

République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

UNIVERSITÉ MOHAMED KHIDER, BISKRA

FACULTÉ des SCIENCES EXACTES et des SCIENCES de la NATURE et de la VIE

DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES



Mémoire présenté en vue de l'obtention du Diplôme :

MASTER en Mathématiques

Option : **Analyse**

Par

Zaaza Yassmina

Titre :

Intégration numérique théorici et applications

Membres du Comité d'Examen :

Dr. Tidjani Menacer	UMKB	Président
Dr. Dakhia Hassiba	UMKB	Encadreur
Dr. Tabarha Ouarda	UMKB	Examineur

Juin 2018

DÉDICACE

Je dédis ce mémoire à :

A ma chère mère , qui m'a encouragé à aller de l'avant et qui m'a donné tout son amour
pour reprendre mes études .

A mon chère père , qui a toujours cru en moi et a mis ma disposition tous les moyens
nécessaire pour que je réussisse dans mes études .

A mon frère et mes chères sœurs .

A toute mes oncles et tantes et mes cousins .

A mes chères amis et tous mes camarade de la promotion .

Sans oublier tout les professeurs que ce soit du primaire , du moyen , du secondaire ou
de l'enseigne supérieur .

A toute personnes qui m'ont encouragé ou aidé au long de mes étude .

A tous ceux qui m'ont appris à lire une lettre .

REMERCIEMENTS

A l'issue de ce travail, nous voulons d'abord remercier Allah de nous guider et donner la force, le courage et la patience pour tirer le meilleur parti de ce travail :

MERCI "Dieu "

Il nous est agréable d'adresser nos vifs remerciements à tous ceux qui nous ont aidé de près ou de loin à élaborer cet ouvrage .

Nous remercions en particulier nos encadreur : "**DAKHIA.H** ", s'est toujours montré à l'écoute tout au long de la réalisation de ce travail .

Nous tenons aussi à remercier notre chef de département de mathématique , ainsi que tout le personnel et les enseignants du département pour leur soutien inestimable .

Nos vifs remerciements vont également aux membres du jury pour l'intérêt qu'ils ont porté à notre recherche en acceptant d'examiner notre travail et de l'enrichir par leurs propositions.

A la fin nous tenons à remercier tous nos collègues d'étude , particulièrement notre promotion .

Table des matières

Remerciements	ii
Table des matières	iii
Liste des tableaux	v
Introduction	1
1 Rappels sur l'intégrale	3
1.1 Définitions de l'intégrale de Riemann	3
1.1.1 Somme de Riemann	4
1.1.2 Fonctions intégrables	5
1.2 Primitives et intégrales. Théorème fondamental de l'intégration	5
1.2.1 Primitives d'une fonction continue	6
1.3 Propriétés des intégrales	6
1.4 Techniques de calcul	7
2 Formules d'intégration	9
2.1 Position du problème	9
2.2 Application aux formules classiques	11
2.2.1 cas où les points sont équidistantes (Newton-côtes)	11
2.2.2 Interpolation par un polynôme de degré 0	14

2.2.3	Interpolation par un polynôme de degré 1	17
2.2.4	Interpolation par un polynôme de degré 2	19
2.3	Formules composées	22
2.3.1	Formule composée des rectangles ($p = 0, n = m$)	22
2.3.2	Formule composée des trapèzes ($p = 1, n = m$)	23
2.3.3	Formule composée de Simpson ($p = 2, n = 2m$)	24
2.4	Comparaison	26
3	Intégration numérique d'une fonction en 2D	28
3.1	Sur les quadrilatères	28
3.2	Sur les triangles	29
3.3	Interpolation de Lagrange en dimension 2	33
3.3.1	Interpolation sur les triangles	33
3.3.2	Interpolation Sur les quadrilatères	36
3.4	Méthodes d'intégration numérique en 2D	37
3.4.1	La méthode des trapèzes en 2D	37
3.4.2	La méthode de simpson en 2D	39
	Conclusion	41
	Bibliographie	42
	Annexe B : Abréviations et Notations	43

Liste des tableaux

2.1	Tableau comparatif	26
2.2	Table de comparaison	26
2.3	Table d 'erreur	27
3.1	Polynômes de Lagrange P1 sur le triangle de référence	35
3.2	Polynômes de Lagrange P2 sur le triangle de référence	36

Introduction

L'analyse numérique se propose d'étudier les propriétés mathématiques des méthodes et leur mise en œuvre, et son objectif est de concevoir et d'étudier des moyens pour donner des solutions approchées à des problèmes mathématiques.

