République Algérienne Démocratique et Populaire

Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

UNIVERSITÉ MOHAMED KHIDER, BISKRA

FACULTÉ des SCIENCES EXACTES et des SCIENCES de la NATURE et de la VIE

DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES

Mémoire présenté en vue de l'obtention du Diplôme **:**

MASTER en Mathématiques

Option : **Probabilités**

Par

ZAGHEZ Hanene

Titre :

Martingales et calcul stochastique

Membres du Comité d'Examen :

Dr.	**BOUGHRARA Saliha**	UMKB	Président
Dr.	**LABED Saloua**	UMKB	Encadreur
Dr.	**ZOUZOU Akila**	UMKB	Examinateur

Juin 2018

Dédicace

Je dédie ce travail

À mes chers parents que Dieu leur donne une vie longue et heureuse.

À mes chers frères.

À toute mes chers amis.

REMERCIEMENTS

Je remercie d'abord et avant tout "Allah" qui ma donné le courage pour réaliser ce travail.

Je tiens à exprimer ma sincère reconnaissance à ma famille qui ma aidé à avanocer jusqu'à aujourd'huit.

Je tiens à remercie tout particulièrement mon encadreur Dr. **LABED Saloua**, *pour ses conseils sa grand disponibilité et sa générosité avec laquelle il m'a fait partager ses travaux, ses idées et ses intuition.*

J'exprime mes plus sincère remerciements à Dr. **Boughrara Saliha** *et Dr.* **Zouzou Akila**, *qui m'ont fait l'honneur de faire partie du jury.*

Mercie à mes amis avec qui j'ai passé des moments mémorable et sur qui, j'ai toujours compté ou qu'ils soient.

Table des matières

Introduction

Le calcul stochastique est une branche à la croisée des probabilités et de l'analyse qui s'occupe des phénomènes aléatoires dépendant du temps.
Le domaine d'application du calcul stochastique comprend la mécanique quantique, le traitement du signal, la chimie, les mathématiques financières, la météorologie et même la musique et autres plusieurs domaines.

Les martingales forment une classe de processus aléatoires aux propriétés très intéressantes cette classe de processus permettent d'étudier des mécanismes de renforcement pour mieux comprendre des comportements collectifs, des algorithmes stochastiques ou des phénomènes issus de l'écologie comme la dérive génétique.

Le but de ce mémoire est d'étudier le calcul stochastique par rapport les martingales qu'elles sont communément associées aux jeux de hasard et les stratégies optimales peuvent être définies à l'aide de martingales et de temps d'arrêt.

Ce travail est organisé comme suite :
Dans le premier chapitre on se donne les notions de base avec des définitions et des propriétés du processus stochastique, martingale, martingale locale, semi- martingale et mouvement brownien.
Dans le deuxième chapitre on va parler sur l'intégrale stochastique par rapport au mouvement brownien avec le calcul d'Itô et on s'intéresse l'étude d'intégrale stochastique par rapport à une martingale bornée dans L^2, par rapport à une martingale locale et par rapport à une semi-martingale.

Chapitre 1

Processus et Martingales

Dans ce chapitre on va présenter trois parties : premièrement on va donner des notions générales sur les processus stochastique, deuxièmement on va faire une étude sur les martingales avec des propriétés (convergence des martingales , martingales et temps d'arrêt,...), en plus de la définition d'une martingale locale et semi-martingale. En ce qui concerne le troisième partie on va étudier le mouvement brownien avec des propriétés et donner la relation entre le mouvement brownien et les martingales.

1.1 Rappel sur les processus stochastique

Soit $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ un espace de probabilité.

Définition 1.1.1 *Un processus stochastique est une famille de variable aléatoire* $X = (X_t)_{t \in T}$ *a valeur réelle.*

- L'indice t est souvent interprète le temps.
- Le processus est en temps continue si T est continue (par exemple $T = [0, \infty)$) et en temps discrèt si T est discrèt (par exemple $T = \{0, 1, ...\}$).

Définition 1.1.2 **1.** *Les applications* $t \in T \to X_t(\omega)$ *pour* ω *fixé dans* Ω *sont appelées trajectoires du processus* X.

2. *Les applications* $\omega \in \Omega \rightarrow X_t(\omega)$ *pour* t *fixé dans* T *sont des variables aléatoires sur l'espace de probabilité* $(\Omega, \mathcal{F}, P)$.

Remarque 1.1.1 *On dit que le processus* $X = (X_t)_{t \in T}$ *est*

- *Continue si presque toutes les trajectoires sont continues.*
- *Continue à droite et limite à gauche (càdlàg) si les trajectoires sont continues à droite et limite à gauche.*

Définition 1.1.3 - *Deux processus* X *et* Y *ont même lois s'ils ont même loi fini-dimensionnelles pour tout* $n \in \mathbb{N}$ *et* $t_1, \ldots, t_n \in T$

$$X_{t_1}, \ \ldots, \ X_{t_n} \overset{\mathcal{L}}{=} Y_{t_1}, \ \ldots, \ Y_{t_n}.$$

- *On dira que* Y *est une version (ou une modification) du processus* X *si pour tout* $t \in T$

$$P(X_t = Y_t) = 1$$

- *Deux processus* X *et* Y *sont dit indistinguables si presque toutes ces trajectoires sont les même*

$$P(X_t = Y_t; \ \forall t \in T) = 1.$$

Remarque 1.1.2 *indistinguable* $\Longrightarrow$ *modification* $\Longrightarrow$ *même lois fini-dimensionnelles.*

Définition 1.1.4 *On dit qu'un processus* X *est uniformément intégrable si*

$$\lim_{a \to \infty} \sup_{t \geq 0} E\left[|X_t| \, 1_{|X_t| > a}\right] = 0.$$

1.1.1 Filtration et processus

Définition 1.1.5 – *Soit $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ un espace de probabilité, une filtration sur cet espace est une famille croissante $(\mathcal{F}_t)_{0\leq t\leq\infty}$ de sous-tribu de $\mathcal{F}$. On a alors $\mathcal{F}_t \subset \mathcal{F}_s$ pour $t < s$.*

– *Soit $X = (X_t)_{t\in T}$ un processus la filtration naturelle de X est définie par :*

$$\mathcal{F}_t^X = \sigma\left(X_s;\ 0 \leq s \leq t\right),\ t \geq 0.$$

Définition 1.1.6 *Soit $(\mathcal{F}_t)_{0\leq t\leq\infty}$une filtration sur $(\Omega,\mathcal{F},P)$. On dit que la filtration $(\mathcal{F}_t)_{0\leq t\leq\infty}$satisfait aux conditions habituelles si :*

1. *$\mathcal{F}_0$ contient tous les ensembles P-négligeable (filtration complète).*
2. *$(\mathcal{F}_t)_{0\leq t\leq\infty}$est continue à droite.*

Définition 1.1.7 *Un processus $(X_t)_{t\in T}$ est dite mesurable si l'application*

$$\left(\mathbb{R}_+ \times \Omega, \mathcal{B}\left(\mathbb{R}_+\right) \otimes \mathcal{F}_t\right) \longrightarrow \left(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}\left(\mathbb{R}^d\right)\right)$$
$$(t,\omega) \longrightarrow X_t(\omega)$$

est mesurable.

Définition 1.1.8 – *Un processus $(X_t)_{t\in T}$ est dite adapté à la filtration $(\mathcal{F}_t)_{t\in T}$ si pour tout $t \in T$, X_t est $\mathcal{F}_t$-mesurable.*

– *Un processus $(X_t)_{t\in T}$ est dite progressif (ou progressivement mesurable) si l'application*

$$\left([0,t] \times \Omega, \mathcal{B}\left([0,t]\right) \otimes \mathcal{F}_t\right) \longrightarrow \left(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}\left(\mathbb{R}^d\right)\right)$$
$$(\omega, s) \longrightarrow X_t(\omega)$$

est mesurable.

Proposition 1.1.1 *Soit X un processus adapté et à trajectoires continue alors, X est progressif.*

Définition 1.1.9 *Un processus X est dit à accroissement indépendants si*

1. $X_0 = 0$ *p.s.*

2. $\forall n \geq 1$, $\forall t_1, ..., t_n \in \mathbb{R}_+$, *tel que :* $0 < t_1 < t_2 < ... < t_n$, *les variables aléatoires*

$$\left(X_{t_1},\ X_{t_2} - X_{t_1},\ ...,\ X_{t_n} - X_{t_{(n-1)}}\right)$$

sont indépendants.

Définition 1.1.10 *Un processus* $(X_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$ *est un processus à accroissements indépendants stationnaires si :* $\forall s, t \in \mathbb{R}_+$, *tel que* $0 \leq s \leq t$ *la variable aléatoire* $X_t - X_s$ *a la même loi que* X_{t-s}.
Autrement dit $\forall h \geq 0$

$$X_{t+h} - X_{s+h} \overset{\mathcal{L}}{=} X_{t-s}.$$

1.1.2 Processus à variation finie

Définition 1.1.11 *Soit* $T > 0$. *Une fonction continue* $f : [0, T] \to \mathbb{R}$ *telle que* $f(0) = 0$ *est dite à variation finie s'il existe une mesure signée (i.e. différence de deux mesures positives finies)* μ *sur* $[0, T]$ *telle que* $f(t) = \mu([0, t])$ *pour tout* $t \in [0, T]$.

Lemme 1.1.1 *Si* $g : [0, T] \to \mathbb{R}$ *est une fonction continue et* $f : [0, T] \to \mathbb{R}$ *Une fonction à variation finie et si* $0 = t_0^n < t_1^n < ... < t_{p_n}^n = T$ *une suite de subdivisions de* $[0, T]$ *dont le pas tend vers* 0, *on a*

$$\int_0^T g(s)\, df(s) = \lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{p_n} g\left(t_{i-1}^n\right)\left(f\left(t_i^n\right) - f\left(t_{i-1}^n\right)\right).$$

Définition 1.1.12 *Un processus à variation finie* $A = (A_t)_{t \geq 0}$ *est un processus adapté dont toutes les trajectoires sont à variation finie au sens de la définition précédente. Le processus* A *est appelé processus croissant si de plus les trajectoires de* A *sont croissantes.*

Proposition 1.1.2 *Soit A un processus à variation finie et soit h un processus progressif tel que*

$$\forall t \geq 0,\ \forall \omega \in \Omega \int_0^t |h_s(\omega)| \ \ |dA_s(\omega)| < \infty.$$

Alors le processus $h{\cdot}A$ défini par

$$(h \cdot A)_t = \int_0^t H_s(\omega)\, dA_s(\omega)$$

est aussi un processus à variation finie.

