-5- Module interaction .....	44
8- 6- Module load .....	44
8 -7-Module mesh .....	45
8- 8- Module job .....	45
8 -9-Module visualization .....	46

## **Chapitre 5 : Application et Validation numérique**

Introduction.....	47
Exemple 01 .....	48
Exemple 02 .....	51
Exemple 03 .....	54
Exemple 04 .....	60
Exemple 05 .....	62
Conclusion .....	63
Conclusion générale .....	64
Bibliographie	
Annexe	

## Notations :

M.E.F Méthode des éléments finis.

MCR Mouvements du corps rigide

Intégrale.

Dérivée partielle par rapport à  $x$ .

[ ] Matrice.

{ } Vecteur colonne.

[T ] Matrice transposée.

[I ] Matrice inverse.

DDL Degré de liberté.

$x, y, z$  Coordonnées cartésiennes.

$u, v$  Déplacements suivant les directions  $x$  et  $y$  et  $z$  respectivement.

Rotation dans le plan.

$x$  b Rotation du plan  $yz$  autour de  $y$ .

$y$  b Rotation du plan  $xz$  autour de  $x$ .

$K$  Courbures de flexion

$x$   $y$   $xy$   $M$ ,  $M$ ,  $M$  Moments de flexion et de torsion

$x$   $y$   $T$ ,  $T$  Forces de cisaillement.

$t$  Épaisseur pour les membranes.

$h$  Épaisseur pour la plaque en flexion et le coque

$x$   $e$ ,  $y$   $e$ ,  $z$   $e$  Déformations directes suivant  $x$  et  $y$  et  $z$  respectivement.

$xy$   $yz$   $xz$   $g$ ,  $g$ ,  $g$  Déformations tangentielles.

$xy$   $yz$   $xz$   $g$ ,  $g$ ,  $g$  Contrainte tangentielle.

$x$   $y$   $z$   $s$ ,  $s$ ,  $s$  Contrainte normale suivant les directions  $x$ ,  $y$  et  $z$ .

$l$  et  $m$  Les constantes de lamé.

$n$  Coefficient de poisson.

$E$ . Module de Young.

$I$   $L$ 'inertie.

$a_1$ ,  $a_2$  Paramètre des mouvements de corps rigide.

$a_3$  Paramètres de la rotation dans le plan.

$a$  Paramètres généraux de l'approximation.

[ $X$ ] Matrice des fonctions de base de l'interpolation.

[ $N$ ] Matrice des fonctions de formes.

{ $q$ } Vecteur de déplacement.

[ $A$ ] Matrice des coordonnées.

[ $B$ ] Matrice de déformation.

{ $F$ } Vecteur des forces.

[ $K$ ] Matrice de rigidité.

[ $H$ ] Matrice de rigidité [ $H$ ] qui relie entre les contraintes et les déplacements.

## List des figures

Figure 1.1 Vecteurs contraintes $T$ sur trois .....	05
Figure 1.2 tenseur de contrainte orthogonales.....	05
Figure 1.3 Conditions de contour en contraintes planes.....	08
Figure 1.4 Contraintes sur deux facettes orthogonales. ....	08
Figure 2.1 Eléments finis triangulaires avec continuité $C^0$ :(a) linéaire ; (b) quadratique ; (c) cubique.....	16
Figure 2.2 <i>Étape de l'analyse d'un problème aux limites</i> .....	21
Figure 3.1 <i>Système de coordonnées de l'élément SBTIEIR pour l'élasticité plan.</i> ....	31
Figure <b>5.1</b> : Flexion d'une poutre console sous charge vertical.....	48
Figure <b>5. 2</b> : Illustration des different maillages réguliers d'une poutre console.....	49
Figure 5 .3 Etude de la convergence du déplacement vertical d'une poutre console .....	50
Figure 5.4 console avec une charge uniformément .....	51
Figure 5.5 Convergence de la fleche pour une console charge uniformément.....	53
Figure 5.6 flexion pure d'une console .....	54
Figure 5.7 Condition d'appuis considères .....	55
Figure 5.8 Variation de la fleche d'une console .....	56
Figure 5. 9Variation de la contrante .....	56
Figure 5. 10Variation de la fleche d'une console .....	57
Figure 5.11Variation de la contrante .....	58
Figure 5.12Variation de la fleche d'une console.....	59
Figure 5.13Variation de la contrante.....	59
Figure 5.14Variation de la fleche d'une console.....	62

## List des tableaux

Tableaux 2.1 types des élément finis [BAT 90].....	20
.	
Tableaux 5.1 déplacement vertical d'une poutre console pour les mailles M(I,II,III .....	50
Tableaux 5.2..distribution des déplacements sous l'effet de la charge uniforme.....	52
Tableu5-3: distribution des déplacement .....	55
Tableu5-4: distribution des contrainte.....	56
Tableu5-5 : distribution des déplacement .....	57
Tableu5-6: distribution des contrainte .....	57
Tableu5-7: distribution des déplacement .....	58
Tableu5-8: distribution des contrainte .....	59
Tableau 5.9 déplacement vertical d'une poutre console minsse.....	62

# **INTRODUCTION GENERALE**

## INTRODUCTION GENERALE :

Dans le calcul des structures et en particulier les milieux continus, les problèmes concernés sont en général, très compliqués à résoudre par les méthodes analytiques usuelles. Ces problèmes peuvent être ceux de l'analyse des contraintes et de la diffusion thermique hydraulique.

Un problème d'ingénieur est généralement représenté par un modèle mathématique, des Equations aux dérivées partielles sur un domaine géométrique avec des conditions aux limites sur ses frontières. De plus, étant un problème continu, il possède une infinité de degrés de liberté. A l'exception de quelques cas ayant une géométrie très simple, il est très difficile sinon impossible de trouver une solution analytique au problème et d'étudier son comportement en une seule opération. Pour pouvoir trouver une solution, l'ingénieur est donc amené à remplacer le système continu par un système discret équivalent ayant un nombre fini de degrés de liberté. Pour cela, il a le choix entre plusieurs méthodes numériques telles que la MEF : est une procédure numérique approximative pour l'analyse des grandes structures. Elle est devenue très connue avec les avancements des calculateurs numériques puisqu'ils permettent aux ingénieurs de résoudre rapidement et efficacement de grands systèmes d'équation. Cette méthode est un outil très utile pour la solution de plusieurs types de problèmes technologiques tels que l'analyse des structures, transfert de chaleur et l'écoulement des fluides. Elle est spécialement dans la conception des armatures, des bateaux, des moteurs électriques, des moteurs de chaleurs et des vaisseaux spatiaux.

La pratique montre que les ingénieurs préfèrent modéliser leurs structures avec des éléments finis simples, tels les triangles à 3 nœuds... , il en résulte, en gardant le modèle en déplacement classique, des interpolations de degré peu élevé et une forte sensibilité aux phénomènes de blocage ou verrouillage de membrane et de cisaillement. De ce point de vue l'utilisation du modèle en déformation naturelle joue un rôle essentiel dans la construction d'éléments finis robustes et de bonne qualité.

La modélisation des structures dont le comportement est membranaire a fait de plusieurs travaux de recherches surtout en ce qui concerne l'approche en déformation.

Donc nous avons utilisé et testé l'efficacité des éléments membranaires à trois DDL par nœud, les éléments (Q8, SBTIE) ayant trois nœuds et possédant deux DDL par nœud, et

l'élément ( SBTIEIR ,ABAQUS ) à trois avec DDL compris la rotation comme degré de liberté additionnel . Ces derniers aident énormément la résolution des problèmes généraux d'élasticité plane ayant un comportement membranaire d'une part et la facilité de jonction avec d'autres éléments possédant trois DDL par nœud, d'autre part .

Ce mémoire est structuré en chapitres :

Le chapitre est consacré a introduction a la théorie d'élasticité plane des équation de base qui définissent les relations entre contrainte et déformations dans les bidimensionnels.

Dans le deuxième chapitre, nous présentons généralités sur la méthode des éléments finis ainsi qu'une définition d'un élément finis et histoire et représentation des éléments finis.

Nous montrons dans le troisième chapitre les approches en formulation des éléments membranaires avec un détail de formulation de quelques éléments.

Dans le chapitre quatrième sont présentée de l'outil informatique ( ABAQUS).

Le cinquième chapitre cœur de notre travail vise d'une part l'évaluation et la confrontation des résultats des éléments utilisés ayant deux ou trois DDL par nœud, avec les résultats analytiques, d'autre part l'explication des éléments membranaires intégrés dans le logiciel ABAQUS, pour faire des tests de validation numériques avec les problèmes traités.

Finalement, le travail s'achève par des conclusions et des recommandations suivies d'une bibliographie et d'annexes.

# **Chapitre 1 :**

## **Introduction à la théorie d'élasticité plane**

**Introduction :**

La méthode des éléments finis est une méthode générale d'analyse structurale dans laquelle une structure continue est remplacée par un nombre fini de points « nœuds ».

Tous les matériaux possèdent à un certain degré, la propriété d'être élastique, c'est-à-dire que si les forces extérieures, provoquant la déformation d'un corps, ne dépassent pas une certaine limite, la déformation disparaîtra au même temps que les forces qui lui donnent naissance. Pour ces matériaux élastiques, il existe une théorie dite « théorie d'élasticité » qui permet d'étudier le comportement des solides réels sous l'action de différents systèmes de forces.

Nous présentons dans ce chapitre, une brève analyse des équations de base qui définissent les relations entre contraintes et déformations dans le cas bidimensionnel. Dans ce cas dérive les cas particuliers de l'élasticité plane (état plan de déformation, état plan de contrainte).

## 1/Contrainte normale et contrainte tangentielle :

Les composantes de sa matrice représentative dans le repère (o, x, y, z) sont

$iT = \sigma_{ij} n_j$  Ces composantes sont indiquées schématiquement sur la figure (1). sur chaque face, le vecteur contrainte se décompose en une contrainte normale et deux contraintes tangentielles. Le champ de contraintes au un point M d'un solide est un tenseur d'ordre 2, symétrique, représenté par la matrice :

$$\sigma(M) = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{bmatrix}$$

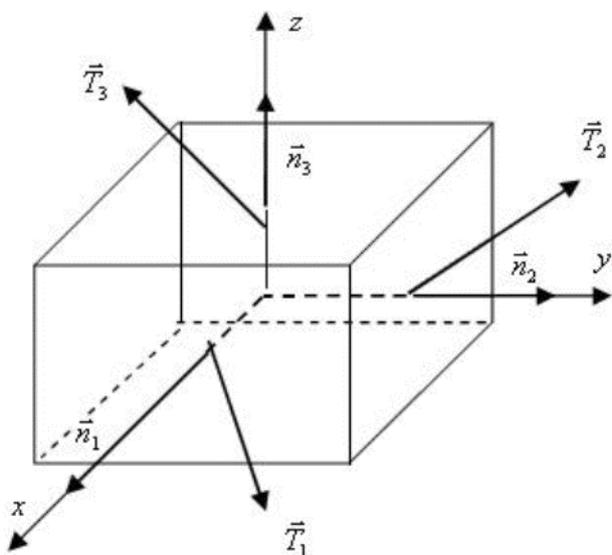


Figure 1 : Vecteurs contraintes T sur trois

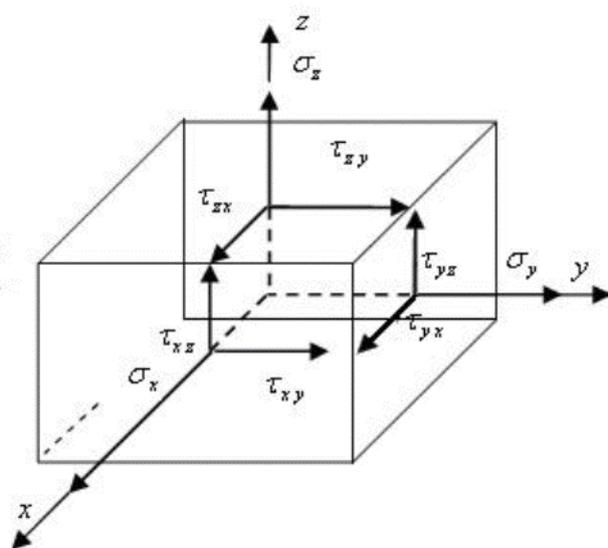


Figure 2 : tenseur de contrainte orthogonales

## 2/LES DEUX ETATS PLANS D'ELASTISCITE :

Les équations de la théorie de l'élasticité se simplifient considérablement dans le cas particulier fréquent où tous les vecteurs contraintes sont parallèles à un même plan. Ce cas se rencontre dans deux types de problème nettement distinct, que nous allons étudier. La notation indicielle ne présente aucun avantage dans les problèmes particuliers, nous emploierons la notation des ingénieurs.

### 2-1-Etat plan de contrainte :

Considérons (figure 1) un disque mince d'épaisseur constante, sollicité par des forces appliquées sur son contour. Les contraintes  $\sigma_{zz}, \sigma_{zx}$  et  $\sigma_{zy}$  sont nulles sur les deux faces du disque. Par raison de continuité, elles nous peuvent prendre à l'intérieur du disque que des valeurs très faibles par rapport à  $\sigma_{xx}, \sigma_{yy}$  et  $\sigma_{xy}$ .

L'on ne commet pas une erreur sensible en affirmant qu'elles sont nulles sur tout plan intérieur parallèle aux faces.

Pour la même raison, il est certain que les trois composantes non nulles  $\sigma_{xx}, \sigma_{yy}$  et  $\sigma_{xy}$  ne dépendent pratiquement pas de  $z$ , c'est-à-dire qu'elles restent constantes sur toute l'épaisseur du disque. Le tenseur des contraintes n'a que 3 composantes non nulles. La loi de Hooke d'un matériau élastique isotrope montre que la déformation  $\varepsilon_{zz}$  est non nulle :

$$\underline{\sigma} = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & 0 \\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \underline{\varepsilon} = \begin{bmatrix} \frac{\sigma_{xx} - \nu\sigma_{yy}}{E} & \frac{\sigma_{xy}}{2G} & 0 \\ \frac{\sigma_{xy}}{2G} & \frac{\sigma_{yy} - \nu\sigma_{xx}}{E} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{\nu(\sigma_{xx} + \sigma_{yy})}{E} \end{bmatrix}$$

En inversant les expressions de  $\varepsilon_{xx}$  et  $\varepsilon_{yy}$  dans l'équation (2), on obtient :

$$\left\{ \begin{array}{l} \sigma_{xx} = \frac{E}{(1-\nu^2)} (\varepsilon_{xx} + \nu\varepsilon_{yy}) \\ \sigma_{yy} = \frac{E}{(1-\nu^2)} (\varepsilon_{yy} + \nu\varepsilon_{xx}) \\ \sigma_{zz} = 0 \end{array} \right.$$

:

### 2-2-ETAT PLAN DE DEFORMATION :

Considérons un tunnel ou un puits de mine (figure 2 a) de très grande étendue selon la direction z. ces sections perpendiculaire à l'axe z sont toutes identiques, deux sections distantes de dz se déforment de façon identiques. sur la figure 2 b est représentée une tôle en sortie de laminoire. Dans la direction transversale (DT), il n'y a pas de déformation à cause du frottement entre les cylindres du laminoir et la tôle. les deux exemples de la figure 2 rentrent dans le cadre des déformations planes.

Le tenseur des déformations d'écrit :

$$\varepsilon = \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} & \varepsilon_{xy} & 0 \\ \varepsilon_{xy} & \varepsilon_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial u(x,y)}{\partial x} & \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u(x,y)}{\partial y} + \frac{\partial v(x,y)}{\partial x} \right) & 0 \\ \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u(x,y)}{\partial y} + \frac{\partial v(x,y)}{\partial x} \right) & \frac{\partial v(x,y)}{\partial y} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

La composante non nulle  $\sigma_{zz}$  du tenseur des contraintes s'obtient par la loi hooke .dans un matériau isotrope élastique  $\sigma_{zz}$  vaut :

$$\varepsilon_{yy} = \frac{1}{E} [\sigma_{zz} - \nu(\sigma_{xx} + \sigma_{yy})] = 0 \Rightarrow \sigma_{zz} = \nu(\sigma_{xx} + \sigma_{yy})$$

Les autres composantes non nulles du tenseur des contraintes s'écrivent :

$$\begin{cases} \sigma_{xx} = 2G \left[ \varepsilon_{xx} + \frac{\nu}{1-2\nu} (\varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy}) \right] \\ \sigma_{yy} = 2G \left[ \varepsilon_{yy} + \frac{\nu}{1-2\nu} (\varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy}) \right] \\ \sigma_{zz} = \nu(\sigma_{xx} + \sigma_{yy}) \end{cases}$$

Soit réarrangeant les différents termes :

$$\begin{cases} \sigma_{xx} = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} [(1-\nu)\varepsilon_{xx} + \nu\varepsilon_{yy}] \\ \sigma_{yy} = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} [\nu\varepsilon_{xx} + (1-\nu)\varepsilon_{yy}] \\ \sigma_{zz} = \nu(\sigma_{xx} + \sigma_{yy}) \end{cases} \left\{ \begin{array}{l} \varepsilon_{xx} = \frac{(1+\nu)}{E} [(1-\nu)\sigma_{xx} - \nu\sigma_{yy}] \\ \varepsilon_{yy} = \frac{(1+\nu)}{E} [-\nu\sigma_{xx} + (1-\nu)\sigma_{yy}] \end{array} \right\}$$

Ayant résolu un problème de contraintes planes il est souvent utile de connaître la solution du problème correspondant de déformation plane. C'est le cas par exemple si l'on veut résoudre expérimentalement un problème de déformation plan. Le moyen le plus simple consiste à effectuer les mesures sur un disque mince représentant le problème de contraintes planes correspondante, puis à

repasser au problème initial. Pour ce faire, points n'est besoin de recommencer tous les calculs.il suffit de faire les substitutions suivantes :

Pour passer de contraintes planes en déformation planes

$$E \rightarrow \frac{E}{(1 - \nu^2)} \quad \nu \rightarrow \frac{\nu}{(1 - \nu)}$$

et pour passer de déformation planes aux contraintes planes

$$E \rightarrow \frac{E(1 + 2\nu)}{(1 + \nu)^2} \quad \nu \rightarrow \frac{\nu}{(1 + \nu)}$$

Les deux transformations précédentes laissent inchangée l'expression du module de cisaillement ou de coulomb G, en fonction de E et  $\nu$ .

### 3/ Les équation fondamentales de l'élasticité plane :

#### 3-1- Les équations d'équilibre :

##### 3-1-1- Les équations différentielles d'équilibre :

En annulant

$\sigma_{zz}, \sigma_{zx}, \sigma_{zy}$  et adoptant  $x$  et  $y$  pour les composantes des force volumiques

Dans la direction x et dans la direction y respectivement, les équations d'équilibre s'écrivent :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y} + X &= 0 \\ \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} + Y &= 0 \end{aligned}$$

#### 3.1.2. les conditions des contour :

Soient

$\cos(\alpha)$  et  $\sin(\alpha)$  les cosinus directeurs de la normale extérieur ou contour du disque

En chargement plan. Soient  $T_x$  et  $T_y$  les tractions superficielles imposeés sur le contour. la

Définition du tenseur contrainte permet d'écrire:

$$\begin{cases} \sigma_{xx} \cos a + \sigma_{xy} \sin a = Tx \\ \sigma_{xy} \cos a + \sigma_{yy} \sin a = Ty \end{cases}$$

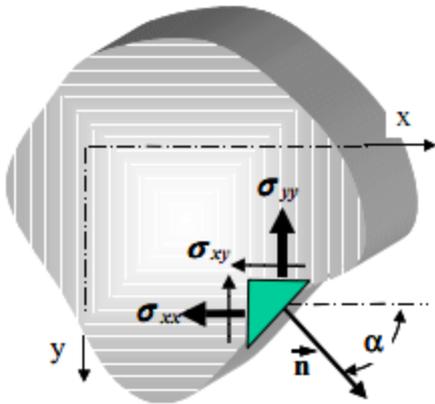


Figure 3 : Conditions de contour en contraintes planes.