Dans ce travail nous allons voir comment approcher de façon numérique la valeur d'intégrales de la forme :

$$I(f) = \int_a^b f(x) dx$$

ce problème est d'autant plus intéressant qu'en pratique on ne connaît pas forcément l'expression symbolique de f et que même si c'est le cas de la plupart des fonctions n'admettent pas de primitives pouvant s'exprimer à l'aide de fonctions élémentaires .

La fonction $f(x)$ peut être estimée à l'aide d'un polynôme de degré N avec une certaine erreur

$$f(x) = P_N(x) + E_N(x)$$

Donc l'intégration numérique est basée principalement sur la relation :

$$I = \int_a^b f(x) dx = \int_a^b P_N(x) dx + \int_a^b E_N(x) dx.$$

Les méthodes d'intégration numérique sont des approximations de la valeur numérique d'une intégrale. En général, on remplace le calcul de l'intégrale par une somme pondérée prise en un certain nombre de points du domaine d'intégration. Le choix de la subdivision de l'intervalle d'intégration et des coefficients qui intervient dans la somme approchant

l'intégrale sont des critères essentiels pour minimiser l'erreur.

Ce mémoire comporte trois chapitres et un petite rappels, dans le premier chapitre on donne quelques définitions sur l'intégrale .

Dans le chapitre 2 on traite l'intégration numériques et ses propriétés nous allons étudier les formules de quadrature et leur ordre, et l'étude l'erreur dans chaque'un des cas .Et le troisième chapitre on donne intégration numérique en fonction 2D et ses propriétés .

Chapitre 1

Rappels sur l'intégrale

1.1 Définitions de l'intégrale de Riemann

Soit n un entier strictement positif. On considère une subdivision de l'intervalle $[a, b]$ et n sous-intervalles de même longueur $\frac{b-a}{n}$, on pose donc :

$$x_j = a + j \frac{b-a}{n}, \quad j = 0, \dots, n$$

(en particulier $x_0 = a$ et $x_n = b$).

On recherche sur le j -ième intervalle la borne supérieure M_j et la borne inférieure m_j de la fonction f . On note :

$$\Gamma_-^n = \sum_{j=0}^{n-1} (x_{j+1} - x_j) m_j$$

et

$$\Gamma_+^n = \sum_{j=0}^{n-1} (x_{j+1} - x_j) M_j$$

Ces sommes sont appelées **sommes de Darboux**

Définition 1.1.1 Soit f une fonction bornée sur un intervalle $[a, b]$. On dit que f est intégrable (au sens de Riemann) sur $[a, b]$ lorsque les suites Γ_-^n et Γ_+^n convergent vers une même limite Γ .

Ce nombre est appelé l'intégrale de la fonction f sur l'intervalle $[a, b]$. On le note :

$$\Gamma = \int_a^b f(t) dt$$

Proposition 1.1.1 Si $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ est monotone sur $[a, b]$ elle est intégrable au sens de Riemann sur $[a, b]$.

Proposition 1.1.2 Toute fonction $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ bornée sur $[a, b]$ et continue sur $[a, b]$ sauf en un nombre fini de points est intégrable au sens de Riemann sur $[a, b]$.

1.1.1 Somme de Riemann

soit $d = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ une subdivision sur $[a, b]$, $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, le nombre $\delta(d) = \max(x_i - x_{i-1})$ est appelé pas de la subdivision d .

Définition 1.1.2 soit :

$$S_n = \sum_{i=0}^n f(\xi_i)(x_i - x_{i-1})$$

telque $\xi_i \in [x_i, x_{i+1}]$, $i = 0, \dots, n$

S_n est appelée somme de Riemann.