1.1.3 Temps d'arrêt

Définition 1.1.13 *Une variable aléatoire $\mathcal{T}$ à valeurs dans $[0, \infty)$ est un temps d'arrêt si pour tout $t \geq 0$, on a : $\{\mathcal{T} \leq t\} \in \mathcal{F}_t$.*

On associé à un temps d'arrêt les tribus suivants

$$\mathcal{F}_{\mathcal{T}} = \{A \in \mathcal{F}_\infty : \forall t \geq 0, A \cap \{\mathcal{T} \leq t\} \in \mathcal{F}_t\}.$$

Lemme 1.1.2 *Soit $\mathcal{S}$ et $\mathcal{T}$ deux temps d'arrêt, alors*

- *Si $\mathcal{S} \leq \mathcal{T}$ dans Ω, $\mathcal{F}_{\mathcal{S}} \subset \mathcal{F}_{\mathcal{T}}$.*

- *Si $\mathcal{S}$ et $\mathcal{T}$ deux temps d'arrêt alors*

$$\mathcal{F}_{\mathcal{T} \wedge \mathcal{S}} = \mathcal{F}_{\mathcal{T}} \cap \mathcal{F}_{\mathcal{S}}.$$

1.1.4 Espérance conditionnelle

Définition 1.1.14 *Soient X_t une variable aléatoire définie sur $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ et $\mathcal{G}$ est une sous- tribu de $\mathcal{F}$. Si X_t est positive, l'espérance conditionnelle de X_t sachant $\mathcal{G}$ est la variable aléatoire $\mathcal{G}$-mesurable, notée $E[X_t \mid \mathcal{G}]$, à valeurs dans $\bar{\mathbb{R}}_+$ et telle que*

$$\int_C X_t dP = \int_C E[X_t \mid \mathcal{G}], \ C \in \mathcal{G}$$

Proposition 1.1.3 *Soit X_t, Y_t deux variables aléatoires réelles positives ou intégrables et $\mathcal{G}$ une sous- tribu de $\mathcal{F}$.*

1. *Si $X_t \geq Y_t$ p.s, alors*

$$E[X_t \mid \mathcal{F}] \geq E[Y_t \mid \mathcal{F}] \quad p.s.$$

2. *Pour tout $(a, b) \in \mathbb{R}^2$*

$$E[aX_t + bY_t \mid \mathcal{F}] = aE[X_t \mid \mathcal{F}] + bE[Y_t \mid \mathcal{F}] \quad p.s.$$

3. *$\mathcal{G}$ est une sous- tribu de $\mathcal{F}$. On a*

$$E[E[X_t \mid \mathcal{F}] \mid \mathcal{G}] = E[X_t \mid \mathcal{G}] \quad p.s.$$

4. $E[E[X_t \mid \mathcal{F}]] = E[X_t]$ *p.s.*

5. *X_t est $\mathcal{F}_t$-mesurable*

$$E[X_tY_t \mid \mathcal{F}] = X_t E[Y_t \mid \mathcal{F}] \, p.s, E[X_t \mid \mathcal{F}] = X_t \quad p.s.$$

1.2 Martingales

1.2.1 Introduction

En théorie des probabilités, la première apparition du mot martingale (et non du concept) se trouve dans la thèse de Jean Ville (en 1939), au chapitre IV, paragraphe 2 dans l'expression : "système de jeu ou martingale". Il précise que ce terme est emprunté du vocabulaire des joueurs. Notons que la dénomination anglaise (martingale) a été reprise de la française par Joseph Leo Doob, alors rapporteur de la thèse de Ville.
Le nom martingale est synonyme de jeu équitable, c'est-à-dire d'un jeu où le gain que l'on peut espérer faire en tout temps ultérieur est égal à la somme gagnée au moment présent. Les martingales sont des processus intégrables et adaptés tel que la meilleure prédiction pour une valeur future sachant les valeurs passés et présente est la valeur actuelle. Elles, ainsi que leurs variantes les sous-martingales et les sur-martingales, jouissent de nombreuses propriétés qui les rendent très utiles dans l'étude de processus stochastiques plus généraux.

1.2.2 Définitions et propriétés des martingales

Définition 1.2.1 *Soit $T = \mathbb{R}^+$, un processus $M = (M_t)_{t \in T}$ de $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ dans $\mathbb{R}$ est une martingale continue relative à une filtration $(\mathcal{F}_t)_{t \in T}$ sur $(\Omega, \mathcal{F})$ si*

1. *M est adapté à $(\mathcal{F}_t)_{t \in T}$, c'est à dire $\forall t \in T$, M_t est $\mathcal{F}_t$-mesurable.*

2. *$\forall t \in T$, M_t est intégrable, soit $M_t \in L^1(\Omega, \mathcal{F}, P)$.*

3. *$\forall t, s \in T$, $s < t$, $E[M_t \mid \mathcal{F}_s] = M_s$.*

Remarque 1.2.1 *1. Si (3) est remplacé par : $\forall\ s < t$, $E[M_t \mid \mathcal{F}_s] \leq M_s$, alors M_t est une sur-martingale.*

2. Si (3) est remplacé par : $\forall\ s < t$, $E[M_t \mid \mathcal{F}_s] \geq M_s$, alors M_t est une sous-martingale.

3. Une martingale $(M_t)_{t \in T}$ est une $(\mathcal{F}_t)_{t \in T}$ sous-martingale et sur-martingale.

4. *La définition précédente généralise de manière évidente les notions analogues à temps discrète, on considère un processus $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ indexé par les entiers positifs.*

Proposition 1.2.1 *Si Z est un processus à accroissements indépendants alors*

1. *Si $Z_t \in L^1$ pour tout, $t \geq 0$, $\tilde{Z}_t = Z_t - E[Z_t]$ est une martingale.*

2. *Si $Z_t \in L^2$ pour tout, $t \geq 0$, $X_t = \tilde{Z}_t^2 - E\left[\tilde{Z}_t^2\right]$ est une martingale.*

3. *S'il existe $\theta \in \mathbb{R}$, tel que $E[\exp(\theta Z_t)] < \infty$ pour tout $t \geq 0$ $X_t = \dfrac{\exp(\theta Z_t)}{E[\exp(\theta Z_t)]}$ est une martingale.*

Preuve.

1. Dans le premier cas, on a pour $0 \leq s < t$

$$\begin{aligned}
E\left[\tilde{Z}_t \mid \mathcal{F}_s\right] &= E\left[(Z_t - E[Z_t]) \mid \mathcal{F}_s\right] \\
&= E\left[Z_t - Z_s + Z_s \mid \mathcal{F}_s\right] - E[Z_t] \\
&= E\left[Z_t - Z_s \mid \mathcal{F}_s\right] + E\left[Z_s \mid \mathcal{F}_s\right] - E[Z_t] \\
&= E\left[Z_t - Z_s\right] + Z_s - E[Z_t] \\
&= Z_s - E[Z_s].
\end{aligned}$$

2. Dans le deuxième cas, on a pour $0 \leq s < t$

$$\begin{aligned}
E\left[\tilde{Z}_t^2 \mid \mathcal{F}_s\right] &= E\left[\left(\tilde{Z}_s + \tilde{Z}_t - \tilde{Z}_s\right)^2 \mid \mathcal{F}_s\right] \\
&= \tilde{Z}_s^2 + 2Z_s E\left[\left(\tilde{Z}_t - \tilde{Z}_s\right) \mid \mathcal{F}_s\right] + E\left[\left(\tilde{Z}_t - \tilde{Z}_s\right)^2 \mid \mathcal{F}_s\right] \\
&= \tilde{Z}_s^2 + E\left[\left(\tilde{Z}_t - \tilde{Z}_s\right)^2\right] \\
&= \tilde{Z}_s^2 + E\left[\tilde{Z}_t^2\right] - 2E\left[\tilde{Z}_t\tilde{Z}_s\right] + E\left[\tilde{Z}_s^2\right] \\
&= \tilde{Z}_s^2 + E\left[\tilde{Z}_t^2\right] - E\left[\tilde{Z}_s^2\right].
\end{aligned}$$

Par ce que $E\left[\tilde{Z}_s\tilde{Z}_t\right] = E\left[\tilde{Z}_s E\left[\tilde{Z}_t \mid \mathcal{F}_s\right]\right] = E\left[\tilde{Z}_s^2\right]$, le résultat voulu en découle.

3. Dans le troisième cas, on a pour $0 \leq s < t$

$$E\left[X_t \mid \mathcal{F}_s\right] = \frac{\exp\left(\theta Z_s\right) E\left[\exp\theta\left(Z_t - Z_s\right) \mid \mathcal{F}_s\right]}{E\left[\exp\left(\theta Z_s\right)\right] E\left[\exp\theta\left(Z_t - Z_s\right)\right]} = \frac{\exp\left(\theta Z_s\right)}{E\left[\exp\left(\theta Z_s\right)\right]} = X_s.$$

■

Remarque 1.2.2 – *Si* $(M_t)_{t\in T}$ *est une martingale, la fonction* $t \to E\left[M_t\right]$ *est constante*

$$E\left[M_t\right] = E\left[M_0\right], \ \forall t \in \mathbb{R}_+.$$

– *Si* $(M_t)_{t\in T}$ *est une sous-martingale, la fonction* $t \to E\left[M_t\right]$ *est croissante*

$$E\left[M_t\right] \geq E\left[M_0\right], \ \forall t \in \mathbb{R}_+.$$

– *Si* $(M_t)_{t\in T}$ *est une sur-martingale, la fonction* $t \to E\left[M_t\right]$ *est décroissante*

$$E\left[M_t\right] \leq E\left[M_0\right], \ \forall t \in \mathbb{R}_+.$$

Définition 1.2.2 *On dit qu'une martigale* $M_t \in L^p$ *si*

$$\sup E\left[\left|M_t\right|^p\right] < \infty.$$

Cas particulier $p = 1$ *(resp* $p = 2$*), alors on dit* $M_t \in L^1$ *(resp* $M_t \in L^2$*).*

Proposition 1.2.2 *Soit* $(M_t)_{t\in T}$ *une martingale de carré intégrable (*$M_t \in L^2$ *pour tout* $t \geq 0$*) alors*

$$E\left[M_t^2 - M_s^2 \mid \mathcal{F}_s\right] = E\left[\left(M_t - M_s\right)^2 \mid \mathcal{F}_s\right].$$

Preuve.

$$\begin{aligned} E\left[(M_t - M_s)^2 \mid \mathcal{F}_s\right] &= E\left[M_t^2 - 2M_tM_s + M_s^2 \mid \mathcal{F}_s\right] \\ &= E\left[M_t^2 \mid \mathcal{F}_s\right] - 2M_sE\left[M_t \mid \mathcal{F}_s\right] + M_s^2 \\ &= E\left[M_t^2 \mid \mathcal{F}_s\right] - M_s^2 \\ &= E\left[M_t^2 - M_s^2 \mid \mathcal{F}_s\right]. \end{aligned}$$

■

Théorème 1.2.1 *(Inégalités de Doob)*

1. *Soit $(M_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$ une sous-martingale continue à droite relativement à une filtration $(\mathcal{F}_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$ alors, pour tout $t > 0$, pour tout $c > 0$*

$$P\left(\sup_{s\in[0,t]} M_s \geq c\right) \leq \frac{E\left[|M_s|\right]}{c}$$

et

$$\forall T \in \mathbb{R}_+, \quad E\left[\sup_{t\in[0,T]} |M_t|^2\right] \leq 4E\left[|M_T|^2\right].$$

2. *Soit $(M_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$ une martingale continue à droite telle que pour tout $t \in \mathbb{R}_+$, $M_t \in L^p$, avec $p > 1$ fixé, alors pour tout $t > 0$, pour tout $c > 0$*

$$P\left(\sup_{s\in[0,t]} |M_s| \geq c\right) \leq \frac{E\left[|M_s|^p\right]}{c^p}.$$

3. *Sous les hypothèses du (2), on obtient que*

$$\sup_{s\in[0,t]} |M_s| \in L^p \text{ et } \left\|\sup_{s\in[0,t]} |M_s|\right\|_p \leq \frac{p}{p-1} \left\|M_s\right\|_p.$$

Définition 1.2.3 *Soit $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ une filtration. Une suite $(H_t)_{t\geq 0}$ est un processus prévisible si : $H_t \subset \mathcal{F}_{t-1}$ pour tout $t \geq 1$.*

Proposition 1.2.3 *(Décomposition de Doob)*

Tout sous-martingale $(X_t)_{t\geq 0}$ *peut être écrit d'une manière unique comme*

$$X_t = M_t + A_t,$$

où M_t *est une martingale et* A_t *est un processus prévisible croissant tel que* $A_0 = 0$.