Ces conditions expriment l'équilibre de translation selon les deux axes coordonnée du prisme élémentaire sur la figure 3.

3.1.3.changement d'axe :

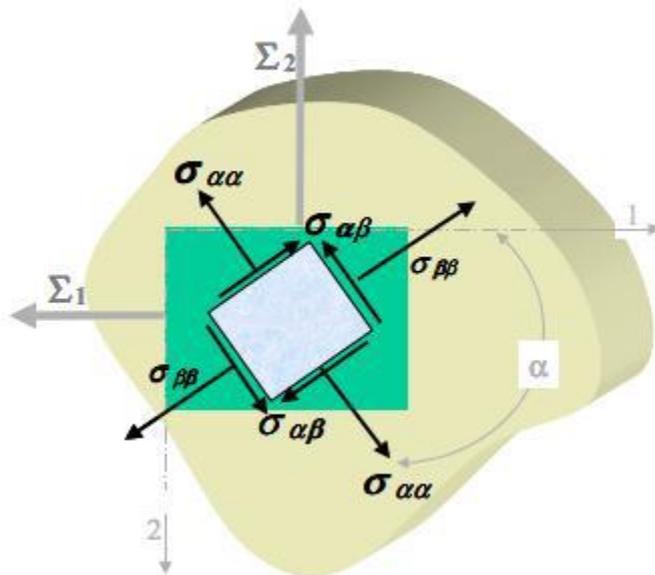


Figure 4 : Contraintes sur deux facettes orthogonales.

Soient 1 et 2 les directions principales des contraintes ( $\sigma_{12} = 0$ ) et (figure 5) les contraintes

Principales dans ce cas on montre que 1 et 2 sont aussi les directions principales des déformations.

Les formules de changement d'axes établies pour la tenseur des contraintes en 3 dimensions prennent des expressions particulièrement simples en contraintes planes ou en déformations planes:

$$\begin{cases} \sigma_{aa} = \Sigma_1 \cos^2 \alpha + \Sigma_2 \sin^2 \alpha \\ \sigma_{\alpha\beta} = \left( \frac{\Sigma_2 - \Sigma_1}{2} \right) \sin(2\alpha) \end{cases} \quad \begin{cases} \varepsilon_{aa} = \varepsilon_1 \cos^2 \alpha + \varepsilon_2 \sin^2 \alpha \\ \varepsilon_{\alpha\beta} = \left( \frac{\varepsilon_2 - \varepsilon_1}{2} \right) \sin(2\alpha) \end{cases}$$

#### 4. Les équations de compatibilité et le potentiel des contraintes

Dans le cas tridimensionnel, les équations de compatibilité s'écrivent :

$$\frac{\partial}{\partial x_k} \frac{\partial}{\partial x_k} \varepsilon_{ij} + \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial x_j} \varepsilon_{kk} - \frac{\partial}{\partial x_j} \frac{\partial}{\partial x_k} \varepsilon_{ik} - \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial x_k} \varepsilon_{jk} = 0$$

Les déformations sont nulles et que toutes les autres déformations sont indépendantes de z, les équations de compatibilité se réduisent à l'unique équation :

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_{xx}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{yy}}{\partial x^2} - 2 \frac{\partial^2 \varepsilon_{xy}}{\partial x \partial y} = 0$$

Comme dans le cas tridimensionnel, les équations de compatibilité peuvent être exprimées en fonction des contraintes. En contraintes planes, on part cependant plus souvent de la fonction d'airy.

**Conclusion :**

suivant un modèle différent , basé sur la formulation de champs de déformation et avec une sélection minutieuse des termes qui vérifient la représentation théorique adéquate du comportement des éléments travaillant en membrane , deux types d ' éléments sont présentés dans ce chapitre l'élément triangulaire SBTIE basé sur l' approche en déformation et l'élément triangulaire R 3basé sur l'approche en déplacement .

## **Chapitre 2 :**

### **Généralité sur la M.E.F**

## INTRODUCTION :

Pour analyser un phénomène naturel en générale ou un problème d'ingénierie en Particulier, on est souvent amené à développer un modèle mathématique pouvant décrire d'une manière aussi fiable que possible le problème en question.

Le développement d'un modèle mathématique s'appuie généralement sur quelques postulats de base et plusieurs hypothèses simplificatrices pour aboutir à des équations gouvernantes qui sont souvent des équations différentielles auxquelles sont ajoutées des conditions aux limites. Exemple, la théorie d'élasticité s'appuie sur le postulat fondamental de l'existence du vecteur contrainte et les équations générales d'élasticité linéaire isotrope sont obtenues avec les hypothèses de petites déformations, d'homogénéité et d'isotropie des matériaux ainsi que la linéarité des relations liant les contraintes et les déformations.

La résolution analytique d'équations différentielles pose parfois des difficultés Insurmontables, et une solution exacte décrivant bien le problème étudié n'est pas toujours facile à trouver. Le recours aux modèles physiques et à la simulation expérimentale pour la recherche d'une solution analogue à la solution recherchée peut s'avérer coûteux en temps et en moyens. Avec les progrès enregistrés dans le domaine de l'informatique et les performances des

Ordinateurs de plus en plus grandes, il est devenu possible de résoudre des systèmes d'équations différentielles très complexes. Plusieurs techniques de résolution numérique ont été ainsi développées et appliquées avec succès pour avoir des solutions satisfaisantes à des problèmes d'ingénierie très variés.

La méthode des éléments finis est l'une des techniques numériques les plus puissantes. L'un des avantages majeurs de cette méthode est le fait qu'elle offre la possibilité de développer un programme permettant de résoudre, avec peu de modifications, plusieurs types de problèmes. En particulier, toute forme complexe d'un domaine géométrique où un problème est bien posé avec toutes les conditions aux limites, peut être facilement traitée par la méthode des éléments finis.

Cette méthode consiste à diviser le domaine physique à traiter en plusieurs sous domaines appelés éléments finis à dimensions non infinitésimales. La solution recherchée est remplacée

dans chaque élément par une approximation avec des polynômes simples et le domaine peut ensuite être reconstitué avec l'assemblage ou sommation de tous les éléments.

## 1/La méthode des éléments finis :

La méthode des éléments finis est une procédure numérique pour analyser les structures et les milieux continus. Habituellement le problème adressé est compliqué à résoudre d'une manière satisfaisante par des méthodes analytiques classiques. Le problème peut concerner des contraintes, conduction de la chaleur, ou n'importe quel de plusieurs autres secteurs.

Le procédé de la méthode des éléments finis produit beaucoup d'équations algébriques simultanées, qui sont produites et résolues sur un ordinateur numérique. Les calculs des éléments finis sont exécutés sur l'ordinateur personnel. Cependant, les erreurs ont diminué en traitant plus d'équations. et les résultats assez précis pour la technologie sont parcourables à un coût raisonnable. La méthode des éléments finis a commencé comme méthode d'analyse des contraintes.

Aujourd'hui les éléments finis sont également employés pour l'analyse des problèmes du transfert thermique, champs de lubrification de flux de fluide, électriques et magnétiques, et beaucoup d'autres.

Les problèmes qui étaient précédemment tout à fait insurmontables sont maintenant résolus par habitude. Les procédures des éléments finis sont employées dans la conception des battements, des moteurs électriques, des fuselages des bateaux et des vaisseaux spatiaux.

## 2/L'histoire :

La méthode des éléments finis conçue au départ par les mécaniciens, comme un artifice de calcul des structures (aéronautiques et génie civil), et devenue par la suite, surtout avec l'apport considérable des mathématiciens appliqués Aubin (1972), St. Rang Fix (1973), puis Ciarlet (1978) qui lui ont imprimé une formulation mathématique rigoureuse, un véritable outil de résolution aux limites, rencontrées en physique mathématique, et une méthode d'application

Générale, car, elle s'applique aux problèmes stationnaires ou transitoires, linéaires ou non linéaires. Le domaine physique, objet de l'étude peut être à une ou plusieurs dimensions(s) d'espace.

Si la méthode des éléments finis est connue, au moins dans son principe depuis plus d'un demi-siècle, les formulations intégrales sur lesquelles elle est basée sont connues encore

depuis longtemps. Les origines de la méthode des éléments finis remontent aussi aux travaux fondamentaux de Gauss (1795),

Fourier (1800), Legendre (1805), Rayleigh (1870), Gram et Smith (1883), Poincaré (1890), Ritz (1908), Boubnov (1913), et Galerkin (1915), ceci pour ce qui est du côté mathématique concernant surtout le principe d'approximation de la solution exacte par un développement en série de fonction de base. Quant à l'aspect physique concernant surtout la formulation énergétique et le principe des travaux virtuels, il y a lieu de noter que l'origine remonte aux écrits de J. Bernoulli (1717), d'Alembert (1743), Euler (1751), Lagrange (1762), Navier (1819), et Castiglione (1878).

Il à noter que la méthode des éléments finis n'a pris un essor considérable qu'avec l'avènement des moyens informatiques, qui permettent de résoudre facilement les systèmes algébriques linéaires et non linéaires de grande dimension.

### **3/Définition de la M.E.F :**

La méthode des éléments finis est l'une des techniques numériques les plus puissantes, l'un des avantages majeurs de cette méthode est le fait qu'elle offre la possibilité de développer un programme permettant de résoudre, avec peu de modifications, plusieurs types de problèmes. En particulier, toute forme complexe d'un domaine géométrique où un problème est bien posé avec toutes les conditions aux limites, peut être facilement traité par la méthode des éléments finis.

La méthode des éléments finis est une technique d'analyse numérique pour obtenir des solutions approximatives à une large variété des problèmes des sciences de l'ingénieur. Bien qu'à l'origine, son développement était destiné pour l'étude des contraintes dans des parties de structures d'avions

A cause de sa diversité et sa flexibilité comme outil d'analyse, elle reçoit beaucoup d'attention dans les écoles d'ingénieurs en même temps que dans l'industrie. De nos jours, dans beaucoup de problèmes on constate que les ingénieurs ont tendance à chercher des solutions approximatives

plutôt que des solutions fermes et exactes. Par exemple, si nous voulons connaître les déplacements d'une structure quelconque, sans trop d'efforts, nous pouvons écrire les équations gouvernant et les conditions aux limites pour ce problème, mais nous constaterons tout de suite qu'on ne peut pas trouver une solution analytique simple. La difficulté réside

dans le fait, que la géométrie de la structure ou d'autres particularités du problème soient irrégulières ou "quelconques". Les solutions analytiques sont rares pour ces types de problèmes, que l'ingénieur est appelé à résoudre. Le bon sens et le savoir faire d'un utilisateur avertis viennent souvent à sa rescousse, et lui fournissent plusieurs alternatives pour surmonter ce dilemme. Une des possibilités est la simplification des hypothèses (pour ignorer certaines difficultés et réduire le problème pour qu'il puisse être traité). Parfois cette procédure marche, mais le plus souvent, elle mène à des résultats erronés ou à des réponses qui s'avèrent fausses. Maintenant que les ordinateurs sont largement disponibles, une alternative plus fiable se présente, c'est de laisser telles qu'elles les complexités du problème et de trouver une solution numérique approximative. Le principe de base de la MEF est que le domaine peut être analytiquement modélisé ou rapproché en le remplaçant par un ensemble d'éléments discrets. Puisque ces éléments peuvent être réunis de plusieurs manières, ils peuvent donc être employés pour représenter des formes extrêmement complexes. La MEF est en particulier bien convenu pour des problèmes avec des géométries complexes.

### 3-1-Les nœuds géométriques :

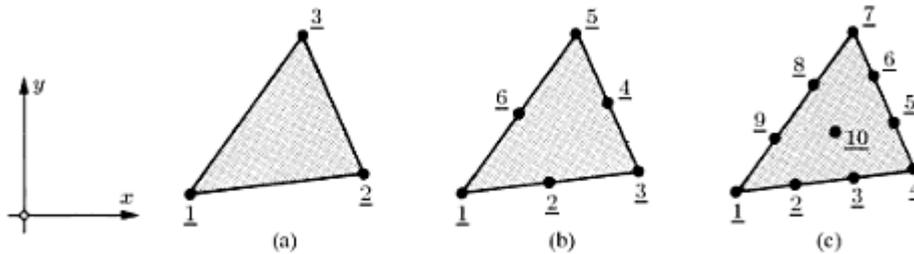
Nous choisissons un ensemble de  $n$  points, sur le domaine  $V$ , qui servira à définir la géométrie des éléments. Ces points, appelés *nœuds géométriques*, peuvent éventuellement coïncider avec les nœuds d'interpolation. Puis nous remplaçons le domaine  $V$  par un ensemble d'éléments  $V_e$  de formes relativement simples. Chaque élément  $V_e$  doit être défini analytiquement de manière unique en fonction des coordonnées des *nœuds géométriques* qui appartiennent à cet élément, c'est -à-dire qui sont situés sur  $V_e$  et sur sa frontière [Mloi.81].

### 3-2-Attributs d'un élément fini :

Un découpage artificiel (par l'imagination) d'un milieu continu en éléments finis permet d'isoler un de ces éléments pour l'étudier et établir les caractéristiques. L'identification d'un élément fini comprend les points suivants :

- **Géométrie** : un élément fini peut être un segment de droite ou de courbe, triangulaire ou quadrilatère (plan ou courbe), tétraèdre, prismes ou hexaèdre (brique). Les frontières entre les éléments peuvent être respectivement des points, des segments de droite ou de courbe, des faces planes ou courbes.

- **Matériau** : le matériau de l'élément est défini par une loi de comportement (Loi de Hooke isotrope ...etc.).
- **Nœuds** : les nœuds définissent la géométrie et assurent la connexion des éléments les uns aux autres ; ils occupent les sommets, les milieux des arêtes et faces .....etc.



**Fig. 1.** : Eléments finis triangulaires avec continuité  $C^0$ :(a) linéaire ; (b) quadratique ; (c) cubique.

- **Degrés de liberté** : la fonction d'approximation (en général le champ de déplacements ou champ de potentiels) est exprimée en fonction des valeurs particulières qu'elles prennent aux nœuds, valeurs qui deviennent les inconnues nodales. L'union, par leurs degrés de liberté nodaux communs des différents éléments adjacents, permet de reconstituer la

solution complète (assemblage) tout en veillant à respecter certaines règles, dites critères de convergence.

- **Forces nodales** : à travers les nœuds transitent des forces associées aux degrés de liberté. Elles sont dues aux charges appliquées à l'élément (poids propre, charge uniforme, température ....etc.).

Ces paramètres d'identification permettent de construire les deux caractéristiques clés d'un élément fini qui sont sa matrice de rigidité et son vecteur de force.

#### 4/Etapes de la M.E.F :

A partir du milieu des années 1970, des programmes d'éléments finis ont joué un rôle important dans la croissance remarquable de la conception assistée par ordinateur (C.A.O).

Avec les pressions économiques continues pour l'amélioration de la productivité en ingénierie, on verra dans l'avenir un rythme accéléré de la MEF dans la conception des processus. Cette méthodologie

reste toujours passionnante et une partie importante dans « la caisse à outils » de l'ingénieur.

1. Discrétiser le milieu : La méthode des éléments finis est une méthode d'approximation par sous domaines, donc avant toute application il faut diviser le domaine à étudier en éléments. chaque élément est défini géométriquement par un nombre de noeuds bien déterminé qui constituent en général ses sommets, Le résultat du procédé de discrétisation doit contenir deux données essentielles qui sont les coordonnées des noeuds et les connectivités des éléments.
2. Choisir les fonctions d'Interpolation : La deuxième étape est d'affecter les noeuds pour chaque élément et choisir ensuite la fonction d'interpolation pour représenter la variation du champ sur tout l'élément. Le champ de variables peut être un scalaire, un vecteur, ou un tenseur d'ordre supérieur. Souvent, des polynômes sont choisis comme fonctions d'interpolation pour le champ, parce qu'ils sont faciles à intégrer et à différencier. Le degré du polynôme choisi dépend du nombre de noeuds affectés à l'élément, de la nature et le nombre d'inconnues pour chaque noeud, et de certains critères de continuité imposés aux noeuds et au long des frontières de l'élément.
3. Trouver les propriétés de l'élément : Une fois que le modèle d'élément fini est établi (c'est-à-dire une fois que les éléments et leurs fonctions d'interpolation ont été choisis), nous sommes prêts à déterminer les matrices exprimant les propriétés des éléments individuellement (matrices de rigidité). Pour cette tâche nous pouvons employer l'une des trois approches suivantes : l'approche directe, l'approche variationnelle, ou l'approche des résidus pondérés (qui seront détaillés dans la section suivante).
4. Assembler les propriétés des éléments pour obtenir les systèmes d'équations : Pour trouver les propriétés du système complet modelé par le réseau d'éléments, nous devons "assembler" les rigidités de tous les éléments. Autrement dit, on combine les matrices exprimant le comportement des éléments et on forme la matrice exprimant le comportement du système entier. Les équations matricielles du système ont la même forme que les équations pour chacun des éléments, sauf qu'elles contiennent beaucoup plus de termes puisqu'elles incluent tous les noeuds. La procédure de base pour l'assemblage est due au fait qu'au niveau de chaque noeud (où de différents éléments sont connectés), la valeur de la variable du champ est la même pour chacun de ces éléments. Une particularité unique de la MEF consiste en ce que les équations du système global sont produites par l'assemblage d'équations individuelles de chaque élément.
5. Imposer les conditions aux limites : Avant que le système d'équations ne soit prêt pour la résolution, il doit prendre en compte les conditions aux limites du problème. A ce stade on impose aussi bien les valeurs nodales des variables dépendantes connues que les charges ou forces nodales.

6. Résoudre le système d'équations : Le processus d'assemblage donne un ensemble d'équations simultanées que nous résolvons pour obtenir les valeurs nodales inconnues du problème. Si le problème décrit une forme d'équilibre, donc nous devons résoudre un ensemble d'équations algébriques linéaires ou non-linéaires. Si le problème est autre, les inconnues nodales sont fonction du temps et nous devons résoudre un ensemble d'équations différentielles ordinaires linéaires ou non-linéaires.

7. Procéder a des calculs supplémentaires si nécessaire : Quelques fois on utilise les solutions du système d'équations pour calculer d'autres paramètres qui sont importants. Par exemple, dans un problème de mécanique des structures les inconnues nodales sont les déplacements, de ces déplacements nous pouvons calculer les déformations et les contraintes. De la même façon, dans un problème de conduction de chaleur, les inconnues nodales sont les températures et à partir de celles-ci nous calculons les flux de chaleur dans les éléments.

### 5/Type d'éléments finis :

La sélection de l'élément sera fonction du type de problème à résoudre, généralement : ils sont groupés en quatre classes [BAT 90] :

- 1- les contraintes planes ; les déformations planes ; axisymétriques (problème à deux dimensions).
- 2- la flexion des plaques.
- 3- les coques.
- 4- l'analyse des solides tridimensionnels.

