

République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

UNIVERSITÉ MOHAMED KHIDER, BISKRA

FACULTÉ des SCIENCES EXACTES et des SCIENCES de la NATURE et de la VIE

DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES



Mémoire présenté en vue de l'obtention du Diplôme :

MASTER en Mathématiques

Option : **Statistique**

Par

KABOT Fathia

Titre :

Sur les copules bivariées

Membres du Comité d'Examen :

Dr. HASSOUNA Houda	UMKB	Présidente
Dr. CHINE Amel	UMKB	Encadreur
Dr. TOUBA Sonia	UMKB	Examinatrice

Juin 2018

DÉDICACE

Je dédie ce mémoire à :

A mes chers parents, Amar et Aicha,

A mes frères, Salah, Obaid, Haroun,

A mes sœurs, Djohina, Tota, Aya, Rawane, Ritadje,

A mon fiancé Salah,

A mes amies,

A mes collègues de mathématiques 2017-2018,

A tous ceux et celles qui sont loin de mes yeux, près de mon cœur.

Merci à Tous.

NESRINE.

REMERCIEMENTS

Nous prions ALLAH qui nous a donné la capacité, la patience, la santé et le courage pour terminer ce modeste travail.

*Tous d'abord nous tenons à adresser nos remerciements au **Dr.Mme.CHINE Amel** pour avoir proposée, acceptée d'encadré ce mémoire.*

*Nous tenons aussi à remercier chaleureusement **Dr.BENATIA Fatah** qui a bien voulu répondre patiemment et aimablement à nos nombreuses questions. Et grâce à son aide, ses remarques et ses conseils constructifs nous avons atteints convenablement nos objectifs dans ce travail.*

*Mes précieux remerciements vont à la présidente et les membres de jury : **Dr. HAS-SOUNA Houda** et **Dr.TOUBA Sonia** pour l'honneur qu'ils m'ont fait en acceptant de juger mon travail et faire partie de ce jury.*

*Toute notre reconnaissance et remerciements distingués s'adressent à notre ancien chef de département de mathématique **Dr. YAHIA Djebrane** et l'actuelle **Pr.HFAIAD Mokhtar** et à tous les enseignants du département de mathématique de l'université Mohamade Khider Biskra.*

Les mots ne sauraient décrire la gratitude éprouvée envers ceux et celles qui nous ont aidé de près ou de loin à réaliser ce travail.

Merci à Tous.

Table des matières

Dédicace	i
Remerciements	ii
Table des matières	iii
Liste des figures	v
Liste des tableaux	vi
Introduction	1
1 Introduction aux copules	3
1.1 Préliminaires	3
1.1.1 Notion de 2-croissance	4
1.2 Copule bivariée	4
1.2.1 Théorème de Sklar	6
1.2.2 Bornes de Fréchet-Hoeffding	8
1.3 Propriétés de copule	9
1.3.1 Densité de copule	12
1.4 Famille des copules	12
1.4.1 Copule d'indépendance	12
1.4.2 Copule elliptique	13

1.4.3	Copules Archimédiennes	14
1.4.4	Copule Farlie-Gumbel-Morgenstern	17
1.4.5	Copule des valeurs extrêmes	18
2	Mesures d'associations	19
2.1	Mesure de dépendance	19
2.1.1	Dépendance de queue	20
2.2	Mesure de concordance	21
2.2.1	Caractérisation d'une mesure de concordance	22
2.2.2	Propriété de la fonction de concordance :	23
2.2.3	Tau de Kendall	25
2.2.4	Rho de Spearman	27
2.3	Estimation paramétrique	30
2.3.1	Méthode d'inversion du tau de Kendall et du rho de Spearman	30
3	Copule de Gumbel	32
3.1	Caractérisation de la copule de Gumbel	32
3.2	Mesure d'association de la copule de Gumbel et estimation	36
3.2.1	Coefficient de corrélation de Kendall	36
3.2.2	Valeurs empiriques des coefficients de dépendance	37
3.2.3	Estimation de paramètre de dépendance θ	41
	Conclusion	42
	Bibliographie	43
	Annexe A : Logiciel <i>R</i>	45
	Annexe B : Abréviations et Notations	46

Table des figures

3.1	Nuage de points de la copule de Gumbel pour $\theta = 1$	33
3.2	Densités de la copule de Gumbel pour $\theta = 2, \theta = 5$ et $\theta = 10$ de gauche à droite respectivement.	35
3.3	Nuage de points de la copule de Gumbel pour $\theta = 2$	38
3.4	Nuage de points de la copule de Gumbel pour $\theta = 8$	39
3.5	La dépendance de queue pour paramètre différent.	40

Liste des tableaux

2.1	Présentation de Tau de Kendall et Rho de Spearman de quelques copules. . .	30
3.1	Coefficient de dépendance de la copule de Gumbel.	38
3.2	Coefficient de dépendance de la copule de Gumbel.	38
3.3	Mesures d'association et la dépendance de queue de copule de Gumbel. . .	40
3.4	Représentation de Biais et RMSE de l'estimation de paramètre de la copule de Gumbel.	41

Introduction

Le mot "**copula**" en latin est signifié "un lien". Le concept de "copule" a été utilisé dans un sens mathématique en premier par Abe Sklar 1959 dans le théorème qui porte son nom.

Les copules constituent un outil statistique permettant de modéliser la dépendance entre des variables aléatoires. La fonction copule relie en effet la densité jointe aux densités marginales et contient ainsi toute l'information sur la structure de dépendance du modèle, ce qui joue un rôle très important dans l'étude de la modélisation de la dépendance d'une manière significative, ceci dans différents domaines de la statistique, telle que : la finance, l'hydrologie, la biologie, l'actuariat...etc.

La copule est définie comme une fonction de répartition à marge uniforme sur $[0, 1]$, elle met en évidence la relation de dépendance entre deux ou plusieurs variables aléatoires. par la relation établie dans le théorème de Sklar :

$$H(x, y) = C(F(x), G(y)),$$

La mesure de dépendance entre deux ou plusieurs variables aléatoire est une pratique largement utilisée chez les statisticiens. Parmi celles-ci le coefficient de corrélation linéaire de Pearson est le plus connu ; mais l'utilisation de cette mesure connaît plusieurs défauts, pour éviter ce problème nous avons recours à d'autres mesures de dépendance se fondant sur la discordance et la concordance observé sur un échantillon et qui sont les coefficients

de corrélation non linéaire tels que le tau de Kendall et le rho de Spearman. Ces mesures de dépendance peuvent être exprimées explicitement en fonction de la copule.

Ce mémoire est réparti en trois chapitres.

Le premier chapitre : *Introduction aux copules.* Dans ce chapitre, on rappelle les définitions nécessaires concernant les copules bivariées et des propriétés fondamentales associées, en énonçant l'important théorème de Sklar, ainsi que quelques familles de copule les plus usuelles.

Le deuxième chapitre : *Mesures d'associations.* Dans cette partie on commence de donner les définitions de la mesure de dépendance et la dépendance de queue, puis on présente la mesure de concordance et quelques propriétés de cette fonction en particulier le tau de Kendall et le rho de Spearman, à la fin du chapitre, nous présentons la méthode d'inversion utilisée pour notre estimation.

Le troisième chapitre : *copule de Gumbel.* Nous nous intéresserons dans ce chapitre, à une copule particulière, soit la copule de Gumbel. Après l'avoir définie nous présentons ses caractéristiques particulières, puis on calcule les mesures d'association de la copule de Gumbel, présenter les graphes d'échantillon de cette copule et estimer le paramètre de dépendance du copule de Gumbel en utilisant logicielle **R**.

Chapitre 1

Introduction aux copules

1.1 Préliminaires

L'objectif de ce chapitre est de donner avec le plus de précision possible la définition des copules, ainsi que certaines propriétés élémentaires. Pour cela considérons un couple de v.a (X, Y) de fonction de répartition jointe $H_{X,Y}$ et de lois marginales respectives F_X et G_Y définies par :

$$H(x, y) = \mathbb{P}(X \leq x, Y \leq y), \quad (1.1)$$

et

$$\begin{cases} F_X(x) = \mathbb{P}(X \leq x) \\ G_Y(y) = \mathbb{P}(Y \leq y) \end{cases} \quad (1.2)$$

Pour chaque copule de valeurs réelles (x, y) on peut associé $F_X(x)$, $G_Y(y)$ et $H(x, y)$ appartenant à l'intervalle $\mathbb{I} = [0, 1]$. En d'autres termes pour chaque paire de nombres réels (x, y) dans l'intervalle $\mathbb{I}^2 = [0, 1]^2$ correspond un point $(F_X(x), G_Y(y))$ dans le carré unité \mathbb{I}^2 et a son tour ce point on fait correspondre un nombre réel $H(x, y)$ appartenant à l'intervalle \mathbb{I} . Nous allons alors montrer que cette correspondance qui attribue la valeur de la distribution $H(x, y)$ à la copule des fonctions de distributions marginales $C(F_X(x), G_Y(y))$ est en effet une fonction de \mathbb{I}^2 dans \mathbb{I} . Ces fonctions sont appelées copules.

1.1.1 Notion de 2-croissance

Définition 1.1.1 Soient S_1 et S_2 deux sous-ensembles non vide de $\overline{\mathbb{R}}$ et soit H une fonction à deux dimensions telle que $\text{Dom}H = S_1 \times S_2$ et soit $\mathbb{B} = [x_1, x_2] \times [y_1, y_2]$ un rectangle dont les sommets sont dans $\text{dom}H$ alors le H -volume de \mathbb{B} est donné par :

$$V_H(\mathbb{B}) = H(x_2, y_2) - H(x_2, y_1) - H(x_1, y_2) + H(x_1, y_1). \quad (1.3)$$

Définition 1.1.2 Une fonction réelle H bidimensionnelle est dite 2-croissante si $V_H(\mathbb{B}) \geq 0$ pour tout rectangle \mathbb{B} dont les sommets sont inclus dans $\text{Dom}H$. Quand H est 2-croissante, le H -volume du rectangle \mathbb{B} est présenté parfois comme mesure de \mathbb{B} certains auteurs préfèrent quasi-monotone à fonction 2-croissante.

1.2 Copule bivariée

Définition 1.2.1 on appelle copule 2-dimensionnelle ou copule bivariée toute fonction C de \mathbb{I}^2 dans \mathbb{I} possédant les propriétés suivantes :

(i) Pour tout u, v dans \mathbb{I} on a :

$$\begin{cases} C(u, 0) = C(0, v) = 0 \\ C(u, 1) = u \text{ et } C(1, v) = v \end{cases} \quad (1.4)$$

(ii) La copule C est 2-croissante : $\forall u_1, v_1, u_2, v_2 \in \mathbb{I}$ telle que $u_1 \leq u_2$ et $v_1 \leq v_2$

$$C(u_1, v_1) - C(u_1, v_2) - C(u_2, v_1) + C(u_2, v_2) \geq 0. \quad (1.5)$$

Exemple des copules

1. Copule min : La copule min, noté M est définie par :

$$M(u, v) = \min(u, v), \quad \forall u, v \in \mathbb{I}. \quad (1.6)$$

En effet :

D'après la propriété (i) dans (1.4), on a :

$$\min(u, 0) = 0 = \min(0, v) \text{ et } \min(u, 1) = u \text{ et } \min(1, v) = v, \quad \forall u, v \in \mathbb{I}.$$

De même, et pour la propriété (ii) dans (1.5) on a :

$$\min(u_1, v_1) \geq \min(u_1, v_2) \text{ et } \min(u_2, v_1) \geq \min(u_2, v_2), \quad \forall u_1, v_1, u_2, v_2 \in \mathbb{I},$$

avec $u_1 \leq u_2$ et $v_1 \leq v_2$.

