

République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

UNIVERSITÉ MOHAMED KHIDER, BISKRA

FACULTÉ des SCIENCES EXACTES et des SCIENCES de la NATURE et de la VIE

DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES



Mémoire présenté en vue de l'obtention du Diplôme :

MASTER en Mathématiques

Option : **Statistique**

Par

LAMRI Mourad

Titre :

La maîtrise statistique des processus et applications

Membres du Comité d'Examen :

Dr. DJABER Ibtissem	UMKB	présidente
Dr. TAMER Lazhar	UMKB	Encadreur
Dr. OUANOUGHY Yasmina	UMKB	Examinatrice

Juin 2018

Remerciements

Je remercie, **Dr. Thamer Lazher** mon tuteur de thèse ainsi que **Dr. Djebrane Yahia** pour leurs conseils, leurs aides et le temps qu'ils m'ont consacré tout au long du travail.

Mes vifs remerciements vont également aux membres du jury : **Dr. Djaber Ibtissem** et **Dr. Ouanoughi Yasmina** pour l'intérêt qu'ils ont porté à mon recherche en acceptant d'examiner mon travail et de l'enrichir par leurs propositions.

Dédicace

... à ma petite famille : **A - A - A**

RESUME

Les entreprises évolues, depuis quelques décennies maintenant, dans une atmosphère de compétitivité accrue. La maîtrise Statistique des Procédés (MSP) répond à un passage d'une stratégie de contrôle à une stratégie de prévention. Mais que recouvre cette méthode, quels sont les moyens et quels sont les fondements ? A travers cette étude je développeras les des deux outils de la MSP : les cartes de controle et les calculs de capabilité, en s'appuyant sur deux cartes et sur des normes qui définissent différentes méthodes de calculs de capabilité, et sur des études de cas par simulation pour réaliser l'ampleur de ces outils.

ABSTRACT

The companies evolve, since some decades now, in an atmosphere of increased competitiveness. Statistic Process Control (SPC) answers a passage of a strategy of control to a strategy of prevention. But what covers this method, and which are the bases and the tools ? Through this study I will develop the two tools of the SPC : the quality charts and calculations of capability, while being based on two types of charts and on the standards which define various methods of calculation from capability, and on simulated case studies to carry out the width of these tools.

Table des matières

Table des matières	4
1 Généralités et Définitions de Base	8
1.1 Aperçu historique	8
1.2 La qualité	9
1.2.1 Définitions	9
1.3 Le contrôle de qualité	10
1.4 Le processus de production	11
1.4.1 Définition	11
1.4.2 Stabilité d'un processus de production	11
1.5 Les causes (facteurs) de variation	13
1.6 Bénéfices de maîtrise statistique des processus	14
2 Les cartes de contrôle	15
2.1 Principes généraux sur une carte de contrôle	15
2.1.1 Définition d'une carte de contrôle	15
2.1.2 Principe d'une carte de contrôle	16
2.1.3 Choix des limites de contrôle	17
2.1.4 Types des cartes de contrôle	18
2.2 Carte de contrôle de <i>Shewhart</i>	19
2.2.1 Carte de contrôle par mesures	19
2.2.2 Cartes de contrôle par attributs	22

2.3	La carte des sommes cumulées CUSUM	22
2.3.1	Définition	23
2.3.2	Principe	23
2.3.3	Comparison entre la carte CUSUM et la carte de Shewhart .	24
3	Analyse de capabilité d'un processus	25
3.1	Le taux de produit conforme	26
3.2	Les indices de capabilité	27
3.2.1	L'indice de capabilité C_p	27
3.2.2	L'indice de position K	27
3.2.3	Estimation des indices C_p et K	28
3.2.4	Test d'hypothèse sur les indices C_p et K	29
3.2.5	Les indices C_{pu} et C_{pl}	30
4	La simulation numérique d'un maitrise de processus	32
4.1	Présentation du logiciel R	32
4.2	présentation des données	33
4.3	Les cartes de controle	33
4.4	Etude de Capabilité	35
4.5	Autres Applications	37
	Conclusion	39
	Bibliographie	40
	Annexe	41

Introduction

Un processus transforme des entrants, par exemple des matières premières, en sortants. Les sortants peuvent être des produits physiques ou des services. Le produit obtenu, physique ou non, présente des caractéristiques dont certaines sont importantes pour le client ou l'utilisateur. Cette transformation peut être différente selon le réglage de différents paramètres réglables du processus ou selon le niveau d'autres facteurs qui peuvent être subis (par exemple, la température extérieure).

Maîtriser le processus, c'est être capable de prévoir les caractéristiques du produit étant donné le niveau de l'ensemble des paramètres influents du processus. C'est aussi être capable d'ajuster les paramètres réglables du processus en fonction du niveau des facteurs influents subis pour que les caractéristiques du produit soient conformes aux attentes.

La MSP est une méthode préventive de gestion de la qualité qui vise à amener tout processus au niveau requis de régularité de qualité et à l'y maintenir grâce à un système de surveillance statistique permettant de réagir rapidement et efficacement à des dérives, évitant ainsi la production de produits non conformes.

Ce travail sera construit comme suit : le premier chapitre est consacré à donner les définitions de base et les concepts générale de controle. Dans le deuxième chapitre on developera l'outils principale de controle : les cartes de controle, ce chapitre consiste à déterminer comment dessiner une carte, quels sont les différents types on se basé sur la carte de Shéwhart et la cartes CUSUM.

Le troisième chapitre expliquera les indices de capabilité d'un processus et le taux de produit conforme, ainsi que les tests d'hypothèse pour chaqu'un des indices. Le quatrième chapitre représente une simulation numérique en utilisant le logiciel R, là où on applique tous des chapitres précédents : génération des données, cartes de controle et etude de capabilité.

Chapitre 1

Généralités et Définitions de Base

1.1 Aperçu historique

La maîtrise statistique des procédés a un long cours de développement commencé en 1928 quand un groupe des ingénieurs de Western Electric company (USA) utilisent le calcul de probabilités pour des inspections de leurs matériels téléphoniques. un an après (1929) la naissance de comité pour le développement et l'application des statistiques.

En 1931, Walter.A.Shewhart (1891-1967) le jeune physicien américain à Bell Telephone laboratory aux USA développait la plus part des techniques de base maîtrise Statistique des Procédés (MSP), il créa les cartes de contrôle statistique et publia "the economic control of the quality of manufactured products, New York", c'est pour cela il est considéré comme le père de MSP.

A l'Angleterre les méthodes de MSP furent diffusées dès 1933, d'où le British Standard Institution (qui elle date des années 1900) créa la fondation d'un comité d'études statistique.

1935 était la naissance d'un ouvrage capital par E.S Pearson "The application of statistical methods to industrial standardisation and quality control".

Pendant la deuxième guerre mondiale, le département de guerre basé sur une commission d'étude : "statistical research group" qui publia plusieurs écrits sur le MSP.

En 1957 le département de défense publia la norme connue au niveau international "ABC STD 105" qui est référencée : "MILSTD105D".

Au Japon, le docteur W. Edwards Deming (1900-1994) fut invité en 1949 à donner des cours sur les méthodes statistiques dans l'industrie, à la fin des années 60, les japonais utilisaient intensément les méthodes proposées par le Dr. Deming et faisaient des progrès très rapides dans les domaines de qualité et l'augmentation de productivité.

1.2 La qualité

1.2.1 Définitions

Le mot "qualité" a une ancienne racine, il est d'origine latine (**qualis talis**) qui veut dire en Français (tel que), après ça il a été changé par "**cicéron**" à l'époque de César vers "**qualitas**" comme résumé de son sens.

On trouve aussi dans le code de Hammourabi (Roi de Babylone au 18^{ème} siècle) plusieurs règles et lois économiques qui contiennent le mot (critère) qui veut dire qu'il existait déjà des conditions sur la production.

La qualité a plusieurs définitions, chacune selon ses nécessités et forme d'utilisation du produit, on va donner les différents points de vue sur la qualité (producteur, consommateur, statisticien, spécialiste,...), ainsi que la définition classique de ce terme.

Le (produit / service) est le résultat d'un processus de travail qui se compose de différentes étapes : études des besoins, conception, fabrication, gestion de ventes, "si ce processus est mal défini ou mal mis en œuvre, s'il comporte des défauts, s'il n'est pas orienté vers la bonne cible, le résultat ne sera pas de qualité".

Donc la qualité est le résultat d'une chaîne (fournisseur - client)

La définition classique de la qualité selon la norme ISO 8402 est : " un ensemble des caractéristiques d'une entité qui lui confèrent l'aptitude à satisfaire des besoins exprimés ou implicites".

Selon la norme Japonaise, la qualité "est un système de moyens conçus pour produire économiquement les marchandises ou services ayant la qualité qui convient aux exigences de l'acheteur".

La qualité peut être la garantie par la quelle s'engage le fournisseur à reprendre ou changer sa marchandise en cas de panne prématurée, cette garantie formalisée (si elle existe) une population pour le consommateur et un facteur de vente puissant pour le producteur.

On va exposer maintenant les différents types de définition :

a) Pour le consommateur : le choix de consommateur est basé sur la satisfaction du besoin attendue, pour un produit complexe : la garantie est sa durée.

la confiance, la fidélité à une marque ou l'opposition d'un certificat de conformité sont en conséquence des éléments qui poussent le consommateur à toujours faire plus d'achat.

Donc, pour le consommateur la qualité est l'espérance de bon fonctionnement de ce qu'il a acquit.

b) Pour le producteur : il affirme la qualité supérieure de ses produits. il fait de la qualité la clef de voute de son action publicitaire.

En effet, c'est souvent forcé par des lois (aiguillonnés par le marché), ce qui lui permet de baisser ses couts et par voie de conséquence il devient plus concurrentiel.

En générale, pour un producteur la qualité est ce qu'il produit.

c) Pour le staticien : il ne jure que par les chiffres et les courbes, il fait des études statistiques qui permettent de prendre une décision afin d'accepter ou rejeter un lot.

Ces études, le développement de l'informatique aidant, reposant de plus en plus sur des outils pointus telles que l'analyse des données, l'approche multicritères ..

Donc pour le staticien la qualité est assurée par des tolérances calculées et respectées au niveau opérationnel.

1.3 Le contrôle de qualité

Ce mot traduit en anglais a comme sens de "inspection" par contre le mot anglo-saxon "contrôle" se traduit dans la langue française par le mot " maîtrise", si on a une definition classique de la qualité, le contrôle de qualité est :

- Accepter ou rejeter un lot.
- Continuer ou non à produire une certaine composante.

- Amener un réglage.

On a plusieurs formes (méthodes) de faire un contrôle de qualité, il peut être :

Le contrôle à 100 : il est utilisé généralement pour le contrôle des services car il est très coûteux pour des biens.