Les différents types d'éléments finis suivant leur géométrie. Plusieurs classes d'éléments finis peuvent être distinguées :

- ✓ **Les éléments unidimensionnels (1D) :** Sont utilisés de façon individuelle ou associée à des plaques pour modélise les raidisseurs. Exemple : barre, poutre rectiligne ou courbe.
- ✓ **Les éléments bidimensionnels (2D) :** Élasticité plane : (déformation ou contrainte Plane). Exemple : plaque en flexion, coques courbes de forme triangulaire ou quadrangulaire.
- ✓ **Les éléments tridimensionnels (3D) :** élément de volume, ou coques épaisses (Tableau 1)

**Les éléments axisymétriques :** qui constituent une classe bien particulière : tores à section triangulaire ou quadrangulaire, coques conique.

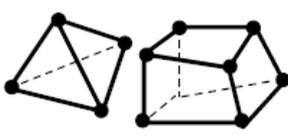
Eléments	Linéaires	paraboliques (quadratiques)	Cubiques
Unidimensionnels			
bidimensionnels			
tridimensionnels			

Tableau 1 : type des élément finis.

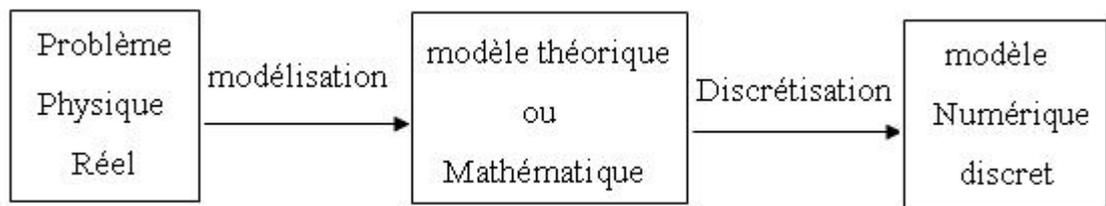
## 6/Modélisation et discrétisation :

La méthode des éléments finis est donc une procédure générale de discrétisation pour la résolution des problèmes des milieux continus. Donc pour avoir une analyse numérique qui simulera au mieux un problème, il faut effectuer deux opérations essentielles la modélisation et la discrétisation, ces opérations se font en deux temps.

La modélisation.

La discrétisation ensuite et portent sur les deux aspects principaux du problème pratique.

- Représentation de la géométrie, des charges, des conditions aux limites.
- Choix des éléments finis et du maillage.



**Figure 2 :** *Étape de l'analyse d'un problème aux limites*

## 7/Modèles d'éléments finis :

### 7-1-Modèle déplacement :

Ce modèle est le plus connu, le plus développé et le plus populaire. Les éléments finis dans cette catégorie est basée sur une interpolation du champ des déplacements, étendue à tout l'élément. Donc les déplacements sont déterminés de manière détaillée et unique dans la structure, alors les contraintes ne peuvent être connues que par certaines moyennes et ne sont pas continues aux frontières.

### 7-2-Modèle équilibre :

C'est une formulation dans laquelle l'approximation se fait sur le champ de tension de façon que l'équation d'équilibre soient satisfaites à l'intérieur de chaque élément. alors, l'élément est

dit statiquement admissible cette condition est automatique réalisée lorsque le champ de tension est déduit d'un champ de fonction de tension continue est différentiable.

Si l'équation des tensions de surface est vérifiée à l'interface entre élément, le modèle est dit Co-diffusif. le principe variationnel utilise est celui de variation de l'énergie total par rapporte aux contraintes.

### **7-3-Modèle mixte :**

Si on combine les deux modèles précédents, on peut avoir des champs mixtes (déplacement, Déformation, contrainte) qui sont considérés ici, ce qui rend la formulation, ou la mise au point Longue et coûteuse ; mais en contrepartie les éléments qui en découlent sont d'excellente qualité, On utilise parfois ce modèle pour corriger certains défauts du modèle de déplacement.

### **7-4-Modèle hybride :**

Dans cette formulation, le plus souvent, on définit la solution en termes d'approximation, d'une partie du champ de contraintes internes en équilibre, d'autre part des déplacements sur la frontière de l'élément.

Le principe variationnel utilise est une variante de l'énergie potentielle complémentaire.

## **8/Modèles d'éléments finis :**

Le plus souvent, le champ interpolé est celui des déplacements, et il est rarement celui des déformations ou des contraintes. Ces interpolations portent sur tout l'élément ou une partie de celui-ci, à l'intérieur ou à la frontière. On peut créer divers types, dits « modèles » d'éléments finis selon la combinaison choisie comme :

### **8-1-modèle déplacement :**

Ce modèle est le plus populaire, le plus connu et le plus développé. Dans cette catégorie, les éléments finis sont basés sur une interpolation du champ des déplacements, étendu à tout l'élément. Alors, les déplacements sont déterminés de manière détaillée et unique dans la structure, donc les contraintes ne peuvent être connues que par certaines moyennes et ne sont pas continues aux frontières.

## 8-2-modèle en déformation :

Ce modèle présente une approximation qui se fait sur le champ de déformation, puis on intègre pour retrouver le champ de déplacement de telle sorte que les équations d'équilibres et de compatibilité soient satisfaites à l'intérieur de l'élément.

## 9/Modèle en déformation :

### 9-1-Définition :

Un élément basé sur le modèle en déformation signifie que sa formulation s'obtient en intégrant un champ de déformation défini auparavant, dont les fonctions sont indépendantes. Cette idée qui a, fait sa gloire est basée sur un calcul exact des termes représentant les modes rigides, les autres composantes du champ de déplacement sont basées sur l'intégration de présumées fonctions indépendantes de déformation et le tout vérifie les équations (1) de compatibilités :

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_{ij}}{\partial x_k \partial x_l} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{kl}}{\partial x_i \partial x_j} - \frac{\partial^2 \varepsilon_{ik}}{\partial x_j \partial x_l} - \frac{\partial^2 \varepsilon_{jl}}{\partial x_i \partial x_k} = 0$$

Les termes des polynômes des champs des déplacements sont d'un ordre élevé malgré la non introduction de degrés de liberté supplémentaires ni de noeuds intermédiaires. Les éléments basés sur la dite approches sont non-conformes mais conduisent généralement à des résultats très encourageants. En plus, la convergence obtenue est rapide, lorsque les résultats sont comparés avec ceux donnés par des éléments basés sur le modèle en déplacement ayant le même nombre de d.d.l.

### 9-2-Critères de convergence:

Un des critères principaux pour qu'un élément fini soit validé, pour une application générale dans la mécanique des structures, est qu'il soit en mesure de représenter les modes de corps rigides et ceux des déformations constantes, la représentation adéquate de ces modes est une condition nécessaire pour qu'on ait une bonne précision et des propriétés de convergence. Donc, lorsqu'une théorie imprudente est employée pour le développement d'un élément fini, de faux modes de corps rigides et de déformation peuvent apparaître.

### 9-3-Avantages du modèle en déformation :

L'utilisation du modèle en déformation apporte de nombreux avantages en termes de comportement des structures, en effet, on tire profit des bonnes adaptations pour la

description exacte des mouvements : corps rigides et déformations constantes. Ainsi, les éléments développés permettront d'augmenter la performance des résultats, avec seulement un nombre

limité d'éléments, les avantages des éléments à modèle en déformation sont [BEL 99], [HAM 06] :

- Satisfaction plus facile des deux principaux critères de convergence, liés directement aux déformations (mode de déformation constante et mode de corps rigide).

- Découplage plus facile des différentes composantes des déformations (un champ de déplacements découplés engendre des déformations couplées).

- Possibilité d'enrichir le champ des déplacements par des termes d'ordre élevé sans l'introduction de noeuds intermédiaires ni de degrés de liberté supplémentaires

### **10/Étude bibliographique sur la M.E.F. en déformation :**

- L'approche en déformation a été appliquée par Sabir et Ashwell [SAB 72], à développer, une nouvelle classe des éléments pour les problèmes, d'élasticité plane dans des coordonnées cartésiennes.

- Un élément fini de coque cylindrique a été ensuite développé par Ashwell (1972). L'efficacité de cet élément a été testée en l'utilisant pour l'analyse d'un cylindre pincé court à bords libres. Les résultats obtenus ont montré une convergence rapide aussi bien pour le déplacement que pour les contraintes.

[ASH 72] .

- Sabir (1983) a appliquée L'approche en déformation pour développer une nouvelle classe d'éléments pour les problèmes d'élasticité générale en coordonnées cartésiennes.

- [SAB 83] La grande innovation a l'époque, c'était l'introduction de la rotation (drelin rotation) dans le plan par Sabir et Chow [SAB 83 b] pour l'analyse du flambement des panneaux plans avec ouverture circulaire et carrés.

- [SAB 84] Utilisation des mêmes éléments pour l'analyse des voiles avec des ouvertures. L'attention s'est focalisée ensuite sur le développement et l'amélioration [SAB 85] des éléments rectangulaires et triangulaires (SBRIEIR, SBTIEIR), ayant des

rotations dans le plan au niveau des noeuds avec des résultats très satisfaisants avec un nombre réduit d'éléments.

- Belarbi et le Charif [BEL 99], ont développé un élément fini hexaèdre SBH8 l'élément basé sur l'approche en déformation. Cet élément constitué à huit noeuds avec trois degrés de liberté par noeud ( $u$ ,  $v$  et  $w$ ) a été utilisé pour l'étude des plaques minces et épaisses.
- Pour analyse des problèmes anti plans, Belounar et Guenfoud [BELO 05] ont développé de nouveaux éléments modélisant la flexion des plaques et tout récemment [BEL 05] un intéressement pour le développement d'éléments secteurs par Bourezane [BOU 06].
- A.I. Mousa et M.H. El Naggar [MOU 07] ont développés un nouveau élément fini rectangulaire sphérique basé sur la formulation des coques surbaissées.

**CONCLUSION :**

La M.E.F c'est une méthode approchée de calcul numérique permettant de déterminer l'état d'équilibre d'un milieu continu élastique à deux ou trois dimensions.

Elle consiste à déterminer de manière approximative les déplacements d'un certain nombre de points du milieu appelés « nœuds ».

Le Modèle de déformation présente une interpolation directe sur les déformations permet d'avoir une meilleure précision sur ces grandeurs, sur les contraintes et sur les déplacements (obtenus par intégration), contrairement à la formulation classique où les déformations sont obtenues par dérivation du champ adopté pour déplacements.

**Chapitre 3 :**  
**Formulation de l'élément SBTIE\***  
**basée sur l'approche en déformation**

### **Introduction :**

Jusqu'à maintenant on continue toujours à proposer des nouveaux modèles, ainsi l'obligation d'assumer une lourde tâche qui est de choisir lesquels des formulations satisfont un certain nombre d'exigence, et procéder par la suite à une sélection finale qui reconnaissant le n'est pas facile.

Suivant les recherches bibliographiques nous constatons de l'ampleur de la MEF grâce à l'invention de la nouvelle approche de déformation qui obéit à une croissance rapide comme alternative aux autres modèles.

Dans ce chapitre on va présenter quelques éléments membranaires, l'élément triangulaire, l'élément SBTIE cet élément basé sur l'approche en déformation, ainsi que l'élément S3 basé sur l'approche en déplacement.

### 1/Description de l'éléments membranaires

Les éléments membranes sont parmi les éléments les plus simples à se développer. Ces éléments sont employés pour analyser des structures soumises aux forces dans le plan. Supposant que la structure est dans le plan  $x y$ , les déplacements d'un point quelconque de la structure sont  $u$ , la translation suivant la direction  $x$  et  $v$ , la translation suivant la direction  $y$ . Les efforts internes sont des contraintes normales  $\sigma_x$  et  $\sigma_y$  et la contrainte de cisaillement.

### 2/Développement des éléments finis basée sur l'approche en déformation :

En premier lieu, Sabir a développé à l'élément rectangulaire et l'élément triangulaire avec une variation linéaire des champs des déformations indépendantes  $\epsilon_x$  et  $\epsilon_y$ , et aux champs  $\tau_{xy}$  constants, ce qui lui a permis aux autres éléments d'avoir lieu.

Ces éléments ont des degrés de liberté dans chacun des quatre nœuds des coins, en outre l'occasion a été prise pour montrer que l'approche du modèle en déformation peut être utilisée pour développer un élément rectangulaire et un élément triangulaire simple ayant la rotation dans le plan (Drilling rotation) comme un degré de liberté nodal, la performance de cet élément est testée en l'appliquant à l'analyse des problèmes traités dans quelques – et une comparaison avec les résultats existants est donnée, sa [SAB 85] publications – avec d'autres éléments rectangulaire et élément triangulaire basé sur le modèle combinaison déformation est utilisé pour obtenir des solutions aux problèmes pratiques, le problème de concentration de contrainte dans les plaques trouées est analysé, de plus, ces éléments sont utilisés avec des éléments poutre courbée de renforcement convenable afin d'obtenir une solution aux plaques avec les trous renforcés.

### 3/La rotation dans le plan :

Dans la plus part des éléments finis de coque, utilisés par les ingénieurs (triangle à trois nœuds ou quadrilatères à 4 nœuds) et formulés en utilisant l'approche par facettes planes ou celle par facettes courbes, la partie membrane est le plus souvent développée sur la base de modèles classiques (déplacements ou mixtes, déformation).

Pourtant, certains cas-tests standards de coques, reconnus par la communauté scientifique, font apparaître une certaine [A YA 05] comme étant de véritables outils de validation faibles à reproduire des résultats numériques corrects et acceptables, surtout quand il s'agit des comportements complexes où les états de membrane et de flexion sont dominants. Parmi

les raisons de cette constatation d'échec, on évoque une mauvaise approximation de la membrane en termes d'éléments finis, ce qui est d'ailleurs vrai. Pour améliorer le comportement de membrane, en particulier pour les couques, les autres proposent, un concept de rotation autour de la normale, parmi ses auteurs on a cité :

Macleod (1966) a développé un élément dont les fonctions de formes ont été choisies par un essai d'erreur sur la base du critère de comptabilité à la limite, il a utilisé une forme simplifiée du degré de liberté rotationnel et a affirmé que le moment correspondant n'est pas complètement docile à une explication physique, les éléments exigés, les éléments de Macleod (1969) ne sont pas symétriques, l'arrangement spécial de ses éléments est exigé, et leur performance est dépendante sur l'aspect de proportion, de plus, la comptabilité avec les autres, beaucoup d'autres [SAB 85] élément de poutre peut être sur quelques nœuds seulement. Les auteurs ont penché la recherche au développement des éléments triangulaires et quadrilatères qui ont la rotation dans le plan comme un degré de liberté, particulièrement dans les travaux réalisés par Dunger et Sept (1964), Tinawi et Olsen (1972) et Bearden (1979). Ils ont développé un élément triangulaire avec des déplacements cubiques interpolés pour la rotation dans le plan.

Dans le premier travail (1964), la matrice de rigidité est obtenue en supposant des distributions de contrainte linéaires, avec l'utilisation du modèle hybride, quant aux deux autres travaux (1972) et (1979), la matrice de rigidité est basée sur des champs de déplacement compatible en tenant compte le principe d'énergie potentielle minimale.

Durant les années 70, les développeurs d'éléments finis paraissent, numériquement incapable de formuler un élément membranaire efficace avec, en plus des déplacements de translations comme degré de liberté (DDL), une rotation autour de la normale au plan moyen [SED 02]

EN 1981, Mohr a réanimé le problème de l'inclusion du degré de liberté rotationnel et a affirmé qu'il y a eu peu de tentatives et elles n'étaient pas particulièrement prospères, il a développé deux éléments, rectangulaire pour éprouver la difficulté dans une présentation de la contrainte de cisaillement et a donné des résultats d'une manière marginale mieux que l'élément rectangulaire standard (bilinéaire) et un élément triangulaire développé par l'usage de la méthode (nested interpolation). [SAB 85]

En 1984, Allman a présenté un élément triangulaire où les déplacements le long des cotés sont pris linéaires, les normales cotés sont supposés du second ordre. L'élément est compatible en supposant la rotation du coin dans le plan est en rapport avec le déplacement normal (quadratique).

L'élément d'Allman sont plus riches que ceux de Mohr, mais les rotations nodales dans ses éléments ne sont pas de vraies rotations, il est donc impossible de les associer avec les poutres.

Rezak AYAD a proposé un élément fini basé sur une approximation à 5 paramètres des contraintes planes contra-variantes, définie en satisfaisant l'équilibre bidimensionnel dans le repère covariant naturel  $(\xi, \eta)$ . La matrice de rigidité mixte finale est obtenue en éliminant par condensation statique les 5 paramètres « concept de rotation de fibre plane » [AYA 95]

D'autres concepts de rotation autour de la normale ont également été introduits pour le même objectif :

L'amélioration de la précision en membrane des éléments finis.

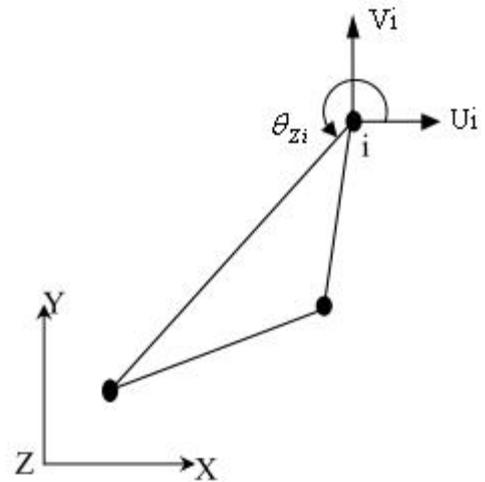
,Il s'agit du concept « vertex rotations ».[AYA 95]

Contrairement à la définition de la rotation dans le plan du sommet  $w$  (vertex rotation), le degré de liberté additionnel (drilling rotation) est donné comme suit :

Cette dernière peut être interprétée physiquement comme une vraie rotation de la bissectrice de l'angle  $\theta_z$  entre les cotés adjacents de l'élément fini.

#### 4/Élément triangle basé sur l'approche en déformation SBTIEIR [BEL 05]

La Figure (3.3) montre la géométrie de l'élément SBTIEIR basé sur l'approche en déformation. Les déplacements nodaux correspondants. Chaque nœud (i) avec  $U_i$ ,  $V_i$ , et  $Z_i$  de la rotation dans le plan.



**Figure 01 :** *Système de coordonnées de l'élément SBTIEIR pour l'élasticité plan.*

Considérer l'élément triangulaire représenté sur la figure (3 3) . trois composants Cartésiens du champ de déformation.