Définition 1.1.3 si S_n admet une limite quand n tend vers $+\infty$, ($\delta(d) \rightarrow 0$) indépendante du choix de d on la note par $\int_a^b f(x) dx$ est appelé intégrale de Riemann de f sur $[a, b]$

où

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{i=0}^n f(\xi_i)(x_i - x_{i-1})$$

Théorème 1.1.1 *soit f une fonction bornée et intégrable sur $[a, b]$ alors :*

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{\delta(d) \rightarrow +\infty} R(d, \xi, f)$$

1.1.2 Fonctions intégrables

Proposition 1.1.3 *Soit f une fonction continue sur l'intervalle $I = [a, b]$. Alors f est intégrable sur $[a, b]$.*

Définition 1.1.4 *Une fonction f est dite continue par morceaux sur l'intervalle $[a, b]$ s'il existe une subdivision finie $\{a = x_0, x_1, \dots, x_n = b\}$ de cet intervalle, telle que f soit continue sur chaque sous-intervalle ouvert $]x_j, x_{j+1}[$ et admette une limite à gauche et à droite en chaque x_j pour tout $j \in \{0, \dots, n-1\}$ et tout $j \in \{1, \dots, n\}$ respectivement .*

Proposition 1.1.4 *Toute fonction f continue par morceaux sur $[a, b]$ y est intégrable. Son intégrale sur $[a, b]$ est alors égale à la somme des intégrales de f sur chaque sous intervalle ou elle est continue .*

Théorème 1.1.2 *soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue telle que $f \geq 0$ sur $[a, b]$, si $\int_a^b f(x) dx = 0 \Rightarrow f = 0$ sur $[a, b]$.*

Théorème 1.1.3 *si f et g deux fonctions et g non variantes ($g(x) \geq 0$ ou $g(x) \leq 0$), $\forall x \in [a, b]$ alors $\exists c \in [a, b]$:*

$$\int_a^b f(x) g(x) dx = f(c) \int_a^b g(x) dx$$

1.2 Primitives et intégrales. Théorème fondamental de l'intégration

Définition 1.2.1 *Soit f une fonction définie sur un intervalle I de \mathbb{R} . On dit que la fonction dérivable F est une primitive de f sur I si , pour tout $x \in I$,*

on a $F'(x) = f(x)$. On note : $F = \int f dx$.

Exemple 1.2.1 Soit $I = \mathbb{R}$ et $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = x^2$. Alors $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $F(x) = \frac{x^3}{3}$ est une primitive de f .

1.2.1 Primitives d'une fonction continue

Proposition 1.2.1 Soit f une fonction continue sur un intervalle $I = [a, b]$. On définit sur I la fonction $A : x \mapsto \int_a^x f(t) dt$. Cette fonction A est continue, dérivable sur I et c'est une primitive de f sur cet intervalle, c'est la seule qui s'annule en a .

Théorème 1.2.1 Soit f une fonction continue sur un intervalle $I = [a, b]$, si F est primitive de f alors :

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a)$$

1.3 Propriétés des intégrales

soient f et g deux fonctions continues sur I et a, b et c trois réels de I :

- 1 • $\int_a^a f(x) dx = 0$.
- 2 • $\int_b^a f(x) dx = -\int_a^b f(x) dx$.
- 3 • $\int_a^b f(x) dx + \int_b^c f(x) dx = \int_a^c f(x) dx$, (relation de chasles).
- 4 • $\forall \lambda \in \mathbb{C}, \int_a^b \lambda f(x) dx = \lambda \int_a^b f(x) dx$
- 5 • $\int_a^b (f(x) + g(x)) dx = \int_a^b f(x) dx + \int_a^b g(x) dx$.
- 6 • Si $f(x) \leq g(x)$ sur $[a, b]$, alors $\int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b g(x) dx$.
- 7 • Inégalité de moyenne

si f est continue sur $[a, b]$ et si pour tout x de cet intervalle, on a : $m \leq f(x) \leq M$, alors $m(b-a) \leq \int_a^b f(x) dx \leq M(b-a)$.

- 8 • Si f est intégrable sur $[a, b]$ et vérifie $\forall x \in [a, b] : f(x) \geq 0$ alors $\int f(x) dx \geq 0$.