Théorème 1.2.2 *Supposons que la filtration* $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ *satisfait les conditions habituelles. Si* M *une* $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$*-surmartingale et si la fonction* $t \to E[M_t]$ *est continue à droite, alors* M *admet une modification qu'est une* $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$*-surmartingale et dont les trajectoires sont continues à droite et limite à gauche en tout point.*

Théorème 1.2.3 *Soit* $(M_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$ *une martingale continue à droite bornée dans* L^1, *alors il existe une variable* $M_\infty \in L^1$ *telle que*

$$\lim_{t\to\infty} M_t = M_\infty \qquad p.s.$$

Proposition 1.2.4 *Soit* $p > 1$ *et si* $(M_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$ *une martingale continue à droite bornée dans* L^p, *alors* $(M_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$ *converge p.s vers une limite* L^p*-intégrable quand* $t \to \infty$.

Preuve. Soit $p > 1$ et si $(M_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$ une martingale d'après le théorème (1.2.3) précédent, on a $(M_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$ converge vers M_∞ $p.s$ quand $t \to \infty$, on montre que $M_\infty \in L^p$, $p > 1$ d'après le lemme de Fatou, on a

$$\begin{aligned} E[|M_\infty|^p] &= E\left[\liminf_{t\to\infty} |M_t|^p\right] \\ &\leq \liminf_{t\to\infty} E[|M_t|^p] \\ &\leq \sup_{t\geq 0} E[|M_t|^p] \end{aligned}$$

alors $M_\infty \in L^p$ et $(M_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$ converge vers M_∞ avec $M_\infty \in L^p$. ■

Martingale continue et temps d'arrêt

Définition 1.2.4 *Soit* $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ *une filtration sur l'espace probabilisé* $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ *si* $(X_t)_{t\geq 0}$ *est un processus réel adapté et continue à droite et si* $\mathcal{T}$ *est un temps d'arrêt on note* $\left(X_t^{\mathcal{T}}\right)_{t\geq 0}$ *le processus stochastique réel définie par*

$$X_t^{\mathcal{T}} = X_{t\wedge\mathcal{T}}$$

le processus $X_t^{\mathcal{T}}$ *s'appelle le processus arrêté à* $\mathcal{T}$*.*

Proposition 1.2.5 *Si* $(M_t)_{t\geq 0}$ *une martingale continue à droite et si* $\mathcal{T}$ *temps d'arrêt, alors* $\left(M_t^{\mathcal{T}}\right)_{t\geq 0}$ *est une martingale continue à droite.*

Théorème 1.2.4 *Soit* $(M_t)_{t\geq 0}$ *une martingale à trajectoire continue à droite et uniformément intégrable, soient* $\mathcal{S}$ *et* $\mathcal{T}$ *deux temps d'arrêt avec* $\mathcal{S} \leq \mathcal{T}$*, alors* $M_{\mathcal{S}}$ *et* $M_{\mathcal{T}}$ *sont dans* L^1 *et*

$$M_{\mathcal{S}} = E\left[M_{\mathcal{T}} \mid \mathcal{F}_{\mathcal{S}}\right],$$

avec la convention $M_{\mathcal{T}} = M_{\infty}$ *sur* $\{\mathcal{T} = \infty\}$*, en particulier pour tout temps d'arrêt avec* $\mathcal{S}$*, on a*

$$M_{\mathcal{S}} = E\left[M_{\infty} \mid \mathcal{F}_{\mathcal{S}}\right],$$

$$E\left[M_{\mathcal{S}}\right] = E\left[M_{\infty}\right] = E\left[M_0\right].$$

1.2.3 Variation quadratique d'une martingale

Théorème 1.2.5 *Soit M une martingale continue bornée et $0 = t_0^n < t_1^n < ... < t_{p_n}^n = T$ une suite de subdivisions de $[0, T]$ dont le pas tend vers 0, alors*

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{i=0}^{p_n-1} \left(M_{t_{i-1}^n \wedge t} - M_{t_i^n \wedge t} \right)^2$$

existe dans L^2 et définie pour $t < T$ un processus croissant continue adapté noté $\langle M, M\rangle_t$ s'appelle la variation quadratique de M ou bien"crochet". De plus $M_t^2 - \langle M, M\rangle_t$ est une martingale.

Remarque 1.2.3 *On a sous les coditions de théorème (1.2.5) $\langle M, M\rangle_0 = 0$ et $\langle M, M\rangle_t = \langle M\rangle_t$.*

Proposition 1.2.6 *Soient $(M_t)_{t\geq 0}$ et $(N_t)_{t\geq 0}$ deux martingales continues de carré intégrable.*

– On définit la covariation quadratique de $(M_t)_{t\geq 0}$ et $(N_t)_{t\geq 0}$ par

$$\langle M, N\rangle_t = \frac{1}{4} \left(\langle M + N, M + N\rangle_t - \langle M - N, M - N\rangle_t \right).$$

– Le processus $(M_t N_t - \langle M, N\rangle_t)$ est une martingale.

Proposition 1.2.7 *Soient $(M_t)_{t\geq 0}$ et $(N_t)_{t\geq 0}$ deux martingales continues issu de 0 et de carré intégrable et soit $c \in \mathbb{R}$, alors*

1. *$E[\langle M, N\rangle_t] = 0$.*
2. *$\langle cM + N, cM + N\rangle = c^2 \langle M, M\rangle + \langle N, N\rangle$.*

Preuve. Dans la première égalité et d'après la proposition précédente on trouve que

$$E[M_t N_t - \langle M, M\rangle_t] = 0$$

alors

$$\begin{aligned} E\left[\langle M,N\rangle_t\right] &= E\left[M_tN_t\right] \\ &= E\left[M_t\right]E\left[M_t\right] \\ &= E\left[M_0\right]E\left[M_0\right] \\ &= 0. \end{aligned}$$

– Dans la deuxième égalité

$$\langle cM+N, cM+N\rangle = c^2\langle M,M\rangle + c\langle M,N\rangle + c\langle N,M\rangle + \langle N,N\rangle$$

et comme $\langle M,N\rangle = 0$ et $\langle N,M\rangle = 0$, alors

$$\langle cM+N, cM+N\rangle = c^2\langle M,M\rangle + \langle N,N\rangle .$$

■

Lemme 1.2.1 *Si M est une martingale bornée et $\mathcal{T}$ temps d'arrêt alors*

$$\left\langle M^{\mathcal{T}}, M^{\mathcal{T}}\right\rangle_t = \langle M,M\rangle_{t\wedge\mathcal{T}} .$$

1.2.4 Martingale locale

Définition 1.2.5 *Un processus adapté à trajectoires continues $M = (M_t)_{t\geq 0}$ tel que $M_0 = 0 p.s$ est une martingale locale (continue) s'il existe une suite croissante $(\mathcal{T}_n)_{n\in N}$ de temps d'arrêt telle que $\mathcal{T}_n \to \infty$ et pour tout n le processus arrêté $M^{\mathcal{T}_n}$ est une martingale uniformément intégrable.*

- Plus généralement, lorsque $M_0 \neq 0$, on dit que M est une martingale locale si

$$M_t = M_0 + N_t,$$

où le processus N est une martingale locale issue de 0.

- Dans tous les cas, on dit que la suite de temps d'arrêt $\mathcal{T}_n \to \infty$ réduit M si pour tout n le processus arrêté $M^{\mathcal{T}_n}$ est une martingale uniformément intégrable. Lorsque $M_0 = 0$, on parle de martingale locale issue de 0.

Théorème 1.2.6 *Une martingale locale M bornée, ou plus généralement telle qu'il existe une variable $Z \in L^1$, pour tout $t \geq 0$, $|M_t| \leq Z$, est une martingale.*

Preuve. Si M est bornée (ou plus généralement dominée par une variable intégrable), on obtient pour $s \leq t$

$$M_{s\wedge\mathcal{T}_n} = E\left[M_{t\wedge\mathcal{T}_n} \mid \mathcal{F}_s\right]$$

on a par la convergence dominée la suite $M_{s\wedge\mathcal{T}_n}$ converge dans L^1 vers M_t et donc on peut passé à la limite $n \to \infty$ pour trouver

$$\begin{aligned} M_s &= \lim_{n\to\infty} M_{s\wedge\mathcal{T}_n} \\ &= \lim_{n\to\infty} E\left[M_{t\wedge\mathcal{T}_n} \mid \mathcal{F}_s\right] \\ &= E\left[\lim_{n\to\infty} M_{t\wedge\mathcal{T}_n} \mid \mathcal{F}_s\right] \\ &= E\left[M_t \mid \mathcal{F}_s\right]. \end{aligned}$$

Avec M est intégrable qui implique que M est une martingale. ■

Théorème 1.2.7 *Soit M une martingale locale. Alors si M est un processus à variation finie, M est indistinguable de 0.*

Variation quadratique d'une martingale locale

Théorème 1.2.8 *Soit $M = (M_t)_{t\geq 0}$ une martingale locale continue, il existe un processus croissant adapté noté $(\langle M, M\rangle_t)_{t\geq 0}$ tel que $M_t^2 - \langle M, M\rangle_t$ soit une martingale locale continue. De plus, pour tout $t \geq 0$, si $0 = t_0^n < t_1^n < ... < t_{p_n}^n = t$ est une suite de subdivisions emboitées sur $[0, t]$ de pas tendant vers 0, on a au sens de la convergence en probabilité*

$$\langle M, M\rangle_t = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{p_n} \left(M_{t_i^n} - M_{t_{i-1}^n} \right)^2 .$$

Le processus $\langle M, M\rangle$ est appelé la variation quadratique de M.