Nous intégrons d'abord l'équation (351) avec toutes les déformations égales à zéro, de ce fait obtenant :

1.Equation de compatibilité:

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y}$$

2.Déformations:

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x}$$

$$\varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y}$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}$$

3. Champ de déplacement sans déformation correspond a:

$$\varepsilon_x = 0$$

$$\varepsilon_y = 0$$

$$\gamma_{xy} = 0$$

$$u_r = \alpha_1 - \alpha_3 y$$

$$v_r = \alpha_2 + \alpha_3 x$$

$$\theta_r = \alpha_3$$

#### 4. Définition de rotation dans le plan

$$\theta = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right)$$

$$5. \text{ Matrice élasticité } [D] : \{\sigma\} = \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = [D] \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix}$$

$$[D] = \begin{bmatrix} \mathbf{d}_{11} & \mathbf{d}_{12} & \mathbf{0} \\ \mathbf{d}_{21} & \mathbf{d}_{22} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{d}_{33} \end{bmatrix}$$

#### 6. MATRICE [A]

Matrice qui relie les déplacements nodaux aux vecteur  $\{\alpha\}$

$$\{\delta^e\} = [A]\{\alpha\}$$

#### 1. ELEMENT SBRE

NNE=4, NDNL=2 ( $u_i, v_i$ ), NDLE=8

Champ de déplacement avec déformation correspond a:

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} = \alpha_4 + \alpha_5 y$$

$$\varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial x} = \alpha_6 + \alpha_7 x$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = \alpha_8$$

$$u_s = \alpha_4 x + \alpha_5 xy + \alpha_8 y/2 - \alpha_7 y^2/2$$

$$v_s = \alpha_6 y + \alpha_7 xy + \alpha_8 x/2 - \alpha_5 x^2/2$$

Champ de déplacement total:

$$u = (\alpha_1 - \alpha_3 y) + (\alpha_4 x + \alpha_5 xy + \alpha_8 y/2 - \alpha_7 y^2/2)$$

$$v = (\alpha_2 + \alpha_3 x) + (\alpha_6 y + \alpha_7 xy + \alpha_8 x/2 - \alpha_5 x^2/2)$$

Matrice  $[C] : \{\varepsilon\} = [C]\{\alpha\}$

$$[C] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & y & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & x & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\{\delta^e\} = \begin{Bmatrix} u_1 \\ v_2 \\ u_2 \\ v_3 \\ u_3 \\ v_4 \\ u_4 \\ v_4 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & y_1 & x_1 & y_1 x_1 & 0 & y_1^2 / 2 & y_1 / 2 \\ 0 & 1 & x_1 & 0 & x_1^2 / 2 & y_1 & y_1 x_1 & x_1 / 2 \\ 1 & 0 & y_2 & x_2 & x_2 y_2 & 0 & y_2^2 / 2 & y_2 / 2 \\ 0 & 1 & x_2 & 0 & x_2^2 / 2 & y_2 & x_2 y_2 & x_2 / 2 \\ 1 & 0 & y_3 & x_3 & x_3 y_3 & 0 & y_3^2 / 2 & y_3 / 2 \\ 0 & 1 & x_3 & 0 & x_3^2 / 2 & y_3 & x_3 y_3 & x_3 / 2 \\ 1 & 0 & y_4 & x_4 & x_4 y_4 & 0 & y_4^2 / 2 & y_4 / 2 \\ 0 & 1 & x_4 & 0 & x_4^2 / 2 & y_4 & x_4 y_4 & x_4 / 2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \alpha_4 \\ \alpha_5 \\ \alpha_6 \\ \alpha_7 \\ \alpha_8 \end{Bmatrix}$$

$$\{\delta^e\} = [A]\{\alpha\}$$

$$[K^e] = [A^{-1}]^T [K_0^e] [A^{-1}];$$

$$[K_0^e] = \int \int [C]^T [D] [C] dx dy$$

## 2.ELEMENT SBREIR

$$NNE=4, NDLN=3(u_i, v_i, \theta_i), NDLE=12$$

champ de déplacement sans déformation correspond a:

$$\varepsilon_x = \alpha_4 + \alpha_5 y + (\alpha_{11} y^2 + 2\alpha_{12} x y^3)$$

$$\varepsilon_y = \alpha_6 + \alpha_7 x - (-\alpha_{11} x^2 - 2\alpha_{12} x^3 y)$$

$$\gamma_{xy} = \alpha_8 + \alpha_9 x + \alpha_{10} y + (\alpha_5 x + \alpha_7 y)$$

$$u_s = \alpha_4 x + \alpha_8 y / 2 + \alpha_5 x y + \alpha_{10} y^2 / 2 + \alpha_{11} x y^2 / 2 + \alpha_{12} x^2 y^3$$

$$v_s = \alpha_6 y + \alpha_8 x / 2 + \alpha_7 x y + \alpha_9 x^2 / 2 - \alpha_{11} x^2 y / 2 - \alpha_{12} x^3 y^2$$

$$\theta_s = -\alpha_5 x / 2 + \alpha_7 y / 2 + \alpha_9 x / 2 - \alpha_{10} y / 2 - 2\alpha_{11} x y - 3\alpha_{12} x^2 y^2$$

Champ de déplacement total:

$$u = \alpha_1 - \alpha_3 y + \alpha_4 x + \alpha_8 y / 2 + \alpha_5 x y + \alpha_{10} y^2 / 2 + \alpha_{11} x y^2 / 2 + \alpha_{12} x^2 y^3$$

$$v = \alpha_2 + \alpha_3 x + \alpha_6 y + \alpha_8 x / 2 + \alpha_7 x y + \alpha_9 x^2 / 2 - \alpha_{11} x^2 y / 2 - \alpha_{12} x^3 y^2$$

$$\theta = \alpha_3 - \alpha_5 x / 2 + \alpha_7 y / 2 + \alpha_9 x / 2 - \alpha_{10} y / 2 - 2\alpha_{11} x y - 3\alpha_{12} x^2 y^2$$

Déterminer avec la meme facon précédent les matrices suivantes

Matrice  $[C] : \{\varepsilon\} = [C]\{\alpha\}$

$$[C] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & y & 0 & 0 & 0 & 0 & y^2 & 2xy^3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & x & 0 & 0 & x^2 & 2x^3y \\ 0 & 0 & 0 & 0 & x & 0 & y & 1 & xy & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$\{\delta^e\} = [A]\{\alpha\}$

$$\{\delta^e\} = \begin{bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ \theta_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ \theta_2 \\ u_3 \\ v_3 \\ \theta_3 \\ u_4 \\ v_4 \\ \theta_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & y_1 & x_1 & x_1y_1 & 0 & 0 & y_1/2 & 0 & y_1^2/2 & x_1y_1^2/2 & x_1^2y_1^3 \\ 0 & 1 & x_1 & 0 & y_1^1 & 0 & x_1y_1 & x_1/2 & x_1^2/2 & 0 & x_1^2y_1/2 & x_1^3y_1^2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & x_1/2 & 0 & x_1/2 & 0 & x_1/2 & y_1/2 & 2x_1y_1 & 3x_1^2y_1^2 \\ 1 & 0 & y_2 & x_2 & x_2y_2 & 0 & 0 & y_2/2 & 0 & y_2^2/2 & x_2y_2^2/2 & x_2^2y_2^3 \\ 0 & 1 & x_2 & 0 & y_2 & 0 & x_2y_2 & 0 & x_2^2/2 & 0 & x_2^2y_2/2 & x_2^3y_2^2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & x_2/2 & 0 & x_2/2 & x_2/2 & x_2/2 & y_2/2 & 2x_2y_2 & 3x_2^2y_2^2 \\ 1 & 0 & y_3 & x_3 & x_3y_3 & 0 & 0 & y_3/2 & 0 & y_3^2/2 & x_3y_3^2/2 & x_3^2y_3^3 \\ 0 & 1 & x_3 & 0 & y_3 & 0 & x_3y_3 & x_3/2 & x_3^2/2 & 0 & x_3^2y_3/2 & x_3^3y_3^2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & y_3/2 & 0 & y_3/2 & 0 & x_3/2 & y_3/2 & 2x_3y_3 & 3x_3^2y_3^2 \\ 1 & 0 & y_4 & x_4 & x_4y_4 & 0 & 0 & y_4/2 & 0 & y_4^2/2 & x_4y_4^2/2 & x_4^2y_4^3 \\ 0 & 1 & x_4 & 0 & y_4 & 0 & x_4y_4 & x_4/2 & x_4^2/2 & 0 & x_4^2y_4/2 & x_4^3y_4^2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & x_4/2 & 0 & y_4/2 & 0 & x_4/2 & y_4/2 & 2x_4y_4 & 3x_4^2y_4^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \alpha_4 \\ \alpha_5 \\ \alpha_6 \\ \alpha_7 \\ \alpha_8 \\ \alpha_9 \\ \alpha_{10} \\ \alpha_{11} \\ \alpha_{12} \end{Bmatrix}$$

$$[K^e] = [A^{-1}]^T [K_0^e] [A^{-1}]$$

$$[K_0^e] = \int \int [C]^T [D] [C] dx dy$$

## 2.ELEMENT SBREIR

NNE=4, NDNLN=3( $u_i, v_i, \theta_i$ ), NDLE=12

champ de déplacement sans déformation correspond a:

$$\varepsilon_x = \alpha_4 + \alpha_5 y + (\alpha_{11} y^2 + 2\alpha_{12} x y^3)$$

$$\varepsilon_y = \alpha_6 + \alpha_7 x - (-\alpha_{11} x^2 - 2\alpha_{12} x^3 y)$$

$$\gamma_{xy} = \alpha_8 + \alpha_9 x + \alpha_{10} y + (\alpha_5 x + \alpha_7 y)$$

$$u_s = \alpha_4 x + \alpha_8 y/2 + \alpha_5 xy + \alpha_{10} y^2/2 + \alpha_{11} xy^2/2 + \alpha_{12} x^2 y^3$$

$$v_s = \alpha_6 y + \alpha_8 x/2 + \alpha_7 xy + \alpha_9 x^2/2 - \alpha_{11} x^2 y/2 - \alpha_{12} x^3 y^2$$

$$\theta_s = -\alpha_5 x/2 + \alpha_7 y/2 + \alpha_9 x/2 - \alpha_{10} y/2 - 2\alpha_{11} xy - 3\alpha_{12} x^2 y^2$$

Champ de déplacement total:

$$u = \alpha_1 - \alpha_3 y + \alpha_4 x + \alpha_8 y/2 + \alpha_5 xy + \alpha_{10} y^2/2 + \alpha_{11} xy^2/2 + \alpha_{12} x^2 y^3$$

$$v = \alpha_2 + \alpha_3 x + \alpha_6 y + \alpha_8 x/2 + \alpha_7 xy + \alpha_9 x^2/2 - \alpha_{11} x^2 y/2 - \alpha_{12} x^3 y^2$$

$$\theta = \alpha_3 - \alpha_5 x/2 + \alpha_7 y/2 + \alpha_9 x/2 - \alpha_{10} y/2 - 2\alpha_{11} xy - 3\alpha_{12} x^2 y^2$$

Déterminer avec la meme facon précédent les matrices suivantes

Matrice  $[C] : \{\varepsilon\} = [C]\{\alpha\}$

$$[C] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & y & 0 & x & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & y & 1 & x & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & x + y \end{bmatrix}$$

$\{\delta^e\} = [A]\{\alpha\}$

$$\{\delta^e\} = \begin{bmatrix} u^1 \\ v_1 \\ \theta_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ \theta_2 \\ u_3 \\ v_3 \\ \theta_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & y_1 & x_1 & x_1 y_1 & 0 & (x_1^2 - y_1^2)/2 & y_1/2 & y_1^2/2 \\ 0 & 1 & y_1 & 0 & (y_1^2 - x_1^2)/2 & y_1 & x_1 y_1 & x_1/2 & x_1^2/2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & x_1 & 0 & y_1 & 0 & (x_1 - y_1)/2 \\ 1 & 0 & y_2 & x_2 & x_2 y_2 & 0 & (x_2^2 - y_2^2)/2 & y_2/2 & y_2^2/2 \\ 0 & 1 & y_2 & 0 & (y_2^2 - x_2^2)/2 & y_2 & x_2 y_2 & x_2/2 & x_2^2/2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & x_2 & 0 & y_2 & 0 & (x_2 - y_2)/2 \\ 1 & 0 & y_3 & x_3 & x_3 y_3 & 0 & (x_3^2 - y_3^2)/2 & 3y_3/2 & y_3^2/2 \\ 0 & 1 & y_3 & 0 & (y_3^2 - x_3^2)/2 & y_3 & \alpha_7 x_3 y_3 & x_3/2 & x_3^2/2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & x_3 & 0 & \alpha_7 x_3 y_3 & 0 & (x_3 - y_3)/2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \alpha_4 \\ \alpha_5 \\ \alpha_6 \\ \alpha_7 \\ \alpha_8 \\ \alpha_9 \end{Bmatrix}$$

$$[K^e] = [A^{-1}]^T [K_0^e] [A^{-1}];$$

$$[K_0^e] = \iint [C]^T [D] [C] dx dy$$

### Conclusion

- Les éléments basés sur le champ de déformation vérifient les équations de compatibilité

et la représentation exacte du mouvement du corps rigide.

- L'utilisation des éléments intégrés dans le code ABAQUS ( les éléments avec intégration

réduite, les éléments avec et sans les modes incompatibles), permet de faire la comparaison avec les éléments à champ de déformation ou bien avec la solution analytique.

## **Chapitre 4 :**

### **Présentation de l'outil informatique(ABAQUS)**

**Introduction :**

ABAQUS est un programme d'éléments finis à usage général, et est conçu comme un outil flexible pour la modélisation par éléments finis. Le concept de base dans ABAQUS est la division de l'histoire de problème en étapes. A chaque étape l'utilisateur choisit la procédure, définir le type d'analyse à effectuer lors de l'étape : analyse dynamique du contrainte, valeur propre de flambage, analyse de transfert de chaleur, etc. Le choix de la procédure peut être modifié à l'étape suivante de manière significative. Depuis l'état du modèle (contraintes, déformations, températures, etc.) est mis à jour tout au long de toutes les étapes de l'analyse, les effets de l'histoire précédente sont toujours inclus dans la réponse à chaque étape. Pour la modélisation de la réponse des sols, plusieurs modèles dans ABAQUS qui peuvent être utilisés sont, Drucker-Prager, Mohr-Coulomb, et modèle Cam-Clay, etc., Grâce aux principales caractéristiques, ce programme a été sélectionné pour être utilisé dans cette étude.

## 1/Présentation de l'outil informatique ABAQUS

ABAQUS est un code de calcul par la méthode des éléments finis créé en 1978 par Hibbit, Karlsson & Sorensen (HKS).

Il simule la réponse physique de structures et de corps solides à des chargements, des températures, impacts et autres conditions extérieures, il contient deux modules principaux :

### 1-1- ABAQUS/Standard :

C'est un Code général d'analyse par EF.

Résolution de problèmes :

- Linéaires et non-linéaires
- Géométries 1D, 2D, Axi ou 3D
- Nombreuses procédures d'analyses dans le domaine temporel ou fréquentiel.

### 1-2 - ABAQUS/Explicit :

Résolution par un algorithme dynamique explicite.

- ❖ Analyse non-linéaire, transitoire et dynamique de structures.
- ❖ Méthode explicite d'intégration du temps.
- ✓ Mais possibilités d'analyses quasi-statiques où il existe un comportement non-linéaire  
Important

## 2-Compléments de modules :

- ❖ **ABAQUS/CAE** : environnement complet pour la création des modèles, le lancement d'une analyse et le traitement des résultats
- ❖ **ABAQUS/Post** : post-traitement Affichage déformée, iso-contours, graphiques...
- ❖ **ABAQUS/Viewer** : environnement interactif du post-traitement ABAQUS
- ❖ **ABAQUS/Design** : paramétrage des modèles ABAQUS et analyses de sensibilité
- ❖ **ABAQUS/Safe** : durée de vie d'une structure.

## 3-Interfaces :

- ✓ Catia, I-DEAS, Pro/Engineer...
- ✓ ADAMS, C-MOLD, Moldflow...

## **4 -Fonctionnement du code ABAQUS :**

### **4-1-ABAQUS :**

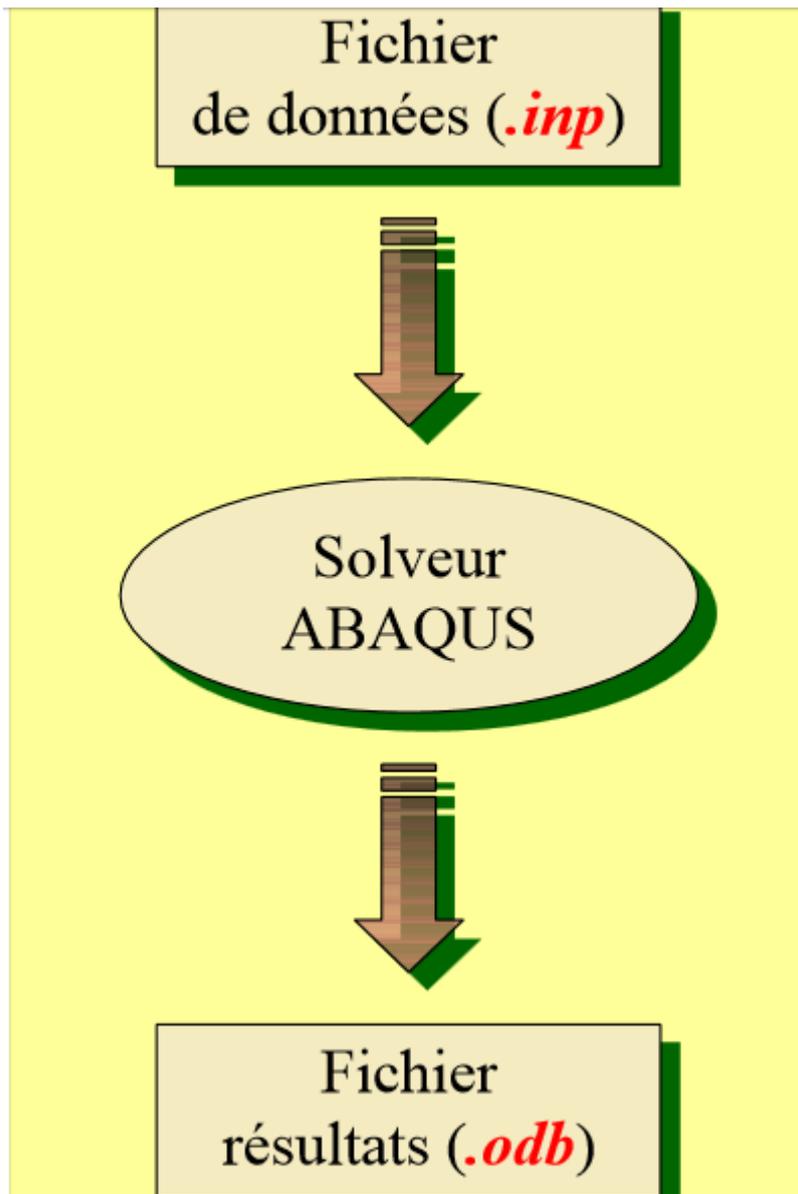
- N'est qu'un solveur (Standard, Explicit, Implicit, etc.) qui effectue la résolution d'un problème décrit par un fichier « entrée » (ou fichier de données) et dont il écrit la solution vers un fichier « de sortie » (ou fichier de résultats).

### **4-2-Le fichier (« texte ») de données :**

- ❖ Extension : . inp
- ❖ Contenu : mots clés qui décrivent les géométries, les matériaux, les conditions limites...

### **4-3-Le fichier de résultats :**

- ❖ Extension : . odb
- ❖ Contenu : contours et courbes résultats.