Le contrôle par attributs : dans ce cas il se fait sur des lots de pièces ou des petits ensembles. L'unité à contrôler est considérée comme bonne si elle ne présente aucun défaut critique, la qualité s'exprime en fonction pourcentage de défectueuse.

Le contrôle par décompte de défauts : ce type de contrôle est utilisé pour les matières continues comme des bobines, touriers, ..., ou des grands ensembles comme les moteurs.

Le contrôle par mesure : il est utilisé lorsque la caractéristique étudiée soit mesurable ou réparable. généralement un intervalle qui définit les limites d'acceptation accompagnée le contrôle par mesure.

1.4 Le processus de production

1.4.1 Définition

Un processus de fabrication est un ensemble des phases de développement d'un produit. Souvent un procédé est décomposé en une chaîne des processus initiales forment une suite des opérations de production, par exemple une étape élémentaire reprenant les personnes, l'équipement, les matières premières, les méthodes et l'environnement qui travaillent ensemble pour fabriquer un produit donné.

On parle de (5M) pour nommer les différentes composantes d'un processus : main d'oeuvre, Machine, Matière première, Méthode et Milieu.

1.4.2 Stabilité d'un processus de production

Il est fort probable que la fabrication d'un certain produit ne restera pas toujours dans un état stable et idéal, car la caractéristique qu'on veut contrôler peut être influencée par

plusieurs facteurs comme le dérèglement de la machine, changement du matière première, changement d'équipe des opérateur, ...

Alors un processus de production est dite stable si les paramètres de distribution de la caractéristique contrôlée se maintiennent au même niveau dans le temps.

- La figure (1.1) représente une fabrication stable puisque la distribution de la caractéristique est toujours centrée à la même valeur (moyenne) avec une dispersion constante par le temps. Cette situation stable de fabrication peut être respectée pour une période déterminée, mais pour une période de longue durée cette situation peut changer radicalement si un facteur important influence sur le processus.

- La figure (1.1) illustre un exemple de cet changement :

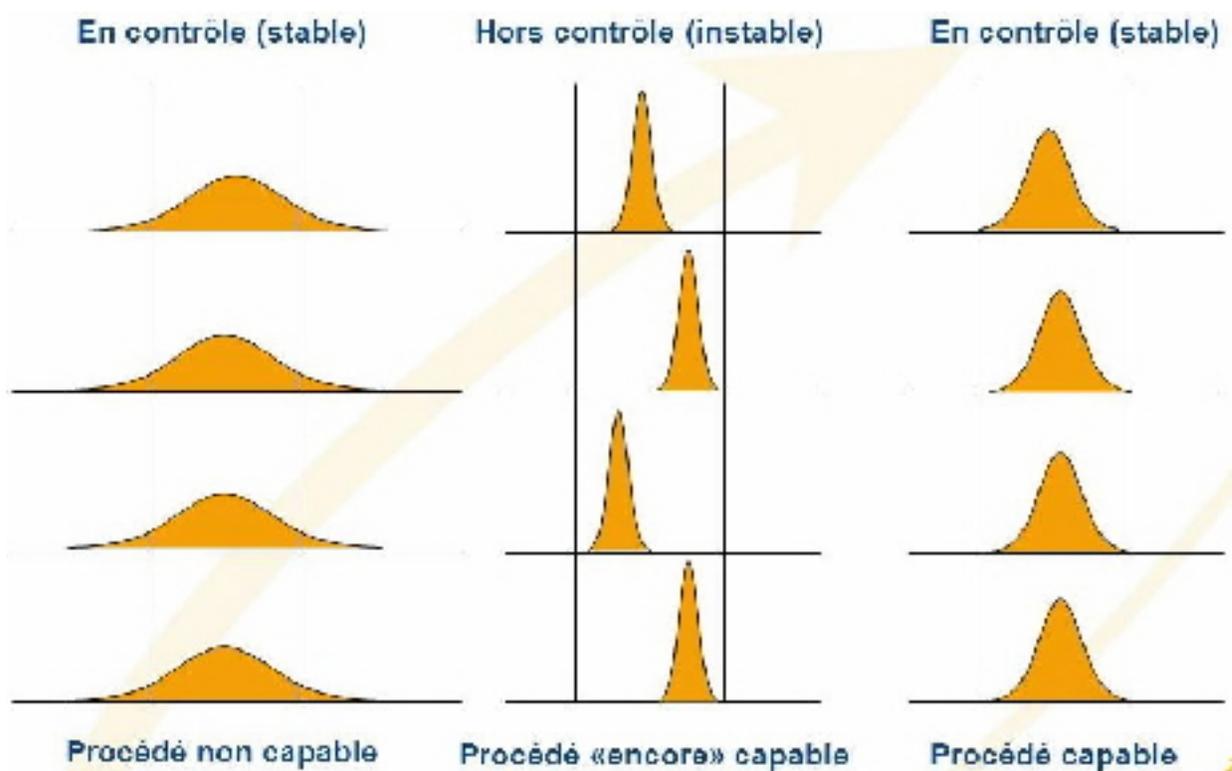


Fig 1-1 : Stabilité des processus

1.5 Les causes (facteurs) de variation

Pour contrôler efficacement un processus et réduire la variabilité, il est utile d'identifier les causes de variation qui sont habituellement classées selon deux (02) grandes catégories : les causes accidentelles et les causes non accidentelle.

A- Les causes non accidentelles (normales)

Les causes normales ou aléatoires reprenent l'ensemble des sources de variations inhérentes au processus de fabrication qui sont présentées même si le procédé est mené exactement de la même manière d'habituellement, elle provient de plusieurs facteurs : matière première, équipements, opération manuelle, environnement, méthode de travail, ..., et qu'un procédé sous contrôle statistique ne subit que les causes normales de variation, dans ce cas les distributions des caractéristiques du produit sont stables dans le temps.

B- Les causes accidentelles (spéciales)

Toutes les causes qui affectent progressivement ou brusquement le processus de fabrication sont dites accidentelles ou spéciales (assignables), en générale non prévisibles. Plusieurs facteurs peuvent provoquer une brusque variation parmi ces facteurs citons : les matières premières non homogènes ou incorrectes, un nouveau opérateur qui mal effectue les ajustements nécessaires à la machine, mesure incorrecte d'une caractéristique ...

Dans ce cas le processus n'est plus sous contrôle statistique et les distributions des caractéristiques deviennent imprévisibles.

Nous donnons ici certain nombre de facteurs qui peuvent être comme des causes affectant le processus de fabrication :

- Erreurs de calculs ou mauvaises pointages.
- Mauvaise ajustement du procédé.
- Usure de pièce de l'équipement.
- Changement d'instrument de mesure.
- Manque de formation de l'opérateur.
- Modification dans la méthode de calibration.
- Usure de l'outillage ou manque d'ajustement.

- Fatigue de l'opérateur.
- Instrument instable.
- Différence dans les méthodes de travail du personnel.

1.6 Bénéfices de maîtrise statistique des processus

L'effet principale recherché est d'améliorer la production et la productivité et diminuer les couts (rebuts, retouches, rationalisation des plans de contrôle). Ils existent des autres effets comme :

- 1- L'amélioration de la démarche de résolution des problèmes de qualité en production (facilité de trouver les causes).
- 2- L'amélioration de l'image de l'entreprise vis à vis ses clients.
- 3- Permet de mesurer la capabilité (l'aptitude) du processus car il donne une estimation de la tendance de la caractéristique étudiée (sa variabilité).
- 4- Il est considéré comme un langage simple pour représenter un procédé de fabrication et etudier sa efficacité.

On résume, le contrôle de qualité est la vérification que certain produit répond aux besoins des clients. les étapes de production représentent un processus basé sur les 5M, ils existent des types de facteurs affectant sur ce procédé soient normales ou spéciales.

On a vue que les bénéfices de maîtrise statistique des processus ne reviennent pas seulement au producteur mais aussi au consommateur.

Le contrôle de qualité augmente les profits de l'entreprise et satisfaire le client.

Chapitre 2

Les cartes de contrôle

Ce chapitre est consacré pour définir un outil de base pour le contrôle des processus, c'est la carte de contrôle.

Tout d'abord on essaye de donner quelques principes générales à l'utilisation d'une carte de contrôle : la définition, son principe d'utilisation (le choix de ses limites et le paramètre k), puis on présente quelques types des cartes de contrôle.

Aussi nous choisissons deux types de cartes : premièrement les cartes de *Shewhart* avec ses deux classes (par mesures ou par attributs), et ici on va plus détailler les cartes par mesures avec ses applications : $(\bar{X} - R, \bar{X} - S)$, puisque ils sont les plus utilisées en pratique. Deuxièmement on parle d'une carte de contrôle des sommes cummulées "*CUSUM*" et comment dessiner le masque en V comme des limites de contrôle, au but de faire une comparaison entre les deux cartes "*CUSUM*" et *Shewhart*.

2.1 Principes généraux sur une carte de contrôle

2.1.1 Définition d'une carte de contrôle

Une carte de contrôle est un graphique représentant une série des données émanant d'un procédé en fonction de temps, sur lequel on fait correspondre un point à chacun des valeurs d'une statistique calculée, peuvent être des valeurs individuelles, moyennes, étendues, écart-

types, proportion de défectueux, ou d'autre statistique à partir des échantillons (sous groupes) successivement prélevés dans une fabrication.

Donc une carte de contrôle est un moyen à la fois statistique et graphique de constater l'évolution d'un processus de fabrication dans le temps et d'en contrôler les principales caractéristiques.

- Le tracé d'une carte de contrôle s'effectue en indiquant en ordonnée la mesure statistique que l'on veut contrôler et en abscisse le numéro d'ordre d'échantillon (ou sa date de prélèvement) sur lequel à été calculée cette statistique, elle comporte habituellement trois(03) lignes :

- La ligne centrale représente la moyenne générale de la mesure du statistique évaluée sur l'ensemble des échantillons prélevés.
- Les deux (02) lignes en pointillées indiquent respectivement la limite supérieur et la limite inférieur de contrôle (LSC) et (LIC).

On peut aussi indiquer sur la carte de contrôle deux (02) autres limites sont : limite inférieur et supérieure de surveillance (LIS) et (LSS).

Le plan standard de carte est représenté dans la figure (2.1)



Fig 2-1 : Plan d'une carte de controle

2.1.2 Principe d'une carte de contrôle

Le principe d'une carte de contrôle set défini comme suit : quand le processus est sous contrôle presque tous les points doivent se trouvent entre les limites de contrôle, un point observé hors des limites de contrôle indique que le processus est hors contrôle. Donc il faut tenter en

trouver les raisons et éliminer les causes responsables de ces déviations de processus. où les limites de contrôle sont choisies en fonction de la distribution de probabilité de la statistique considérée, ainsi que les limites de surveillance sont souvent ajoutées aux limites de contrôle. Si un point est à l'extérieur des limites de surveillance et à l'intérieur des limites de contrôle donc une surveillance du processus de fabrication est nécessaire.