Par conséquence M est une copule.

2. Copule max : La copule max, noté W est définie par :

$$W(u, v) = \max(u + v - 1, 0), \quad \forall u, v \in \mathbb{I}. \quad (1.7)$$

Telle que $\max(v - 1, 0) = \max(u - 1, 0) = 0$ et $\max(v - 1, 0) = v$ et $\max(u - 1, 0) = u$.

C est aussi 2-croissante, telle que $u_1 \leq u_2$ et $v_1 \leq v_2$ implique :

$$\max(u_2 + v_1 - 1, 0) - \max(u_1 + v_1 - 1, 0) \leq \max(u_2 + v_2 - 1, 0) - \max(u_1 + v_2 - 1, 0)$$

Donc la fonction W en \mathbb{I}^2 est une copule.

3. Copule produit (copule d'indépendance) : La copule produit, noté Π est définie

par :

$$C(u, v) = \Pi(u, v) = uv, \quad \forall u, v \in \mathbb{I}. \quad (1.8)$$

De la même façon la fonction Π vérifiée les deux propriétés et définie aussi de copule.

1.2.1 Théorème de Sklar

Le théorème de Sklar explique en lumière comment il est possible de relier le principe de la copule à la fonction de répartition bivariée et aux lois marginales.

Théorème 1.2.1 (*Théorème de Sklar*) Soit H une fonction de répartition conjointe de deux v.a X et Y dont les marginales sont F et G . Alors il existe une copule $C : \mathbb{I}^2 \rightarrow \mathbb{I}$ telle que $\forall x, y \in \mathbb{R}^2$, on a :

$$H(x, y) = C(F(x), G(y)). \quad (1.9)$$

Si F et G sont continus, alors C est unique [12].

L'équation (1.9) permet d'exprimer une fonction de répartition bivariée H à l'aide d'une copule et des lois marginales F et G . À l'inverse, il est également possible d'exprimer une copule de la loi bivariée H et des inverses (ou quasi-inverses) des fonctions de répartition marginales si on connaît la forme de $C(u, v)$.

Preuve.

Premièrement, les copules sont des fonctions de distribution conjointe de v.a uniformes standards :

$$C(u, v) = \mathbb{P}(U \leq u, V \leq v).$$

Deuxièmement, nous savons à partir de la théorie des probabilités élémentaires que les distributions $F(X)$, et $G(Y)$ des v.a X et Y .

$$X \rightarrow F(X) \quad , \quad Y \rightarrow G(Y).$$

Sont de loi uniforme standard :

$$F(X) \stackrel{d}{=} U \quad , \quad G(Y) \stackrel{d}{=} V \quad \text{ou } U \sim \mathbb{U}_{[0,1]}, V \sim \mathbb{U}_{[0,1]}$$

De manière analogue, les transformations inverses F^{-1} et G^{-1} des variables uniformes U, V sont on pour fonction de distributions respectives F et G

$$F^{-1}(U) \stackrel{d}{=} X \quad , \quad G^{-1}(V) \stackrel{d}{=} Y.$$

La copule des fonctions de distribution jointes $F(x), G(y)$ des v.a X et Y la fonction de distribution conjointe au point (x, y)

$$\begin{aligned} C(F(x), G(y)) &= P(U \leq F(x), V \leq G(y)) \\ &= P(F^{-1}(U) \leq x, G^{-1}(V) \leq y) \\ &= P(X \leq x, Y \leq y) \\ &= H(x, y). \end{aligned}$$

[3]. ■

Corollaire 1.2.1 (*Inverse du théorème de Sklar*)

Soit H une fonction de répartition bidimensionnelle de fonctions de répartitions marginales F et G . Alors la copule C associée à H est donnée par :[4]

$$\begin{aligned} C(u, v) &= H(F(x), G(y)) \quad \forall (u, v) \in \mathbb{I}^2 \\ &= H(F^{-1}(u), G^{-1}(v)). \end{aligned}$$

Exemple 1.2.1 Soit la distribution logistique bivariée de Gumbel [9] dont la fonction de répartition conjointe est donnée par :

$$H(x, y) = (1 + \exp(-x) + \exp(-y))^{-1}, \quad \text{pour tout } (x, y) \in \mathbb{R}^2.$$

Des équations $F(x) = \lim_{y \rightarrow \infty} H(x, y)$ et $G(y) = \lim_{x \rightarrow \infty} H(x, y)$, nous obtenons les fonctions de

distribution marginales :

$$F(x) = (1 + \exp(-x))^{-1} \quad \text{et} \quad G(y) = (1 + \exp(-y))^{-1}.$$

Comme les fonctions inverses sont respectivement :

$$F^{-1}(u) = -\ln\left(\frac{1}{u} - 1\right) \quad \text{et} \quad G^{-1}(v) = -\ln\left(\frac{1}{v} - 1\right).$$

En se basant sur l'équation précédente, la copule associée à $F(x, y)$ s'écrit :

$$\begin{aligned} C(u, v) &= H(F^{-1}(u), G^{-1}(v)) \\ &= \left[1 + \exp\left(\ln\left(\frac{1}{u} - 1\right)\right) + \exp\left(\ln\left(\frac{1}{v} - 1\right)\right) \right]^{-1} \\ &= \frac{uv}{u + v - uv}. \end{aligned}$$

Ceci montre le lien entre les fonctions de distribution marginales et les copules. Introduisons les limites des copules, pour obtenir les bornes de Fréchet pour les copules.

1.2.2 Bornes de Fréchet-Hoeffding

Toute copule C admet une borne inférieure et une borne supérieure déterminée par le théorème suivant :

Théorème 1.2.2 (*Fréchet-Hoeffding*) *Soit C une copule alors :*

$$\max(u + v - 1, 0) \leq C(x, y) \leq \min(u, v), \quad \forall u, v \in \mathbb{I}, \quad (1.10)$$

telles que $\max(u + v - 1, 0) = W(u, v)$ et $\min(u, v) = M(u, v)$ représentent les bornes inférieure et supérieure de Fréchet-Hoeffding respectivement.

Et comme conséquence du théorème de Sklar, les copules C minimale et maximale, C^- et C^+ sont appelées respectivement les limites inférieure et supérieure de Fréchet l'inégalité $C^- \leq C \leq C^+$ peut-être réécrite comme :

$$\max(F(x) + G(y) - 1, 0) \leq H(x, y) \leq \min(F(x), G(y)),$$

est connue sous le nom de l'inégalité de Fréchet-Hoeffding.

1.3 Propriétés de copule

Cette section met en lumière quelques propriétés importantes de la théorie des copules, parmi lesquelles on peut citer la symétrie, la différenciabilité, la continuité.

Pour cela considérons deux v.a continues X, Y , de fonction de répartition jointe H et de lois marginales respectives F et G , et soit C la copule associée définie par :

$$H(x, y) = C(F(x), G(y)).$$

1. Symétrie : Soient X, Y deux v.a continues, de fonction de répartition jointe H et de marginales F et G , et soit C la copule associée.

On dit que X, Y sont échangeable si et seulement si $F = G$ et $\forall u, v \in \mathbb{I}^2$ si $C(u, v) = C(v, u)$ on dit que C est symétrique.

2. Dérivées partielles : Les dérivées partielles de $C(u, v)$ existent presque surement pour tout $(u, v) \in \mathbb{I}^2$.

Théorème 1.3.1 *A l'intérieur de \mathbb{I}^2 , les deux dérivées partielles $\partial C/\partial u$, $\partial C/\partial v$ de la fonction C , existent presque partout et prennent des valeurs dans \mathbb{I} , [4] :*

$$0 \leq \frac{\partial C}{\partial u} \leq 1 \quad , \quad 0 \leq \frac{\partial C}{\partial v} \leq 1.$$

Exemple 1.3.1 Les dérivées partielles de la copule $\max W$ (1.7) existent à chaque fois $u + v - 1 \neq 0$, c-à-d $v \neq 1 - u$. [12] Depuis $\max(u + v - 1, 0) = u + v - 1$ à chaque fois que $v > 1 - u$, elles sont :

$$\frac{\partial C(u, v)}{\partial u} = \frac{\partial C(u, v)}{\partial v} = \begin{cases} 0 & \text{si } v < 1 - u \\ 1 & \text{si } v > 1 - u \end{cases}$$

3. Continuité : Soit C une copule bivariée, on a :

$$|C(u_2, v_2) - C(u_1, v_1)| \leq |u_2 - u_1| + |v_2 - v_1|, \quad u_1, u_2, v_1, v_2 \in \mathbb{I}, \text{ avec } u_1 \leq u_2 \text{ et } v_1 \leq v_2$$

4. Ordre partiel :

Définition 1.3.1 Soit C_1, C_2 deux copules, on dit que C_1 est plus petite que C_2 , ou C_2 est plus grand que C_1 et on note $C_1 < C_2$ si :

$$C_1(u, v) \leq C_2(u, v) \quad \forall (u, v) \in \mathbb{I}^2.$$

Exemple 1.3.2 On a la copule $\min M$ (1.6) inférieure la copule $\max W$ (1.7).

5. Invariance fonctionnelle : Ce théorème essentiel à la théorie des copules est celui de l'invariance par transformations strictement croissantes.

Théorème 1.3.2 Soient deux v.a continues X et Y de marges F et G et de copule $C_{X,Y}$. Si α et β sont deux fonctions strictement croissantes, alors :

$$C_{\alpha(X),\beta(Y)} = C_{X,Y}$$

La copule $C_{X,Y}$ est invariante par transformations strictement croissantes des v.a [12].

Preuve.

Soient α et β deux fonctions strictement croissantes et X et Y deux v.a continues ayant pour copule $C_{X,Y}(u, v) = H_1(x, y)$ et pour fonctions de répartition marginales respectivement F_1 et G_1 . Notons les fonctions de distribution univariées de $\alpha(X)$ et $\beta(Y)$ respectivement F_2 et G_2 et la loi conjointe H_2 . Puisque α et β sont strictement croissantes et que X et Y sont des v.a continues, pour tout $(u, v) \in \mathbb{I}^2$, on a :

$$\begin{aligned}
 C_{\alpha(X),\beta(Y)}(u, v) &= C_{\alpha(X),\beta(Y)}(F_2(x), G_2(y)) \\
 &= H_2(x, y) \\
 &= \mathbb{P}(\alpha(X) \leq x, \beta(Y) \leq y) \\
 &= \mathbb{P}(X \leq \alpha^{-1}(x), Y \leq \beta^{-1}(y)) \\
 &= H_1(\alpha^{-1}(x), \beta^{-1}(y)) \\
 &= C_{X,Y}(F_1(\alpha^{-1}(x)), G_1(\beta^{-1}(y))) \\
 &= C_{X,Y}(F_2(x), G_2(y)).
 \end{aligned}$$

Ce nous qui donne la formule de théorème 1.3.2. ■

6. Convexité et concavité :

Définition 1.3.2 Soient $(a_1, a_2), (b_1, b_2) \in \mathbb{I}^2$ et $\forall \lambda \in \mathbb{I}$.