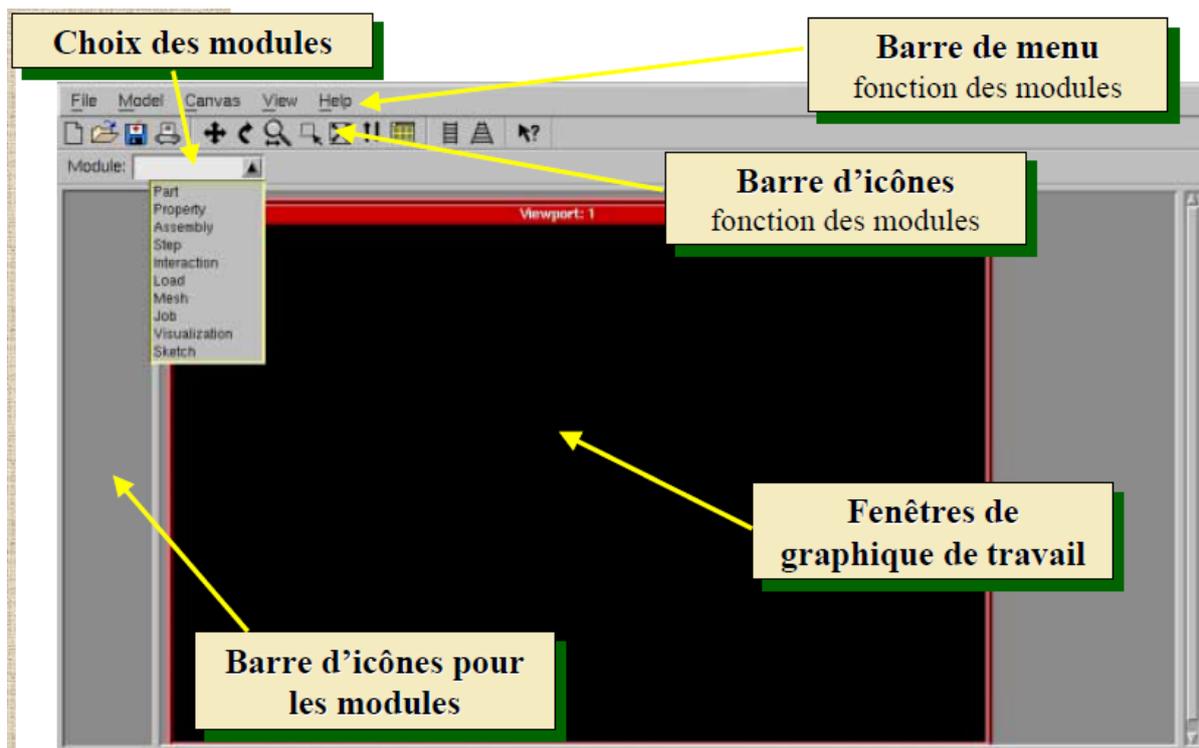
#### 4-4-Les autres fichiers créés pendant le calcul :

- ❖ Fichier .com : exécutable de votre calcul
- ❖ Fichier .dat : Fichier résumé de votre modélisation
  - Messages d'erreur concernant votre modélisation
  - Temps de calcul
- ❖ Fichier .msg :
  - Fichier résumé du calcul en cours
  - Messages d'erreur lors du déroulement du calcul.

## 5- Réalisation d'une simulation numérique :

- ✓ En créant son propre fichier d'entrée grâce à un éditeur texte et en connaissant les divers mots clés (utilisation d'ABAQUS Command et d'ABAQUS Viewer)
- ✓ En utilisant l'interface graphique d'ABAQUS CAE.

## 6- Description de l'interface ABAQUS CAE :



## 7- Réalisation d'une simulation numérique :

ABAQUS CAE est divisé en unités fonctionnelles appelées modules. Chaque module contient les outils qui sont propres à une partie de la tâche de modélisation.

### 7-1- Passage successif dans :

- Module Part
- Module Property
- Module Assembly
- Module Step
- Module Interaction
- Module Load
- Module Mesh

- Module Job.

## 7-2- Visualisation des résultats :

- ✓ Module Visualisation.

## 8- Module Part :

Le module part permet de créer tous les objets géométriques nécessaires aux problèmes, soit en les dessinant dans ABAQUS CAE, soit en les important d'un logiciel de dessin tiers.

### 8-1- La fonction du module part :

- ✓ Par dessin directement dans abaqus / CAE.
- ✓ Par des fonctions d'import de fichiers ( .sat, .iges, .stp, etc.) issus d'autres logiciels.



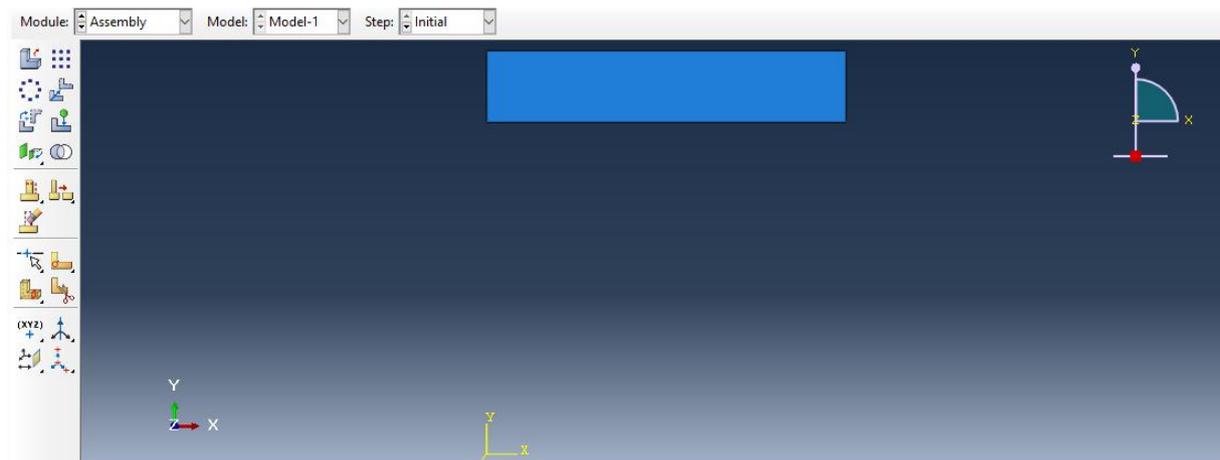
### 8-2- Module Property :

Le module property permet, comme son nom l'indique, de définir toutes les propriétés d'un objet géométrique ou d'une partie de ces objets.



### 8-3- Module assembly :

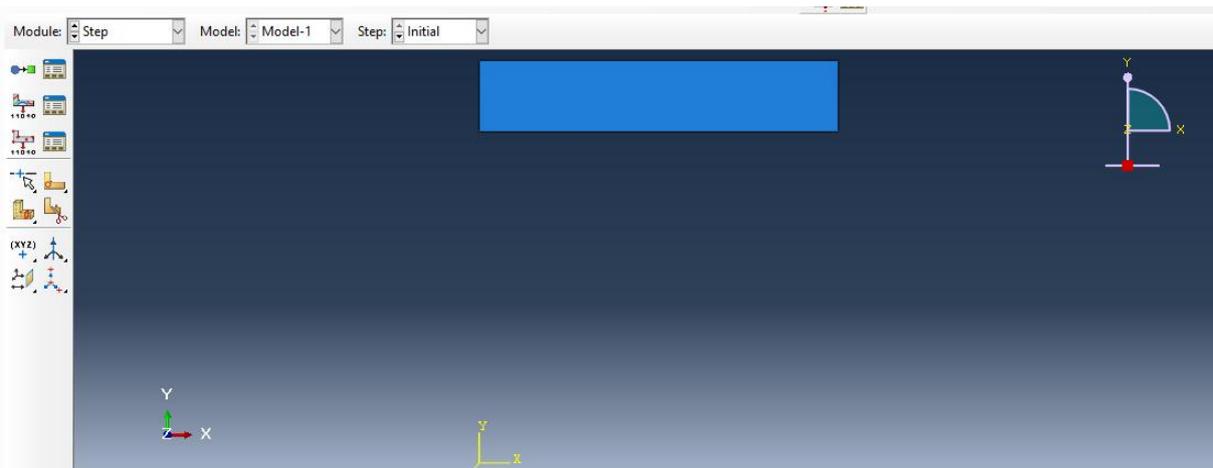
Ce module permet d'assembler les différents objets géométriques créés dans un même repère de coordonnées global. Un modèle ABAQUS contient un seul assemblage.



### 8-4- Module step :

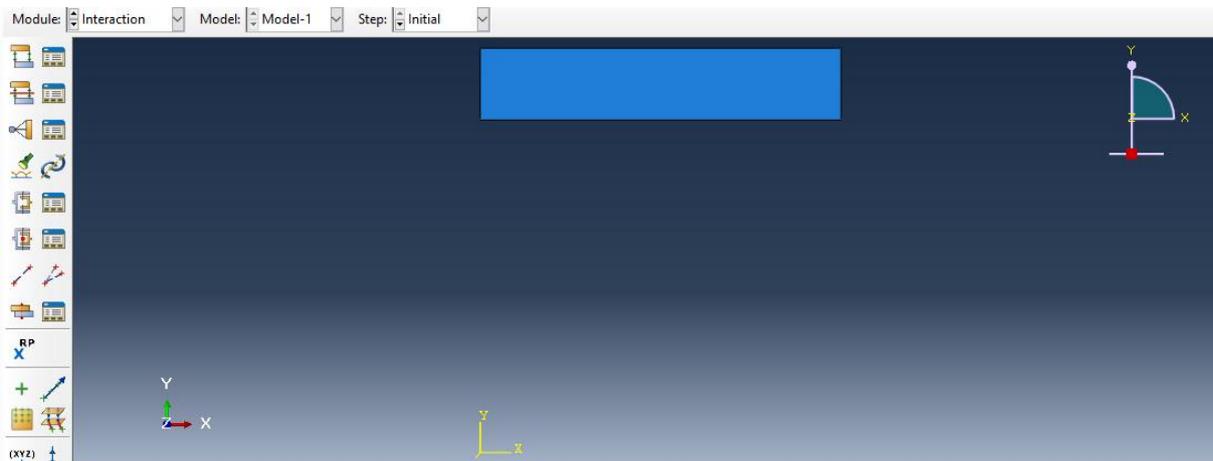
Ce module permet de définir toutes les étapes et les requêtes pour le post traitement, c'est-à-dire le moment (temps) à partir duquel une force est appliquée et jusqu'à quand, il est aussi

possible de créer des forces ou des conditions limites qui s'activent à des moments donnés.



### 8-5- Module interaction :

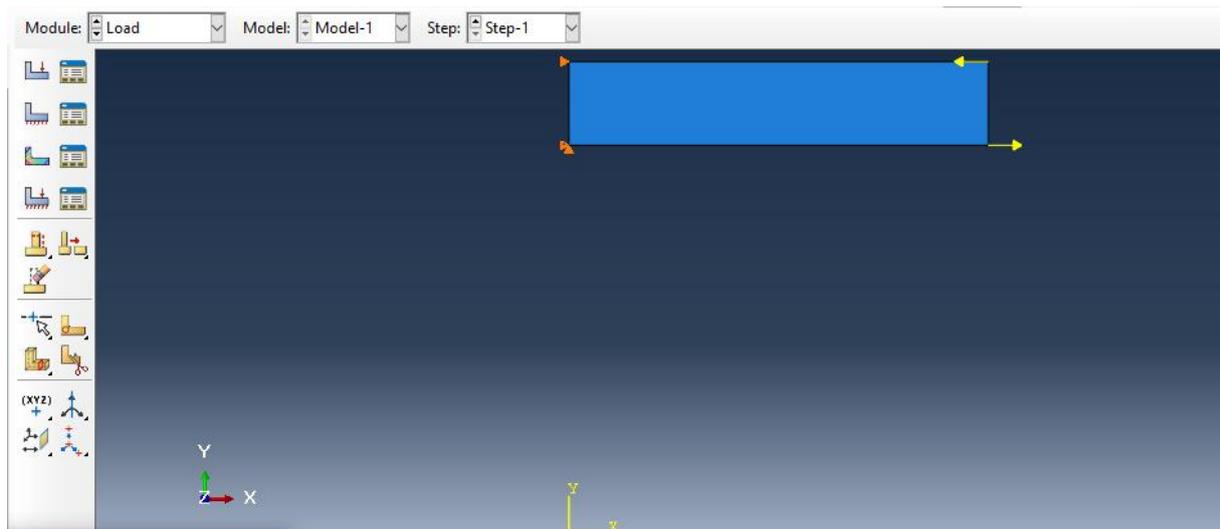
Grace ce module , il est possible de spécifier toutes les interactions entre les différentes parties et régions du modèle, qu'elles soient mécaniques ou autres, il faut savoir qu'ABAQUS ne prend en compte que les interactions explicitement définies, la proximité géométrique n'étant pas suffisantes.



### 8- 6- Module load :

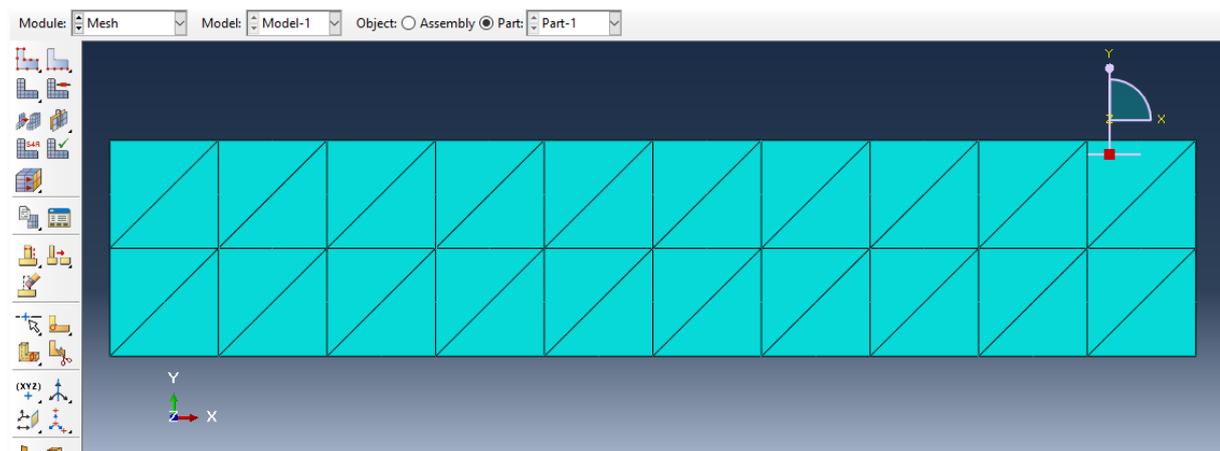
Le module load permet de spécifier tous les chargements, conditions limites et champs. Il faut savoir que les chargements et le conditions limites sont dépendants des steps, par exemple une

force est appliquée au step 1 mais inactive au step 2.



### 8 -7-Module mesh :

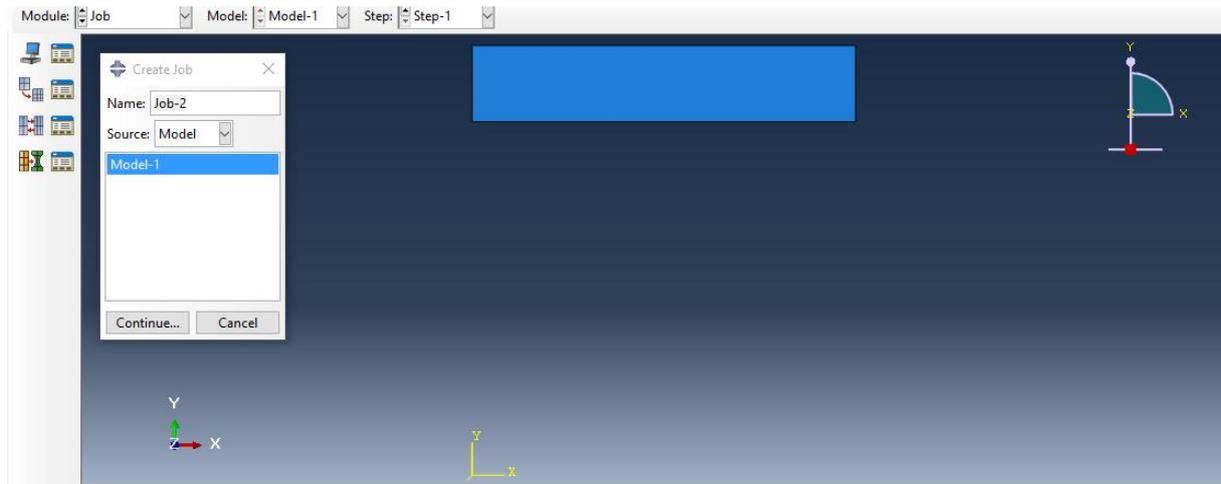
Ce module contient tous les outils nécessaires pour générer un maillage élément fini sur un assemblage.



### 8- 8- Module job :

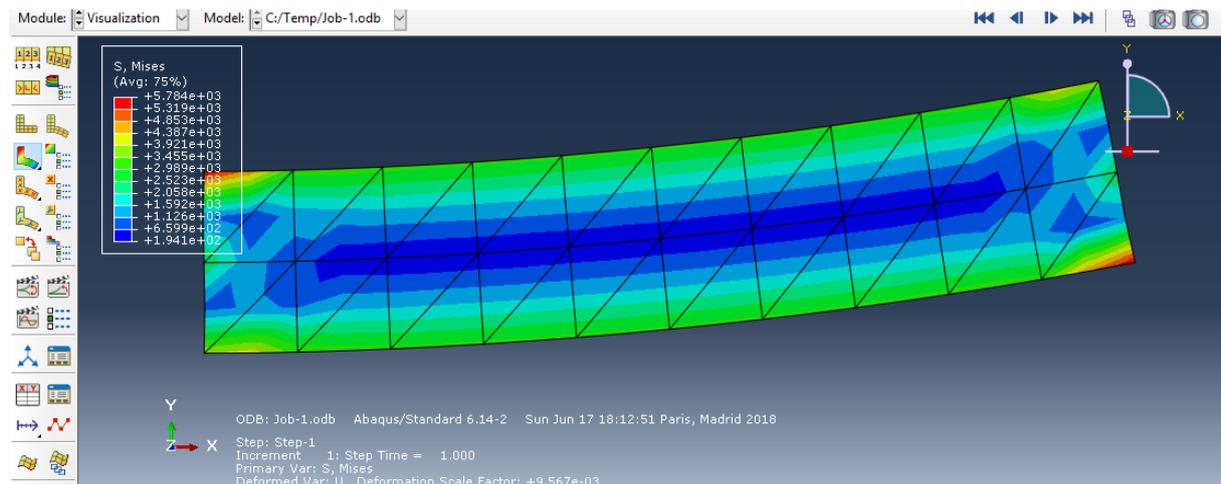
Une fois que toutes les tâches de définition du modèle ont été réalisées, il faut utiliser le module job pour analyser ce modèle. ABAQUS va alors réaliser tous les calculs nécessaires et

en tirer des résultats.



### 8 -9-Module visualization :

Ce module permet de visualiser le modèle est les résultats, les courbes de charges, les déformations...



# **Chapitre 5 :**

## **Application et validation numérique**

**INTRODUCTION :**

les problèmes d'élasticité plane peuvent être séparés en deux classes distinctes ; les problèmes des contraintes et des déformations planes . Dans le premier , la structure contient une petite épaisseur par rapport à ses autres dimensions et les contraintes au plan sont négligées . les problèmes de cette catégorie comprennent par exemple les plaques minces dans les structures cellulaires , les plaques perforées en traction et l'âme des poutres épaisses .