2.1.3 Choix des limites de contrôle

A) Les limites de contrôle : Le choix des limites de contrôle est une étape intéressante pour construire une carte de contrôle, ces limites dépendent de la caractéristique contrôlée ou la statistique représentée sur cette carte, et ses choix sont comme suit :

Soit ω une statistique de moyenne μ_ω et d'écart type σ_ω , à un instant donné i , ω_i peut être

la valeur d'une observation (X_i) d'une caractéristique (X), moyenne,

étendue ou écart-type d'un échantillon ($X_{i1}, X_{i2}, \dots, X_{in}$). Si $\omega_i = X_i$ alors $\mu_\omega = \mu$ et $\sigma_\omega = \sigma$

Généralement les limites de contrôle sont définies par :

$$\begin{aligned} LSC &= \mu + k\sigma \\ LC &= \mu \\ LIC &= \mu - k\sigma \end{aligned} \tag{2.1}$$

Où k est la distance des limites de contrôle à la ligne centrale.

On observe que les limites de contrôle sont positionnées symétriquement autour de la ligne centrale pour sa facilité d'utilisation, malgré que certaines statistiques ont des distributions qui ne sont pas nécessairement symétriques autour de ses moyennes.

B) Les limites de surveillance : Ces deux limites sont ajoutées à $(\pm 2\sigma)$ de la ligne centrale, on les note comme suit LSS (limite supérieure de surveillance) et (limite inférieure de surveillance LIS), si notre processus est sous contrôle un point a une probabilité égale 5% d'être hors limites de surveillance.

C) Le choix du paramètre k : La valeur de la paramètre k influence directement sur les erreurs de première et de deuxième espèce associé à la carte de contrôle.

Si k est grand le risque de fausse alarme (erreur de 1^{ère} espèce) est faible, mais l'erreur de 2^{ème} espèce est forte.

Si ω est une caractéristique contrôlée de distribution normale : $\omega \sim N(\mu_\omega, \sigma_\omega^2)$

Alors la probabilité d'observer une fausse alarme est :

$$\begin{aligned} P(\omega \leq LIC \text{ ou } \omega \geq LSC) &= P(\omega \leq LIC) + P(\omega \geq LSC) \\ &= P(\omega \leq \mu_\omega - k\sigma_\omega) + P(\omega \geq \mu_\omega + k\sigma_\omega) \\ &= P(Z \leq -k) + P(Z \geq k) \end{aligned} \quad (2.2)$$

avec $Z \sim N(0, 1)$ et $Z = \frac{\omega - \mu_\omega}{\sigma_\omega}$

Généralement on choisit $k = 3$ le choix le plus courant pour les limites de contrôle et $k = 2$ pour les limites de surveillance.

2.1.4 Types des cartes de contrôle

Ils existent plusieurs types de carte de contrôle qui sont utilisés pour représenter les les situations d'un processus de fabrication ; parmi ces cartes :

- Carte de contrôle de Shewhart
- Carte de contrôle de moyenne mobile
- Carte de contrôle de moyenne mobile à poids exponentiel. EWMA
- Carte de contrôle des sommes cumulée CUSUM/
- Carte de contrôle multivariables T^2 de Hotelling

Dans ce travail ont s'interrese à deux types de cartes de contrôle : carte de controle de *Shewhart* qui sont les plus utiliser, et on les compare par ecl de CUSUM

2.2 Carte de contrôle de *Shewhart*

2.2.1 Carte de contrôle par mesures

Dans le cas où la caractéristique contrôlée est mesurable par un appareil de mesure, par exemple diamètre d'un tige, poids ou durée de vie d'une pièce, température, pression, ... etc. On applique la carte de contrôle par mesures : moyenne, étendues, écarts-types.

A) Carte de contrôle pour moyennes et étendues $\bar{X} - R$

A-1) Definition : La carte de contrôle de type $\bar{X} - R$ est probablement la plus corament utilisée, c'est un graphique se construit à partir des données prélevées par des échantillons en fonction des instants de prélèvement (temps), elle permet de visualiser en parallèle l'évolution de la tendance centrale et la dispersion du procédé de fabrication sur deux (02) cartes : la première représente les moyennes des sous groupes ; et la seconde représente leurs étendues. On indique également sur chaque carte les limites de contrôle.

Soit $(X_{i1}, X_{i2}, \dots, X_{in_i})$ un échantillon de taille n_i prélevé au temps i , alors les points représentés sur les deux cartes sont respectivement : \bar{X} et R tel que :

$$\bar{X} = \frac{1}{n_i} \sum_{j=1}^{n_i} X_{ij} \quad (2.3)$$

$$R = \max(X_{ij}) - \min(x_{ij})$$

A-2) Le choix des limites de contrôle : pour le choix des limites de contrôle on s'intéresse au cas : μ et σ inconnus :

* **Pour la carte \bar{X} :** si μ et σ sont inconnus, ils seront estimés par les statistiques suivantes :

$$\hat{\mu} = \bar{\bar{X}} = \frac{\bar{X}_1 + \bar{X}_2 + \dots + \bar{X}_N}{N} \quad (2.4)$$

$$\hat{\sigma} = \frac{\bar{R}}{d_2} \text{ telque } \bar{R} = \frac{R_1 + R_2 + \dots + R_N}{N}$$

Donc, pour $k = 3$ les limites estimées pour la carte des moyennes deviennent :

$$\begin{aligned}
LSC &= \bar{\bar{X}} + \frac{3}{d_2\sqrt{n}}\bar{R} = \bar{\bar{X}} + A_2\bar{R} \\
LC &= \bar{\bar{X}} \\
LIC &= \bar{\bar{X}} - \frac{3}{d_2\sqrt{n}}\bar{R} = \bar{\bar{X}} - A_2\bar{R}
\end{aligned} \tag{2.5}$$

Où

$$A_2 = \frac{3}{d_2\sqrt{n}} \tag{2.6}$$

**** Pour la carte R :** les limites estimées sont :

$$\begin{aligned}
LSC &= \bar{R} - \frac{3d_3}{d_2}\bar{R} = D_4\bar{R} \\
LC &= \bar{R} \\
LIC &= \bar{R} - \frac{3d_3}{d_2}\bar{R} = D_3\bar{R}
\end{aligned} \tag{2.7}$$

Où

$$D_3 = 1 - \frac{3d_3}{d_2} \text{ et } D_4 = 1 + \frac{3d_3}{d_2} \tag{2.8}$$

Remarque (2.1) : la carte $\bar{X} - R$ est utilisée lorsque $n < 10$

B) Carte de contrôle des moyennes et écart-type $\bar{X} - S$

B-1) Définition : La carte de contrôle des moyennes et écart-types $\bar{X} - S$ est presque similaire de la carte $\bar{X} - R$, elle suit les mêmes principes à la différence que la range (étendue R_i) calculé sur l'échantillon i est remplacée par l'écart-type S_i ; tel que :

$$S_i = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{h=1}^n (x_{ij} - \bar{x}_i)^2} \tag{2.9}$$

Remarque (2.2) : • Cette carte sera préféré à la carte des étendues lorsque :

- La taille de sous groupes est relativement grand $n \geq 10$.
- La taille de sous groupes est varié de l'un à l'autre.
- Certain auteurs ont montré que pour des tailles faibles de sous groupes les cartes d'étendues et d'écart-type sont pratiquement équivalentes, et qu'on peut préféré la carte R pour sa facilité de calcule et sa utilisabilité même par des personnes non familières avec les techniques

statistiques.

Le cas : μ et σ inconnus :

*** Pour la carte \bar{X} :** si μ et σ sont inconnus, ils seront estimés par les statistiques suivantes :

$$\begin{aligned}\hat{\mu} &= \bar{\bar{X}} = \frac{\bar{X}_1 + \bar{X}_2 + \dots + \bar{X}_N}{N} \\ \hat{\sigma} &= \frac{\bar{S}}{C_4} \text{ tel que } \bar{S} = \frac{S_1 + S_2 + \dots + S_N}{N}\end{aligned}\quad (2.10)$$

Cet estimateur est préféré à celui de la carte précédente où on prendrait simplement la valeur de S calculée, alors :

Pour $k = 3$ les limites estimées pour la carte des moyennes deviennent :

$$\begin{aligned}LSC &= \bar{\bar{X}} + \frac{3}{C_4\sqrt{n}}\bar{S} = \bar{\bar{X}} + A_3\bar{S} \\ LC &= \bar{\bar{X}} \\ LIC &= \bar{\bar{X}} - \frac{3}{C_4\sqrt{n}}\bar{S} = \bar{\bar{X}} - A_3\bar{S}\end{aligned}\quad (2.11)$$

Où $A_3 = \frac{3}{C_4\sqrt{n}}$

**** Pour la carte S :** les limites estimées sont :

$$\begin{aligned}LSC &= \bar{S} + \frac{3\bar{S}}{C_4}\sqrt{1 - C_4^2} = B_4\bar{S} \\ LC &= \bar{S} \\ LIC &= \bar{S} - \frac{3\bar{S}}{C_4}\sqrt{1 - C_4^2} = B_3\bar{S}\end{aligned}\quad (2.12)$$

Où

$$B_3 = 1 - \frac{3}{C_4}\sqrt{1 - C_4^2} \text{ et } B_4 = 1 + \frac{3}{C_4}\sqrt{1 - C_4^2}\quad (2.13)$$

Remarque (2.3) :

Le modèle probabiliste régissant les cartes de contrôle par mesures est celui de la loi Normale.

Remarque (2.4) :

Les paramètres : $d_2, d_3, A_2, A_3, B_3, B_4, B_5, B_6, C_4, D_3, D_4$ sont données dans un tableau (Annexe 1).

2.2.2 Cartes de contrôle par attributs

Au contraire des cartes de contrôle par mesures, on applique les cartes de contrôle par attributs quand le produit étudié ne peut être pas caractérisé par une propriété mesurée sur une échelle numérique continue (un contrôle visuel par exemple), mais peut être classé en conforme ou non conforme ou bien caractérisé par un nombre (ou proportion) de défauts dans chaque unité contrôlée sur l'ensemble des unités, ou bien par la présence ou l'absence d'un critère qualitatif quelconque dans une unité de produit.