On dit que C est convexe si :

$$C(\lambda a_1 + (1 - \lambda) b_1, \lambda a_2 + (1 - \lambda) b_2) \leq \lambda C(a_1, a_2) + (1 - \lambda) C(b_1, b_2).$$

On dit que C est concave si :

$$C(\lambda a_1 + (1 - \lambda) b_1, \lambda a_2 + (1 - \lambda) b_2) \geq \lambda C(a_1, a_2) + (1 - \lambda) C(b_1, b_2)$$

1.3.1 Densité de copule

Soient X, Y deux v.a continues. Soit h la fonction de densité jointe de H , f et g sont les fonctions de densités marginales de X, Y respectivement.

Définition 1.3.3 *La densité $c(F(x), G(y))$ associée a la copule $C(F(x), G(y))$ est définie par :*

$$\begin{aligned} c(F(x), G(y)) &= \frac{\partial^2 C(F(x), G(y))}{\partial F(x) \partial G(y)} \\ &= \frac{h(x, y)}{f(x) g(y)}. \end{aligned} \tag{1.11}$$

D'après le théorème de Sklar, on donne la représentation canonique suivante :

$$h(x, y) = c(F(x), G(y)) f(x) g(y).$$

1.4 Famille des copules

1.4.1 Copule d'indépendance

Soit X et Y deux v.a continues, de fonction de répartition jointe H , et de lois marginales respectives F et G .

Définition 1.4.1 *Si X, Y sont deux v.a indépendantes, alors la copule associée est un produit de ses marginales.*

$$C_{X,Y}(u, v) = F(x) . G(y) = H(x, y).$$

Qu'on note aussi :

$$C_{X,Y}(u, v) = \Pi(u, v) = u.v \tag{1.12}$$

1.4.2 Copule elliptique

On appelle copule elliptique toute copule de la forme $\forall u, v \in \mathbb{I}$:

$$\begin{aligned} C_r(u, v) &= \Phi_r(\Phi_F^{-1}(u), \Phi_G^{-1}(v)) \\ &= \frac{1}{\sqrt{1-r^2}} \int_{-\infty}^{\Phi_F^{-1}(u)} \int_{-\infty}^{\Phi_G^{-1}(v)} g\left(\frac{x^2 - 2rxy + y^2}{\sqrt{1-r^2}}\right) dx dy. \end{aligned} \quad (1.13)$$

où Φ_r est fonction de la distribution conjointe des variables X et Y , $\Phi_F^{-1}(u)$ et $\Phi_G^{-1}(v)$ les fonctions quantiles respectives et r leur coefficient de corrélation.

Les deux classes les plus utilisées de copule elliptique sont les copules gaussiennes et les copules de Student.

Copule Gaussienne

La copule Gaussienne fait partie de la famille elliptique des copules bivarées à un paramètre. Utiliser cette copule conséquente avec la mesure de dépendance obtenue par le coefficient de corrélation r .

Définition 1.4.2 *La copule Gaussienne de deux v.a X, Y Gaussiennes de moyenne μ et de matrice de covariance $\Sigma = \begin{bmatrix} 1 & r \\ r & 1 \end{bmatrix}$ est définie par :*

$$C_r(u, v) = \Phi_r(\Phi^{-1}(u), \Phi^{-1}(v)), \quad (1.14)$$

telle que Φ_r est la fonction de répartition jointe de la loi normale standard (centré réduite) bivariée de coefficient de corrélation linéaire $r \in [-1, 1]$.

$$\Phi(x) = P(X_i \leq x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^x \exp\left(-\frac{t^2}{2}\right) dt,$$

et $r = \frac{\text{cov}(x,y)}{\sqrt{\text{var}(x)}\sqrt{\text{var}(y)}}$. Par conséquent, la copule gaussienne bivariée est :

$$C_r(u, v) = \int_{-\infty}^{\Phi^{-1}(u)} \int_{-\infty}^{\Phi^{-1}(v)} \frac{1}{2\pi(1-r^2)^{\frac{1}{2}}} \exp\left(-\frac{s^2 + 2rst + t^2}{2(1-r^2)}\right) dsdt. \quad (1.15)$$

Cette copule est paramétrée par le coefficient de corrélation linéaire r :

- Si $r = 0$ alors $C_r(u, v) = \Pi(u, v)$.
- Si $r = -1$ alors $C_r(u, v) = W(u, v)$.
- Si $r = 1$ alors $C_r(u, v) = M(u, v)$.

Copule de Student

La copule Student extrait de la distribution de Student bivariée.

Définition 1.4.3 La copule de Student (*t copule*) est une copule paramétrique, paramétrée par le coefficient de corrélation linéaire r et le degré de liberté k ($k \geq 3$) Cette copule est définie par :

$$C_{r,k}(u, v) = t_{r,k}(t_k^{-1}(u), t_k^{-1}(v)) \quad (1.16)$$

tell que $t_{r,k}$ la distribution de Student bivariée alors la copule Student bivariée est :

$$C_{r,k}(u, v) = \int_{-\infty}^x \int_{-\infty}^y \frac{1}{2\pi\sqrt{1-r^2}} \left(1 + \frac{s^2 + t^2 - 2rst}{v(1-r^2)}\right)^{-\frac{v+2}{2}} dsdt. \quad (1.17)$$

1.4.3 Copules Archimédiennes

Parmi les copules paramétriques les plus utilisées on peut citer la famille des copules archimédiennes qui constitue une classe très importante de copules, principalement en raison de la facilité avec laquelle on peut les construire; et qui possède des propriétés intéressantes [14]. Cette famille regroupe un certain nombre de copules parmi lesquelles on peut cités les copules de Clayton, Gumbel et Franck.

Définition 1.4.4 On appelle *générateur* toute fonction $\varphi : [0, 1] \rightarrow [0, \infty[$ décroissante, continue et convexe, vérifiant $\varphi(1) = 0$. Le pseudo-inverse de φ est défini comme suit :

$$\varphi^{-1}(t) = \begin{cases} \varphi^{-1}(t) & \text{si } 0 \leq t \leq \varphi(0) \\ 0 & \text{si } \varphi(0) \leq t \leq \infty \end{cases} \quad (1.18)$$

Remarque 1.4.1 Si $\varphi(0) = \infty$, alors φ est strictement décroissante telle que :

$$\varphi'(t) < 0 \text{ et } \varphi''(t) > 0, \quad \forall 0 \leq t \leq 1$$

et on peut remplacer le pseudo-inverse φ^{-1} par l'inverse ordinaire.

Définition 1.4.5 La copule archimédienne est définie comme suite :

$$C(u, v) = \varphi^{-1}[\varphi(u) + \varphi(v)], \quad (1.19)$$

telle que φ un générateur.

Nous présentons quelques exemples de copules archimédienne bivariées d'un seul paramètre dite paramètre de dépendance.

Copule de Gumbel (1960)

Pour un générateur $\varphi_\theta(t)$ et son pseudo-inverse φ_θ^{-1} défini par :

$$\begin{aligned} \varphi_\theta(t) &= (-\ln t)^\theta, & \forall \theta \geq 1 \text{ et } t > 0 \\ \varphi_\theta^{-1}(t) &= \exp\left(-t^{\frac{1}{\theta}}\right). \end{aligned}$$

On définit alors la copule de Gumbel C_θ pour $\theta \in [1, +\infty[$ par :

$$C_\theta(u, v) = \varphi_\theta^{-1}[\varphi_\theta(u) + \varphi_\theta(v)] = \exp\left\{-\left[(-\ln u)^\theta + (-\ln v)^\theta\right]^{\frac{1}{\theta}}\right\}, \quad (1.20)$$

Qui est une copule asymétrique [8].

Aux bornes de l'intervalle $[1, +\infty[$ Cette copule prend les formes suivantes :

- Si $\theta \rightarrow 1$ alors $C_\theta \rightarrow \Pi$.
- Si $\theta \rightarrow \infty$ alors $C_\theta \rightarrow M$.

Copule de Clayton (1978)

Cette copule a été introduite par Clayton (1978) de paramètre de dépendance $\theta \in [-1, 0[\cup]0, +\infty[$ et s'appelle aussi la copule de Cook et Johnson (1981) [5], et d'abord étudié par Kimeldorf et Sampson (1975) [10]. elle est définie par :

$$C_\theta(u, v) = (u^{-\theta} + v^{-\theta} - 1)^{\frac{1}{\theta}}, \quad \text{pour } \theta \in [-1, 0[\cup]0, +\infty[\quad (1.21)$$

de générateur $\varphi_\theta(t)$ et de pseudo inverse tel que :

$$\varphi_\theta(t) = \frac{1}{\theta} (t^{-\theta} - 1), \quad \varphi_\theta^{-1}(t) = (t + 1)^{\frac{-1}{\theta}}.$$

Nous avons pour les valeurs limites de l'intervalle de définition :

- Si $\theta \rightarrow 0$ alors les variables sont indépendantes Π .
- Si $\theta \rightarrow +\infty$ alors on obtient la copule de borne supérieur de Fréchet-Hoeffding M .
- Si $\theta \rightarrow -1$ alors on obtient la copule minimale W .

Copule de Frank (1979)

Cette copule est symétrique de paramètre de dépendance $\theta \in]-\infty, 0[\cup]0, +\infty[$ [7]. Elle est définie par :

$$C_\theta(u, v) = -\frac{1}{\theta} \ln \left[1 + \frac{(\exp(-u\theta) - 1)(\exp(-v\theta) - 1)}{\exp(-\theta) - 1} \right], \quad \text{pour } \theta \in \mathbb{R}^* \quad (1.22)$$

où le générateur est tel que :

$$\varphi_{\theta}(t) = -\ln \left[\frac{\exp(-\theta t) - 1}{\exp(-\theta) - 1} \right],$$

et de densité :

$$C_{\theta}(u, v) = \frac{(\theta - 1) \ln \theta^{u+v}}{(\theta - 1 + (\theta^u - 1)(\theta^v - 1))^2}. \quad (1.23)$$

On peut vérifier que :

- Si $\theta \rightarrow 0$ alors $C \rightarrow \Pi$.
- Si $\theta \rightarrow +\infty$ alors $C \rightarrow M$.
- Si $\theta \rightarrow -\infty$ alors $C \rightarrow W$.