9 • Si f est intégrable sur $[a, b]$, alors : $|f|$ est intégrable sur $[a, b]$ et :

$$\left| \int_a^b f(x) dx \right| \leq \int_a^b |f(x)| dx.$$

1.4 Techniques de calcul

Théorème 1.4.1 *intégration par parties*

Soient u et v deux fonctions de classe C^1 (ie dérivables et de dérivées continues sur $[a, b]$) :

$$\int_a^b u'(x) v(x) dx = [u(x) v(x)]_a^b - \int_a^b u(x) v'(x) dx$$

Exemple 1.4.1 soit $z = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x \sin x dx$,

on pose :

$$f'(x) = \sin x \rightarrow f(x) = -\cos x$$

$$g(x) = x \rightarrow g'(x) = 1$$

donc $z = -x \cos x \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + \sin x \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = 0 + 1 = 1$.

Théorème 1.4.2 *changement de variable*

Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue et $g : [\alpha, \beta] \rightarrow [a, b]$ une fonction de classe C^1 et vérifie : $g(\alpha) = a$, $g(\beta) = b$ dans ce cas :

$$\int_a^b f(x) dx = \int_\alpha^\beta f[g(t)] g'(t) dt$$

Exemple 1.4.2 soit I définie par : $I = \int \frac{\exp(3t) + \exp(2t) + 4 \exp(t)}{1 + \exp(t)} dt$

on pose $x = \exp(t)$ alors $dx = \exp(t) dt$

on obtient $I = \int \frac{\exp(3t) + \exp(2t) + 4 \exp(t)}{1 + \exp(t)} dt = \int \frac{x^2 + x + 4}{1 + x} dx = \int \frac{x(x+1) + 4}{1+x} dx = \frac{x^2}{2} + 4 \ln |1 + x| + c$

.

Chapitre 2

Formules d'intégration

2.1 Position du problème

supposons qu'une fonction $y = f(x)$ ne sont connue qu'aux points x_0, x_1, \dots, x_n d'un intervalle $[a, b]$; $f(x_i) = y_i$, $i = 0, 1, \dots, n$.

On veut approcher $\int_a^b f(x) dx$, l'idée c'est de remplacer $f(x)$ par le polynôme de lagrange :

$$P_n(x) = \sum_{i=0}^n L_i(x) f(x_i)$$

passant par les points x_0, x_1, \dots, x_n .

La fonction $f(x)$ est donc donnée par : $f(x) = P_n(x) + r_n(f)$

où $L_i(x) = \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^n \frac{(x-x_j)}{(x_i-x_j)}$ et $r_n(f) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!} (x-x_0) \dots (x-x_n)$, $c \in]a, b[$.

Donc : $\int_a^b f(x) dx = \int_a^b \sum_{i=0}^n f(x_i) L_i(x) dx + \int_a^b r_n(f) dx$

$$\int_a^b f(x) dx = \sum_{i=0}^n f(x_i) \int_a^b L_i(x) dx + R_n(f)$$

où $R_n(f)$ est appelé erreur de quadrature reste en négligeant $R_n(f)$ on obtient une ap-

proximation de $\int_a^b f(x) dx$ c'est à dire

$$\int_a^b f(x) dx \simeq \sum_{i=0}^n f(x_i) \int_a^b L_i(x) dx$$

en posant $A_i = \int_a^b L_i(x) dx$, $i = 0, 1, \dots, n$. On obtient la formule de quadrature approchée

$$\int_a^b f(x) dx \simeq \sum_{i=0}^n A_i y_i$$

Définition 2.1.1 Posons $R_n(f) = \int_a^b f(x) dx - \sum_{i=0}^n A_i f(x_i)$ un entier n est appelé le degré de précision d'une formule de quadrature si $R_n(p_k) = 0$, $k \leq n$ pour tous les polynômes de degré inférieure au égale à n et $R_n(p_{n+1}) \neq 0$ de degré $(n+1)$.