Le but de ce Chapitre est de montrer l'intérêt de l'approche en déformation pour les structures en 'élasticité plane, et l'évaluation de la précision obtenue par les éléments présents dans ce travail à travers des tests comparés avec d'autre programme ou avec une solution analytique , qui sont limités à des applications simples mais suffisantes pour montrer les principales performances des éléments membranaires .

**Exemple 01:**

La poutre console soumise à une charge de cisailment (Allman), est un test commun pour les éléments membranaires, la figure ( 5. 1) montre les caractéristiques mécaniques et géométriques du

Problem ,les déplacements sont calculés à l'extrémité libre de la poutre.

Le test à été réalisé par des éléments membranaires de déferent e approche ( STRIEIR , A BAQUS )

La solution analyttique : [ **Timoshenke** ]

$$v = \frac{pl^3}{EL3} + \frac{(4+5\nu)}{2EH} PL = 0,3558$$

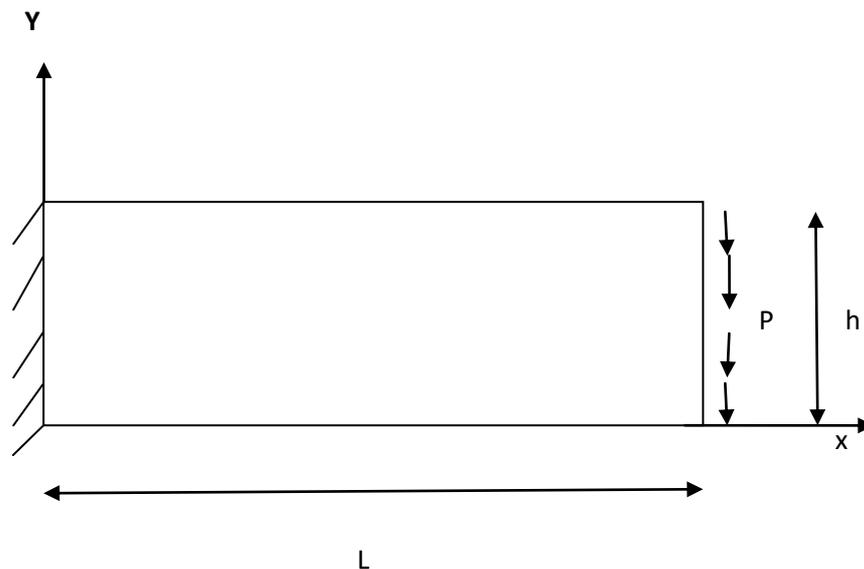
$$E=30000$$

$$\nu = 0,25$$

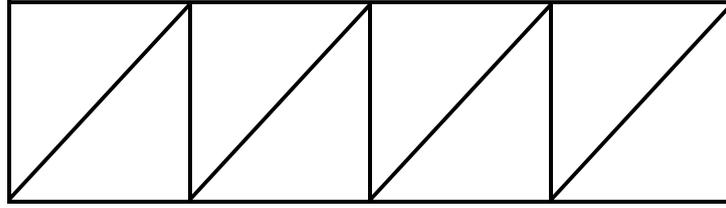
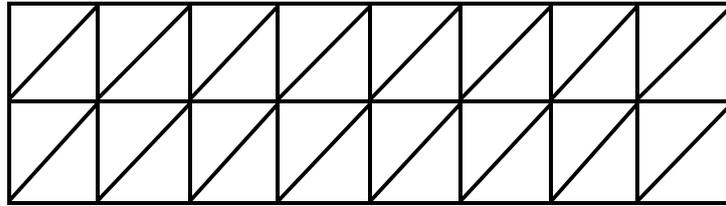
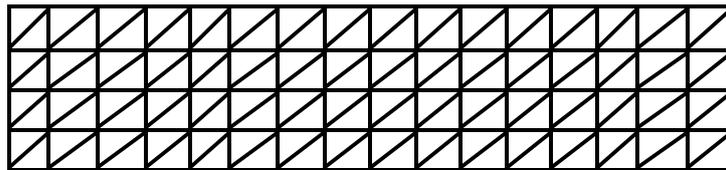
$$P=40$$

$$L=48$$

$$h = 12$$



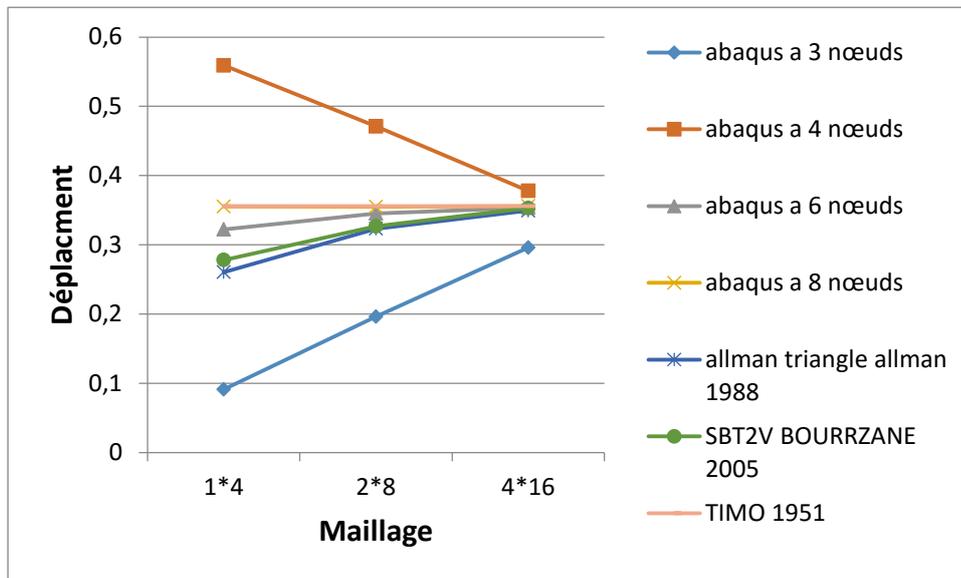
**Figure 5.1 : Flexion d'une poutre console sous charge vertical .**

**M I :Maillage 4\*1****M II :Maillage 8\*2****M III : Maillage 16\*4****Figure 5.2: Illustration des different maillages réguliers d'une pouter console.**

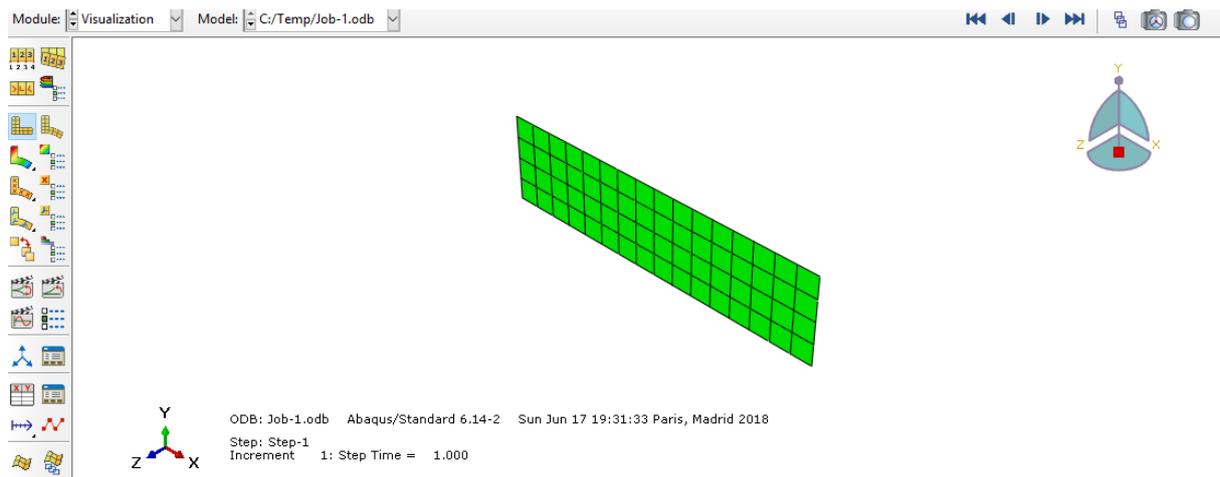
	abaqus a 3 nœuds	abaqus a 4 nœuds	abaqus a 6 nœuds	abaqus a 8 nœuds	allman triangle allman 1988	SBT2V BELET BOUR, 05	TIMO 1951
1*4	0,0913	0,559	0,3224	0,3553	0,2606	0,27822	0,3558
2*8	0,1963	0,471	0,3454	0,355	0,3234	0,32671	0,3558
4*16	0,296	0,378	0,3536	0,3561	0,3493	0,35311	0,3558

**Tableau 5.1: déplacement vertical d'une poutre console pour les mailles M(I,II,III).**

Pour étudier la convergence du déplacement clairement, on a présenté les résultats sur la figure ( 5.3 ):



**Figure 5.3 Etude de la convergence du déplacement vertical d'une poutre console**



**Commentaire :**

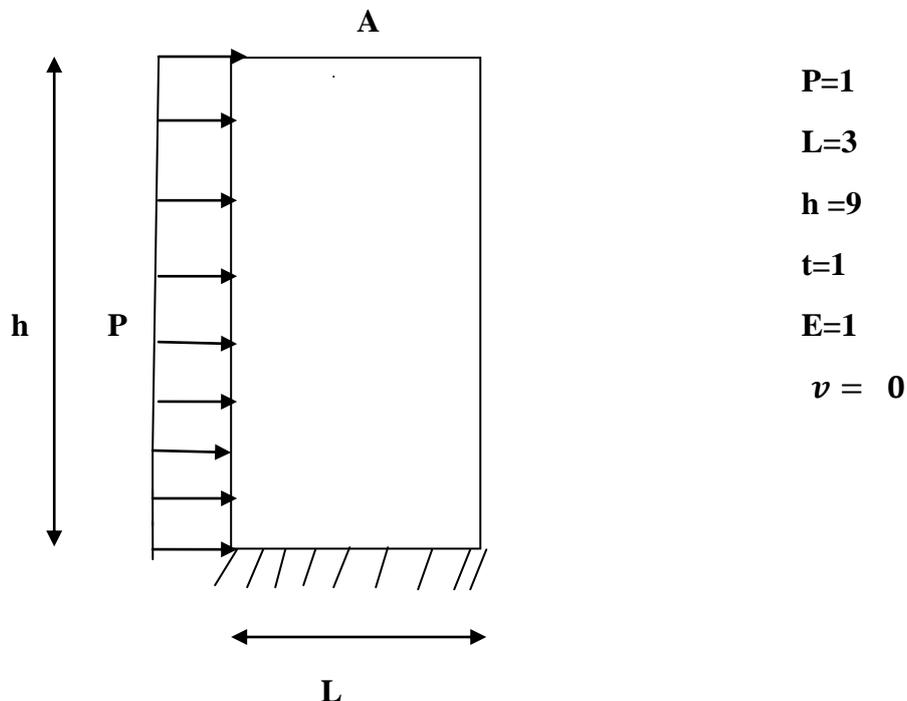
D'après les résultats des déplacements illustrés dans le tableau (V.1) relatives 0 LA FIGURE 5 v.3), on a constaté que les éléments ( STREIR , ABAQUS) donnent des déplacements très proches vers la solution de référence, par contre les autres éléments restent toujours loin à la convergence vers la solution de référence.

**Exemple 02:**

Étude d'une console encastée à la base avec une charge uniformément répartie:

Soit une console encastée à la base avec une charge uniformément répartie, le but de ce test est de montrer la simulation de l'élément utilisé pour les problèmes de flexion.

Les caractéristiques mécaniques du problème sont montrées dans la figure suivante:



**Figure 5.4 console avec une charge uniformément répartie .**

Elements	mailage	N nœuds	Néléments	Déplacement
SBRIEIR	(g) :1*3	8	3	391 ,33
	(h) :2*6	21	12	392 ,14
	(i) :3*9	40	27	394,22
	(j) :4*12	65	48	395,02
	(k) :5*15	96	75	395,52
SAP2000	1*3	8	3	391,31
	2*6	21	12	391,49
	3*9	40	27	393,81
	4*12	65	48	394 ,81
	5*15	96	75	395,16
Rectangle a 4 nœuds	(g) :1*3	8	3	245,69
	(h) :2*6	21	12	350 ,81
	(i) :3*9	40	27	374,33
	(j) :4*12	65	48	383,51
	(k) :5*15	96	75	388,03
triangle a3 nœuds	1*3:(a)	8	6	186,84
	2*6: (b)	21	24	223,65
	(c) :3*9	40	54	392,29
	(d) :4*12	65	96	329,73
	(e) :5*15	96	150	351,02
triangle a 6 nœuds	1*3:(m)	21	6	387,14
	2*6: (n)	65	24	396 ,14
	(o) :3*9	133	54	396,31
Rectangle a 8 nœuds	1*3:(p)	18	3	393,51
	2*6: (q)	53	12	396,46
	(r) :3*9	106	27	396,57
abaqus a 4 nœuds	1*3	8	3	1114
	2*6	21	12	514,214
	3*9	40	27	445,958
	4*12	65	48	426,3
	5*15	96	75	418,097
Abaqus a 3 nœuds	1*3	8	6	106,57
	2*6	21	24	218,82
	3*9	40	54	290,07
	4*12	65	96	329,94
	5*15	96	150	352,96
abaqus a 6 nœuds	1*3	21	6	385,94
	2*6	65	24	395,04
	3*9	54	54	395,88
Abaqus a 8 nœuds	1*3	18	3	388,22
	2*6	53	12	394,82
	3*9	106	27	395 ,66
solution analytique(Timoshenko and goodier)				396,8

Tableau 5.2:distribution des déplacements sous l'effet de la charge uniforme .

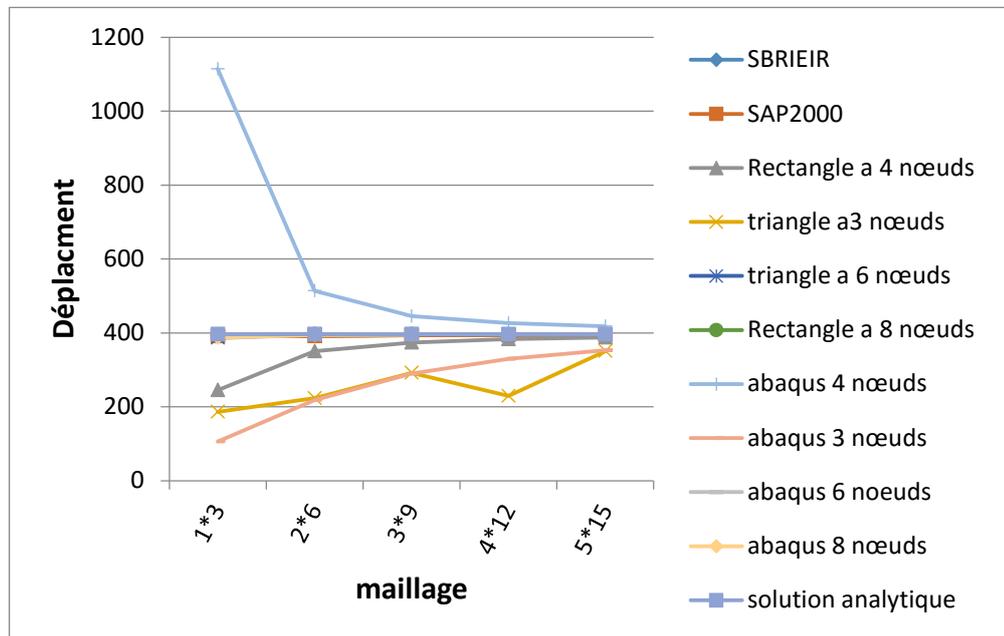
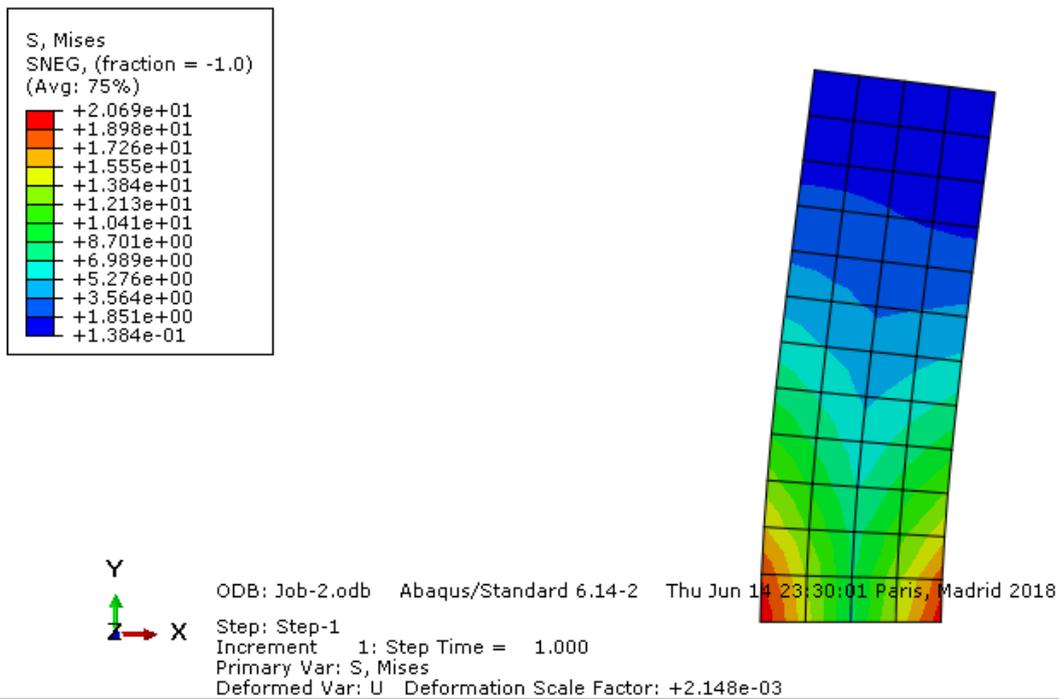


Figure 5.5 Convergence de la fleche pour une console charge uniformément



**Commentaire :**

D'après les résultats des déplacements illustrés dans le tableau ( V.2) relatives à la figure (V.6) , on a constaté que les éléments ( STRIEIR, Triangle a 6 noeuds, Rectangle a 8 noeud, ABAQUS, 6 noeud et 8 noeud) donnent des déplacements très proches de la solution analytique, par ailleurs les autres éléments donnent des déplacements moins proches de celle-ci, les éléments membranaires rectangulaires pour l'élasticité plane dans ce test montrent une convergence plus précise que les éléments triangulaires.

**Exemple 03 :**

Le but de ce test est d'avoir comment l'élément utilisé STRIEIR modélise le comportement de la flexion pure .