1.4.4 Copule Farlie-Gumbel-Morgenstern

La copule de Farlie-Gumbel-Morgenstern est la plus connue des copules paramétrique, cette copule a été étudié par Morgenstern (1956), Gumbel(1958), et enfin Farlie (1960).

Définition 1.4.6 *La copule Farlie-Gumbel-Morgenstern connue par (F-G-M) est définie pour un paramètre de dépendance $\theta \in [-1, 1]$ comme suit :*

$$C_{\theta}(u, v) = uv + \theta u v \bar{u} \bar{v}, \quad (1.24)$$

telle que $\bar{u} = 1 - u$, et $\bar{v} = 1 - v$.

La fonction de densité de la copule F-G-M est donnée par :

$$\frac{\partial^2 C(u, v)}{\partial u \partial v} = c_{\theta}(u, v) = 1 + \theta(1 - 2u - 2v + 4uv) \quad \forall u, v \in \mathbb{I}^2. \quad (1.25)$$

1.4.5 Copule des valeurs extrêmes

On appelle copule des valeurs extrêmes, toute copule C vérifiant la propriété suivante :

$$C(u^t, v^t) = C^t(u, v) \quad \forall u, v \in \mathbb{I}^2, \forall t > 0. \quad (1.26)$$

Où

$$C^{\frac{1}{t}}(u^t, v^t) = C(u, v) \quad \forall u, v \in \mathbb{I}^2, \forall t > 0. \quad (1.27)$$

Par la suite on tentera de justifier l'appellation de ces copules en établissant l'existence d'un lien entre la caractérisation ci-dessus et la théorie des valeurs extrêmes bivariées.

Exemple 1.4.1 *On considère la copule de Galambos comme exemple on a :*

$$C_\theta(u, v) = uv \exp \left\{ - \left[(-\ln u)^{-\theta} + (-\ln v)^{-\theta} \right]^{\frac{-1}{\theta}} \right\}, \quad \forall \theta \geq 0. \quad (1.28)$$

Donc

$$\begin{aligned} C_\theta(u^t, v^t) &= u^t v^t \exp \left\{ - \left[(-\ln u^t)^{-\theta} + (-\ln v^t)^{-\theta} \right]^{\frac{-1}{\theta}} \right\} \\ &= u^t v^t \exp \left\{ - \left[(-t \ln u)^{-\theta} + (-t \ln v)^{-\theta} \right]^{\frac{-1}{\theta}} \right\} \\ &= u^t v^t \exp \left\{ -t \left[(-\ln u)^{-\theta} + (-\ln v)^{-\theta} \right]^{\frac{-1}{\theta}} \right\} \\ &= u^t v^t \exp \left\{ - \left[(-\ln u)^{-\theta} + (-\ln v)^{-\theta} \right]^{\frac{-1}{\theta}} \right\}^t \\ &= \left(uv \exp \left\{ - \left[(-\ln u)^{-\theta} + (-\ln v)^{-\theta} \right]^{\frac{-1}{\theta}} \right\} \right)^t \\ &= C_\theta^t(u, v). \end{aligned}$$

Qui est une copule bivariée de valeurs extrêmes notée BVE.

Chapitre 2

Mesures d'associations

Dans ce chapitre, on donne les définitions de mesure de dépendance et mesure de concordance les plus connues (tau de Kendall et le rho de Spearman). Il existe en statistique un certain nombre de grandeurs proposées par leurs auteurs comme des mesures de la dépendance entre deux v.a.

Le coefficient de corrélation linéaire de Pearson, défini par $r_{X,Y} = \frac{\text{cov}(X,Y)}{\sqrt{\text{Var}(X)\text{Var}(Y)}}$ est la mesure la plus connue. Ce coefficient est une mesure très imparfaite de la dépendance.

2.1 Mesure de dépendance

Une mesure de dépendance est une application qui associe à deux v.a, un réel permettant de quantifier la force du lien existant entre les deux v.a.

Pour être jugée satisfaisante, une mesure de dépendance doit satisfaire un nombre de propriétés, et d'autre part qu'elle soit une mesure de concordance.

Définition 2.1.1 Une mesure d'association δ entre deux v.a continue X et Y est une mesure de dépendance si et seulement si [4] :

1. $\delta_{X,Y}$ est définie pour tout couple (X, Y) de v.a continues.
2. $0 \leq \delta_{X,Y} \leq 1$.

3. Symétrique : $\delta_{X,Y} = \delta_{Y,X}$.
4. X et Y sont indépendantes si et seulement si $\delta_{X,Y} = 0$.
5. $\delta_{X,Y} = 1$ si et seulement si chacun des v.a X, Y est une fonction strictement monotone de l'autre presque sûrement.
6. Si α et β sont deux fonctions strictement monotones presque sûrement, alors :

$$\delta_{X,Y} = \delta_{\alpha(X),\beta(Y)}.$$

7. Si $\{(X_n, Y_n)\}$ est une suite de couples aléatoires continue de copules respectives $\{C_n\}$ et si $\{C_n\}$ converge vers C . Alors δ_{C_n} converge vers δ_C .

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \delta_{C_n} = \delta_C.$$

2.1.1 Dépendance de queue

La dépendance de queue est une mesure locale, qui mesure la dépendance au niveau des queues de distribution [3]. Cette mesure de grande importance définit les copules des valeurs extrêmes et très pertinentes pour l'étude de la dépendance de valeurs extrêmes. Il existe deux coefficients de dépendance des queues :

Définition 2.1.2 Soit X, Y deux v.a continues de fonctions de répartition respectives F et G . Le coefficient de dépendance inférieure (lower tail dependence coefficient) λ_L est défini par :

$$\lambda_L(X, Y) = \lim_{\alpha \rightarrow 0^+} \mathbb{P}(X \leq F^{-1}(\alpha) / Y \leq G^{-1}(\alpha)). \quad (2.1)$$

Et le coefficient de dépendance supérieure (upper tail dependence coefficient) λ_U est défini par :

$$\lambda_U(X, Y) = \lim_{\alpha \rightarrow 1^-} \mathbb{P}(X > F^{-1}(\alpha) / Y > G^{-1}(\alpha)). \quad (2.2)$$

On peut définir ces mesures en fonction d'une copule C :

Définition 2.1.3 Soit X, Y deux v.a continues de copule C , alors nous avons :

$$\lambda_L(X, Y) = \lim_{u \rightarrow 0^+} \frac{C(u, u)}{u}, \quad (2.3)$$

et

$$\lambda_U(X, Y) = \lim_{u \rightarrow 1^-} \frac{1 - 2u + C(u, u)}{1 - u}. \quad (2.4)$$

Preuve. Voir [2]. ■

Remarque 2.1.1 Quand $\lambda_L \in]0, 1]$ alors C a une dépendance de queue inférieure.

Quand $\lambda_L = 0$ alors C n'a pas de dépendance de queue inférieure.

Quand $\lambda_U \in]0, 1]$ alors C a une dépendance de queue supérieure.

Quand $\lambda_U = 0$ alors C n'a pas de dépendance de queue supérieure [4].

Exemple 2.1.1 Considérons la copule logistique bivariée de Gumbel telle que définie à l'exemple (1.2.1). [2] Comme on a :

$$\begin{aligned} \lambda_U &= 2 - \lim_{u \rightarrow 1^-} \frac{1 - C(u, u)}{1 - u} & \text{et} & & \lambda_L &= 2 - \lim_{u \rightarrow 0^+} \frac{C(u, u)}{1 - u} \\ &= 2 - \lim_{u \rightarrow 1^-} \frac{2}{2 - u} & & & &= 2 - \lim_{u \rightarrow 0^+} \left(\frac{u}{2 - u} \right) \left(\frac{1}{u} \right) \\ &= 0. & & & &= \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Cette copule possède une dépendance de queue à gauche, mais ne possède pas de dépendance de queue à droite.

2.2 Mesure de concordance

La copule C d'un couple aléatoire continue (X, Y) est une normalisation de la distribution conjointe H après avoir éliminé les effets des marges. C'est donc une structure de dépendance entre les deux v.a X et Y connaissant leurs distributions respectives. Cette

structure permet d'étudier cette dépendance à travers les mesures de concordance (corrélation linéaire, la concordance, tau de Kendall et rho de Spearman).

Définition 2.2.1 Deux observation $(x_1, y_1), (x_2, y_2)$ d'un couple de v.a continue (X, Y) sont dit :

- **Concordantes** : si

$$(x_1 - x_2)(y_1 - y_2) > 0 \Leftrightarrow (x_1 < x_2 \text{ et } y_1 < y_2) \text{ ou } (x_1 > x_2 \text{ et } y_1 > y_2). \quad (2.5)$$

- **Discordantes** : si

$$(x_1 - x_2)(y_1 - y_2) < 0 \Leftrightarrow (x_1 < x_2 \text{ et } y_1 > y_2) \text{ ou } (x_1 > x_2 \text{ et } y_1 < y_2). \quad (2.6)$$

2.2.1 Caractérisation d'une mesure de concordance

Définition 2.2.2 (*Mesure de concordance*)

Une mesure d'association K entre deux v.a continues X et Y de copule C est une mesure de concordance si elle vérifié les propriétés suivantes :

1. K est définie pour tout couple (X, Y) de v.a continues.
2. $-1 \leq K_{X,-X} \leq K_{X,Y} \leq K_{X,X} \leq 1$.
3. K est symétrique i.e $K_{X,Y} = K_{Y,X}$.
4. Si X et Y sont indépendantes alors : $K_{X,Y} = 0$.
5. $K_{-X,Y} = K_{X,-Y} = -K_{X,Y}$.
6. Si C_1 et C_2 sont deux copules telles que $C_1 < C_2$ alors on a : $K_{C_1} < K_{C_2}$.
7. Si $\{(X_n, X_n)\}$ est une suite couples aléatoires continue dont la copule est $\{C_n\}$, et si $\{C_n\}$ converge vers C Alors K_{C_n} converge vers K_C .

$$\lim_{n \rightarrow \infty} K_{C_n} = K_C.$$

Soit (X_1, Y_1) et (X_2, Y_2) deux couples aléatoires continues de lois conjointe H_1 et H_2 mais de marge communes F et G (i.e. F pour X_1 et X_2 et G pour Y_1 et Y_2).

Définition 2.2.3 On définit la fonction de concordance entre ces deux couple (X_1, X_2) et (Y_1, Y_2) par :

$$Q = \mathbb{P} [((X_1 - X_2) - (Y_1 - Y_2)) > 0] - \mathbb{P} [((X_1 - X_2) - (Y_1 - Y_2)) < 0]. \quad (2.7)$$

C'est la différence entre la probabilité de concordance et celle de discordance.

Chaque distribution conjointe étant caractérisée par une copule unique, le théorème de Sklar permet d'établir une relation entre toute fonction de concordance et les copules associées.