Exemple 2.1.1 On va Déterminer le polynôme d'interpolation de Lagrange satisfaisant au tableau ci-dessous :

x	0	2	3	5
$f(x)$	-1	2	9	87

Rappelons que le polynôme de Lagrange basé sur les points d'appui d'abscisses x_0, x_1, \dots, x_n est de degré n et s'écrit :

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^n L_k(x) f(x_k) \quad \text{avec} \quad L_k(x) = \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq k}}^n \frac{(x-x_j)}{(x_k-x_j)}$$

ici les points d'appui donnés par :

$$\begin{array}{ll} x_0 = 0 & f(x_0) = -1 \\ x_1 = 2 & f(x_1) = 2 \\ x_2 = 3 & f(x_2) = 9 \\ x_3 = 5 & f(x_3) = 87 \end{array}$$

déterminons donc un polynôme de Lagrange de degré 3, celui-ci s'écrit :

$$P_3(x) = \sum_{k=0}^3 L_k(x) f(x_k)$$

$$\text{avec , } L_0(x) = \frac{(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)(x_0-x_3)} = \frac{(x-2)(x-3)(x-5)}{(0-2)(0-3)(0-5)} = -\frac{1}{30}(x-2)(x-3)(x-5)$$

$$L_1(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_2)(x-x_3)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)(x_1-x_3)} = \frac{(x-0)(x-3)(x-5)}{(2-0)(2-3)(2-5)} = \frac{1}{6}x(x-3)(x-5)$$

$$L_2(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_3)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)(x_2-x_3)} = \frac{(x-0)(x-2)(x-5)}{(3-0)(3-2)(3-5)} = -\frac{1}{6}x(x-2)(x-5)$$

$$L_3(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)}{(x_3-x_0)(x_3-x_1)(x_3-x_2)} = \frac{(x-0)(x-2)(x-3)}{(5-0)(5-2)(5-3)} = \frac{1}{30}x(x-2)(x-3)$$

Finalement,

$$\begin{aligned} P_3(x) &= f(x_0)L_0(x) + f(x_1)L_1(x) + f(x_2)L_2(x) + f(x_3)L_3(x) \\ &= \frac{53}{30}x^3 - 7x^2 + \frac{253}{30}x - 1 \end{aligned}$$

2.2 Application aux formules classiques

2.2.1 cas où les points sont équidistants (Newton-côtes)

Théorème 2.2.1 *soit une partition $\{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ de $[a, b]$ où les pointes x_i sont équidistantes c'est à dire :*

$x_0 = a, x_i = x_0 + ih, x_n = b$ et $h = \frac{b-a}{n}$ et soit $y_i = f(x_i), i = 1, \dots, n$, alors

$$\int_a^b f(x) dx \simeq (b-a) \sum_{i=0}^n H_i y_i$$

où, $H_i = \frac{(-1)^{n-i}}{n_i!(n-i)!} - \int_0^n \frac{q(q-1)(q-2)\dots(q-n)}{(q-i)}$, $q = \frac{x-x_0}{h}$.

Les constantes H_i sont appelées coefficients de côtes .

Preuve. On a : $\int_{x_0=a}^{x_n=b} f(x) dx \simeq \sum_{i=0}^n A_i f(x_i)$ où On a :

$$A_i = \int_{x_0}^{x_n} \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^n \left(\frac{x - x_j}{x_i - x_j} \right) dx$$

$$\iff \int_{x_0=a}^{x_n=b} \frac{(x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_{i-1})(x - x_{i+1}) \dots (x - x_n)}{(x_i - x_0)(x_i - x_1) \dots (x_i - x_{i-1}) \dots (x_i - x_n)} dx$$