On considère une poutre simplement appuyée chargée avec un couple , qui est modélisée par deux éléments membranaires prenant respectivement la forme rectangulaire , on a effectué le test de la console pour des différents cas des charges figure (V .7,10 ,11 )

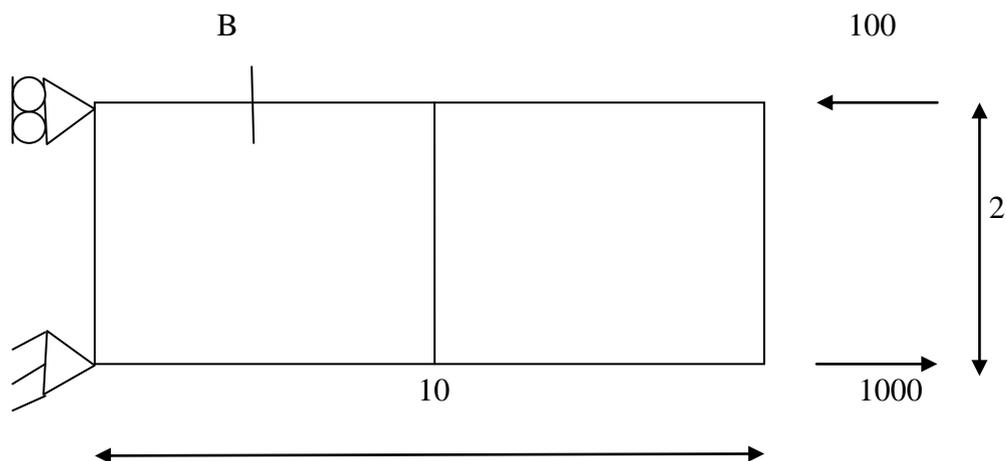
et différentes conditions d'appuis figure (V.8,12) Les Caractéristiques et géométries du problème sont montrées dans les figures . On va calculer les déplacements ( $V_\delta, \theta_\delta$ ) dans la poutre .

**Cas de charge I:** cas de charge appliquant deux forces unitaires axiales .

$$E=1500$$

$$\nu = 0,25$$

$$t = 1$$



**Figure 5.6 flexion pure d'une console .**

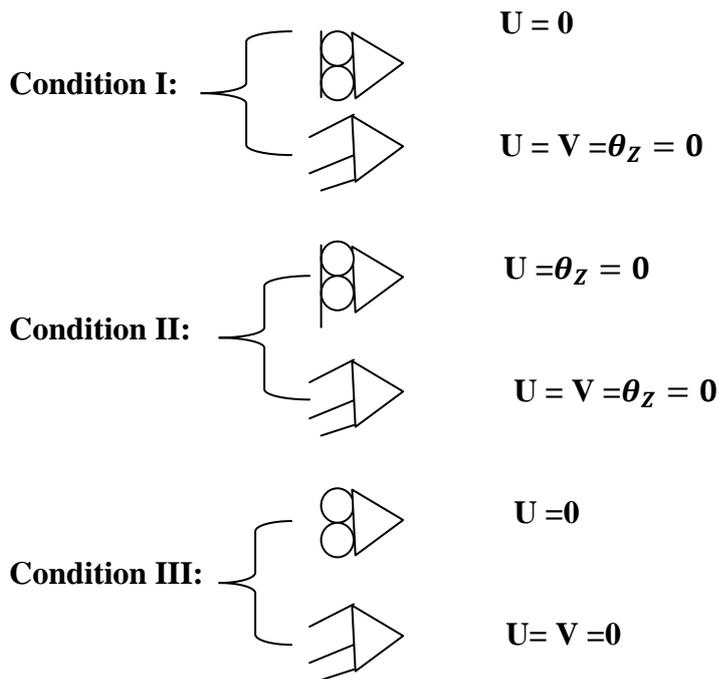


Figure 5.7 Condition d'appuis considères .

On peut déterminer les déplacements en point  $\delta(2.5;2)$  en fonction des déplacements nodaux par l'utilisation de l'équation suivante :

**Cas:01**

**Déplacement:**

	abaqus a 3 nœuds	abaqus a 6 nœuds	abaqus a 8 nœuds	SBTIEIR SABIR1985	SBT2V BELET BOUR, 05
1*10	30,37	96,01	100,2	44,77	95,82
1*5	25,03	90,91	100,2	44,77	95,82

Tableau 5.3: distribution des déplacements

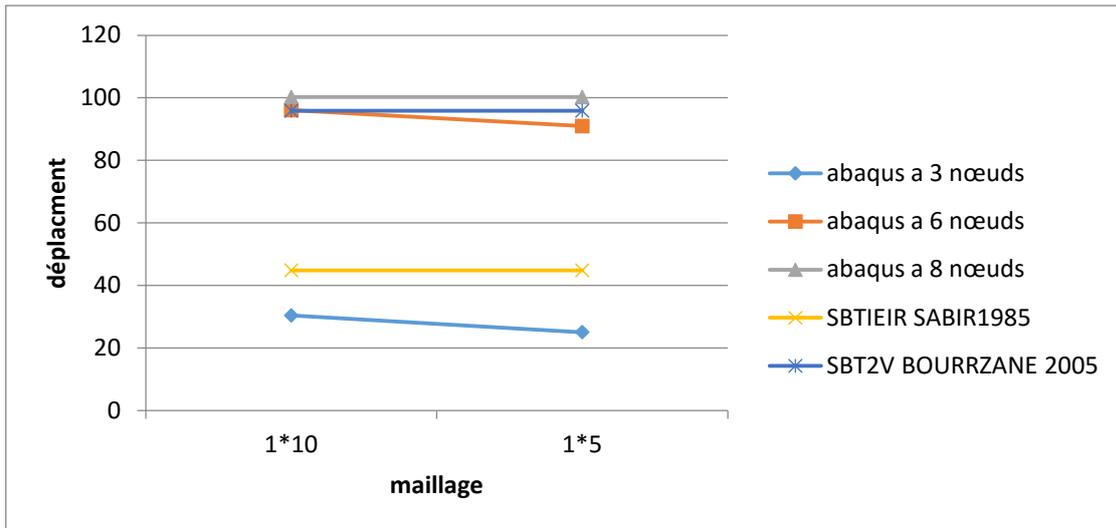


Figure 5.8 Variation de la fleche d'une console.

Contrainte

	abaqus a 3 nœuds	abaqus a 6 nœuds	abaqus a 8 nœuds	SBTIEIR SABIR1985	SBT2V BELET BOUR, 05
1*10	1048	3322	3000	335	3016
1*5	990	3084	3000	335	3016

Tableu5-4: distribution des Contrante

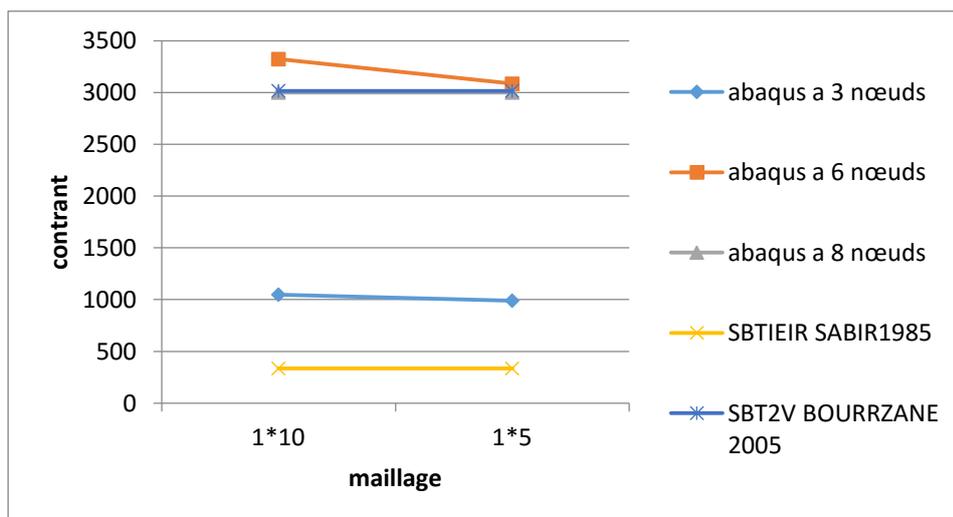


Figure 5.9 Variation de la contrainte.

Cas:02

Déplacement:

	abaqus a 3 nœuds	abaqus a 6 nœuds	abaqus a 8 nœuds	SBTIEIR SABIR1985	SBT2V BELET BOUR, 05
1*10	30,37	96,01	100,2	44,74	95,86
1*5	25,03	90,92	100,2	44,74	95,86

Tableu5-5: distribution des déplacement

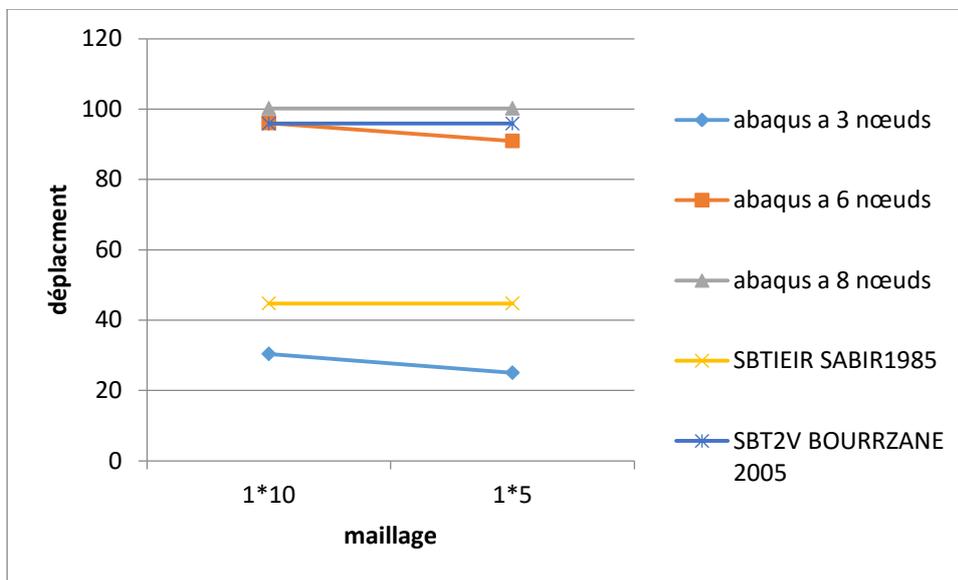


Figure 5.10Variation de la fleche d'une console.

Contrante:

	abaqus a 3 nœuds	abaqus a 6 nœuds	abaqus a 8 nœuds	SBTIEIR SABIR1985	SBT2V BELET BOUR, 05
1*10	1048	3322	3000	335	3016
1*5	990	3084	3000	335	3016

Tableu5-6: distribution des Contrante

	abaqus a 3 nœuds	abaqus a 6 nœuds	abaqus a 8 nœuds	SBTIEIR SABIR1985	SBT2V BELET BOUR, 05
1*10	1048	3322	3000	241	3018
1*5	990,1	3084	3000	241	3018

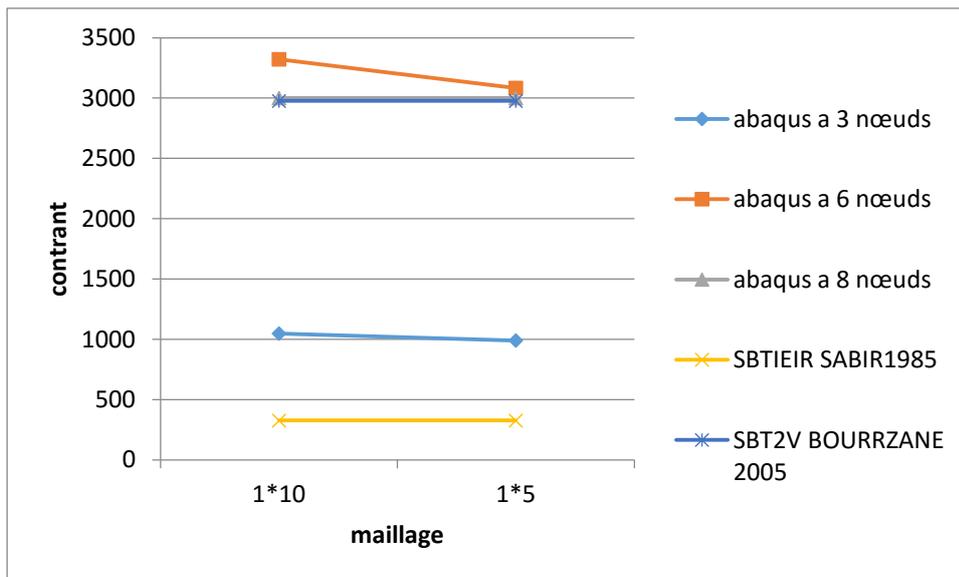


Figure 5.11 Variation de la contrante.

CAS:03

Déplacement:

	abaqus a 3 nœuds	abaqus a 6 nœuds	abaqus a 8 nœuds	SBTIEIR SABIR1985	SBT2V BELET BOUR, 05
1*10	30,37	96,01	100,2	45,8	96,02
1*5	25,03	90,91	100,02	45,8	96,02

Tableu5-7: distribution des déplacement

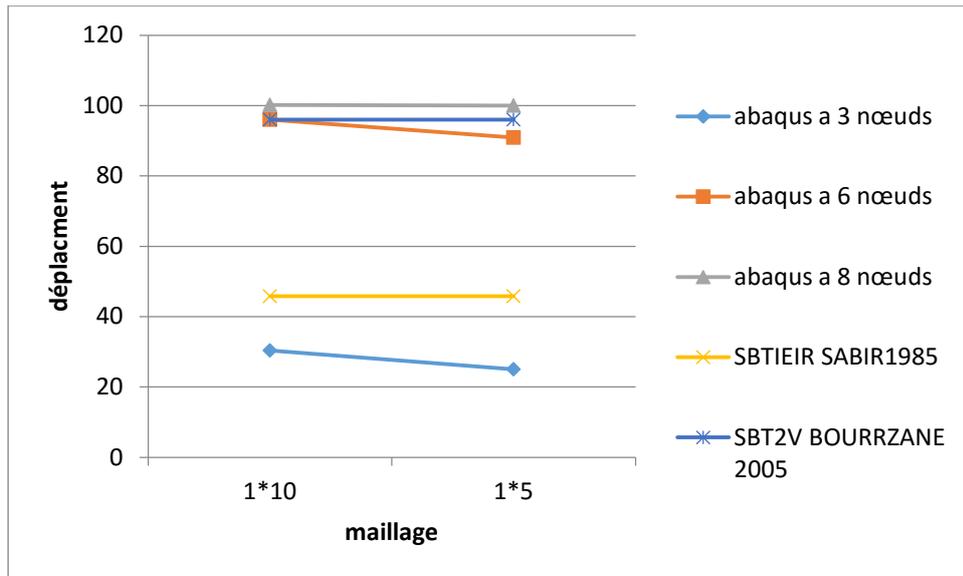


Figure 5.12 Variation de la fleche d'une console.

Contrainte:

Tableau5-8: Variation Contrainte

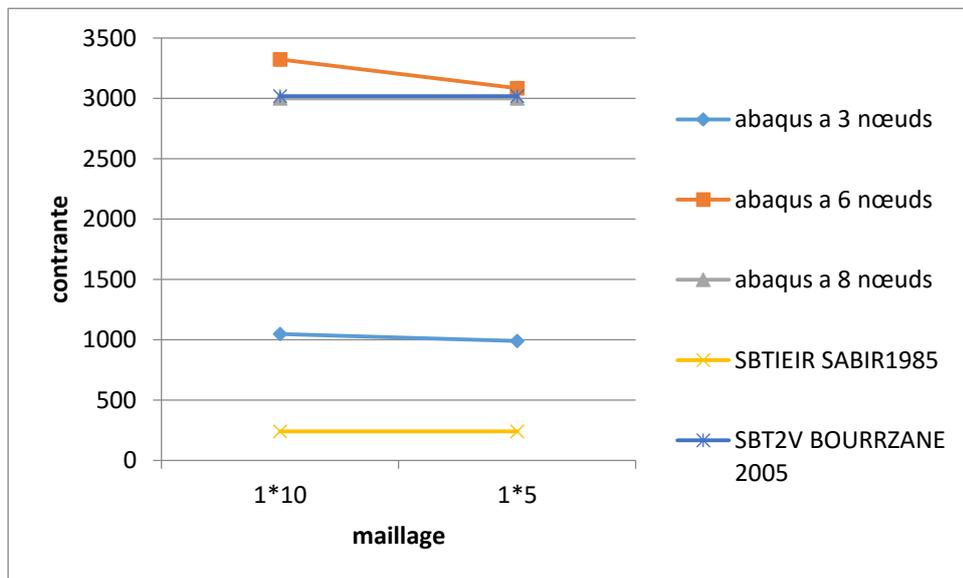


Figure 5.13 Variation de la contrainte.

Commentaire :

D'après les résultats des déplacements et les contrainte illustrés dans le tableau ( 5.8...513) relatives à la figure (5.13) , on a constaté que les elements ( STRIEIR,ABAQUS

SBTIEIR SABIR1985 SBT2V BEL ET BOUR ,05 ) donnent les memes résultats des déplacements , et le contrainte par contre l'émént, donne des SBTIEIR SABIR1985.