2.2.2 Propriété de la fonction de concordance :

Théorème 2.2.1 Soient (X_1, Y_1) et (X_2, Y_2) deux couples aléatoires indépendants de distribution conjointes H_1 , et H_2 avec des marges communes F et G respectivement. Soit C_1 et C_2 les copules associées aux distributions H_1 et H_2 respectivement. Alors :

$$Q = Q(C_1, C_2) = 4 \int_0^1 \int_0^1 C_2(u, v) dC_1(u, v) - 1. \quad (2.8)$$

Pour les copules usuelles M, W et Π (1.6), (1.7) et (1.8) respectivement on a :

$$Q(M, M) = 1, \quad Q(M, \Pi) = Q(W, \Pi) = \frac{1}{3}, \quad Q(M, W) = Q(\Pi, \Pi) = 0 \quad \text{et} \quad Q(W, W) = -1.$$

Pour toute copule C on a :

$$0 \leq Q(M, C) \leq 1, \quad -1 \leq Q(C, W) \leq 1 \quad \text{et} \quad \frac{-1}{3} \leq Q(C, M) \leq \frac{1}{3}.$$

En effet

1. Le support de la copule usuelle M est l'ensemble $D_M = \{(u, v) \in \mathbb{I}^2 / u = v\}$.

$$\begin{aligned} Q(M, M) &= 4 \iint_{\mathbb{I}^2} M(u, v) dM(u, v) - 1 \\ &= 4 \iint_{\mathbb{I}^2} M(u, u) dM(u, u) - 1 \text{ car } D_M \{(u, v) \in \mathbb{I}^2 / u = v\} \\ &= 4 \int_0^1 u du - 1 = 4 \left[\frac{1}{3} u^2 \right] = 1. \end{aligned}$$

$$Q(M, W) = 4 \iint_{\mathbb{I}^2} W(u, v) dM(u, v) - 1 = 4 \iint_{\mathbb{I}^2} (2u - 1) du - 1 = 0.$$

$$Q(M, \Pi) = 4 \iint_{\mathbb{I}^2} \Pi(u, v) dM(u, v) - 1 = 4 \iint_{\mathbb{I}^2} u^2 du - 1 = \frac{1}{3}.$$

• De même, le support de la copule usuelle W est l'ensemble $D_W = \{(u, v) \in \mathbb{I}^2 / u = 1 - v\}$.

$$Q(M, W) = 4 \iint_{\mathbb{I}^2} W(u, v) dM(u, v) - 1 = 4 \iint_{\mathbb{I}^2} (2u - 1) du - 1 = 0.$$

$$Q(W, \Pi) = 4 \iint_{\mathbb{I}^2} \Pi(u, v) dM(u, v) - 1 = 4 \iint_{\mathbb{I}^2} u^2 du - 1 = \frac{1}{3}.$$

• Finalement, puisque $d\Pi(u, v) = dudv$ on a :

$$Q(\Pi, \Pi) = 4 \iint_{\mathbb{I}^2} \Pi(u, v) d\Pi(u, v) - 1 = 4 \iint_{\mathbb{I}^2} uv dudv - 1 = 0.$$

2. Pour toute copule quelconque C on a :

$$W \leq C \leq M \Rightarrow Q(W, M) \leq Q(C, M) \leq Q(M, M) \Rightarrow 0 \leq Q(C, M) \leq 1.$$

De la même manière, on établit que :

$$-1 \leq Q(C, W) \leq 1 \text{ et } \frac{-1}{3} \leq Q(C, M) \leq \frac{1}{3}.$$

2.2.3 Tau de Kendall

Étant donné la mesure de dépendance la plus largement utilisée dans la littérature sur l'estimation des copules paramétriques, le tau de Kendall a l'avantage de ne pas reposer sur une hypothèse de linéarité entre les variables en étant plutôt une mesure d'association, contrairement au coefficient de corrélation de Pearson.

Définition 2.2.4 (*Tau de Kendall empirique*) Soit un échantillon de n observations d'un copule (x, y) . On définit le tau de Kendall (version d'échantillon) par :

$$\tau_n = \frac{[\text{Nombre de paires concordantes}] - [\text{Nombre de paires discordantes}]}{\text{Nombre total de paires}}. \quad (2.9)$$

Définition 2.2.5 Soient (X_1, X_2) et (Y_1, Y_2) deux observations d'un couple (X, Y) continues (iid) de fonction de répartition jointe H . Le tau de Kendall du couple aléatoire (X, Y) , noté $\tau_{X,Y}$ est défini par :

$$\tau_{X,Y} = \mathbb{P}[(X_1 - X_2) - (Y_1 - Y_2) > 0] - \mathbb{P}[(X_1 - X_2) - (Y_1 - Y_2) < 0]. \quad (2.10)$$

Si C est la copule associée au couple (X, Y) , le résultat suivant donne la conséquence immédiate du théorème (2.2.1).

Théorème 2.2.2 Soit X et Y deux v.a continue de copule C alors le tau de Kendall de X et Y est donnée par :

$$\tau_{X,Y} = \tau_C = Q(C, C) = 4 \iint_{\mathbb{I}^2} C(u, v) dC(u, v) - 1. \quad (2.11)$$

En fait, l'intégrale $\iint_{\mathbb{I}^2} C(u, v) dC(u, v)$ est la moyenne de la v.a $C(U, V)$ ou U et V sont uniformément distribués sur \mathbb{I} , donc :

$$\iint_{\mathbb{I}^2} C(u, v) dC(u, v) = \mathbf{E}[C(u, v)].$$

Ainsi, on peut écrire :

$$\tau_C = 4\mathbf{E}[C(u, v)] - 1 \quad (2.12)$$

Exemple 2.2.1 Pour toute copule de la famille de Fréchet :

$$C_{\alpha, \beta} = \alpha M + (1 - \alpha - \beta) \Pi + \beta W. \quad (2.13)$$

Par la suite on a :

$$dC_{\alpha, \beta} = \alpha dM + (1 - \alpha - \beta) d\Pi + \beta dW$$

donc

$$\begin{aligned} C_{\alpha, \beta} dC_{\alpha, \beta} &= \alpha^2 M dM + \alpha(1 - \alpha - \beta) M d\Pi + \alpha\beta M dW + \beta(1 - \alpha - \beta) \Pi dM \\ &\quad + (1 - \alpha - \beta)^2 \Pi d\Pi + \beta^2 W dW \end{aligned}$$

alors

$$\begin{aligned} \iint_{\mathbb{I}^2} C_{\alpha, \beta}(u, v) dC_{\alpha, \beta}(u, v) &= \alpha^2 Q(M, M) + \alpha(1 - \alpha - \beta) Q(M, \Pi) + \alpha\beta Q(M, W) \\ &\quad + \beta(1 - \alpha - \beta) Q(\Pi, M) + (1 - \alpha - \beta)^2 Q(\Pi, \Pi) + \alpha\beta Q(M, W) \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \iint_{\mathbb{I}^2} C_{\alpha, \beta}(u, v) dC_{\alpha, \beta}(u, v) &= \alpha^2 Q(M, M) + \beta^2 Q(W, W) + (1 - \alpha - \beta)^2 Q(\Pi, \Pi) \\ &\quad + 2[\alpha(1 - \alpha - \beta) Q(M, \Pi) + \alpha\beta Q(M, W) + \beta(1 - \alpha - \beta)] Q(\Pi, W) \end{aligned}$$

alors

$$\iint_{\mathbb{I}^2} C_{\alpha, \beta}(u, v) dC_{\alpha, \beta}(u, v) = \alpha^2 + \frac{2\alpha(1 - \alpha - \beta)}{3} - \frac{2\beta(1 - \alpha - \beta)}{3} - \beta^2$$

donc

$$\iint_{\mathbb{I}^2} C_{\alpha,\beta}(u, v) dC_{\alpha,\beta}(u, v) = \frac{(\alpha - \beta)(\alpha + \beta + 2)}{3} = \tau_{\alpha,\beta}.$$

2.2.4 Rho de Spearman

Tout comme le tau de Kendall, le rho de Spearman est une mesure de dépendance basée sur la notion de concordance. Soient (X_1, Y_1) , (X_2, Y_2) et (X_3, Y_3) trois couples aléatoires indépendants de même distribution H dont les distributions marginales sont F et G et dont la copule associée est C .

Définition 2.2.6 (Rho de Spearman empirique) Soit un échantillon de taille n de données bivariées $\{(x_k, y_k)\}_{k=1}^n$ la version empirique de rho de Spearman [13], noté ρ_n , est définie par :

$$\rho_n = 1 - 6 \frac{\sum_{k=1}^n (R_k - S_k)^2}{n(n^2 - 1)}, \quad (2.14)$$

tel que R_k est le rang de X_k et S_k est le rang de Y_k .

Définition 2.2.7 La version populaire du rho de Spearman est définie comme étant proportionnelle à la différence de la probabilité de concordance et celle de discordance des couples aléatoire (X_1, Y_1) , (X_2, Y_3) [11] :

$$\rho_{X,Y} = \rho_C = 3\mathbf{P}[(X_1 - X_2) - (Y_1 - Y_3)] > 0 - \mathbf{P}[(X_1 - X_2) - (Y_1 - Y_3) < 0]. \quad (2.15)$$

La distribution de (X_1, Y_1) étant H et celle de (X_2, Y_3) étant Π (car les variables X_2 et Y_3 sont indépendantes) alors d'après ce qui précède on a le théorème suivant :

Théorème 2.2.3 Soient X, Y deux v.a continues de copule C . Le rho de Spearman de X et Y est défini par :

$$\rho_{X,Y} = 12 \iint_{\mathbb{I}^2} C(u, v) dudv - 3. \quad (2.16)$$

En effet :

$$\begin{aligned}\rho_{X,Y} &= \rho_C = 3Q(C, \Pi) \\ &= 12 \iint_{\mathbb{I}^2} uv dC(u, v) - 3 \\ &= 12 \iint_{\mathbb{I}^2} C(u, v) dudv - 3.\end{aligned}$$

Car les variables U, V sont uniforme d'espérance $\mathbf{E}(U) = \mathbf{E}(V) = \frac{1}{2}$, et de variance $\text{Var}(U) = \text{Var}(V) = \frac{1}{12}$, alors C peut s'écrire :

$$\rho_C = \frac{\mathbf{E}(UV) - \mathbf{E}(U)\mathbf{E}(V)}{\sqrt{\text{Var}(U)\text{Var}(V)}}. \quad (2.17)$$

Preuve. Nous avons $\iint_{\mathbb{I}^2} uv dC(u, v)$ présente l'espérance de (U, V) alors :

$$\begin{aligned}\rho_C &= 12 \iint_{\mathbb{I}^2} uv dC(u, v) - 3 \\ &= 12\mathbf{E}(UV) - 3 \\ &= 12(\mathbf{E}(UV) - 3/12) \\ &= \frac{\mathbf{E}(UV) - 1/4}{1/12} \\ &= \frac{\mathbf{E}(UV) - \mathbf{E}(U)\mathbf{E}(V)}{\sqrt{\text{Var}(U)}\sqrt{\text{Var}(V)}}.\end{aligned}$$