Théorème 1.2.9 *Soit M une martingale locale nulle en 0. Il y a équivalence entre*

a) $E\left[\langle M, M\rangle_\infty\right] < \infty$.

b) *M est une martingale bornée dans L^2.*

De plus si ces conditions sont satisfaites, le processus $M_t^2 - \langle M, M\rangle_t$ est une martingale. Et il y a équivalence entre

c) *M est une martingale de carré intégrable.*

d) $E\left[\langle M, M\rangle_t\right] < \infty$, *pour tout $t \geq 0$.*

Proposition 1.2.8 *(Inégalité de Kunita-Watanabe 1)*
Soient M et N sont deux martingales locales et H et K deux processus progressivement mesurables. Alors

$$\int_0^\infty |H_s| \;\; |K_s| \;\; |d\langle M, N\rangle_s| \leq \left(\int_0^\infty H_s^2 d\langle M, M\rangle_s \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_0^\infty K_s^2 d\langle N, N\rangle_s \right)^{\frac{1}{2}} .$$

Lemme 1.2.2 *Si M et N sont deux martingales locales et $\mathcal{T}$ temps d'arrêt, alors*

$$\left\langle M^{\mathcal{T}}, N^{\mathcal{T}} \right\rangle = \langle M, N\rangle_{\mathcal{T}}$$

Définition 1.2.6 *Soit M et N deux martingales locales. Le "crochet" de M et N est définie par*

$$\langle M, N \rangle_t = \frac{1}{2} \left(\langle M+N, M+N \rangle_t - \langle M, M \rangle_t - \langle N, N \rangle_t \right).$$

1.2.5 Semi-martingale continue

Définition 1.2.7 *Un processus $X = (X_t)_{t \geq 0}$ est une semi- martingale s'il s'écrit sous la forme*

$$X_t = X_0 + M_t + A_t,$$

où M est une martingale locale (nul en $t = 0$) et A est un processus à variation finie.

Proposition 1.2.9 *Si $X = X_0 + M + A$ et $Y = Y_0 + N + B$, sont des semi-martingales alors*

1. $\langle X, Y \rangle = \langle M, N \rangle$.
2. *En particulier* $\langle X, X \rangle = \langle M, M \rangle$.

1.3 Mouvement brownien

Le mot mouvement brownien provient du mouvement irrégulier des grains de pollen à la surface d'eau, observé par le botaniste écossais Robert Brown en 1828.

Et en 1923 Winner établit la modélisation mathématique du mouvement brownien qu'il est un processus gaussien par excellence.

1.3.1 Définitions et propriétés des mouvements browniens

Définition 1.3.1 *Un processus $X = (X_t)_{t \geq 0}$ à valeurs réelles est un mouvement brownien, s'il est un processus à accroissements indépendants et stationnaires dont les trajectoires sont continues. Ce qui signifie*

i) ***Continuité*** *P p.s : la fonction $s \to X_s(\omega)$ est continue.*

ii) ***Indépendances des accroissements*** *: si $s \leq t$, la loi de $X_t - X_s$ est indépendant de la tribu $\mathcal{F}_s = \sigma(X_u, u \leq s)$.*

iii) ***Stationnarité des accroissements*** *: si $s \leq t$, la loi de $X_t - X_s$ est indépendants à celle de $X_{t-s} - X_0$.*

Définition 1.3.2 *Un processus stochastique $B = (B_t)_{t \geq 0}$ est appelé mouvement brownien standard s'il satisfait les conditions suivants*

1. *$B_0 = 0$.*
2. *$\forall\ t_0 < t_1 < ... < t_n$, les accroissements $B_{t_n} - B_{t_{n-1}}, ..., B_{t_1} - B_{t_0}$ sont des variables aléatoires indépendants.*
3. *Si $0 \leq s \leq t$, l'accroissement $B_t - B_s$ admet distribution normale $N(0, t-s)$.*
4. *Le processus $(B_t)_{t \geq 0}$ admet des trajectoires continues.*

Remarque 1.3.1 **1.** *Le processus X est un processus gaussien si chaque famille finie $(X_{t_1} ... X_{t_n})$, $\forall n > 1$ et $t_1 ... t_n \in \mathbb{R}_+$ est une variable aléatoire gaussien (i.e. $\sum_{i=1}^{n} a_i X_i$ est un variable aléatoire gaussien, $\forall n \geq 1$ et $t_1 ... \ t_n \in \mathbb{R}_+$ et $a_1 ... \ a_n \in \mathbb{R}$).*

2. *On note B pour le mouvement brownien standard.*

Proposition 1.3.1 *Un mouvement brownien $(B_t)_{t\geq 0}$ est un processus gaussien dont la fonction de covariance est*

$$\rho(s,t) = t \wedge s = \min(t,s).$$

Preuve. Soit $s \leq t$ on a

$$\rho(s,t) = Cov(B_s, B_t) = E[B_s B_t] - E[B_s] E[B_t]$$

comme B_t suit un loi gaussien centré ($E[B_t] = 0$), donc

$$\rho(s,t) = E\left[B_s B_t + B_s^2 - B_s^2\right] = E\left[B_s^2\right] + E[B_s[B_t - B_s]]$$

pour $s \leq t$, on utiliser l'indépendance et l'évolution $B_s \to N(0,s)$, nous obtenons la valeur

$$\begin{aligned}\rho(s,t) &= E\left[B_s^2\right] + E[B_s] E[B_t - B_s] \\ &= E\left[B_s^2\right] \\ &= s.\end{aligned}$$

■

Corollaire 1.3.1 *Si B_t est un mouvement brownien, alors les processus suivants sont aussi des mouvements browniens.*

1) $X_t = -B_t$ *(symétrie).*

2) $X_t = tB_{\frac{1}{t}}$, $X_0 = 0$ *(inversion du temps).*

3) $a > 0$ *fixé,* $X_t = \frac{1}{\sqrt{a}} B_{at}$ *(scaling).*

4) $s \geq 0$, $X_t = B_{t+s} - B_s$.

5) $r > 0$ *fixé,* $X_t = B_r - B_{r-t}$, $t \in [0,r]$ *(retournement de temps).*

1.3.2 Mouvement brownien et martingale

Proposition 1.3.2 *Si $(B_t)_{t\geq 0}$ est un mouvement brownien alors*

1) (B_t) *est $\mathcal{F}_t$-martingale.*

2) $(B_t^2 - t)$ *est une $\mathcal{F}_t$-martingale.*

3) $\left(\exp\left(\sigma B_t - \frac{\sigma^2}{2}t\right)\right)$ *est une $\mathcal{F}_t$-martingale.*

Preuve.

1) B_t est un processus adapté et intégrable, $E\left[B_t\right] = 0 < \infty$

$$\begin{aligned} E\left[B_t \mid \mathcal{F}_s\right] &= E\left[B_t - B_s \mid \mathcal{F}_s\right] + E\left[B_s \mid \mathcal{F}_s\right] \\ &= E\left[B_t - B_s\right] + B_s \end{aligned}$$

et comme $E\left[B_t - B_s\right] = 0$ alors

$$E\left[B_t \mid \mathcal{F}_s\right] = B_s.$$

2) On a B_t est un processus adapté et $B_t^2 - t$ est continue alors le processus $(B_t^2 - t)$ est adapté, concernant l'intégrabilité on a $\forall t \geq 0$

$$\begin{aligned} E\left[\left|B_t^2 - t\right|\right] &\leq E\left[B_t^2\right] + E\left[t\right] \\ &\leq E\left[B_t^2\right] + t \\ &\leq 2t < \infty \end{aligned}$$

alors $|B_t^2 - t|$ est intégrable.

On a

$$\begin{aligned}
E\left[B_t^2 \mid \mathcal{F}_s\right] &= E\left[(B_t - B_s + B_s)^2 \mid \mathcal{F}_s\right] \\
&= E\left[B_s^2 + 2B_s(B_t - B_s) + (B_t - B_s)^2 \mid \mathcal{F}_s\right] \\
&= B_s^2 + 2B_s E\left[(B_t - B_s) \mid \mathcal{F}_s\right] + E\left[(B_t - B_s)^2 \mid \mathcal{F}_s\right] \\
&= B_s^2 + 0 + (t - s)
\end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned}
E\left[B_t^2 - t \mid \mathcal{F}_s\right] &= B_s^2 + (t - s) - t \\
&= B_s^2 - s.
\end{aligned}$$

Alors $B_t^2 - t$ est une martingale.

3) On a B_t est un processus adapté et $\exp\left(\sigma B_t - \frac{\sigma^2}{2}t\right)$ est continue alors le processus $\exp\left(\sigma B_t - \frac{\sigma^2}{2}t\right)$ est adapté, concernant l'intégrabilité on a : $\forall t \geq 0$

$$\begin{aligned}
E\left[\left|\exp\left(\sigma B_t - \frac{\sigma^2}{2}t\right)\right|\right] &= E\left[\exp\left(\sigma B_t - \frac{\sigma^2}{2}t\right)\right] \\
&= \int_{\mathbb{R}} \exp\left(\sigma x_t - \frac{\sigma^2}{2}t\right) \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} \exp\left(-\frac{x^2}{2t}\right) dx \\
&= \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} \exp\left(\frac{-x^2 + 2\left(t\sigma x\right) - \sigma^2 t^2}{2t}\right) dx \\
&= \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} \exp\left(\frac{-\left(x - t\sigma\right)^2}{2t}\right) dx \\
&= 1 < \infty
\end{aligned}$$

alors $\exp\left(\sigma B_t - \frac{\sigma^2}{2}t\right)$ est intégrable

$$\begin{aligned} E\left[\exp\left(\sigma B_t\right) \mid \mathcal{F}_s\right] &= \exp\left(\sigma B_s\right) E\left[\exp\left(\sigma(B_t - B_s)\right) \mid \mathcal{F}_s\right] \\ &= \exp\left(\sigma B_s\right) E\left[\exp\left(\sigma(B_{t-s})\right)\right]. \end{aligned} \tag{1.1}$$

Dans l'égalité précedante, pour le deuxième terme à droite, ona

$$\begin{aligned} E\left[\exp\left(\sigma(B_{t-s})\right)\right] &= \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(\sigma x\right) \frac{\exp\left(\frac{-x^2}{2(t-s)}\right)}{\sqrt{2\pi/t-s}} dx \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi/t-s}} \exp\left(\frac{-x^2 + 2\left(t-s\right)\sigma x}{2\left(t-s\right)}\right) dx \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi/t-s}} \exp\left(-\frac{x^2 - 2\left(t-s\right)\sigma x + \sigma^2\left(t-s\right)^2 - \sigma^2\left(t-s\right)^2}{2\left(t-s\right)}\right) dx \\ &= \exp\left(\frac{\sigma^2\left(t-s\right)^2}{2\left(t-s\right)}\right) \\ &= \exp\left(\frac{\sigma^2\left(t-s\right)}{2}\right). \end{aligned}$$

En substitution dans la formule (1.1)

$$E\left[\exp(\sigma B_t) \mid \mathcal{F}_s\right] = \exp\left(\sigma B_s\right) \times \exp\left(\frac{\sigma^2 s}{2}\right) \times \exp\left(\frac{\sigma^2 t}{2}\right).$$

Finallement

$$E\left[\exp\left(\sigma B_t - \frac{\sigma^2}{2}t\right) \mid \mathcal{F}_s\right] = \exp\left(\sigma B_s - \frac{\sigma^2}{2}s\right),$$

alors $\exp\left(\sigma B_t - \frac{\sigma^2}{2}t\right)$ est une martingale. ■

Théorème 1.3.1 *(Caractérisation de P.Lévy du mouvement brownien)*
Soit $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ une filtration et $M_t = (M_t)_{t\geq 0}$ une $\mathcal{F}_t$-martingale continue avec $M_0 = 0$, si le processus $(M_t^2 - t)_{t\geq 0}$ est aussi une $\mathcal{F}_t$-martingale alors M est un mouvement brownien.