Généralement les principales cartes utilisées dans le contrôle par attribut sont :

- a) Carte de contrôle pour la proportion de défectueux (P).
- b) Carte de contrôle pour le nombre défectueux (nP).
- c) Carte de contrôle pour le nombre total de défauts dans l'échantillon (C).
- d) Carte de contrôle pour le nombre moyen de défauts par unité (U).

Remarque (2.5) :

- Il suffit de citer les cartes de contrôle par attribut car les cartes par mesures sont les plus utilisées.
- Le modèle probabiliste régissant les cartes P et nP est celui de la loi Binomiale.
- Le modèle probabiliste régissant les cartes C et U est celui de la loi Poisson.

2.3 La carte des sommes cumulées CUSUM

Après l'étude des cartes de contrôle de *Shewhart* et ses applications pour les deux (02) types (mesures et attributs), on observe qu'elles représentent un outil de base du MSP et faciles à l'utilisation.

Une carte de *Shewhart* est définie par une caractéristique importante est qu'un point dessiné représente uniquement l'information contenue dans l'échantillon considéré, et oublie les informations contenues dans les échantillons précédents. Ceci à rendre la carte de *Shewhart* relativement inefficace pour des petites dérives du processus de fabrication.

Alors on essaye de présenter une autre carte alternative à celles de *Shewhart* qui est plus

sensible pour détecter les petites dérives du procédé, mais son utilisation et son interprétation moins aisée; C'est la carte des sommes cumulées "CUSUM".

Comme la carte de *Shewhart*, la carte CUSUM peut être utilisée pour des valeurs individuelles, moyennes, étendues, proportion O, s'intéresse ici au cas le plus important "cas des valeurs individuelles".

2.3.1 Définition

Soit X_i la valeur d'une caractéristique mesurée sur un échantillon prélevé au temps (i) tel que : $X_i \sim N(\mu_0, \sigma^2)$

Les points représentés sur la carte CUSUM sont en fonction de i définis par la statistique suivante :

$$S_i = \sum_{j=1}^i (X_j - T) \quad (2.14)$$

Où :

- S_i = somme cumulée car elle est formé de la somme cumulée des dérivations des observations (valeurs) de la caractéristique contrôlée X_i à la valeur cible T . Cette statistique contient l'information contenue dans chacun des prélèvements précédents, cette caractéristique permet de détecter facilement les petites dérives.
- T : la valeur cible qui est généralement égale à μ_0 .
- Cette carte plus s'appliquer dans le cas où une carte des valeurs individuelles de *Shewhart* devrait être utilisée dans le cas où le nombre de prélèvement est faible.

2.3.2 Principe

La carte de somme cumulée (CuSum) est construite en utilisant les limites de contrôle du masque V de "l'ancienne école" qui étaient d'usage lorsque ces cartes étaient (littéralement) produites à la main.

Précisément, les points tracés dans la carte sont calculés en choisissant pour chaque échantillon i l'une des valeurs C_{i+} et C_{i-} , selon laquelle des deux valeurs absolues C_{i+} et C_{i-} est

la plus grande, où $Ci+$ et $Ci-$ sont calculés en fonction de l'intervalle de tolérance.

2.3.3 Comparaison entre la carte CUSUM et la carte de Shewhart

Ci dessus on essaye de résumer les principaux avantages et inconvénients d'une carte CUSUM par rapport à une carte Shewhart.

Avantages

- Elle set plus efficace pour détecter des petites dérives.
- La dérive du processus (ou de caractéristique) apparait visuellement sur la carte .
- Il est facile de déterminer en quel point le procédé à commencer la dérivation.

Inconvénients

- Elle peut être lente pour détecter les grandes dérives.
- Elle n'est pas très intéressante pour analyser des données passées et rechercher des cycles ou allures caractéristiques dans la distribution étudiée.
- Elle set moins facile d'utilisation par des opérateurs car elle ne représente pas directement la caractéristique étudiée.

En fin de donner une idée sur les cartes de contrôle de Shewhart et CUSUM, on conclue qu'elles ne controlent pas seulement le processus de fabrication, mais elles donnent une image du comportement du processus par l'intermédiaire de mesures (caractéristiques étudiées) sur le produit.

Alors une carte de contrôle est une image représente les situations (les états) d'un processus de fabrication par le temps, pour but de statuer la stabilité d'un processus et d'évaluer sa capacité relativement à des limites de spécifications (tolérance).

Egalement, on remarque que la carte de contrôle est un outil simple, facile à appliquer, sans l'intervention d'opération mathématiques compliquées, et permet d'assurer aux consommateurs une qualité acceptable. Ainsi que la carte des sommes cummulées CUSUM est plus sensible que celle de Shewhart pour détecter les petites dérives.

Chapitre 3

Analyse de capabilité d'un processus

Le contrôle d'un processus de fabrication consiste non seulement à constater les situations de fabrication (le procédé est sous contrôle ou non), et cet objectif peut être évalué par l'utilisation des cartes de contrôle pour vérifier si les distributions des caractéristiques mesurées sur le produit sont stables dans le temps. Mais également à évaluer si le procédé de fabrication adopté permet de fabriquer des pièces compatibles avec les spécifications, et cette évaluation s'effectue toutefois seulement lorsque le processus est statistiquement contrôlé. C'est à dire mesurer la capabilité ou l'aptitude de processus de fabrication.

- Donc l'analyse de capabilité a pour but de mesurer si le procédé répond et respecte aux certains critères formulés par le producteur ou par le client.

- Différents outils sont proposés pour effectuer ces types d'analyse, des outils graphiques (histogrammes et graphes de probabilité), et les indices de capabilité. Mais dans ce chapitre on s'intéresse aux indices de capabilité.

- L'analyse de capabilité est, en générale, faite sous l'hypothèse de normalité suivante :

Soit (X) une caractéristique mesurée sur le produit : $X \sim N(\mu, \sigma^2)$

Alors dans ce chapitre on essaye d'exprimer tout d'abord comment calculer le taux de produit conforme, aussi de définir essentiellement deux indices plus utilisés (C_p et K), ses estimateurs et en plus ses tests d'hypothèses.

3.1 Le taux de produit conforme

Pour caractériser la capabilité (l'aptitude) d'un processus de fabrication, il est impératif de mesurer la proportion (le taux) de produit qu'est dans les limites de spécifications.

Si la caractéristique étudiée (X) suit l'hypothèse : $X \sim N(\mu, \sigma^2)$

Alors le taux de produit conforme P_δ se calcule comme suit :

$$\begin{aligned} P_\delta &= P(T_i < X < T_s) \\ &= P\left(\frac{T_i - \mu}{\sigma} < Z < \frac{T_s - \mu}{\sigma}\right) \end{aligned} \quad (3.1)$$

où $Z \sim N(0, 1)$

Donc pour déterminer la proportion de pièces non conformes par défaut, on calcule d'abord :

$$Z_1 = \frac{T_i - \mu}{\sigma}, \text{ et par estimation on trouve : } Z_1 = \frac{T_i - \bar{X}}{\hat{\sigma}}$$

et pour la proportion de pièces non conformes par excès, on calcule :

$$Z_2 = \frac{T_s - \mu}{\sigma} \text{ et par estimation on trouve : } Z_2 = \frac{T_s - \bar{X}}{\hat{\sigma}}$$

Alors la probabilité d'observer une valeur entre Z_1 et 0 soit

$$P_1 = P(Z_1 < Z < 0) \quad (3.2)$$

et la probabilité d'observer une valeur entre 0 et Z_2 soit :

$$P_2 = P(0 < Z < Z_2) \quad (3.3)$$

Donc la probabilité d'observer une valeur entre Z_1 et Z_2 (le taux de produit conforme) est :

$$P_\delta = P_1 + P_2 = P(Z_1 < Z < Z_2) \quad (3.4)$$

Par conséquent la probabilité (proportion) de pièces non conformes est simplement : $1 - (P_1 + P_2)$ alors :

- La proportion de pièces non conformes par défaut est : $(0.5 - P_1)$
- La proportion de pièces non conformes par excès est : $(0.5 - P_2)$

3.2 Les indices de capabilité

3.2.1 L'indice de capabilité C_p

L'indice de capabilité C_p est le plus utilisé par plusieurs entreprises, il a pour but de mesurer si la dispersion de la caractéristique étudiées (X) est plus ou moins grande par rapport à l'intervalle de tolérance $[T_i, T_s]$, il est défini comme suit :

$$C_p = \frac{T_s - T_i}{6 * \sigma} \quad (3.5)$$

Alors C_p est comme une mesure de pourcentage de l'intervalle de tolérance $[T_i, T_s]$ utilisé par la caractéristique étudiées (X) .

- Certain entreprise qualifient l'indice C_p comme suit :

valeur de C_p	évaluation
$C_p > 2.0$	très performant
$1.33 \leq C_p \leq 2$	performant
$1.0 \leq C_p \leq 1.33$	Acceptable
$C_p < 1.0$	Inacceptable

En générale une valeur de $C_p = 1.33$ comme une marge de sécurité (une valeur minimale acceptable pour plusieurs entreprises).

3.2.2 L'indice de position K

L'indice de position K a pour but de juger si la caractéristique étudiées (X) est bien centrée de la valeur cible T, il est définit comme suit :

$$\begin{aligned} K &= \frac{\mu - T}{(T_s - T_i)/2} \\ &= \frac{\mu - T}{\sigma} \\ \sigma &= \frac{T_s - T_i}{2} \end{aligned} \quad (3.6)$$

Alors on cherche une valeur de K proche de 0, une valeur $K = 0$ indique que le processus est

exactement centré sur la valeur cible T .

- Si $T = M$ (milieu de l'intervalle $[T_i, T_s]$) alors :

- $K \leq -1$: indique que la moyenne μ sur ou en dehors de la limite inférieure de spécification T_i .

- $K \geq 1$: indique que la moyenne μ sur ou en dehors de la limite supérieure de spécification T_s .

- Dans les deux cas ($K \geq -1$ et $K \leq 1$) au moins 50 % de produit est non conforme.

3.2.3 Estimation des indices C_p et K

Les deux indices C_p et K sont exprimés en terme de la moyenne μ et de l'écart-type σ de la caractéristique étudiées (X) et qui ne sont pas connus en pratique. Alors il faut les estimer à partir d'un échantillon (X_1, X_2, \dots, X_N) comme suit :

- L'estimateur de μ est $\hat{\mu}$ tel que :

$$\hat{\mu} = \bar{X} = \frac{\bar{X}_1 + \bar{X}_2 + \dots + \bar{X}_N}{N} \quad (3.7)$$

- L'estimateur de σ est $\hat{\sigma}$ tel que la valeur de l'estimateur $\hat{\sigma}$ varie par rapport la carte utilisée.

par exemple : pour la carte $\bar{X} - R$ on a $\hat{\sigma} = \frac{\bar{R}}{d_2}$

Où d_2 est obtenue du tableau des paramètres de table (Annexe 1) citée dans le chapitre précédent.