Ce nous qui donne le formule précédente 2.17. ■

Exemple 2.2.2 Soit C une copule de Farlie-Gumbel-Morgenstern, de paramètre θ tel que $\theta \in [-1, 1]$ (1.24), alors :

$$C_\theta(u, v) = uv + \theta uv(1-u)(1-v),$$

donc :

$$\begin{aligned} \iint C_\theta(u, v) \, dudv &= \iint uv + \theta uv(1-u)(1-v) \, dudv \\ &= \frac{1}{4} + \frac{\theta}{36}. \end{aligned}$$

Et le rho de Spearman :

$$\rho_\theta = \frac{\theta}{3}. \quad (2.18)$$

Exemple 2.2.3 Soit C la copule de Marshall Olkin, de paramètres $0 < \alpha, \beta < 1$ définie par :

$$C_\alpha(u, v) = \begin{cases} u^{1-\alpha}v, & u^\alpha \geq v^\beta \\ uv^{1-\beta}, & u^\alpha \leq v^\beta \end{cases} \quad (2.19)$$

donc on établit que :

$$\iint C_{\alpha,\beta}(u, v) \, dudv = \frac{1}{2} \left(\frac{\alpha + \beta}{2\alpha - \alpha\beta + 2\beta} \right).$$

Le rho de Spearman on établit que :

$$\rho_{\alpha,\beta} = \frac{1}{4} \left(\frac{\alpha\beta}{2\alpha - \alpha\beta + 2\beta} \right). \quad (2.20)$$

La table (2.1) présente les deux types de mesure principales qui sont le tau de Kendall et le rho de Spearman de quelques copules usuelles :

Copule	Tau de Kendal	Rho de Spearman
Normale	$\tau = \frac{2}{\pi} \text{Arc sin}(\varphi)$	$\rho = \frac{6}{\pi} \text{Arc sin}\left(\frac{\varphi}{2}\right)$
Gumbel	$\tau = 1 - \frac{1}{\theta}$	/
Frank	$\tau = 1 - 4 \frac{1-D_1(\theta)}{\theta}$	$\rho = 1 - 12 \frac{D_1(\theta)-D_2(\theta)}{\theta}$
Clayton	$\tau = \frac{\theta}{\theta+2}$	/
Marshall olkin	$\tau = \frac{\alpha\beta}{\alpha-\alpha\beta+\beta}$	$\rho = \frac{1}{4} \left(\frac{\alpha\beta}{2\alpha-\alpha\beta+2\beta} \right)$
F-G-M	$\tau = \frac{2}{9}\theta$	$\rho = \frac{\theta}{3}$
MinMax	$\tau = \frac{1}{2n-1}$	$\rho = 3 - \frac{12n}{C_{2n}^n} \sum_{i=1}^n \frac{(-1)^{m+k}}{2^{n-i}} C_{2n}^{m+k} + 12 (-1)^n \frac{(n!)^3}{(3n)!}$

TAB. 2.1 – Présentation de Tau de Kendall et Rho de Spearman de quelques copules.

2.3 Estimation paramétrique

2.3.1 Méthode d'inversion du tau de Kendall et du rho de Spearman

Cette méthode consiste à estimer les paramètres recherchés en utilisant certaines mesures d'association telles que le tau de Kendall ou le rho de Spearman. Car il existe une relation entre ces mesures et le paramètre de dépendance de la copule [6].

Soit C_θ la copule du couple aléatoire (X, Y) de copule paramétrée par θ .

Estimation basé sur le tau de Kendall

Puisque le tau de Kendall s'écrit en fonction de la copule C_θ donc du paramètre θ (2.11), et alors définie par :

$$\tau_{X,Y} = f(\theta) = 4 \iint_{\mathbb{I}^2} C_\theta(u, v) dC_\theta(u, v) - 1,$$

où f est une fonction continue et dérivable, alors un estimateur $\hat{\theta}^{TK}$ de θ est défini par :

$$\hat{\theta}^{TK} = f^{-1}(\hat{\tau}), \quad (2.21)$$

telle que $\hat{\tau}$ ou τ_n est l'estimateur empirique de τ (2.9).

Estimation basé sur le rho de Spearman

De même que pour le tau de Kendall le rho de Spearman s'écrit en fonction de C_θ donc du paramètre θ (2.16), définie par :

$$\rho_{X,Y} = g(\theta) = 12 \iint_{\mathbb{I}^2} C_\theta(u, v) \, dudv - 3,$$

où g est une fonction continue et dérivable, alors un estimateur $\hat{\theta}^{RS}$ de θ est défini par :

$$\hat{\theta}^{RS} = g^{-1}(\hat{\rho}), \quad (2.22)$$

telle que $\hat{\rho}$ est l'estimateur empirique de ρ .

Chapitre 3

Copule de Gumbel

Parmi les copules Archimédiennes on peut citer la copule de Gumbel qui est la plus utilisée pour modéliser une dépendance de l'extrémité supérieure d'une distribution.

On remarque pour cette copule une asymétrie provoquée simplement par une dépendance très importante au niveau de l'extrémité supérieure de la distribution, et une dépendance presque nulle dans sa partie inférieure.

3.1 Caractérisation de la copule de Gumbel

Nous allons d'abord présenter les caractéristiques théoriques de la copule de Gumbel.

Définition

Comme cité dans le premier chapitre (1.20) la copule de Gumbel est définie par :

$$C_{\theta}(u, v) = \varphi_{\theta}^{-1} [\varphi_{\theta}(u) + \varphi_{\theta}(v)] = \exp \left\{ - \left[(-\ln u)^{\theta} + (-\ln v)^{\theta} \right]^{1/\theta} \right\}, \quad \forall \theta \geq 1. \quad (3.1)$$

Dont la fonction génératrice $\varphi_{\theta} = (-\ln t)^{\theta}$ vérifie pour $t \in [0, 1]$, les caractéristiques suivantes :

1. La fonction génératrice inverse est $\varphi_{\theta}^{-1}(t) = \exp \left(-t^{\frac{1}{\theta}} \right)$.

2. $\varphi_\theta(0) = +\infty$.
3. $\varphi_\theta(1) = 0$.
4. $\varphi'_\theta(t) = -\frac{\theta}{t}(-\ln t)^{\theta-1}$ et $\varphi'_\theta(t) < 0$ pour $\theta \geq 1$.
5. $\varphi''_\theta(t) = -\frac{\theta}{t^2}(-\ln t)^{\theta-2}[\theta - 1 - \ln t]$ et $\varphi''_\theta(t) \leq 0$ pour $\theta \geq 1$.

Ainsi, φ est une fonction continue strictement décroissante de \mathbb{I} dans $[0, +\infty]$, convexe.

Pour $\theta = 1$ la copule de Gumbel n'est autre que la copule d'indépendance :

$$\begin{aligned} C_1(u, v) &= \varphi_1^{-1}[\varphi_1(u) + \varphi_1(v)] = \exp\left\{-\left[(-\ln u)^1 + (-\ln v)^1\right]^{\frac{1}{1}}\right\} \\ &= \exp\left\{-\left[(-\ln u) + (-\ln v)\right]\right\} = \exp(\ln u - \ln v) \\ &= \exp(\ln uv) = uv. \end{aligned}$$

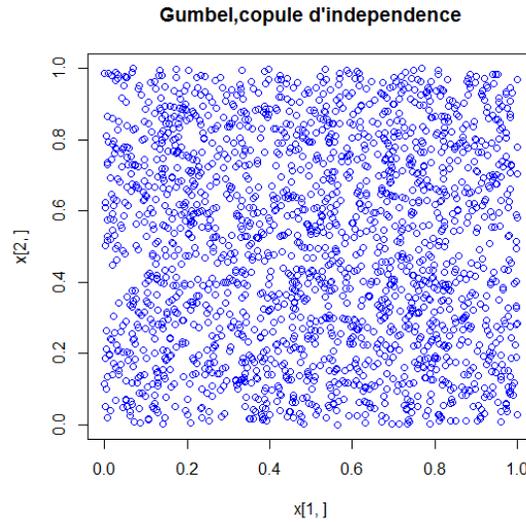


FIG. 3.1 – Nuage de points de la copule de Gumbel pour $\theta = 1$.

La copule de Gumbel est une copule de valeurs extrême. En effet, pour une constante t

réelle positive, on a :

$$\begin{aligned}
 C(u^t, v^t) &= \exp - [(-\ln u^t)^\theta + (-\ln v^t)^\theta]^{\frac{1}{\theta}} \\
 &= \exp - [t^\theta [(-\ln u)^\theta + (-\ln v)^\theta]]^{\frac{1}{\theta}} \\
 &= \exp - t [(-\ln u)^\theta + (-\ln v)^\theta]^{\frac{1}{\theta}} \\
 &= \left(\exp - [(-\ln u)^\theta + (-\ln v)^\theta]^{\frac{1}{\theta}} \right)^t \\
 &= C^t(u, v).
 \end{aligned}$$

Densité

Nous savons que la densité d'une copule (1.11) deux fois différentiable, est telle que la densité de copule de Gumbel est :

$$c_\theta(u, v) = \frac{\partial^2 C_\theta(u, v)}{\partial u \partial v} = \frac{\partial^2 \left(\exp \left\{ - \left[(-\ln u)^\theta + (-\ln v)^\theta \right]^{1/\theta} \right\} \right)}{\partial u \partial v}. \quad (3.2)$$

Alors on commence la dérivation par rapport à la première variable u :

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial C_\theta(u, v)}{\partial u} &= \frac{\partial \left(\exp \left\{ - \left[(-\ln u)^\theta + (-\ln v)^\theta \right]^{1/\theta} \right\} \right)}{\partial u} \\
 &= -\frac{1}{u \ln u} (-\ln u)^\theta \frac{\exp \left(- \left((-\ln u)^\theta + (-\ln v)^\theta \right)^{\frac{1}{\theta}} \right)}{\left((-\ln u)^\theta + (-\ln v)^\theta \right)^{\frac{1}{\theta}(\theta-1)}}.
 \end{aligned}$$

Ensuite on dérive par rapport à la deuxième variable v :

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 C_\theta(u, v)}{\partial u \partial v} &= \frac{\partial \left(-\frac{1}{u \ln u} (-\ln u)^\theta \frac{\exp\left(-\left((-\ln u)^\theta + (-\ln v)^\theta\right)^{\frac{1}{\theta}}\right)}{\left((-\ln u)^\theta + (-\ln v)^\theta\right)^{\frac{1}{\theta}(\theta-1)}} \right)}{\partial v} \\ &= \frac{1}{uv \ln u} \frac{(-\ln u)^\theta}{\ln v} (-\ln v)^\theta \frac{\exp\left(-\left((-\ln u)^\theta + (-\ln v)^\theta\right)^{\frac{1}{\theta}}\right)}{\left((-\ln u)^\theta + (-\ln v)^\theta\right)^{\frac{1}{\theta}(2\theta-1)}} \left(\theta + \left((-\ln u)^\theta + (-\ln v)^\theta\right)^{\frac{1}{\theta}}\right) \end{aligned}$$

Exemple 3.1.1 Densité de la copule de Gumbel pour $n = 500$.