1.3.3 Variation quadratique de mouvement brownien

Proposition 1.3.3 *Soit* $0 = t_0^n \leq t_1^n \leq ... \leq t_{p_n}^n = T$ *une suite de subdivision de* $[0, T]$ *telle que* $\sup\limits_{1<i<p_n} \left| t_i^n - t_{i-1}^n \right| \underset{n \to \infty}{\rightarrow} 0$. *Alors, quand* n *tend vers* ∞

$$\sum_{i=1}^{p_n} \left(B_{t_i^n} - B_{t_{i-1}^n} \right)^2$$

converge dans L^2 *vers* T.

Théorème 1.3.2 *Si* $B = (B_t)_{t \geq 0}$ *est un mouvement brownien réel, alors* B *admet une variation quadratique et*

$$P.p.s, \;\; \langle B, B \rangle_t = t \quad \forall t \in \mathbb{R}_+.$$

Chapitre 2

Calcul stochastique par rapport des martingales

Dans ce chapitre, on va étudier des théories de l'intégration par rapport les processus stochastique.

On commence par l'intégration par rapport à un mouvement brownien. Ensuite on s'intéresse à l'intégration par rapport à une martingale bornée dans L^2, puis par rapport à une martingale locale et dernièrement l'intégration par rapport à une semi-martingale.

2.1 Intégrale stochastique par rapport au mouvement brownien

Soit $(B_t)_{t\geq 0}$ un $\mathcal{F}_t$ -mouvement brownien standard sur un espace probabilisé filtré $\left(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}, P\right)$.

Nous allons donner un sens à $\int\limits_0^t f(s,w)dB_s$ pour une classe de processus $f(s,w)$ adapté à la filtration $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$. On va commencer par construire l'intégrale stochastique sur un ensemble de processus dits élémentaires.

Dans la suite, on fixe T un réel strictement positif. Le processus élémentaire $(\Phi)_{0\leq t\leq T}$ est de la forme

$$I(\Phi)_t = \sum_{1\leq i\leq k} \phi_i \left(B_{t_i} - B_{t_{i-1}}\right) + \phi_{k+1}\left(B_t - B_{t_k}\right), \ si \ t \in]t_{k-1}, t_k].$$

Notons que $I(\Phi)_t$ peut s'écrit

$$(\Phi)_t(\omega) = \sum_{i=1}^{n} \phi_i(\omega) \, 1_{]t_{i-1},t_i]}(t),$$

où les $\phi_{(i)}$ sont $\mathcal{F}_{t_{i-1}}$-mesurables et bornées.

Définition 2.1.1 *L' intégrale stochastique d'un processus élémentaire Φ est le processus continu qu'est défini par*

$$I(\Phi)_T = \sum_{1\leq i\leq n} \phi_i \left(B_{t_i} - B_{t_{i-1}}\right).$$

On notera pour $\int_0^T \Phi_s dB_s$ *pour* $I(\Phi)_T$.

Proposition 2.1.1 *Si $(\Phi)_t$ est un processus élémentaire, alors*

- $E\left[\int_0^T \Phi_s dB_s\right] = 0.$
- $E\left[\left(\int_0^T \Phi_s dB_s\right)^2\right] = E\left[\int_0^T \Phi_s^2 ds\right]$ *(Isométrie d'Itô).*

Preuve.

1) Pour la première égalité, on a

$$\begin{aligned}
E\left[\int_0^T \Phi_s dB_s\right] &= E\left[\sum_{1\leq i\leq n} \phi_i \left(B_{t_i} - B_{t_{i-1}}\right)\right] \\
&= \sum_{1\leq i\leq n} E\left[\phi_i \left(B_{t_i} - B_{t_{i-1}}\right)\right] \\
&= \sum_{1\leq i\leq n} E\left[E\left[\phi_i \left(B_{t_i} - B_{t_{i-1}}\right) \mid \mathcal{F}_{t_{i-1}}\right]\right]
\end{aligned}$$

puisque $\phi_{(i)}$ est $\mathcal{F}_{t_{i-1}}$-mesurables et $\left(B_{t_i} - B_{t_{i-1}}\right)$ indépendant de $\mathcal{F}_{t_{i-1}}$alors

$$\begin{aligned}
E\left[\int \Phi_s dB_s\right] &= \sum_{1\leq i\leq n} E\left[\phi_i E\left[\left(B_{t_i} - B_{t_{i-1}}\right) \mid \mathcal{F}_{t_{i-1}}\right]\right] \\
&= \sum_{1\leq i\leq n} E\left[\phi_i E\left[\left(B_{t_i} - B_{t_{i-1}}\right)\right]\right] = 0.
\end{aligned}$$

2) Pour la deuxième, on a

$$Var(\phi_i \left(B_{t_i} - B_{t_{i-1}}\right)) = E\left[(\phi_i \left(B_{t_i} - B_{t_{i-1}}\right))^2\right] = E\left[\phi_i^2\right] E\left[\left(B_{t_i} - B_{t_{i-1}}\right)^2\right] = E\left[\phi_i^2\right] \left(t_i - t_{i-1}\right).$$

Aors

$$\begin{aligned}
Var(\sum_{1\leq i\leq n} \phi_i \left(B_{t_i} - B_{t_{i-1}}\right)) &= \sum_{1\leq i\leq n} E\left[(\phi_i \left(B_{t_i} - B_{t_{i-1}}\right))^2\right] \\
&+ 2 \sum_{1\leq i\leq j\leq n} E\left[(\phi_i \left(B_{t_i} - B_{t_{i-1}}\right))(\phi_j \left(B_{tj} - B_{t_{j-1}}\right))\right]
\end{aligned}$$

et pour $i < j$, on a

$$\begin{aligned} E\left[(\phi_i\left(B_{t_i} - B_{t_{i-1}}\right))(\phi_j\left(B_{tj} - B_{t_{j-1}}\right))\right] &= E\left[E\left[(\phi_i\left(B_{t_i} - B_{t_{i-1}}\right))(\phi_j\left(B_{tj} - B_{t_{j-1}}\right)) \mid \mathcal{F}_{t_j}\right]\right] \\ &= E\left[\phi_i\left(B_{t_i} - B_{t_{i-1}}\right)\phi_j E\left[\left(B_{tj} - B_{t_{j-1}}\right) \mid \mathcal{F}_{t_j}\right]\right] \\ &= E\left[\phi_i\left(B_{t_i} - B_{t_{i-1}}\right)\phi_j E\left[B_{tj} - B_{t_{j-1}}\right]\right] = 0. \end{aligned}$$

Finalement, on a

$$\begin{aligned} E\left[\left(\int_0^T \Phi_s dB_s\right)^2\right] &= var\left(\sum_{1\leq i\leq n} \phi_i\left(B_{t_i} - B_{t_{i-1}}\right)\right) \\ &= \sum_{1\leq i\leq n} E\left[(\phi_i\left(B_{t_i} - B_{t_{i-1}}\right))^2\right] \\ &= \sum_{1\leq i\leq n} E\left[\phi_i^2\right](t_i - t_{i-1}) \\ &= \sum_{1\leq i\leq n} \int_{t_{i-1}}^{t_i} E\left[\phi_i^2\right] dt \\ &= \int_0^T E\left[\Phi_i^2\right] dt = E\left[\int_0^T \Phi_s^2 d_s\right] \end{aligned}$$

■

On vient de définir et donner des propriétés de l'intégrale stochastique pour les processus élémentaires, nous allons maintenant étendre cette intégrale à une classe de processus adaptés

$$H = \left\{(\Phi)_{0\leq t\leq T}\text{, processus adapté à } (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}\ E\left[\int_0^t \Phi_s^2 d_s\right] < \infty\right\}.$$

Proposition 2.1.2 *Si* $(\Phi)_{0\leq t\leq T}$ *un processus de* H, *alors*

1) $E\left[\sup\limits_{0\leq t\leq T}\left|\int\limits_0^t \Phi_s dB_s\right|^2\right] \leq 4E\left[\int\limits_0^t \Phi_s^2 ds\right]$.

2) *Si* $\mathcal{T}$ *est un* -$\mathcal{F}_t$*temps d'arrêt, alors*

$$P.p.s \quad \int\limits_0^{\mathcal{T}} \Phi_s dB_s = \int\limits_0^T 1_{s\leq\mathcal{T}} \Phi_s dB_s.$$

Proposition 2.1.3 *Lintégrale* $I(\Phi)_t$ *est une martingale.*

Preuve. Il est claire que $I(\Phi)_t$ est continu et d'aprés la proposition (2.1.1) l'isométrie d'Itô montrée que $I(\Phi)_t$ est un processus de carré intégrable, donc par l'inégalité de Cauchy-Scharaz, on a

$$E\left[|I(\Phi)_t|\right] \leq \sqrt{E\left[(I(\Phi)_t)^2\right]} < \infty.$$

Si on suppose que $t \in]t_{k-1}, t_k]$, alors

$$\begin{aligned}
E\left[I(\Phi)_T \mid \mathcal{F}_t\right] &= \sum_{i=1}^{k-1} E\left[\phi_i\left(B_{t_i} - B_{t_{i-1}}\right) \mid \mathcal{F}_t\right] + E\left[\phi_{k+1}\left(B_t - B_{t_k}\right) \mid \mathcal{F}_t\right] \\
&+ \sum_{i=k+1}^{n} E\left[\phi_i\left(B_{t_i} - B_{t_{i-1}}\right) \mid \mathcal{F}_t\right] \\
&= \sum_{i=1}^{k-1} \phi_i\left(B_{t_i} - B_{t_{i-1}}\right) + \phi_{k+1} E\left[\left(B_t - B_{t_k}\right) \mid \mathcal{F}_t\right] + \sum_{i=k+1}^{n} E\left[\phi_i E\left[\left(B_{t_i} - B_{t_{i-1}}\right) \mid \mathcal{F}_{t_{i-1}}\right] \mid \mathcal{F}_t\right] \\
&= \sum_{i=1}^{k-1} \phi_i\left(B_{t_i} - B_{t_{i-1}}\right) + \phi_{k+1}\left(B_t - B_{t_k}\right) + 0 = I(\Phi)_t
\end{aligned}$$

alors le processus $I(\Phi)_t$ est une martingale car

$$E\left[I(\Phi)_t \mid \mathcal{F}_s\right] = E\left[E\left[I(\Phi)_T \mid \mathcal{F}_t\right] \mid \mathcal{F}_s\right] = E\left[I(\Phi)_T \mid \mathcal{F}_s\right] = I(\Phi)_s.$$

■

2.1.1 Calcul d'Itô

Nous allons maintenant introduire un calcul différentiel sur ces intégrales stochastiques. On appelle ce calcul "calcul d'Itô" et l'outil essentiel en est la "formule d'Itô ".