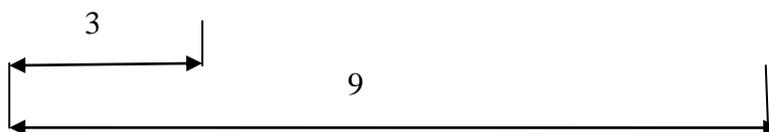
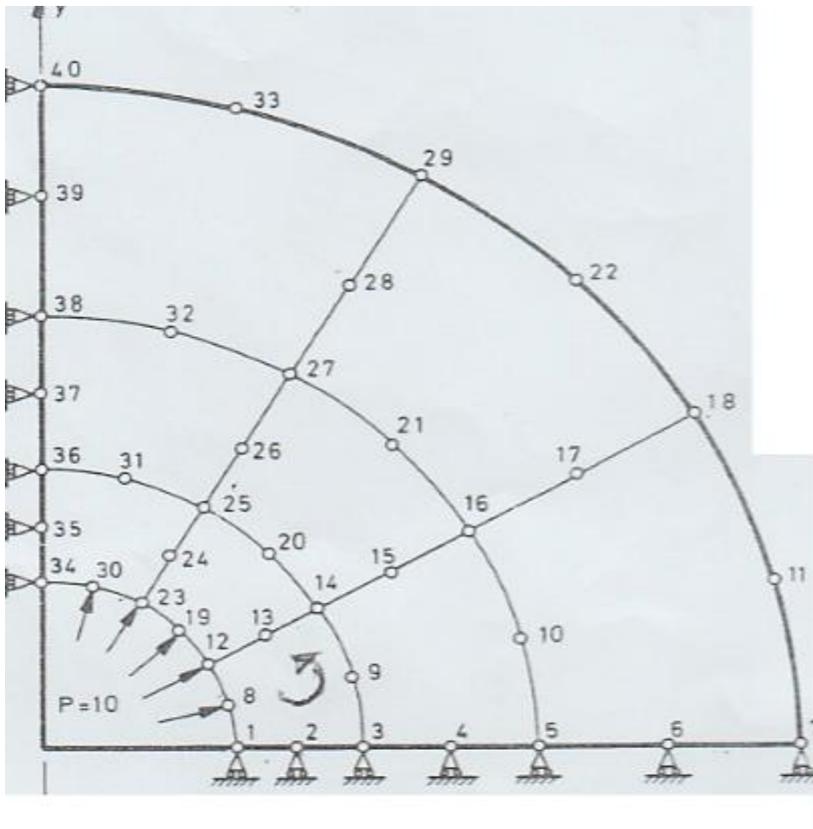
**Exemple:04**

Coque:

$$U_r = \frac{1+\nu}{e} \frac{p a^2}{b^2 - a^2} \left[ (1 - 2\nu)r + \frac{b^2}{r^2} \right]$$

$$\delta r = \frac{p a^2}{b^2 - a^2} \left( 1 - \frac{b^2}{r^2} \right)$$

$$\delta \theta = \frac{p a^2}{b^2 - a^2} \left( 1 + \frac{b^2}{r^2} \right)$$



**Maillage:( 6\*6)**

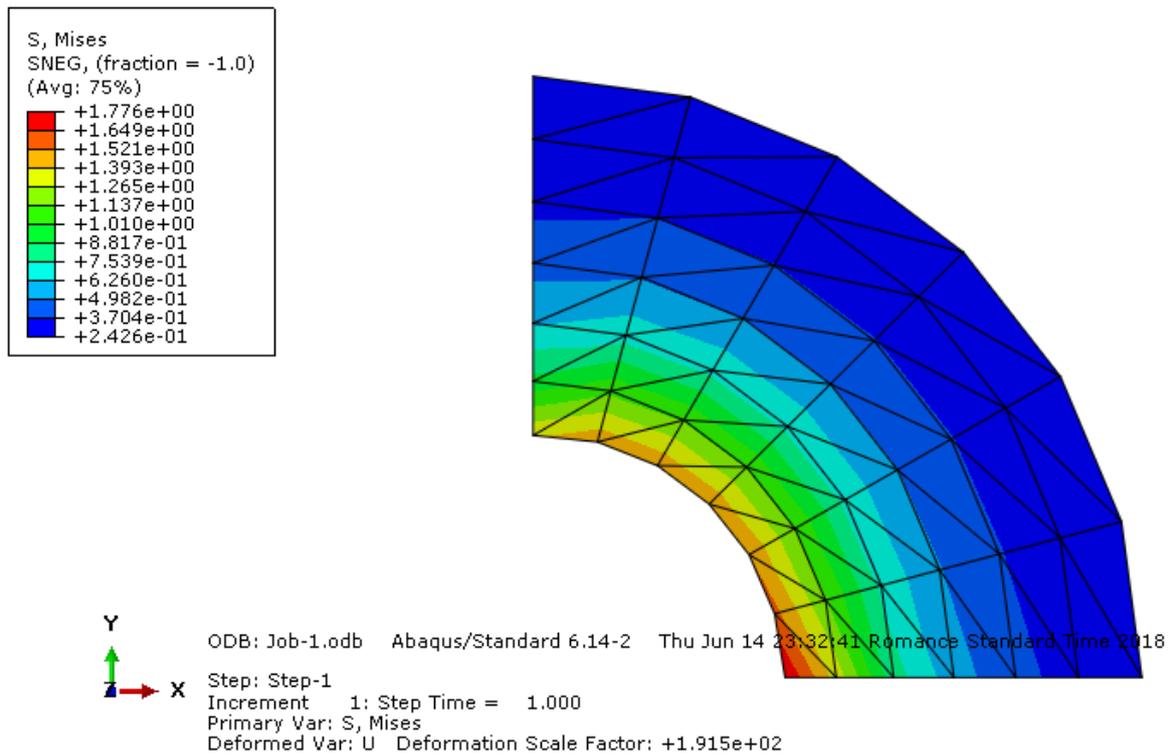
Exemple d'essai de cylindre circulaire épais  
déformation plane

**E=1000**

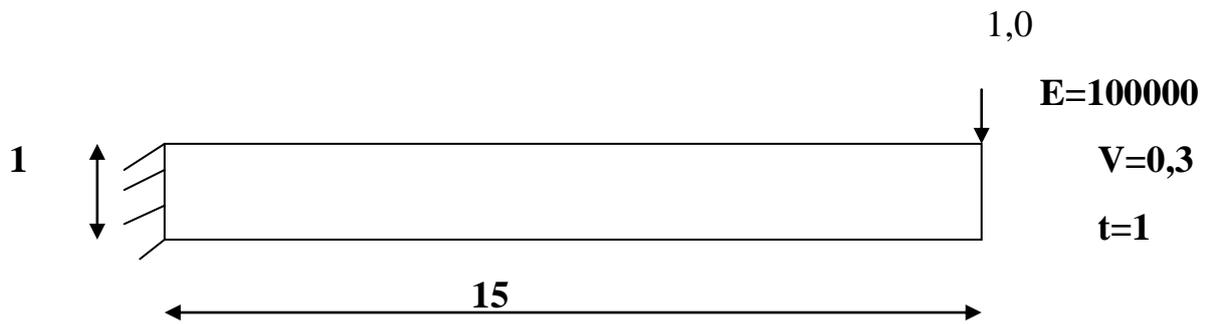
V=0,03

T =1

	abaqus a 3 nœuds	abaqus a 4 nœuds	abaqus a 6 nœuds	abaqus a 8 nœuds	R	SBT2V BELET BOUR, 05
déplacement	0,0047	0,004647	0,004656	0,004651	0,0048	0,00493
	1.138	1.286	1.07	1.236	1.0	1.05
	1.28	1.466	1.261	1.228	1.2	1.39



Exemple :05 poutre console minsse



	abaqus a 3 nœuds	abaqus a 4 nœuds	abaqus a 6 nœuds	abaqus a 8 nœuds	Q8	Ruselta analitique
1*10	0,0102	0,09279	0,1119	0,1335	0,134274	0,135
1*20	0,02331	0,128	0,118	0,13436	0,134274	0,135

Tableau 5.9: déplacement vertical d'une poutre console minsse

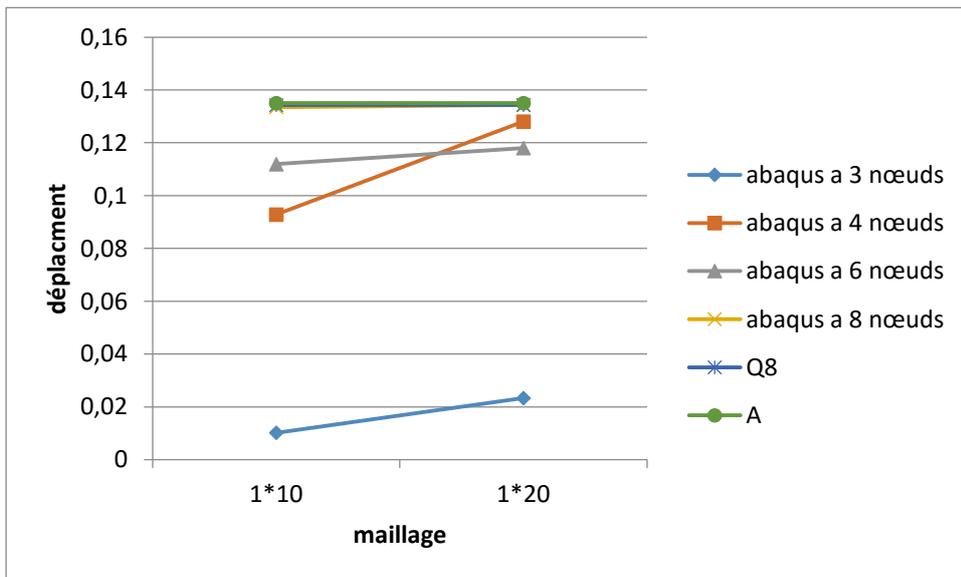


Figure 5.14Variation de la fleche d'une console.

**Conclusion :**

Nous avons présenté dans cette étude l'élément finis bases sur l'approche en deformation (STRIEIR) avec trios degree de liberté par nœud, d'après les tests effectués dans les probléms d'élasticité plane nos concluons que :

\* l'élément STRIEIR converge lent vers la solution de reference pour tous les tests .

\*Les résultats de STRIEIR et le logiciel ABAQUS sont très comparables avec la solution analytique.

# **Conclusion générale**

## Conclusion générale :

Le présent travail est réalisé dans le cadre général des études bibliographiques, et de la validation d'une famille d'éléments finis basé sur l'approche en déformation construite à partir d'une formulation purement en 2D avec différents degrés de liberté en déplacement à chaque nœud. Nous avons utilisé les éléments finis ABAQUS pour la confrontation des résultats obtenus.

Alors dans ce travail nous avons présenté les éléments finis membranaires basés sur l'approche en déformation comprend quatre nœuds avec des degrés de liberté différentes, et qui sont fondés sur la théorie linéaire de l'élasticité bidimensionnelle valable pour les petits déplacements.

Les éléments présentés SBRIEIR, Q8 formules pour l'analyse des problèmes d'élasticité plane sont présentés dans le cinquième chapitre pour la validation numérique des éléments utilisés.

Ainsi l'utilisation des éléments intégrés dans le code ABAQUS, permet de faire la comparaison avec les éléments basés sur l'approche en déformation et la solution analytique si elle existe.

Pour mettre en évidence les performances des éléments finis présentés, nous avons effectué des tests et applications numériques. Ceux relatifs aux problèmes des contraintes planes, ont montré que l'élément SBRIEIR présente une meilleure précision.

Donc il est clair d'après les résultats obtenus que :

- \* l'élément SBTRIEIR converge lent vers la solution exacte pour tous les tests.
- \* les éléments SBRIEIR convergent rapidement vers la solution exacte pour tous les tests.
- \* La vitesse de convergence de SBRIEIR est plus rapide par rapport à celle de Q8.
- \* les résultats SBRIEIR, SBT 2V et le logiciel ABAQUS sont très comparables à la solution analytique.

## Bibliographies

- [Ashw.71a] **Ashwell D.G., Sabir A.B.**, Limitation of certain curved finite elements applied to arches, *IJMS* Vol. 13, pp. 133-139, 1971.
- [Bela.05] **Belarbi M.T., and Bourezane M.**, On improved Sabir triangular element with drilling rotation, *Revue Européenne de Génie Civil*, Vol.9, N9-10, pp. 1151-1175, 2005.
- [BAT 90] **Batoz J.L et Dhatt.G** ,” *Modélisaion des structures par éléments finis* ” , Vol.1 :solides élastiques, Eds.Hermès,Paris,1990.
- [BAT 92] **Batoz J.L et Dhatt.G** ,” *Modélisaion des structures par éléments finis* ” Vol.3 : Coques, Eds Hermes, Paris, 1992.
- [BELO 05] **Belounar L et Guenfoud M.**,”*A New Rectangular finite element based on the strain approach for plate bending*”,*Thin Walled Structures* 43(2005)4763.
- [BEL 99] **Belarbi M.T. et Charif A.**,”*Développement d’un nouvel élément hexaédrique simple basé sur Le modèle en déformation pour l’étude des plaques minces et épaisses*”, *Revue Européenne des Eléments Finis*, Vol.8, N0 2, pp. 135157,1999.
- [BEL 00] **Belarbi MT,**” *Développement de Nouveaux Eléments Finis à Modèle en Déformation Application Linéaire et non Linéaire* ”, Thèse de Doctorat, Université de Maintouri Constantine, février 2000.
- [BEL 02] **Belarbi MT et Belounar L** , Conférence internationale en ginie civil, Université de Batna, 2002.
- [BEL 05] **Belarbi M.T and Bourezane M.**,”*On improved Sabir triangulaire élément with drilling rotation*”,*Revue Européenne de Génie Civil*,Vol.9,N 0 910, pp.117123,2005.
- [BAT 90] **Batoz J.L. et Dhatt G.**,” *Modélisation des structures par éléments finis. Poutres et Plaques* ”, Vol. 2 : élastiques, Eds Hermès, Paris, 1990.
- [Caze.10] Cazenave .M., *Méthode des éléments finis. Approche pratique en mécanique des structures*. Dunod, Paris, 2010
- [COOK 94] **Cook R.D.**,” *Finite Element Modelling for Stress Analysis*”, John Wiley& Sons, 1995.
- [DJO 90] **Djoudi M.S.**,” *Strain based Finite Elements for linear and geometrically analysis of structures* ”, PHD thesis, University of Walles College of Cardiff (G.B), June 1990.
- [doc07a] **Abaqus 6.7 documentation.**,” *Abaqus Analysis User’s Manual* ”, volume 1,...5.

Simulia, 2007.

[BOUR 06] **Bourezane M,**” *Utilisation of the strain model in the analysis of structures* ”, Thèse de Doctorat, Université de Biskra, Juillet 2006.

[doc07b] **Abaqus 6.7 documentation,**” *Abaqus Theory Manual*” ,Simulia, 2007.

[DAW 84] **Daw D.J** ,”Matrix and finite element displacement analysis of Structures”, Clarendon press .Oxford.1984.

[FER 09] **Ferreira. A. J. M,**” *Matlab codes for Finite Element analysis, Solid and structures*”, Portugal: Springer, 2009 .

[FRE 01] **Fre F. et Jirousk J,**”*Analyse des structures et milieux continus, Méthode des éléments finis* ”, Vol.6 Eds P.P.U.R., 1 ère Edition, Lausanne, 2001.

[GUE 09] **Guerraiche k,**”*Investigation Nmerique par Elemnts Finis de la Modilisation des Plaques et Coques* ”, mémoire de magistère, Université de Biskra, 2009.

[HAZ 89] **Hazim F.E,**”*finite element analysis of shell structures*” ,Phd Thesis ,University of walls, 1989, UC.

[ROC 79] **Rockey L. Evans R. Griffiths W. et Nethercot D,**” *Introduction à la Méthode de Eléments Finis* ”, Eds Eryolles, Paris 1979.

[Sabi.85a] Sabir A.B., A Rectangular and Triangular plane elasticity element with drilling degrees of freedom, *Chapter 9 in proceeding of the second international conference on variational methods in engineering*, Southampton University, Springer-verlag, Berlin, pp. 17-25, 1985.

[Sabi.95a] Sabir A.B. and Sfindji A., Triangular and Rectangular plane elasticity finite elements. *Thin-walled Structures* 21.pp 225-232.1995.

[Sabi.86] Sabir A.B. and Salhi H.Y., A strain based finite element for general plane elasticity in polar coordinates, *Res. Mechanica* 19, pp. 1-16, 1986.

[Sabi.95a] Sabir A.B. and Sfindji A., Triangular and Rectangular plane elasticity finite elements. *Thin-walled Structures* 21.pp 225-232.1995.

# **ANNEX**

**Les matrices [A]; [C] et { } 0 K pour les deux éléments (SBRIE, SBRIEIR) :**  
 Les éléments membranaires à champ déformation (SBRIE, SBRIEIR)  
 Dans cette annexe les matrices [A] [K] [K] , C et K d'élément SBRIE.

$$[A] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -b & 0 & 0 & 0 & -(1/2) \times b^2 & (1/2) \times b & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & b & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & a & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & a & 0 & -(1/2) \times a^2 & 0 & 0 & 0 & (1/2) \times a \\ 1 & 0 & -b & a & a \times b & 0 & -(1/2) \times b^2 & (1/2) \times b & 0 \\ 0 & 1 & a & 0 & -(1/2) \times a^2 & b & a \times b & (1/2) \times a & 0 \end{bmatrix}$$

$$[C] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & y & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & x & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$[K_0] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & d(1,1) \times a \times b & 0 & d(1,2) \times a \times b & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & (1/12) \times d(1,1) \times a \times b^3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & d(2,1) \times a \times b & 0 & d(2,2) \times a \times b & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/12 \times d(2,2) \times a^3 \times b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & d(3,3) \times a \times b \end{bmatrix}$$

$$[K_0^e] = \int \int [C]^T [D] [C] dx dy$$

## 2.ELEMENT SBREIR

NNE=4, NDLN=3( $u_i, v_i, \theta_i$ ), NDLE=12

champ de déplacement sans déformation correspond a:

$$\varepsilon_x = \alpha_4 + \alpha_5 y + (\alpha_{11} y^2 + 2\alpha_{12} x y^3)$$

$$\varepsilon_y = \alpha_6 + \alpha_7 x - (-\alpha_{11} x^2 - 2\alpha_{12} x^3 y)$$

$$\gamma_{xy} = \alpha_8 + \alpha_9 x + \alpha_{10} y + (\alpha_5 x + \alpha_7 y)$$

$$u_s = \alpha_4 x + \alpha_8 y/2 + \alpha_5 x y + \alpha_{10} y^2/2 + \alpha_{11} x y^2/2 + \alpha_{12} x^2 y^3$$

$$v_s = \alpha_6 y + \alpha_8 x/2 + \alpha_7 x y + \alpha_9 x^2/2 - \alpha_{11} x^2 y/2 - \alpha_{12} x^3 y^2$$

$$\theta_s = -\alpha_5 x/2 + \alpha_7 y/2 + \alpha_9 x/2 - \alpha_{10} y/2 - 2\alpha_{11} x y - 3\alpha_{12} x^2 y^2$$

Champ de déplacement total:

$$u = \alpha_1 - \alpha_3 y + \alpha_4 x + \alpha_8 y/2 + \alpha_5 x y + \alpha_{10} y^2/2 + \alpha_{11} x y^2/2 + \alpha_{12} x^2 y^3$$

$$v = \alpha_2 + \alpha_3 x + \alpha_6 y + \alpha_8 x/2 + \alpha_7 x y + \alpha_9 x^2/2 - \alpha_{11} x^2 y/2 - \alpha_{12} x^3 y^2$$

$$\theta = \alpha_3 - \alpha_5 x/2 + \alpha_7 y/2 + \alpha_9 x/2 - \alpha_{10} y/2 - 2\alpha_{11} x y - 3\alpha_{12} x^2 y^2$$

Déterminer avec la meme facon précédent les matrices suivantes

Matrice  $[C] : \{\varepsilon\} = [C]\{\alpha\}$

$$[C] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & y & 0 & x & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & y & 1 & x & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & x+y \end{bmatrix}$$

$\delta^e\} = [A]\{\alpha\}$

$$\delta^e\} = \begin{bmatrix} u^1 \\ v_1 \\ \theta_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ \theta_2 \\ u_3 \\ v_3 \\ \theta_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & y_1 & x_1 & x_1 y_1 & 0 & (x_1^2 - y_1^2)/2 & y_1/2 & y_1^2/2 \\ 0 & 1 & y_1 & 0 & (y_1^2 - x_1^2)/2 & y_1 & x_1 y_1 & x_1/2 & x_1^2/2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & x_1 & 0 & y_1 & 0 & (x_1 - y_1)/2 \\ 1 & 0 & y_2 & x_2 & x_2 y_2 & 0 & (x_2^2 - y_2^2)/2 & y_2/2 & y_2^2/2 \\ 0 & 1 & y_2 & 0 & (y_2^2 - x_2^2)/2 & y_2 & x_2 y_2 & x_2/2 & x_2^2/2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & x_2 & 0 & y_2 & 0 & (x_2 - y_2)/2 \\ 1 & 0 & y_3 & x_3 & x_3 y_3 & 0 & (x_3^2 - y_3^2)/2 & 3y/2 & y_3^2/2 \\ 0 & 1 & y_3 & 0 & (y_3^2 - x_3^2)/2 & y_3 & \alpha_7 x_3 y_3 & x_3/2 & x_3^2/2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & x_3 & 0 & \alpha_7 x_3 y_3 & 0 & (x_3 - y_3)/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \alpha_4 \\ \alpha_5 \\ \alpha_6 \\ \alpha_7 \\ \alpha_8 \\ \alpha_9 \end{bmatrix}$$

$$[K^e] = [A^{-1}]^T [K_0^e] [A^{-1}]:$$

$$[K_0^e] = \int \int [C]^T [D] [C] dx dy$$