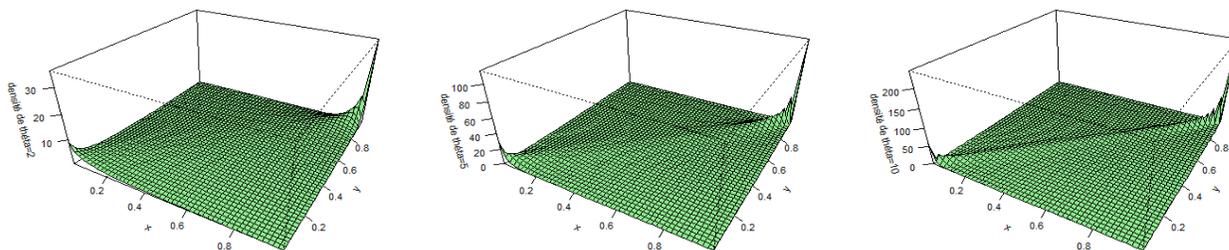


FIG. 3.2 – Densités de la copule de Gumbel pour $\theta = 2, \theta = 5$ et $\theta = 10$ de gauche à droite respectivement.

3.2 Mesure d'association de la copule de Gumbel et estimation

3.2.1 Coefficient de corrélation de Kendall

Le tau de Kendall pour une copule $C(u, v)$ est défini par (2.11) :

$$\begin{aligned}\tau &= 4 \iint_{\mathbb{I}^2} 2C(u, v) dC(u, v) - 1 \\ &= 4\mathbf{E}(C(U, V)) - 1 = 4\mathbf{E}(X) - 1.\end{aligned}$$

Pour avoir la forme du tau de Kendall pour une copule archimédienne [12] nous citons le théorème suivant :

Théorème 3.2.1 *Soit C une copule Archimédienne générée par φ , Soit $K_C(t)$ la fonction de répartition de la copule C sur le domaine $D = \{(u, v) \in \mathbb{I}^2 / C(u, v) \leq t\}$, alors :*

$$K_C(t) = t - \frac{\varphi_\theta(t)}{\varphi'_\theta(t)}, \quad \forall t \in \mathbb{I}. \quad (3.3)$$

où $\varphi'_\theta(t)$ est la dérivé de $\varphi_\theta(t)$.

Soit dans le cas de la copule de Gumbel :

$$K_C(t) = t - \frac{t \ln t}{\theta}.$$

Ainsi, la densité de X tel que $X = K_C(t)$ est :

$$K'_C(t) = 1 - \frac{1}{\theta} - \frac{\ln t}{\theta}.$$

Par conséquent, on a :

$$\begin{aligned}
 \mathbf{E}(X) &= \int_0^1 tK'_C(t)dt = \int_0^1 t \left(1 - \frac{1}{\theta} - \frac{\ln t}{\theta}\right) \\
 &= \left[\frac{t^2}{2} \left(1 - \frac{1}{\theta}\right)\right]_0^1 - \int_0^1 \frac{t \ln t}{\theta} dt \\
 &= \left[\frac{t^2}{2} \left(1 - \frac{1}{\theta}\right)\right]_0^1 - \frac{1}{\theta} \left(\left[\frac{t^2}{2} \ln t\right]_0^1 - \left[\frac{t^2}{4}\right]_0^1\right) \\
 &= \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{2\theta}\right).
 \end{aligned}$$

D'où le tau de Kendall pour une copule $C_\theta(u, v)$:

$$\tau = 1 - \frac{1}{\theta}. \quad (3.4)$$

On en déduit que par méthode d'inversion (2.21) :

$$\begin{aligned}
 \theta &= \frac{1}{1 - \tau}. \\
 \hat{\theta}^{TK} &= f^{-1}(\hat{\tau}) = \frac{1}{1 - \hat{\tau}}.
 \end{aligned} \quad (3.5)$$

3.2.2 Valeurs empiriques des coefficients de dépendance

Tau de Kendall et rho de Spearman

Les valeurs empiriques du tau de Kendall et du rho de Spearman sont représentés dans les deux tableaux suivant, ainsi que les nuages de points associés. On fait varier les tailles de l'échantillon $n = 500$, $n = 1000$ et $n = 2000$, pour deux valeurs différentes du paramètre $\theta = 2$ et $\theta = 8$.

Pour $\theta = 2$:

n	$\hat{\tau}$	$\hat{\rho}$
500	0.5357275	0.7193839
1000	0.5071031	0.6972942
2000	0.4865043	0.6672536

TAB. 3.1 – Coefficient de dépendance de la copule de Gumbel.

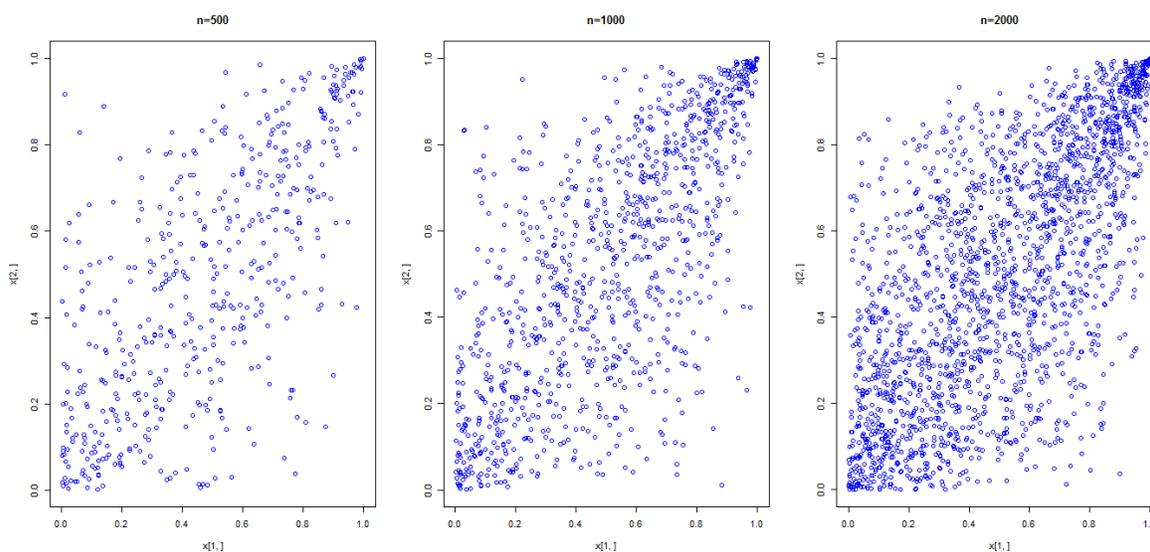


FIG. 3.3 – Nuage de points de la copule de Gumbel pour $\theta = 2$.

Pour $\theta = 8$:

n	$\hat{\tau}$	$\hat{\rho}$
500	0.8818758	0.9795685
1000	0.8632392	0.9730055
2000	0.878044	0.9789199

TAB. 3.2 – Coefficient de dépendance de la copule de Gumbel.

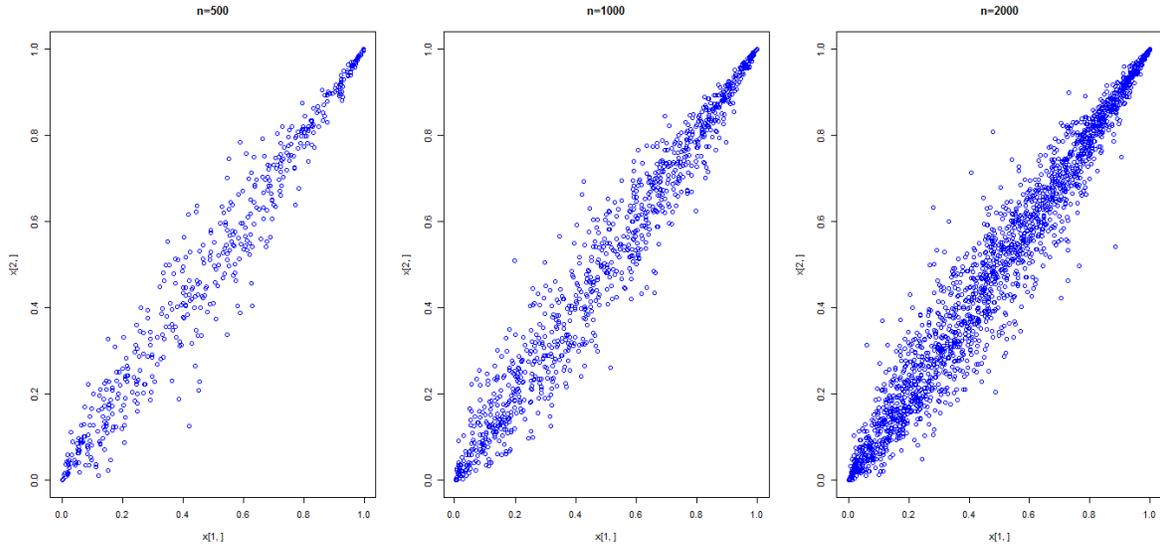


FIG. 3.4 – Nuage de points de la copule de Gumbel pour $\theta = 8$.

D'après les tableaux (3.1), (3.2) et aussi les figures (3.3) et (3.4) on remarque que :

- La dépendance est importante entre les deux variables surtout aux points extrêmes $(0, 0)$ et $(1, 1)$.
- Il y a une forte dépendance quand le paramètre de copule θ augmente.

Dépendance des extrêmes

Par un résultat de Nelsen (2006), on a que [1] :

$$\lambda_L = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{\varphi^{-1}(2t)}{\varphi^{-1}(t)}, \quad (3.6)$$

et

$$\lambda_U = 2 - \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{1 - \varphi^{-1}(2t)}{1 - \varphi^{-1}(t)}. \quad (3.7)$$

Pour notre copule de Gumbel, on a :

$$\lambda_L = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{\exp -(2t)^{\frac{1}{\theta}}}{\exp -t^{\frac{1}{\theta}}} = \lim_{t \rightarrow +\infty} \exp \left(-(2^{\frac{1}{\theta}} - 1)t^{\frac{1}{\theta}} \right) = 0,$$

et

$$\lambda_U = 2 - \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{1 - \exp -(2t)^{\frac{1}{\theta}}}{1 - \exp -(t)^{\frac{1}{\theta}}} = 2 - \left(\frac{1 - \left(1 - (2t)^{\frac{1}{\theta}} + O\left(t^{\frac{1}{\theta}}\right)\right)}{1 - \left(1 - (t)^{\frac{1}{\theta}} + O\left(t^{\frac{1}{\theta}}\right)\right)} \right) = 2 - \frac{(2t)^{\frac{1}{\theta}} + O\left(t^{\frac{1}{\theta}}\right)}{(t)^{\frac{1}{\theta}} + O\left(t^{\frac{1}{\theta}}\right)} \xrightarrow{t \rightarrow 0^+} 2 - 2^{\frac{1}{\theta}}.$$

On calcule les mesures d'association telle que le tau de Kendall τ_c et le rho de Spearman ρ_c et la dépendance de queue inférieur (lower) λ_L et supérieur (upper) λ_U de copule de Gumbel.