Définition 2.1.2 *Soient* $\left(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}, P\right)$ *un espace de probabilité muni d'une filtration et* $(B_t)_{t\geq 0}$ *un* $\mathcal{F}_t$*-mouvement brownien. On appelle processus d'Itô, un processus* $(X_t)_{0\leq t\leq T}$ *a valeurs dans* $\mathbb{R}$ *tel que*

$$P.p.s\ \forall\ 0 \leq t \leq T \qquad X_t = X_0 + \int_0^t K_s ds + \int_0^t \Phi_s dB_s.$$

Dans la définition précedant, on a

Propriété 2.1.1 - X_0 *est* $\mathcal{F}_0$*-mesurable.*

- $(K_t)_{0\leq t\leq T}$ *et* $(\Phi)_{0\leq t\leq T}$ *sont des processus adaptés à* $\mathcal{F}_t$.
- $\int_0^t |K_s|\, ds < \infty$, *P.p.s.*
- $\int_0^t |\Phi_s|^2\, ds < \infty$, *P.p.s.*

Proposition 2.1.4 **1)** *Soit* $(M_t)_{0\leq t\leq T}$ *une martingale continue telle que*

$$M_t = \int_0^t K_s ds,\ \text{avec } P.p.s \text{ et } \int_0^t |K_s|\, ds < \infty$$

alors

$$P.p.s \quad \forall\ 0 \leq t \leq T, \quad M_t = 0.$$

2) *La décomposition d'un processus "d'Itô" est unique .Ce qui signifie que si*

$$X_t = X_0 + \int_0^t K_s ds + \int_0^t \Phi_s dB_s = X_0' + \int_0^t K_s' ds + \int_0^t \Phi_s' dB_s$$

alors

$$X_0 = X'_0 \quad P.p.s, \quad \Phi_s = \Phi'_s \; ds \times P.p.p, \quad K_s = K'_s \; ds \times P.p.p.$$

3) *Si* $(X_t)_{0 \leq t \leq T}$ *est une martingale de la forme :*

$$X_t = X_0 + \int_0^t K_s ds + \int_0^t \Phi_s dB_s$$

alors

$$K_s = 0 \quad ds \times P.p.p.$$

Théorème 2.1.1 *Soit* $(X_t)_{0 \leq t \leq T}$ *un processus d'Itô écrit sous la forme*

$$X_t = X_0 + \int_0^t K_s ds + \int_0^t \Phi_s dB_s$$

et f *une fonction deux fois continûment différentiable, on a*

$$f(X_t) = f(X_0) + \int_0^t f'(X_s) \, dX_s + \frac{1}{2} \int_0^t f''(X_s) \, d\langle X,X \rangle_s \, ,$$

ou par définition

$$\langle X,X \rangle_t = \int_0^t \Phi_s^2 ds$$

et

$$\int_0^t f'(X_s) \, dX_s = \int_0^t f'(X_s) \, K_s ds + \int_0^t f'(X_s) \, \Phi_s dB_s.$$

De même si $(t,x) \to f(t,x)$ *est une fonction deux fois différentiable en* x *et une fois différentiable en* t*, ces dérivées étant continues en* (t,x)*(on dit dans ce cas que* f *est de* *classe $C^{1,2}$), on a*

$$f(t,X_t) = f(0,X_0) + \int_0^t f'(s,X_s)\,ds + \int_0^t f'(s,X_s)\,dX_s + \frac{1}{2}\int_0^t f''_{xx}(X_s)\,d\langle X,X\rangle_s .$$

Proposition 2.1.5 *Soient X_t et Y_t deux processus d'Itô*

$$X_t = X_0 + \int_0^t K_s ds + \int_0^t \Phi_s dB_s$$

et

$$Y_t = Y_0 + \int_0^t K'_s ds + \int_0^t \Phi'_s dB_s$$

alors

$$X_t Y_t = X_0 Y_0 + \int_0^t X_s dY_s + \int_0^t Y_s dX_s + \langle X,Y\rangle_t$$

avec la convention

$$\langle X,Y\rangle_t = \int_0^t \Phi_s \Phi'_s ds.$$

Preuve. On a d'après la formule d'Itô

$$(X_t + Y_t)^2 = (X_0 + Y_0)^2 + 2\int_0^t (X_s + Y_s)\,d(X_s + Y_s) + \int_0^t (\Phi_s + \Phi'_s)^2\,ds.$$

Avec

$$X_t^2 = X_0^2 + 2\int_0^t X_s dX_s + \int_0^t \Phi_s^2 ds$$

et

$$Y_t^2 = Y_0^2 + 2\int_0^t Y_s dY_s + \int_0^t \acute{\Phi}_s^2 ds$$

d'où, en faisant la différence entre la première ligne et les deux suivantes

$$X_tY_t = X_0Y_0 + \int_0^t X_s dY_s + \int_0^t Y_s dX_s + \langle X,Y\rangle_t .$$

■

Théorème 2.1.2 *Soit* $(B_t)_{t\geq 0}$ *un mouvement brownien réel et soit* f *une fonction de classe* $C_b^2(\mathbb{R})$, *alors*

$$f(B_t) = f(B_0) + \int_0^t f'(B_s)\,dB_s + \frac{1}{2}\int_0^t f''(B_s)\,ds.$$

Preuve. On a

$$f(B_t) - f(B_0) = \sum_{i=1}^{n}\left(f\left(B_{t_i^n}\right) - f\left(B_{t_{i-1}^n}\right)\right)$$

où $0 = t_0^n \leq t_1^n \leq ... \leq t_{p_n}^n = t$ une suite de partitions de $[0,t]$, telle que

$$\lim_{n\to\infty}\max_{1\leq i\leq n}\left|t_i^n - t_{i-1}^n\right| = 0.$$

Par un développement de Taylor classique, on a

$$f(y) - f(x) = f'(x)(y-x) + \frac{1}{2}f''(x)(y-x)^2 + r(y-x)$$

où $\lim_{h\to 0}\dfrac{r(h)}{h^2} = 0$. Donc

$$f(B_t) - f(B_0) = \sum_{i=1}^{n}\left(f'\left(B_{t_{i-1}^n}\right)\left(B_{t_i^n} - B_{t_{i-1}^n}\right) + \frac{1}{2}f''\left(B_{t_{i-1}^n}\right)\left(B_{t_i^n} - B_{t_{i-1}^n}\right)^2 + r_i^n\right),$$

converge en probabilité vers

$$\int_0^t f'(B_s)\,dB_s + \frac{1}{2}\int_0^t f''(B_s)\,d\langle B\rangle_s + 0,$$

ce qui permet de conclure, vu que $\langle B\rangle_s = s$. ■

2.2 Intégrale stochastique par rapport à une martingale bornée dans L^2

On note H^2 l'espace des martingales continues de carré intégrable, bornées dans L^2 telle que $M_0 = 0$. D'après le théorème (1.2.9) on a : $E\left[\langle M,M\rangle_\infty\right] < \infty$ et d'après l'inégalité de Kunita-Watanabe, on a si, M, $N \in H^2$, alors $E\left[\left|\langle M,N\rangle_\infty\right|\right] < \infty$. En effet

$$E\left[\left|\langle M,N\rangle_\infty\right|\right] \leq E\left[\int\limits_0^\infty \left|d\langle M,N\rangle_s\right|\right] \leq E\left[\langle M,M\rangle_\infty\right]^{\frac{1}{2}} E\left[\langle N,N\rangle_\infty\right]^{\frac{1}{2}} < \infty.$$

- On définit le produit scalaire sur H^2 par

$$\langle M,N\rangle_{H^2} = E\left[\langle M,N\rangle_\infty\right].$$

- La norme associé à ce produit scalaire est donnée par

$$\|M\|_{H^2} = E\left[\langle M,M\rangle_\infty\right]^{\frac{1}{2}}.$$

Proposition 2.2.1 *H^2 est un espace de Hilbert.*

Preuve. Il s'agit de vérifier que H^2 est complet pour la norme $\|.\|_{H^2}$, pour cela on considère une suite de Cauchy $(M^n)_{n\geq 0}$ pour cette norme, d'apès le théorème (1.2.9), $(M^n - M^m)^2 - \langle M^n - M^m, M^n - M^m\rangle$ est une martingale uniformément intégrable, l'égalité de martingale assure

$$\begin{aligned} & E\left[(M^n - M^m)_t^2 - \langle M^n - M^m, M^n - M^m\rangle_t\right] \\ & = E\left[(M^n - M^m)_0^2 - \langle M^n - M^m, M^n - M^m\rangle_0\right] \\ & = 0. \end{aligned}$$

C'est à dire

$$\begin{aligned} E\left[(M^n - M^m)_t^2\right] &= E\left[\langle M^n - M^m, M^n - M^m\rangle_t\right] \\ &\leq E\left[\langle M^n - M^m, M^n - M^m\rangle\right]_\infty . \end{aligned}$$

Par la propriété de Cauchy de la suite $(M^n)_{n\geq 0}$ pour H^2, on a donc

$$\limsup_{m,\, n\to\infty}\sup_{t\geq 0} E\left[(M_t^n - M_t^m)^2\right] = \lim_{m,\, n\to\infty} E\left[\langle M^n - M^m, M^n - M^m\rangle\right]_\infty = 0$$

et d'après l'inégalité de Doob on a

$$\lim_{m,\, n\to\infty} E\left[\sup_{t\geq 0}(M_t^n - M_t^m)^2\right] \leq \limsup_{m,\, n\to\infty}\sup_{t\geq 0} E\left[(M_t^n - M_t^m)^2\right] = 0.$$

On peut alors construire une sous- suite $(n_k)_{k\geq 1}$ telle que pour tout $k \geq 1$

$$E\left[\sup_{t\geq 0}\left(M_t^{n_k} - M_t^{n_{k+1}}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}} \leq \frac{1}{2^k}.$$

Avec l'inégalité de Cauchy-Scharaz, on a

$$E\left[\sum_{k=1}^{\infty}\sup\left|M_t^{n_k}-M_t^{n_{k+1}}\right|\right]\leq\sum_{k=1}^{\infty}E\left[\sup\left(M_t^{n_k}-M_t^{n_{k+1}}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}$$
$$\leq\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{2^k}$$
$$<\infty$$

on en déduit $p.s$ $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\sup\left|M_t^{n_k}-M_t^{n_{k+1}}\right|<\infty$, donc la suite $(M_t^{n_k})_{t\geq0}$ converge uniformément sur $\mathbb{R}_+$ vers une limite qu'on note $(M_t)_{t\geq0}$ a des trajectoires continues. Puisque $(M_t^n)_{t\geq0}$ converge aussi dans L^2 vers M_t, pour tout $t\geq0$ (car la suite $(M_t^n)_{t\geq0}$ est de Cauchy dans L^2).

On voit immédiatement en passant à la limite dans l'égalité $M_t^{n_k}=E\left[M_\infty^{n_k}\mid\mathcal{F}_t\right]$ que $M_t=E\left[M_\infty\mid\mathcal{F}_t\right]$ et donc $(M_t^n)_{t\geq0}$ est une martingale bornée dans L^2.

Enfin

$$\lim_{k\to\infty}E\left[\langle M^{n_k}-M,\ M^{n_k}-M\rangle\right]_\infty=\lim_{k\to\infty}E\left[\sup_{t\geq0}\left(M_\infty^{n_k}-M_\infty\right)^2\right]=0,$$

ce qui montre que la sous- suite (M^{n_k}) converge $p.s$, donc aussi la suite (M^n) converge vers M dans H^2. ■

Pour $M\in H^2$, on note

$$\mathcal{H}^2(M)=\mathcal{H}^2\left(\mathbb{R}_+\times\Omega,Prog,dP\otimes d\langle M,M\rangle\right).$$

est l'espace des processus progressifs $h=(h_s)_{s\geq0}$ tels que

$$E\left[\int_0^{+\infty}h_s^2d\langle M,M\rangle_s\right]<+\infty.$$

L'espace $\mathcal{H}^2(M)$ est un espace de Hilbert pour le produit scalaire

$$(h, K)_{\mathcal{H}^2(M)} = E\left[\int_0^{+\infty} h_s K_s d\langle M, M\rangle_s\right].$$

On note $\mathcal{S}$ le sous-espace vectoriel de $\mathcal{H}^2(M)$ formé des processus élémentaires, c'est-à-dire des processus h de la forme

$$h_s(\omega) = \sum_{i=0}^{p-1} h_i(\omega) 1_{]t_i,\, t_{i+1}]}(s).$$

Où les $h_{(i)}$ sont $\mathcal{F}_{t_i}$-mesurables et bornées.