- L'intervalle de tolérance $[T_i, T_s]$ est donné par l'expert de l'entreprise ou l'organisation des normes.

- Alors les estimateurs \hat{C}_p et \hat{K} de C_p et K respectivement sont obtenues en remplaçant tout simplement μ et σ par \bar{X} et $\hat{\sigma}$

Estimation d'indice C_p : Un estimateur de C_p est donné par :

$$\hat{C}_p = \frac{T_s - T_i}{6\hat{\sigma}} = \frac{\frac{T_s - T_i}{2}}{3\hat{\sigma}} = \frac{\sigma}{3\hat{\sigma}} \quad (3.8)$$

Estimation d'indice K : Un estimateur de l'indice K est donné par :

$$\begin{aligned}\widehat{K} &= \frac{\overline{\overline{X}} - T}{(T_s - T_i)/2} \\ &= \frac{\overline{\overline{X}} - T}{\sigma}\end{aligned}\tag{3.9}$$

3.2.4 Test d'hypothèse sur les indices C_p et K

Pour l'indice C_p : Si par exemple on veut tester si la valeur de C_p dépasse une valeur choisie, généralement c'est 1.33 (la marge de sécurité), l'hypothèse correspond à ce test est :

$$H_0 : C_p \leq 1.33 = C_{p0} \quad (\text{Processus incapable})$$

$$H_1 : C_p > 1.33 \quad (\text{Processus capable})$$

- Pour ce test on utilise comme statistique de test :

$$\chi_{obs} = \frac{C_{p0}^2(n-1)}{\widehat{C}_p^2} \sim \chi_{n-1}^2\tag{3.10}$$

Qui a une distribution de Khi-deux à (n-1) degré de liberté.

On rejette H_0 si la valeur de la statistique est plus faible que le seuil critique :

$$\chi_{obs} < \chi_{(n-1, \alpha)}^2\tag{3.11}$$

Pour l'indice K : pour l'indice de position K, si on désire vérifier que la caractéristique étudiée (X) est bien centrée sur la valeur cible T, on testera l'hypothèse suivante :

$$H_0 : K = 0$$

$$H_1 : K \neq 0$$

- La variable de décision de ce test est :

$$\begin{aligned}t_{obs} &= \widehat{K} \sqrt{\frac{n\sigma^2}{\widehat{\sigma}^2}} \\ &= \frac{\overline{\overline{X}} - T}{\widehat{\sigma}/\sqrt{n}} \sim t_{n-1}\end{aligned}\tag{3.12}$$

Qui a une distribution de student à (n-1) degré de liberté.

Alors on rejette H_0 si

$$\left| t_{obs} \right| > t_{(n-1, 1-\frac{\alpha}{2})} \quad (3.13)$$

3.2.5 Les indices C_{pu} et C_{pl}

Si la statistique étudiée (X) ne comporte qu'une seule spécification soit :

- T_s : pour une caractéristique à minimiser.
- T_i : pour une caractéristique à maximiser.

Dans ce cas les indices C_{pu} et C_{pl} peuvent mesurer la capabilité de processus, ils mesurent la dispersion et la position de la distribution de la caractéristique par rapport à la limite de spécification.

Alors :

- Pour la limite inférieure de spécification (T_i) l'indice C_{pl} se définit par :

$$C_{pl} = \frac{\mu - T_i}{3\sigma} \quad (3.14)$$

et par estimation :

$$\widehat{C}_{pl} = \frac{\overline{\overline{X}} - T_i}{3\widehat{\sigma}} \quad (3.15)$$

- Pour la limite supérieure de spécification (T_s) l'indice C_{pu} se définit par :

$$C_{pu} = \frac{T_s - \mu}{3\sigma} \quad (3.16)$$

et par estimation :

$$\widehat{C}_{pu} = \frac{T_s - \overline{\overline{X}}}{3\widehat{\sigma}} \quad (3.17)$$

- Les indices C_{pu} et C_{pl} sont à maximiser.
- Une valeur de C_{pl} respectivement $C_{pu} \geq 1$ indique qu'au moins 99.85% de produit dans les spécifications, et une valeur C_{pl} respectivement $C_{pu} \leq 0$ indique que la moyenne μ est sur

ou en dehors des spécifications et qu'au moins 50 du produit est hors normes.

Conclusion : Les indices de capabilité exposés dans ce chapitre sont couramment les plus utilisés à l'industrie, on peut dire qu'ils sont l'outil principale pour prendre une décision sur l'aptitude d'un processus après l'observation du carte de contrôle qui représente ce procédé de fabrication.

On s'intéresse aussi à ses tests d'hypothèse qui sont nécessaire pour confirmer la validité des calculs.

On résume, pour qu'un processus puisse être déclaré sous contrôle, il est indispensable de connaître sa capabilité et que cette valeur soit acceptable. cet indicateur permet de déterminer si le processus est capable de produire dans l'intervalle de tolérance requis.

L'amélioration de la capabilité peut donc être obtenue soit par une révision de l'intervalle de tolérance dans le sens d'un élargissement, soit par la fiabilisation du processus pour diminuer la dispersion sur les valeurs mesurées.

En fin, on dit qu'un indice de capabilité est un outil arithmétique pour mesurer l'aptitude d'un produit donné, de plus il est la dernière étape de contrôle de qualité.

Chapitre 4

La simulation numérique d'un maîtrise de processus

Dans ce chapitre on fait une application numérique d'une maîtrise statistique des processus en utilisant le logiciel R, les données exploitées peuvent être enregistrées sur un fichier Excel ou bien rédigées directement sur le R sous forme d'un vecteur ou d'une matrice.

4.1 Présentation du logiciel R

Le logiciel R est un logiciel de statistique créé par Ross Ihaka & Robert Gentleman. Il est à la fois un langage informatique et un environnement de travail : les commandes sont exécutées grâce à des instructions codées dans un langage relativement simple, les résultats sont affichés sous forme de texte et les graphiques sont visualisés directement dans une fenêtre qui leur est propre. C'est un clone du logiciel S-plus qui est fondé sur le langage de programmation orienté objet S, développé par AT&T Bell Laboratories en 1988 . Ce logiciel sert à manipuler des données, à tracer des graphiques et à faire des analyses statistiques sur ces données.

La version R 1.0.0, première version officielle du langage R, est publiée le 29 février 2000

En 2003, ils ont créé la R Foundation for Statistical Computing pour soutenir le projet R et devenir un point de contact de référence pour ceux qui veulent prendre contact avec la communauté R. A ce moment, le langage compte plus de 200 bibliothèques développées par

la communauté scientifique qui utilise R

En 2015, plusieurs acteurs économiques importants comme IBM, Microsoft ou encore la société RStudio créent le R Consortium pour soutenir la communauté R et financer des projets autour de ce langage

En avril 2018, R est classé 12e dans l'index TIOBE qui mesure la popularité des langages de programmation

4.2 présentation des données

La gestion des données sous R n'est pas aussi évidente qu'il n'y paraît au premier abord. C'est essentiellement dû au fait que l'on ne "voit pas" les données comme sur un tableur de type Excel. Toutefois, R offre des outils puissants de recodage des variables et de reformatage des tableaux de données, et permet de lire quasiment tous les formats de fichiers de données utilisés dans le domaine statistique.

supposons qu'un appareil produise des pièces de $83cm \pm 2$, on prend un échantillon de 100 observations classés dans des sous groupes de 4 éléments.

Remarque : Si on travail avec des données réels il faut d'abord tester la normalité

4.3 Les cartes de controle

La partie pratique est basée sur la génération d'un échantillon de 100 observations, suit la loi normale dont la valeur cible de cette statistique étudiée est $\mu = 83$ et $\sigma = 0.90$

A- La carte de Shewhart

- Il faut installer le package **Control de qualité** (`qcc`) sur R, et la carte de Shewhart se manipule par la commande :

pour afficher une carte \bar{X}

$$qcc(DATA, type = "xbar", size = 4, nsigma = 3) \quad (4.1)$$

pour afficher une carte R

$$qcc(DATA, type = "R", size = 4, nsigma = 3) \tag{4.2}$$

- Les cartes obtenues sont comme suit :