θ	τ_c	ρ_c	λ_L	λ_U
2	0.5	0.6828545	0	0.5857864
5	0.8	0.943039	0	0.8513016
8	0.875	0.9773597	0	0.9094923

TAB. 3.3 – Mesures d'association et la dépendance de queue de copule de Gumbel.

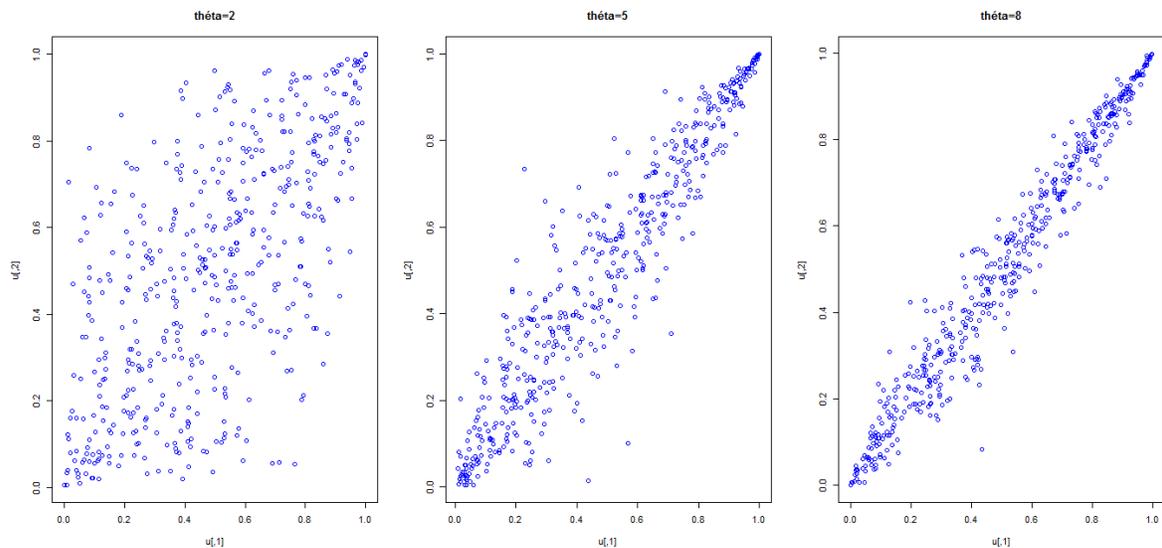


FIG. 3.5 – La dépendance de queue pour paramètre différent.

D'après le tableau (3.3) et le figure (3.5) on observe :

Le copule de Gumbel est une asymétrique où elle possède une dépendance de queue supérieur λ_U augmente lorsque θ et ne possède pas une dépendance inférieure.

3.2.3 Estimation de paramètre de dépendance θ

Estimer le paramètre θ par la méthode d'inversion pour $n = 500$ et $n = 1000$ et calculer le biais $= \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (\hat{\theta} - \theta)$ et $\text{RMSE} = \left(\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (\hat{\theta} - \theta)^2 \right)^{\frac{1}{2}}$.

n	θ	$\hat{\theta}^{TK}$	Biais	RMSE	$\hat{\theta}^{RS}$	Biais	RMSE
500	2	1.960581	-0.03941935	0.0770706	1.950516	-0.0494836	0.08406512
	5	4.929092	-0.07090837	0.2811585	4.910761	-0.08923858	0.3225149
	8	7.773822	-0.2261782	0.4763117	7.741059	-0.2589415	0.4936444
1000	2	1.993741	-0.009965781	0.07299124	1.990256	-0.009743844	0.06992813
	5	4.862159	-0.1378411	0.2477758	4.84291	-0.1570901	0.2591656
	8	8.102206	0.1022062	0.4311046	8.126304	0.1263038	0.4092352

TAB. 3.4 – Représentation de Biais et RMSE de l'estimation de paramètre de la copule de Gumbel.

Pour une dépendance assez importante aux extrémités de la distribution et pour des échantillons de taille différentes $n = 500$ et $n = 1000$ nous obtenons des estimateurs $\hat{\theta}$ du paramètre θ très proche de la vraie valeur du paramètre comme indiqué par la valeur du biais très proche de 0 et ceci pour les deux méthodes d'inversion du tau de Kendal et du rho de Spearman comme indiqué dans le tableau.

Conclusion

Les copules jouent un rôle très important dans la statistique mathématique, notamment la caractérisation de la mesure de dépendance entre les variables aléatoires, en modélisant cette dépendance avec plus de précision que le coefficient de corrélation, le tau de Kendall ou le rho de Spearman qui ne font que mesurer cette dépendance.

Grâce à ces avantages, la théorie des copules a été utilisée dans nombreux domaines mathématiques telle que la finance, l'actuariat, l'hydrologie...ect

L'étude de la dépendance n'a pas cessé d'intéresser les statisticiens. Une telle étude s'était restreinte pour longtemps aux distributions normales pour leurs propriétés remarquables surtout être internes par l'addition, l'équivalence entre l'indépendance et la non-corrélation et la gaussienneté de leurs marginales. Cependant elles présentent des inconvénients, par exemple, elles n'attribuent d'importance au queux des marginales qui peuvent présenter un très grand risque en cas de modélisation de risques.

Une alternative de construction de fonctions de répartition multivariées est basée sur les copules qui permettent un large choix de marginales et de types de dépendance.

De plus, on a plusieurs méthodes d'estimation des paramètres basées sur les copules comme la méthode du maximum de vraisemblance "MV", la méthode des moments "MM" et la méthode d'inversion du tau de Kendall et du rho de Spearman qui étudie la simulation. Dans le cas bivarié la méthode d'inversion peut être une bonne méthode d'estimation en termes de biais et RMSE.

Bibliographie

- [1] Anne-lise, C., Christophe, D., Véronique, L. M., & Triet, N. (2008). Copule de Gumbel.
- [2] Chabot, M. Concepts de dépendance et copules. CaMUS, 4, 48-71.
- [3] Cherubini, U., Luciano, E., and Vecchiato, W. (2004). Copula methods in Finance. John Wiley and Sons.
- [4] CHINE, A. (2017). Sur la statistique de copules (Doctoral dissertation, UNIVERSITÉ MOHAMED KHIDER, BISKRA).
- [5] Cook, R. D., & Johnson, M. E. (1981). A family of distributions for modelling non-elliptically symmetric multivariate data. Journal of the Royal Statistical Society. Series B (Methodological), 210-218.
- [6] Genest, C., & MacKay, R. J. (1986). Copules archimédiennes et familles de lois bidimensionnelles dont les marges sont données. Canadian Journal of Statistics, 14(2), 145-159.
- [7] Genest, C. (1987). Frank's family of bivariate distributions. Biometrika, 74(3), 549-555.
- [8] Gumbel, E. J. (1960). Distributions des valeurs extremes en plusieurs dimensions. Publ. Inst. Statist. Univ. Paris, 9, 171-173.
- [9] Gumbel, E. J. (1961). Bivariate logistic distributions. Journal of the American Statistical Association, 56(294), 335-349.

- [10] Kimeldorf, G., & Sampson, A. (1975). One-parameter families of bivariate distributions with fixed marginals. *Communications in Statistics-Theory and Methods*, 4(3), 293-301.
- [11] Lehmann, E. L. (1966). Some concepts of dependence. *The Annals of Mathematical Statistics*, 1137-1153.
- [12] Nelsen, R. B. (2006). *An Introduction to Copulas*. Springer Science and Business Media.
- [13] ROUBI, A. (2012). ESTIMATION DES PARAMÈTRES DE LOIS DE PARETO MULTIVARIÉES (Doctoral dissertation, Université Mohamed Khider-Biskra).
- [14] Sklar, A., Schweizer, B. (1961). Associative functions and statistical triangle inequalities. *Publicationes Mathematicae, Debrecen*, 8, 169-186.

Annexe A : Logiciel *R*

Le logiciel **R** est un logiciel de statistique dédié à l'analyse des données et à leur visualisation, il contient une collection d'outils pour la statistique, un environnement graphique et un langage de programmation orienté objet. Il existe plusieurs versions de **R** telle que

R.3.0.3

Dans cet partie on va présenter les instructions et les commandes du logiciel **R** , il contient plusieurs package surtout les packages "copula" et "gumbel" qui nous intéresse le plus.

Fonctions utilisées : les fonctions utilisées dans notre application sont :

gumbel.cop <- **gumbelCopula**(θ) : Pour définie une copule de gumbel (dimension 2)

x <- **rCopula**(**n**, **gumbel.cop**) : Générer un échantillon de taille **n**.

cor(**x**, **method** = "kendall") : Calculer le tau de Kendall empirique.

cor(**x**, **method** = "spearman") : Calculer le rho de Spearman empirique.

tau(**gumbel.cop**) : Calculer le tau de Kendall théorique.

rho(**gumbel.cop**) : Calculer le rho de Spearman théorique.

tailIndex(**gumbel.cop**) : calculer la dépendance de queue "lower,upper".

mean :calculer le moyenne.

iTau(**gumbel.cop**, **cor**(**x**, **method**="kendall")**[1,2]**) :Estimation de la copule de gumbel par la méthode d'inversion basée le tau de Kendall.

iRho(**gumbel.cop**, **cor**(**x**, **method**="spearman")**[1,2]**) : Estimation de la copule de gumbel par la méthode d'inversion basée le tau de Kendall le rho de Spearman.

plot(**u**) : pour dessiner le graphe.

Annexe B : Abréviations et Notations

Les différentes abréviations et notations utilisées tout au long de ce mémoire sont expliquées ci-dessous.

$v.a$	Variable aléatoire.
$\stackrel{d}{=}$	Convergence en loi, convergence en distribution.
i.i.d	Indépendantes identiquement distribuées.
\mathbb{I}, \mathbb{I}^2	$[0, 1], [0, 1]^2$ respectivement.
$\bar{\mathbb{R}}$	$[-\infty, +\infty]$.
H, F, G	Fonction de répartition jointe et marginales.
C	Copule.
$\mathbf{E}(X)$	Espérance de X .
$\text{Var}(X)$	Variance de X .
$\text{Cov}(X, Y)$	Covariance de X et Y .
W, M, Π	Copules min, max et prouit.
$F - G - M$	Farlie-Gumbel-Morgenstern.
c	Densité de la copule.
$r_{X,Y}$	Coefficient de corrélation linéaire.

h	Densité de la distribution conjointe.
$\tau, \tau_C, \tau_{X,Y}$	Tau de Kendall.
ρ, ρ_C, ρ_{XY}	Rho de Spearman.
$\hat{\tau}, \tau_n, \hat{\rho}, \rho_n$	Tau de Kendall et rho de Spearman empiriques.
ϕ	Fonction de la loi normale standard.
$\hat{\theta}$	Estimateur de paramètre θ .
$\hat{\theta}^{TK}$	Estimateur de θ par l'inversion de tau de Kendall.
$\hat{\theta}^{RS}$	Estimateur de θ par l'inversion de rho de Spearman.
U, V	Variables aléatoires uniformes.