Proposition 2.2.2 *Pour tout $M \in H^2$, $\mathcal{S}$ est dense dans $\mathcal{H}^2(M)$.*

Preuve. Un sous espace $\mathcal{S}$ de l'espace de Hilbert $\mathcal{H}^2(M)$ est dense dans $\mathcal{H}^2(M)$ si le sous espace orthogonale $\mathcal{S}^\perp$ de $\mathcal{S}$ se réduite à $\{0\}$.
Si $X \in \mathcal{S}^\perp$ pour tout $h \in \mathcal{S}$, on a

$$E\left[\int_0^{\infty} hX d\langle M, M\rangle\right] = 0.$$

Montrons que $X = 0$ dans $\mathcal{H}^2(M)$, c'est à dire

$$E\left[\int_0^{\infty} X^2 d\langle M, M\rangle\right] = 0.$$

Posons

$$Y_t = \int_0^t X_s d\langle M, M\rangle_s$$

on intègre un processus progressif X par rapport à un processus $\langle M, M\rangle$ continu, croissant et nul en 0 et d'apérs la proposition (1.1.2) l'intégrale Y est donc un processus adapté, continu et à variation finie.

Montrons que Y est une martingale, soit $s < t$, $A \in \mathcal{F}_s$ et $h = 1_A 1_{]s,t]} \in \mathcal{S}$, on a

$$E\left[\int_0^\infty hXd\langle M,M\rangle\right] = E\left[1_A\int_s^t Xd\langle M,M\rangle\right] = E\left[1_A\left(Y_t - Y_s\right)\right] = 0,$$

puisque $X_0 = 0$ et X est à variation finie, le théorème (1.2.7) exige alors d'avoir $X = 0$, ie.

$$\int_0^t X_s d\langle M,M\rangle_s = 0 \quad \forall t \geq 0, \quad p.s$$

ce qui entrâıne

$$X_s = 0 \quad d\langle M,M\rangle_s \quad p.p \quad p.s.$$

donc $X = 0$ dans $\mathcal{H}^2(M)$. ■

Théorème 2.2.1 *Soit $M \in H^2$. Pour tout $h \in \mathcal{S}$, on définit $h \cdot M \in H^2$ par la formule*

$$(h \cdot M)_t = \sum_{i=0}^{p-1} h_i \left(M_{t_{i+1}\wedge t} - M_{t_i \wedge t}\right).$$

L'application $h \to h \cdot M$ s'étend à une isométrie de $\mathcal{H}^2(M)$ dans H^2.

De plus, $h \cdot M$ est caractérisé par la relation

$$\langle h \cdot M, N\rangle_t = h \cdot \langle M,N\rangle_t = \int_0^t h_s d\langle M,N\rangle_s . \tag{2.1}$$

Proposition 2.2.3 *Si $K \in \mathcal{H}^2(M)$ et $h \in \mathcal{H}^2(K \cdot M)$, alors $hK \in \mathcal{H}^2(M)$*

$$(hK) \cdot M = h \cdot (K \cdot M).$$

Preuve. On a

$$\langle K \cdot M, K \cdot M\rangle = K^2 \cdot \langle M,M\rangle ,$$

donc $HK \in \mathcal{H}^2(M)$. De plus, d'après le théorème précédent, pour tout $N \in H^2$

$$\begin{aligned}\langle (hK)\cdot M, N\rangle &= (hK)\cdot \langle M, N\rangle \\ &= h\cdot (K\cdot \langle M, N\rangle) \\ &= h\cdot \langle K\cdot M, N\rangle \\ &= \langle h\cdot (K\cdot M), N\rangle .\end{aligned}$$

■

Proposition 2.2.4 *Si $\mathcal{T}$ est un temps d'arrêt et si $M \in H^2$, on a*

$$\left(1_{[0,\mathcal{T}]}h\right)\cdot M = (h\cdot M)^{\mathcal{T}} = h\cdot M^{\mathcal{T}},$$

avec des notions intégrales

$$\int_0^t 1_{[0,\mathcal{T}]}hdM = \int_0^{t\wedge\mathcal{T}} hdM = \int_0^t hdM^{\mathcal{T}}.$$

Preuve. On a $M^{\mathcal{T}} = 1_{[0,\,\mathcal{T}]}\cdot M$ car pour tout $N \in H^2$

$$\left\langle M^{\mathcal{T}}, N\right\rangle = \langle M, N\rangle^{\mathcal{T}} = 1_{[0,\mathcal{T}]}\cdot \langle M, N\rangle = \left\langle 1_{[0,\mathcal{T}]}\cdot M, N\right\rangle$$

par la proposition précédente, on a

$$K\cdot M^{\mathcal{T}} = K\cdot \left(1_{[0,\mathcal{T}]}\cdot M\right) = K\cdot 1_{[0,\mathcal{T}]}\cdot M$$

$$(K\cdot M)^{\mathcal{T}} = 1_{[0,\mathcal{T}]}\cdot (K\cdot M) = 1_{[0,\mathcal{T}]}\cdot K\cdot M.$$

■

Remarque 2.2.1 **1)** *De manière informelle, l'égalité de la proposition (2.2.3)*

$$\int_0^t h_s \left(K_s dM_s\right) = \int_0^t h_s K_s dM_s.$$

2) *De même la relation* (2.1)

$$\left\langle \int_0^t h_s dM_s, N \right\rangle_t = \int_0^t h_s d\left\langle M, N\right\rangle_s.$$

a) *En appliquant deux fois cette relation, on obtient*

$$\left\langle \int_0^{\cdot} h_s dM_s, \int_0^{\cdot} K_s dN_s \right\rangle_t = \int_0^t h_s K_s d\left\langle M, N\right\rangle_s.$$

b) *En particulier*

$$\left\langle \int_0^{\cdot} h_s dM_s, \int_0^{\cdot} H_s dM_s \right\rangle_t = \int_0^t h_s^2 d\left\langle M, M\right\rangle_s.$$

Remarquons enfin que puisque $h \cdot M$ est une martingale de H^2 on a si $M \in H^2$, $N \in H^2$, $h \in \mathcal{H}^2(M)$ et $K \in \mathcal{H}^2(N)$, pour tout $t \in [0, \infty]$

$$E\left[\int_0^t h_s dM_s\right] = 0 \text{ et } E\left[\left(\int_0^t h_s dM_s\right)\left(\int_0^t K_s dN_s\right)\right] = E\left[\int_0^t h_s K_s d\left\langle M, N\right\rangle_s\right].$$

En particulier

$$E\left[\left(\int_0^t h_s dM_s\right)^2\right] = E\left[\int_0^t h_s^2 d\left\langle M, M\right\rangle_s\right].$$

2.3 Intégrale stochastique par rapport à une martingale locale

On note $\mathcal{H}^2_{loc}(M)$ l'espace des processus progressif h tels que pour tout $t \geq 0$

$$\int_0^t h_s^2 d\langle M, M\rangle_s < \infty \ p.s.$$

On rappelle que, pour M une martingale locale, on note toujours $\mathcal{H}^2(M)$ l'espace des processus progressif h tels que

$$E\left[\int_0^t h_s^2 d\langle M, M\rangle_s\right] < \infty.$$

Corollaire 2.3.1 *Pour h, $K \in \mathcal{H}^2_{loc}(M)$, pour tout temps d'arrêt $\mathcal{T}$*

$$(h \cdot M)^{\mathcal{T}} = h \cdot M^{\mathcal{T}} = h \cdot 1_{[0,\mathcal{T}]} \cdot M$$

et

$$(hK) \cdot M = h \cdot (K \cdot M).$$

Théorème 2.3.1 *Soit M une martingale locale issus de 0. Pour tout $h \in \mathcal{H}^2_{loc}(M)$, il existe une unique martingale locale issus de 0, notée $h \cdot M$, telle que pour toute martingale locale N*

$$\langle h \cdot M, N\rangle = h \cdot \langle M, N\rangle.$$

Preuve. On peut construire une suite de temps d'arrêt $(\mathcal{T}_n)_n \to \infty$ tels que $M^{\mathcal{T}_n} \in H^2$ et $H^{\mathcal{T}_n} \in \mathcal{H}^2_{loc}(M)$. Donc, pour tout n, on peut définir l'intégrale stochastique

$$X^n = h^{\mathcal{T}_n} \cdot M^{\mathcal{T}_n} \in H^2.$$

Si on arrête $X^{(n+1)}$ en $\mathcal{T}_n$, on obtient

$$\begin{aligned}\left(X^{(n+1)}\right)^{\mathcal{T}_n} &= \left(h^{\mathcal{T}_{n+1}} \cdot M^{\mathcal{T}_{n+1}}\right)^{\mathcal{T}_n} \\ &= h^{\mathcal{T}_{n+1}} 1_{[0,\mathcal{T}_n]} \cdot M^{\mathcal{T}_{n+1}} \\ &= h 1_{[0,\mathcal{T}_n]} \cdot M^{\mathcal{T}_n}\end{aligned}$$

on peut donc définir $h \cdot M$ en posant

$$(h \cdot M)_t = X_t^{(n)} \text{ sur } [0, \mathcal{T}_n].$$

$(h \cdot M)_t$ est une martingale locale continue car $(H \cdot M)^{\mathcal{T}_n} = X^n \in H^2$.