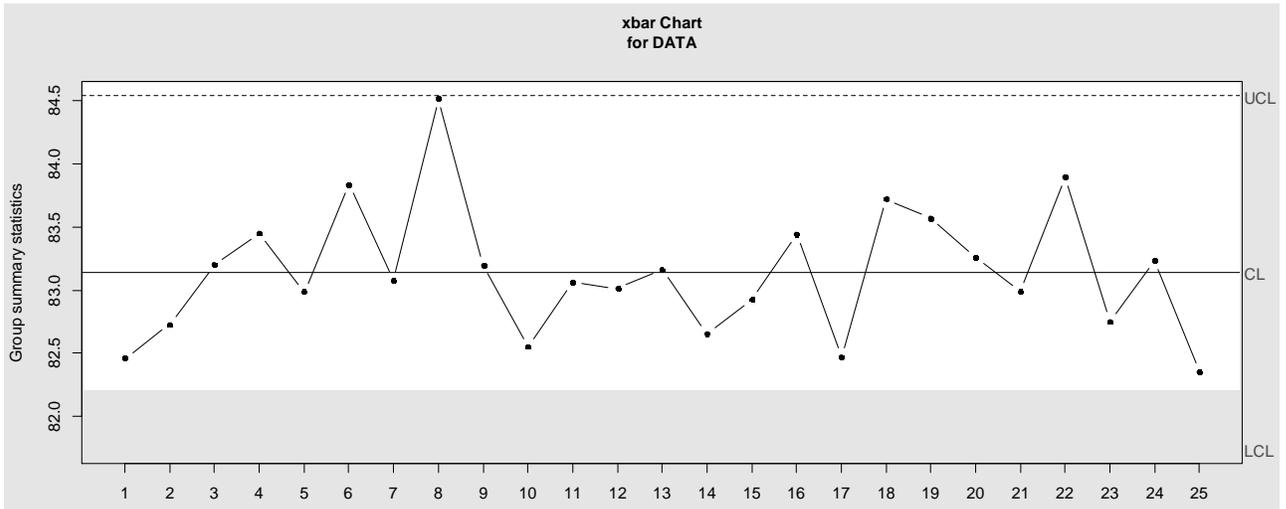


Fig 4.1 : La Carte X bar, Ech-1

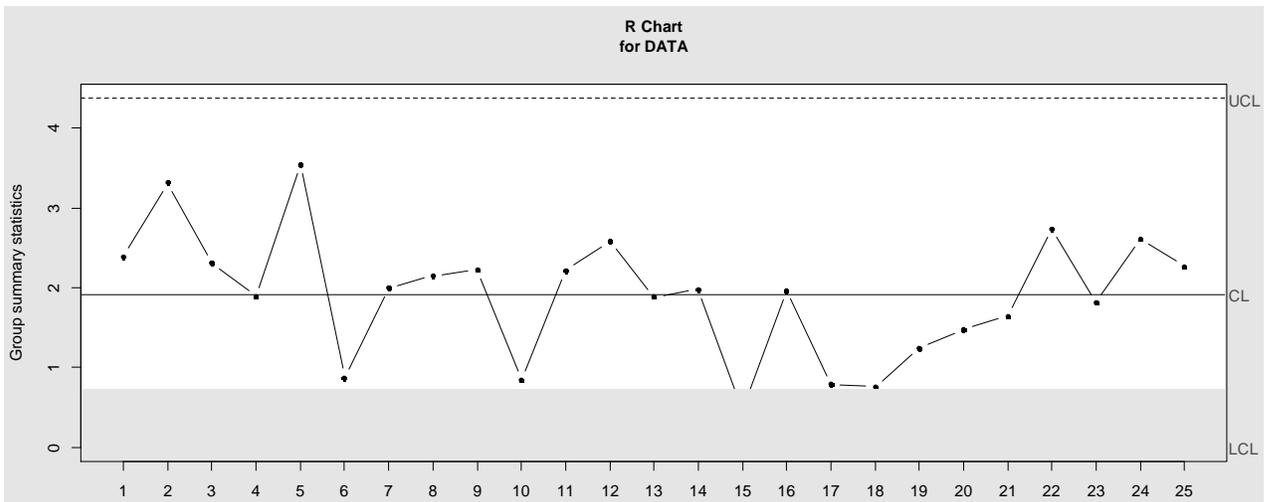


Fig 4.2 : La Carte R, Ech-1

B- La carte CUSUM

Pour les mêmes données précédentes, et avec la commande :

```
cusum(data,sizes,center,std.dev,head.start=0,decision.interval=5,se.shift=1,data.name,lab
```

L'application :

$$cusum(DATA, size = 4, std.dev = 0.9, head.start = 0, decision.interval = 1.5, se.shift = 1) \tag{4.3}$$

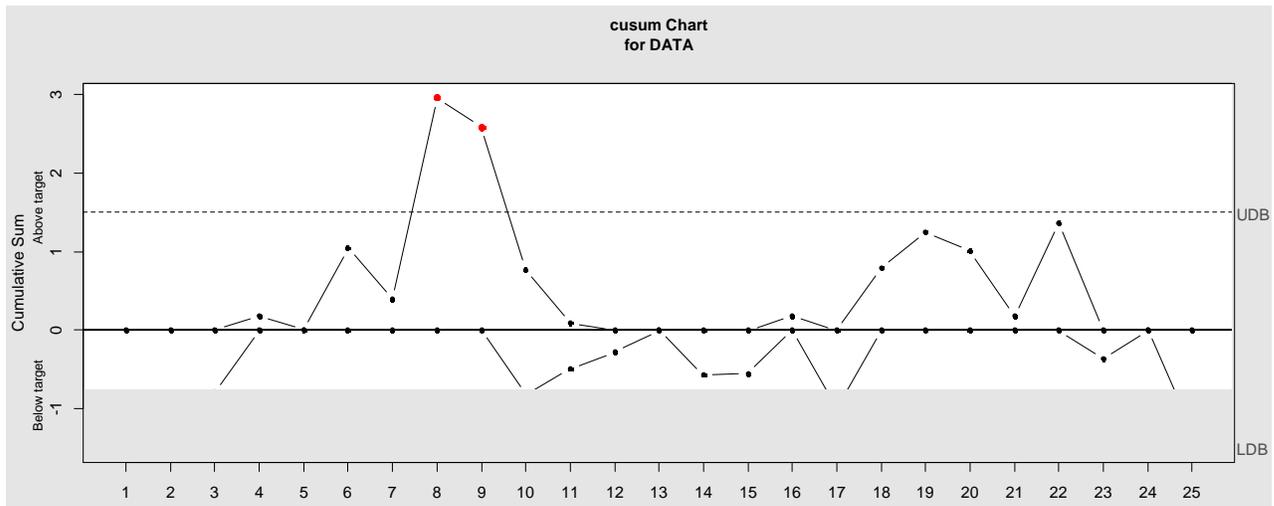


Fig 4.3 : La Carte CUSUM, Ech-1

Résultat 1 : On observe que la carte *cusum* détecte 02 points hors limites de controle, par contre les cartes cidessous n'ont rien afficher comme anomalie. Donc on dit que cette carte est plus sensible que les autres *xbare* et *R*

4.4 Etude de Capabilité

A- L'indice de capabilité C_p

L'indice de capabilité est estimé comme suit

$$\sigma = 0.90 \text{ et } \hat{\sigma} = 0.9313 \text{ donc } \widehat{C}_p = 0.3221 \tag{4.4}$$

Test d'hypothèse : On test $H_0 : C_p \leq 1.33 = C_{p0}$ (Processus incapable) contre $H_1 : C_p > 1.33$ (Processus capable)

- Pour ce test on utilise comme statistique de test :

$$\begin{aligned}\chi_{obs} &= \frac{C_{p0}^2(99)}{\widehat{C}_p^2} \sim \chi_{99}^2 \\ \chi_{obs} &= \frac{(1.33)^2(99)}{(0.3221)^2} = 1688.076\end{aligned}\tag{4.5}$$

D'après le tableau de Khi-2 (voir Annexe) on obtient $\chi_{99}^2 = 123.225$ pour $\alpha = 0.05$

Résultat 2 : On accepte H_0 : c'est à dire que le processus est incapable.

B- L'indice K

L'indice K est estimé par :

$$\widehat{K} = \frac{83.14 - 83}{3} = 0.0466\tag{4.6}$$

Test d'hypothèse : On test $H_0 : K = 0$ (Processus centré) contre $H_1 : K \neq 0$ (Processus non centré)

- Pour ce test on utilise comme statistique de test :

$$t_{obs} = \frac{\overline{X} - T}{\widehat{\sigma}/\sqrt{n}} = \frac{83.14 - 83}{0.9313/\sqrt{99}} = -1.4973 \sim t_{n-1}\tag{4.7}$$

qui a une distribution de student à (n-1) degré de liberté.

Alors on rejette H_0 si $|t_{obs}| > t_{(n-1, 1-\frac{\alpha}{2})}$

D'après le tableau de Student (voir Annexe) on obtient : $t_{99} = 1.98$ pour $\alpha = 0.05$

Résultat 3 : On accepte H_0 : $1.4973 < 1.98$ c'est à dire que le processus est bien centré à la valeur cible.

C- Le taux de produit conforme

On appliquant la relation (3.1) :on trouve

$$\begin{aligned}
 P_{\delta} &= P(T_i < X < T_s) = P\left(\frac{80-83.14}{0.9313} < Z < \frac{86-83.14}{0.9313}\right) \\
 &= F_Z(3.0709) - F_Z(-3.3716) \\
 &= F_Z(3.0709) + F_Z(3.3716) - 1 \\
 &= 0.9989 + 0.9996 - 1 = 0.9985
 \end{aligned}
 \tag{4.8}$$

Basé sur la table de la loi Normale centré réduite (voir annexe).

Résultat 4 : le taux de produit conforme est 99.85%. par suite on calcule le taux de produit non conforme est 0.15%

4.5 Autres Applications

Je proposes une autre opération de simulation avec un échantillon de 200 observations