On a clairement

$$\langle h \cdot M, N \rangle = h \cdot \langle M, N \rangle$$

puisque

$$\langle h \cdot M, N \rangle^{\mathcal{T}_n} = (h \cdot \langle M, N \rangle)^{\mathcal{T}_n}$$

où $(\mathcal{T}_n)_n \to \infty$. ■

Proposition 2.3.1 *Soit M une martingale locale et soit $h \in \mathcal{H}^2_{loc}(M)$ alors, pour tout $t \geq 0$*

$$E\left[\left(\int_0^t h_s dM_s\right)^2\right] \leq E\left[\int_0^t h_s^2 d\langle M, M\rangle_s\right].$$

Corollaire 2.3.2 *(Inégalité deKunita- Watanab 2)*

Pour $h \in \mathcal{H}^2_{loc}(M)$, $K \in \mathcal{H}^2_{loc}(M)$

$$\left(\int_0^t h_s K_s d\langle M, N\rangle_s\right)^2 \leq \int_0^t h_s^2 d\langle M, M\rangle_s \int_0^t K_s^2 d\langle N, N\rangle_s.$$

Définition 2.3.1 *Un processus progressivement mesurable h est dit localement borné s'il* *existe une suite de temps d'arrêt* $(T_n)_n \to +\infty$ *et des constantes* C_n *tels que*

$$\left|h^{T_n}\right| \leq C_n.$$

Un processus h *adapté et continu est localement borné.*

Remarque 2.3.1 *L'intérêt de la définition précédente est que si* h *est progressivement mesurable et localement borné, alors pour toute martingale locale continue* M*, on a*

$$h \in \mathcal{H}^2_{loc}(M).$$

2.4 Intégrale stochastique par rapport à une semi-martingale

Définition 2.4.1 *Soit* $X = X_0 + M + V$ *une semi-martingale continue et soit* H *un processus progressif localement borné. L'intégrale stochastique* $h \cdot X$ *est alors définie par*

$$h \cdot X = h \cdot M + h \cdot V,$$

où M *est une martingale locale et* V *un processus à variation finie, nuls en* 0*, continus adaptés et* X_0 *est* $\mathcal{F}_0$*-mesurable, on note cette intégrale par*

$$(h \cdot X)_t = \int_0^t h_s dX_s.$$

On a les propeiétés suivantes

Propriété 2.4.1 **i)** *L'application* $(h, X) \to h \cdot X$ *est bilinéaire.*

ii) $h \cdot (K \cdot X) = (h \cdot K) \cdot X$*, si* h *et* K *sont localement bornés.*

iii) *Pour tout temps d'arrêt* $\mathcal{T}$*,* $(h \cdot X)^{\mathcal{T}} = h \cdot 1_{[0,\mathcal{T}]} \cdot X = h \cdot X^{\mathcal{T}}$*.*

iv) *Si X est une martingale locale (resp. si X est un processus à variation finie), alors $h \cdot X$ est une martingale locale (resp. $h \cdot X$ est un processus à variation finie).*

v) *Si $h \in \mathcal{S}$ s'écrit $h_s(\omega) = \sum\limits_{i=0}^{p-1} h_i(\omega) 1_{]t_i,t_{i+1}]}(s)$ avec $h_{(i)}$ $\mathcal{F}_{t_i}$-mesurable et bornée, alors*

$$(h \cdot X)_t = \sum_{i=0}^{p-1} h_i \left(X_{t_{i+1} \wedge t} - X_{t_i \wedge t} \right).$$

Proposition 2.4.1 *Soit X une semi-martingale continue et soit h un processus adapté à trajectoires continues. Alors, pour tout $t > 0$, pour toute suite $0 = t_0^n < \ldots < t_{p_n}^n = t$ de subdivision de $[0,t]$ de pas tendant vers 0, on a*

$$\lim_{n \to \infty} \sum_{i=0}^{p_n - 1} h_{t_i^n} \left(X_{t_{i+1}^n} - X_{t_i^n} \right) = \int_0^t h_s dX_s,$$

au sens de la convergence en probabilité.

Preuve. On peut traiter séparément les parties martingale et à variation finie de X. La partie à variation finie est traitée par le Lemme (1.1.1). On peut donc supposer que $X = M$ est une martingale locale issue de 0. Pour chaque n, dèfinissons un processus $h^{(n)}$ par

$$h_s^{(n)} = \begin{cases} h_{t_i^n} \text{ si } t_i^n < s \leq t_{i+1}^n \\ 0 \text{ si } s > t \text{ ou } s = 0. \end{cases}$$

Posons enfin pour tout $p \geq 1$

$$\mathcal{T}_p = \inf \{ s \geq 0 : |h_s| + \langle M, M \rangle \geq p \}$$

et remarquons que H, h^n et $\langle M, M\rangle$ sont bornés sur l'intervalle $]0, \mathcal{T}_p]$, pour tout p fixé

$$\begin{aligned}
E\left[\left(\left(h^{(n)}.M^{\mathcal{T}_p}\right)_t - \left(h.M^{\mathcal{T}_p}\right)_t\right)^2\right] &= E\left[\left(\left(h^{(n)}1_{[0,\mathcal{T}_p]}.M\right)_t - \left(h1_{[0,\mathcal{T}_p]}.M\right)_t\right)^2\right] \\
&= E\left[\left(\left(\left(h^{(n)} - h\right)1_{[0,\mathcal{T}_p]}\right).M\right)_t^2\right] \\
&= E\left[\int_0^t (h_s^{(n)} - h_s)^2 1_{[0,\mathcal{T}_p]}(s)\, d\langle M, M\rangle_s\right] \\
&= E\left[\int_0^{t\wedge\mathcal{T}_p} (h_s^{(n)} - h_s)^2 d\langle M, M\rangle_s\right]
\end{aligned}$$

converge vers 0 quand $n \to \infty$ par convergence dominée car $(h_s^{(n)} - h_s)^2$ est borné sur $[0, \mathcal{T}_p]$ par $(2p)^2$ et

$$E\left[\int_0^{t\wedge\mathcal{T}_p} (2p)^2 d\langle M, M\rangle_s\right] = 4p^2 E\left[\langle M, M\rangle_{t\wedge\mathcal{T}_p}\right] \leq 4p^2 E\left[\langle M, M\rangle_{\mathcal{T}_p}\right] \leq 4p^2 \times p = 4p^3$$

puis par continuité $\lim\limits_{n\to\infty} h^n = h$ pour tout $s \geq 0$, on a donc $\left(h^n.M^{\mathcal{T}_p}\right)_t \to \left(h.M^{\mathcal{T}_p}\right)_t$ dans L^2 et en utilisant la propriété d'arrêt, on en déduit la convergence dans L^2

$$\lim_{n\to\infty} (h^n.M)_{t\wedge\mathcal{T}_p} = (h.M)_{t\wedge\mathcal{T}_p}.$$

Pour conclure, on remarque que $P(\mathcal{T}_p > t) \nearrow 1$ quand $p \to \infty$, ce qui affaiblit la convergence L^2 obtenue en une convergence en probabilité. ■

Théorème 2.4.1 *Soient X une semi-martingale et $F:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ une fonction de classe C^2 alors*

$$F(X_t)=F(X_0)+\int_0^t F'(X_s)\,dX_s+\frac{1}{2}\int_0^t F''(X_s)\,d\langle X,\ X\rangle_s.$$

Si on considère p semi-martingale continue $X^1,...,\ X^p$ et $F:\mathbb{R}^p\to\mathbb{R}$ de classe C^2 alors,

$$F(X_t^1,...,X_t^p)=F(X_0^1,...,X_0^p)+\sum_{i=1}^{p}\int_0^t\frac{\partial F}{\partial x_i}(X_s^1,...,X_s^p)\,dX_s$$
$$+\frac{1}{2}\sum_{i,\ j=1}^{p}\int_0^t\frac{\partial F}{\partial x_i\partial x_j}(X_s^1,...,X_s^p)\,d\langle X^i,X^j\rangle_s.$$

Du htéorème précédant on peut deduire la forme différentielle de la formule d'Itô

$$dF\left(X_t^1,...,X_t^p\right)=\sum_{i=1}^{p}\frac{\partial F}{\partial x_i}\left(X_s^1,...,X_s^p\right)dX_s+\frac{1}{2}\sum_{i,\ j=1}^{p}\frac{\partial F}{\partial x_i\partial x_j}\left(X_s^1,...,X_s^p\right)d\left(X^i,X^j\right)_s.$$

Intégration par partie

Corollaire 2.4.1 *Si X et Y sont deux semi-martingales continues, on a*

i) $X_t^2=X_0^2+2\int_0^t X_sdX_s+\langle X,X\rangle_t$.

ii) $X_tY_t=X_0Y_0+\int_0^t X_sdY_s+\int_0^t Y_sdX_s+\langle X,Y\rangle_t$.

Preuve.

i) Soit $(\Delta_n)_n$ une suite de subdivisions de $[0,t]$ telle que $|\Delta_n|\to 0$, alors

$$X_t^2-X_0^2=\sum_i\left(X_{t_{i+1}^n}^2-X_{t_i^n}^2\right)$$
$$=2\sum_i X_{t_i^n}\left(X_{t_{i+1}^n}-X_{t_i^n}\right)+\sum_i\left(X_{t_{i+1}^n}-X_{t_i^n}\right)^2$$

Donc, lorsque $|\Delta_n| \to 0$, $X_t^2 - X_0^2$ converge en probabilité vers

$$2\int_0^t X_s dX_s + \langle X, X\rangle_t$$

ii) D'aprés l'inégalité (i) on l'applique à $X+Y$ et à $X-Y$ on trouve

$$\begin{aligned}
X_tY_t &= \frac{1}{4}\left[(X_t+Y_t)^2 - (X_t-Y_t)^2\right] \\
&= \frac{1}{4}\left[(X_0+Y_0)^2 - (X_0-Y_0)^2\right] \\
&+ \frac{1}{4}\left[2\int_0^t (X_s+Y_s)\,d(X_s+Y_s) - 2\int_0^t (X_s-Y_s)\,d(X_s-Y_s)\right] \\
&+ \frac{1}{4}\left[\langle X+Y, X+Y\rangle_t - \langle X-Y, X-Y\rangle_t\right] \\
&= X_0Y_0 + \int_0^t X_s d(Y_s) + \int_0^t Y_s d(X_s) + \langle X, Y\rangle_t
\end{aligned}$$

puisque par définition

$$\langle X, Y\rangle_t = \frac{1}{4}\left[\langle X+Y, X+Y\rangle_t - \langle X-Y, X-Y\rangle_t\right].$$

■

Bibliographie

[1] Abdelaziz, B., (2008).Etude du calcul stochastique : martingales, mouvement brownien et intégration d'Itô.

[2] Damien, L. Bernard L.,(2012). Introduction au calcul stochastique appliqué à la finance.

[3] Jeanblanc, M., Simon, T. (2005). Eléments de calcul stochastique. IRBID, septembre.

[4] Jean-Christophe, B., (2017). Processus stochastique M2 Mathématiques, Université de Rennes 1.

[5] Jean-Claude, L., (2014).Processus et intégrales stochastiques.

[6] Le Gall, J. F., (2012). Mouvement brownien, martingales et calcul stochastique (Vol. 71). Springer Science & Business Media.

[7] Nadine, G., (2009).introduction au calcul stochastique.

[8] Nils, B., (2012). Martingales et calcul stochastique, Master 2 Recherche de Mathématiques Université d'Orléans.

[9] Philippe, B., (2015). Calcul Stochastique des martingales continues.

Annexe : Abréviations et Notations

Les différentes abréVariations et notations utilisées tout au long de ce mémoire sont expliquées ci-dessous.

$\left(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}, P\right)$	:	Espace de probabilité filtré.
$\sigma(X)$	:	tribu engedrée par X
$\mathcal{B}(\mathbb{R})$	:	tribu borélien sur $\mathbb{R}$
$X \overset{\mathcal{L}}{=} Y$	:	X égal à Y en loi
$E[X]$	:	espérance de X
$Var(X)$	:	variance de X
$Cov(X, Y)$	:	covariance entre X et Y
$p.s$	:	presque sûrement
$p.p$	:	presque partout
$A^{\perp}$	:	l'orthogonale de A
$\mathcal{N}(0, t)$	:	La loi Gaussienne centré de variance t.
$\lVert . \rVert$	:	la norme
$i.e$	:	c'est à dire
$resp$	:	respectivement
$prog$	:	progressif