A- Les cartes

`test1 = rnorm(200, mean = 10, sd = 1)`

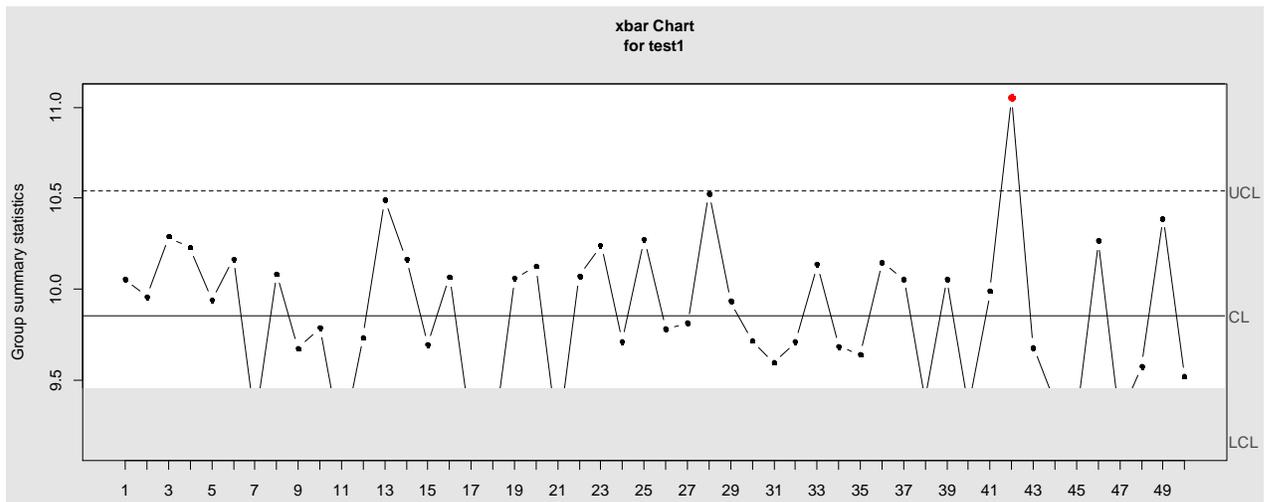


Fig 4.4 : La Carte X bare, Ech-2

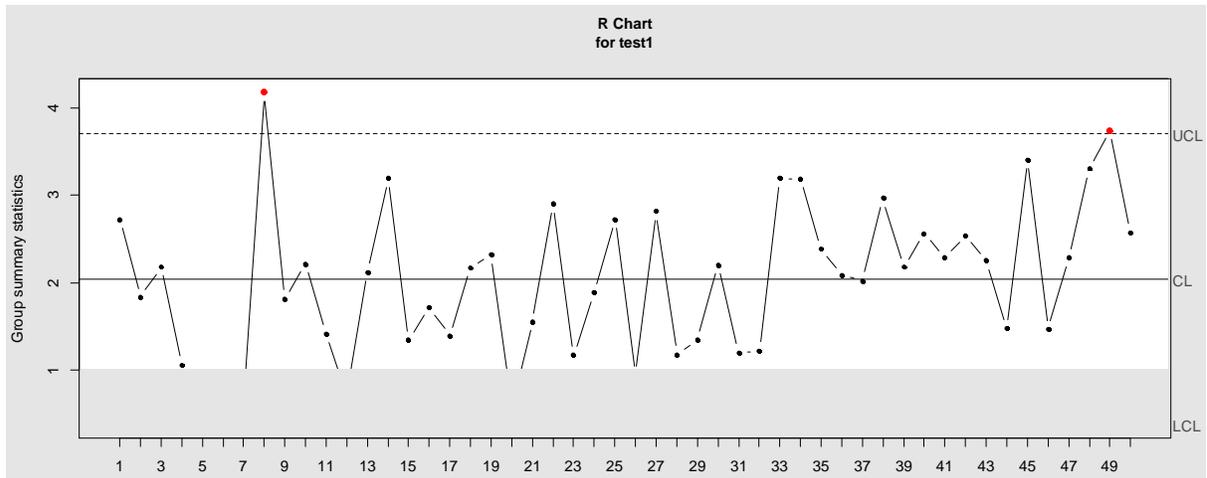


Fig 4.5 : La Carte R, Ech-2

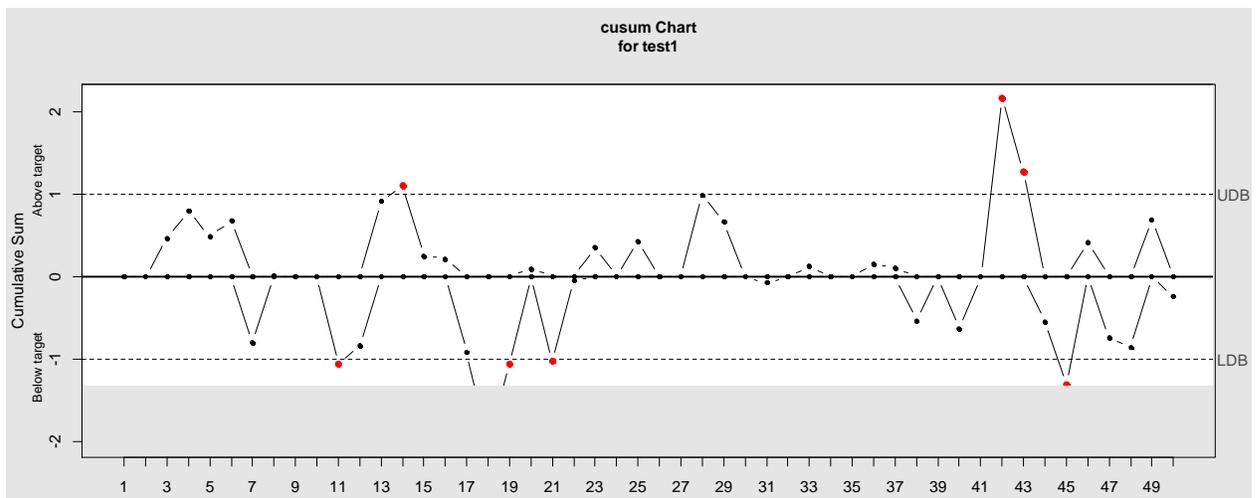


Fig 4.6 : La Carte CUSUM, Ech-2

B- La capacité

L'indice de capacité est estimé par la relation $\sigma = 1.0$ et $\hat{\sigma} = 0.6867$ donc $\widehat{C}_p = 0.4854$

Résultat 5 : c'est à dire que le processus est incapable.

L'indice K est estimé par la relation: $\widehat{K} = \frac{9.8543-10}{3} = 0.0485$

Résultat 6 : on accepte que $\widehat{K} = 0$ c'est à dire que le processus est bien centré .

Conclusion

Ce travail explique un peu le rôle des méthodes statistiques et mathématiques dans le domaine de contrôle statistique des processus, et démontre que la meilleure manière de juger un processus de production est de le représenter par une carte, pour dire s'il est ajusté, stable, ou non ?.

Le choix d'une carte revient d'abord aux besoins de l'opérateur : s'il veut extraire les petites dérives il doit construire une carte CUSUM, s'il veut une carte rapide et facile à manipuler il va construire celle de Shewhart.

Un autre très important résultat de cet mémoire c'est bien les indices de capacité des processus, l'indice de position et le taux de produit conforme. Le calcul de ces indices est indispensable dans la vie pratique des industries, on peut le considérer comme une preuve de fidélité pour garder la proportion de clientèle.

Alors on conclut que la MSP est basée sur deux aspects : descriptif représenté par les cartes et décisionnel représenté par les indices de capacité.

La simulation faite sur le dernier chapitre par le logiciel R, qui est parmi les meilleurs programmes qui font la statistique. Il contient nombreux packages destinés aux maîtres de qualité, en même temps c'est ouvert pour toute modification ou personnalisation ce qui nous donne la liberté d'adapter les cartes de contrôle et ces limites selon nos besoins. Sans oublier que c'est facile à manipuler et n'exige pas toujours des compétences en programmation.

En fin, mon travail est une simulation qui peut être projetée sur la vie pratique pour évaluer une période de production de passé, mais pour améliorer l'efficacité des contrôles statistiques de qualité il faut réaliser un contrôle en cours de production, soit par le programmer en boucle par le logiciel R ou bien en utilisant un autre programme util.

Bibliographie

- [1] Shewhart, Walter A., and Jean-Marie Gogue. Les fondements de la maîtrise de la qualité. Economica, 1989.
- [2] Jaupi, Luan. Contrôle de la qualité : MSP, analyse des performances et contrôle de réception. 2002.
- [3] Ishikawa, Kaoru, and Jean-Marie Douchy. La gestion de la qualité : outils et applications pratiques. Dunod, 1984.
- [4] Terry, George Robert, and Stephen G. Franklin. Principles of management. RD Irwin, 1968.
- [5] BRUNSCHWIG, Gérard, and Alain PALSKEY. "Maîtrise statistique des processus (MSP). Utilisation des cartes de contrôle." Techniques de l'ingénieur. Mesures et contrôle R290 (1994) : R290-1.
- [6] Boulanger, Françoise, Georges Chéroute, and Valérie Jolivet. "Maîtrise statistique des processus : Utilisation des cartes de contrôle." Techniques de l'ingénieur. Mesures et contrôle R290v2 (2006).
- [7] Tiplica, Teodor. Contributions à la maîtrise statistique des processus industriels multivariés. Diss. Université d'Angers, 2002.
- [8] Duret, Daniel, and Maurice Pillet. Qualité en production : de l'ISO 9000 à Six Sigma. Editions Eyrolles, 2011.
- [9] Jean-Marie Gogue. Manuel du controle statistique de la qualité. Western Electric, 2013.
- [10] Montgomery, Douglas C. Introduction to statistical quality control. John Wiley & Sons (New York), 2009.
- [11] Chatfield, Chris. Statistics for technology : a course in applied statistics. Routledge, 2018.
- [12] Oakland, John S. Statistical process control. Routledge, 2007.
- [13] De Micheaux, Pierre Lafaye, Rémy Drouilhet, and Benoît Liquet. Le logiciel R : maîtriser le langage-Effectuer des analyses statistiques. Springer Science & Business Media, 2011.

Annexe

Observations in Sample, n	Constantes de Burr pour les limites des cartes de contrôle															
	Chart for Averages			Chart for Standard Deviations						Chart for Ranges						
	Factors for Control Limits			Factors for Center Line		Factors for Control Limits				Factors for Center Line		Factors for Control Limits				
	A	A_1	A_3	c_4	$1/c_4$	B_3	B_4	B_5	B_6	d_2	$1/d_2$	d_3	D_1	D_2	D_3	D_4
2	2.121	1.880	2.659	0.7979	1.2533	0	3.267	0	2.606	1.128	0.8865	0.853	0	3.686	0	3.267
3	1.752	1.023	1.954	0.8862	1.1284	0	2.568	0	2.276	1.693	0.5907	0.888	0	4.358	0	2.574
4	1.300	0.729	1.628	0.9213	1.0854	0	2.266	0	2.088	2.059	0.4857	0.880	0	4.698	0	2.282
5	1.342	0.577	1.427	0.9400	1.0638	0	2.089	0	1.964	2.326	0.4299	0.864	0	4.918	0	2.114
6	1.225	0.483	1.287	0.9515	1.0510	0.030	1.970	0.029	1.874	2.534	0.3946	0.848	0	5.078	0	2.004
7	1.154	0.419	1.182	0.9594	1.0423	0.118	1.882	0.113	1.806	2.704	0.3648	0.833	0.204	5.204	0.076	1.924
8	1.061	0.373	1.099	0.9650	1.0363	0.185	1.815	0.179	1.751	2.847	0.3512	0.820	0.388	5.305	0.136	1.864
9	1.000	0.337	1.032	0.9693	1.0317	0.239	1.761	0.232	1.707	2.970	0.3367	0.808	0.547	5.393	0.184	1.816
10	0.949	0.308	0.975	0.9727	1.0281	0.284	1.716	0.276	1.669	3.078	0.3249	0.797	0.687	5.469	0.223	1.777
11	0.905	0.285	0.927	0.9754	1.0252	0.321	1.679	0.313	1.637	3.173	0.3152	0.787	0.811	5.535	0.256	1.744
12	0.866	0.266	0.886	0.9776	1.0229	0.354	1.646	0.346	1.610	3.258	0.3060	0.778	0.922	5.594	0.283	1.717
13	0.832	0.249	0.850	0.9794	1.0210	0.382	1.618	0.374	1.585	3.336	0.2998	0.770	1.025	5.647	0.307	1.693
14	0.802	0.235	0.817	0.9810	1.0194	0.405	1.594	0.399	1.563	3.407	0.2925	0.763	1.118	5.696	0.328	1.672
15	0.775	0.223	0.789	0.9823	1.0180	0.423	1.572	0.421	1.544	3.472	0.2860	0.756	1.203	5.741	0.347	1.653
16	0.750	0.212	0.763	0.9835	1.0168	0.448	1.552	0.440	1.526	3.532	0.2801	0.750	1.282	5.782	0.369	1.637
17	0.728	0.203	0.739	0.9845	1.0157	0.466	1.534	0.458	1.511	3.588	0.2767	0.744	1.356	5.820	0.378	1.622
18	0.707	0.194	0.718	0.9854	1.0148	0.482	1.518	0.475	1.496	3.640	0.2747	0.739	1.424	5.856	0.391	1.608
19	0.688	0.187	0.698	0.9862	1.0140	0.497	1.503	0.490	1.483	3.689	0.2711	0.734	1.487	5.891	0.403	1.597
20	0.671	0.180	0.680	0.9869	1.0133	0.510	1.490	0.504	1.470	3.735	0.2677	0.729	1.549	5.921	0.415	1.585
21	0.655	0.173	0.663	0.9876	1.0126	0.523	1.477	0.516	1.459	3.778	0.2647	0.724	1.605	5.951	0.425	1.575
22	0.640	0.167	0.647	0.9882	1.0119	0.534	1.466	0.528	1.448	3.819	0.2618	0.720	1.659	5.979	0.434	1.566
23	0.626	0.162	0.633	0.9887	1.0114	0.543	1.455	0.539	1.438	3.858	0.2592	0.716	1.710	6.006	0.443	1.557
24	0.612	0.157	0.619	0.9892	1.0109	0.553	1.445	0.549	1.429	3.895	0.2567	0.712	1.759	6.031	0.451	1.548
25	0.600	0.153	0.606	0.9896	1.0105	0.563	1.435	0.559	1.420	3.931	0.2544	0.708	1.806	6.056	0.459	1.541

For $n > 25$.

Annexe 1 : les constants de Burr

normale

u	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06
0.0	0.50000	0.50399	0.50798	0.51197	0.51595	0.51994	0.52392
0.1	0.53983	0.54380	0.54776	0.55172	0.55567	0.55962	0.56356
0.2	0.57926	0.58317	0.58706	0.59095	0.59483	0.59871	0.60257
0.3	0.61791	0.62172	0.62552	0.62930	0.63307	0.63683	0.64058
0.4	0.65542	0.65910	0.66276	0.66640	0.67003	0.67364	0.67724
0.5	0.69146	0.69497	0.69847	0.70194	0.70540	0.70884	0.71226
0.6	0.72575	0.72907	0.73237	0.73565	0.73891	0.74215	0.74537
0.7	0.75804	0.76115	0.76424	0.76730	0.77035	0.77337	0.77637
0.8	0.78814	0.79103	0.79389	0.79673	0.79955	0.80234	0.80511
0.9	0.81594	0.81859	0.82121	0.82381	0.82639	0.82894	0.83147
1.0	0.84134	0.84375	0.84614	0.84849	0.85083	0.85314	0.85543
1.1	0.86433	0.86650	0.86864	0.87076	0.87286	0.87493	0.87698
1.2	0.88493	0.88686	0.88877	0.89065	0.89251	0.89435	0.89617
1.3	0.90320	0.90490	0.90658	0.90824	0.90988	0.91149	0.91309
1.4	0.91924	0.92073	0.92220	0.92364	0.92507	0.92647	0.92785
1.5	0.93319	0.93448	0.93574	0.93699	0.93822	0.93943	0.94062
1.6	0.94520	0.94630	0.94738	0.94845	0.94950	0.95053	0.95154
1.7	0.95543	0.95637	0.95728	0.95818	0.95907	0.95994	0.96080
1.8	0.96407	0.96485	0.96562	0.96638	0.96712	0.96784	0.96856
1.9	0.97128	0.97193	0.97257	0.97320	0.97381	0.97441	0.97500
2.0	0.97725	0.97778	0.97831	0.97882	0.97932	0.97982	0.98030
2.1	0.98214	0.98257	0.98300	0.98341	0.98382	0.98422	0.98461
2.2	0.98610	0.98645	0.98679	0.98713	0.98745	0.98778	0.98809
2.3	0.98928	0.98956	0.98983	0.99010	0.99036	0.99061	0.99086
2.4	0.99180	0.99202	0.99224	0.99245	0.99266	0.99286	0.99305

11.png

Annexe 2 : Table de la loi Normale centrée réduite

student

	0.9	0.8	0.7	0.6	0.5	0.4	0.3	0.2	0.1
	0.55	0.6	0.65	0.7	0.75	0.8	0.85	0.9	1.0
1	0.1584	0.3249	0.5095	0.7265	1	1.3764	1.9626	3.0777	6.3138
2	0.1421	0.2887	0.4447	0.6172	0.8165	1.0607	1.3862	1.8856	2.3534
3	0.1366	0.2767	0.4242	0.5844	0.7649	0.9785	1.2498	1.6377	2.3381
4	0.1338	0.2707	0.4142	0.5686	0.7407	0.941	1.1896	1.5332	2.1318
5	0.1322	0.2672	0.4082	0.5594	0.7267	0.9195	1.1558	1.4759	2.0150
6	0.1311	0.2648	0.4043	0.5534	0.7176	0.9057	1.1342	1.4398	1.9427
7	0.1303	0.2632	0.4015	0.5491	0.7111	0.896	1.1192	1.4149	1.8997
8	0.1297	0.2619	0.3995	0.5459	0.7064	0.8889	1.1081	1.3968	1.8681
9	0.1293	0.261	0.3979	0.5435	0.7027	0.8834	1.0997	1.383	1.8427
10	0.1289	0.2602	0.3966	0.5415	0.6998	0.8791	1.0931	1.3722	1.8218
11	0.1286	0.2596	0.3956	0.5399	0.6974	0.8755	1.0877	1.3634	1.8031
12	0.1283	0.259	0.3947	0.5386	0.6955	0.8726	1.0832	1.3562	1.7871
13	0.1281	0.2586	0.394	0.5375	0.6938	0.8702	1.0795	1.3502	1.7734
14	0.128	0.2582	0.3933	0.5366	0.6924	0.8681	1.0763	1.345	1.7614
15	0.1278	0.2579	0.3928	0.5357	0.6912	0.8662	1.0735	1.3406	1.7508
16	0.1277	0.2576	0.3923	0.535	0.6901	0.8647	1.0711	1.3368	1.7414
17	0.1276	0.2573	0.3919	0.5344	0.6892	0.8633	1.069	1.3334	1.7331
18	0.1274	0.2571	0.3915	0.5338	0.6884	0.862	1.0672	1.3304	1.7257
19	0.1274	0.2569	0.3912	0.5333	0.6876	0.861	1.0655	1.3277	1.7191
20	0.1273	0.2567	0.3909	0.5329	0.687	0.86	1.064	1.3253	1.7131
21	0.1272	0.2566	0.3906	0.5325	0.6864	0.8591	1.0627	1.3232	1.7075
22	0.1271	0.2564	0.3904	0.5321	0.6858	0.8583	1.0614	1.3212	1.7022

Annexe 3 : Table de la loi de Student

khi

2

	0.01	0.02	0.05	0.1	0.15	0.2	0.25	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.75	0.8	0.85	0.9	0.95	
1	0.000	0.001	0.004	0.016	0.036	0.064	0.102	0.148	0.275	0.455	0.708	1.074	1.323	1.642	2.072	2.706	3.841	
2	0.020	0.040	0.103	0.211	0.325	0.446	0.575	0.713	1.022	1.386	1.833	2.408	2.773	3.219	3.794	4.605	5.991	
3	0.115	0.185	0.352	0.584	0.798	1.005	1.213	1.424	1.869	2.366	2.946	3.665	4.108	4.642	5.317	6.251	7.815	
4	0.297	0.429	0.711	1.064	1.366	1.649	1.923	2.195	2.753	3.357	4.045	4.878	5.385	5.989	6.745	7.779	9.488	
5	0.554	0.752	1.145	1.610	1.994	2.343	2.675	3.000	3.656	4.351	5.132	6.064	6.626	7.289	8.115	9.236	11.070	
6	0.872	1.134	1.635	2.204	2.661	3.070	3.455	3.828	4.570	5.348	6.211	7.231	7.841	8.558	9.446	10.645	12.592	
7	1.239	1.564	2.167	2.833	3.358	3.822	4.255	4.671	5.493	6.346	7.283	8.383	9.037	9.803	10.748	12.017	14.067	
8	1.647	2.032	2.733	3.490	4.078	4.594	5.071	5.527	6.423	7.344	8.351	9.524	10.219	11.030	12.027	13.362	15.507	
9	2.088	2.532	3.325	4.168	4.817	5.380	5.899	6.393	7.357	8.343	9.414	10.656	11.389	12.242	13.288	14.684	16.919	
10	2.558	3.059	3.940	4.865	5.570	6.179	6.737	7.267	8.295	9.342	10.473	11.781	12.549	13.442	14.534	15.987	18.307	
11	3.053	3.609	4.575	5.578	6.336	6.989	7.584	8.148	9.237	10.341	11.530	12.899	13.701	14.631	15.767	17.275	19.675	
12	3.571	4.178	5.226	6.304	7.114	7.807	8.438	9.034	10.182	11.340	12.584	14.011	14.845	15.812	16.989	18.549	21.026	
13	4.107	4.765	5.892	7.041	7.901	8.634	9.299	9.926	11.129	12.340	13.636	15.119	15.984	16.985	18.202	19.812	22.362	
14	4.660	5.368	6.571	7.790	8.696	9.467	10.165	10.821	12.078	13.339	14.685	16.222	17.117	18.151	19.406	21.064	23.685	
15	5.229	5.985	7.261	8.547	9.499	10.307	11.037	11.721	13.030	14.339	15.733	17.322	18.245	19.311	20.603	22.307	24.996	
16	5.812	6.614	7.962	9.312	10.309	11.152	11.912	12.624	13.983	15.338	16.780	18.418	19.369	20.465	21.793	23.542	26.296	
17	6.408	7.255	8.672	10.085	11.125	12.002	12.792	13.531	14.937	16.338	17.824	19.511	20.489	21.615	22.977	24.769	27.587	
18	7.015	7.906	9.390	10.865	11.946	12.857	13.675	14.440	15.893	17.338	18.868	20.601	21.605	22.760	24.155	25.989	28.869	
19	7.633	8.567	10.117	11.651	12.773	13.716	14.562	15.352	16.850	18.338	19.910	21.689	22.718	23.900	25.329	27.204	30.144	
20	8.260	9.237	10.851	12.443	13.604	14.578	15.452	16.266	17.809	19.337	20.951	22.775	23.828	25.038	26.498	28.412	31.410	
21	8.897	9.915	11.591	13.240	14.439	15.445	16.344	17.182	18.768	20.337	21.992	23.858	24.935	26.171	27.662	29.615	32.671	
22	9.542	10.600	12.338	14.041	15.279	16.314	17.240	18.101	19.729	21.337	23.031	24.939	26.039	27.301	28.822	30.813	33.924	
23	10.196	11.293	13.091	14.848	16.122	17.187	18.137	19.021	20.690	22.337	24.069	26.018	27.141	28.429	29.979	32.007	35.172	
24	10.856	11.992	13.848	15.659	16.969	18.062	19.037	19.943	21.652	23.337	25.106	27.096	28.241	29.553	31.132	33.196	36.415	
25	11.524	12.697	14.611	16.473	17.818	18.940	19.939	20.867	22.616	24.337	26.143	28.172	29.339	30.675	32.282	34.382	37.652	

Annexe 4 : Table de la loi de Khi-2