Posons : $q = \frac{x-x_0}{h} \Rightarrow x = x_0 + qh \Rightarrow dx = h dq$ ■

avec cette notation , on a

$$(x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_{i-1})(x - x_{i+1}) \dots (x - x_n) =$$

$$= (x_0 + qh - x_0)(x_0 + qh - x_1) \dots (x_0 + qh - x_{i-1})(x_0 + qh - x_{i+1}) \dots (x_0 + qh - x_n)$$

$$= h^n q(q-1)(q-2) \dots (q-(i-1))(q-(i+1)) \dots (q-n)$$

et

$$(x_i - x_0)(x_i - x_1) \dots (x_i - x_{i-1})(x_i - x_{i+1}) \dots (x_i - x_n) =$$

$$= (x_0 + ih - x_0)(x_0 + ih - x_0 - h) \dots (x_0 + ih - ih - x_0 + h)(x_0 + ih - (i+1)h - x_0)$$

$$\dots (x_0 + ih - x_0 - nh)$$

$$= h^n i(i-1) \dots 1(-1)(-2) \dots (i-n)$$

$$= h^n i(-1)^{n-i} 1 \times 2 \dots (n-i)$$

$$= h^n i!(-1)^{n-i} (n-i)!$$

par la substitutions les relations suivent on obtient :

$$A_i = h \int_0^n \frac{h^n q(q-1)(q-2) \dots (q-(i-1))(q-(i+1)) \dots (q-n)}{h^n i!(-1)^{n-i} (n-i)!} dq$$

puisque $h = \frac{b-a}{n}$, on pose $A_i = (b-a) H_i$

où les H_i sont données par :

$$H_i = \int_0^n \frac{q (q-1) (q-2) \dots (q-(i-1)) (q-(i+1)) \dots (q-n)}{i! (-1)^{n-i} (n-i)! n (q-i)} dq$$

$$= \frac{(-1)^{n-i}}{n i! (n-i)!} \int_0^n \frac{q (q-1) \dots (q-n)}{(q-i)} dq$$

Remarque

Pour $n = 0$ est appelée méthode du rectangle .

Pour $n = 1$ est appelée méthode des trapèzes .

Pour $n = 2$ est appelée méthode de simpson .

Programme newton-cotes avec matlab :

function *int* = *newtcot* (*a*, *b*, *n*, *fun*)

% NEWTCOT Formule composite de Newton-cotes.

% INT=NEWTCOT(A, B, N, FUN) calcule une approximation de l'intégrale de

% la fonction FUN sur]A, B[par la formule fermée de Newton-cotes à N nœuds .

% FUN accepte en entrée un vecteur réel *x* et renvoie un vecteur réel .

h = (*b* - *a*) / *n* ;

n2=fix(*n*/2) ;

if *n* > 6, error('n vaut au plus 6 ');

end

a03 = 1/3; *a08* = 1/8; *a45* = 1/45; *a288* = 1/288; *a140* = 1/140;

alpha=

[0.5 0 0 0; ...

a03 4 * *a03* 0 0; ...

3 * *a08* 9 * *a08* 0 0; ...

14 * *a45* 64 * *a45* 24 * *a45* 0; ...

95 * *a288* 375 * *a288* 250 * *a288* 0; ...

41 * *a140* 216 * *a140* 27 * *a140* 272 * *a140*];

```

x = a; y(1) = eval(fun);
for j = 2 : n + 1
    x=x+h; y(j) = eval(fun);
end
int=0;
j=[1 : n2 + 1]; int=sum(y(j).*alpha(n,j));
j=[n2 + 2 : n + 1]; int=int+sum(y(j).*alpha(n,n-j+2));
int=int*h;
return
    
```

Définition 2.2.1 Si f est de classe C^{n+1} sur $[a, b]$, alors pour ensemble $(x_i)_{0 \leq i \leq n}$ d'éléments de $[a, b]$, l'application,

$$F : [a, b] \mapsto \mathbb{R}$$

$$x \mapsto f[x_0, x_1, \dots, x_n, x]$$

est continue sur $[a, b]$. Si de plus f est de classe C^{n+2} , l'application F est dérivable sur $[a, b]$, et pour tout réel x ,

$$F' = f[x_0, x_1, \dots, x_n, x]$$

2.2.2 Interpolation par un polynôme de degré 0

Corollaire 2.2.1 (Méthode du rectangle) On approche la fonction f par $f(a)$. Alors la valeur approchée obtenue pour l'intégrale est :

$$I_R = (b - a) f(a)$$

et l'erreur vaut

$$E_R = \frac{(b - a)^2}{2} f'(\xi) \quad , \text{ avec } \xi \in]a, b[$$

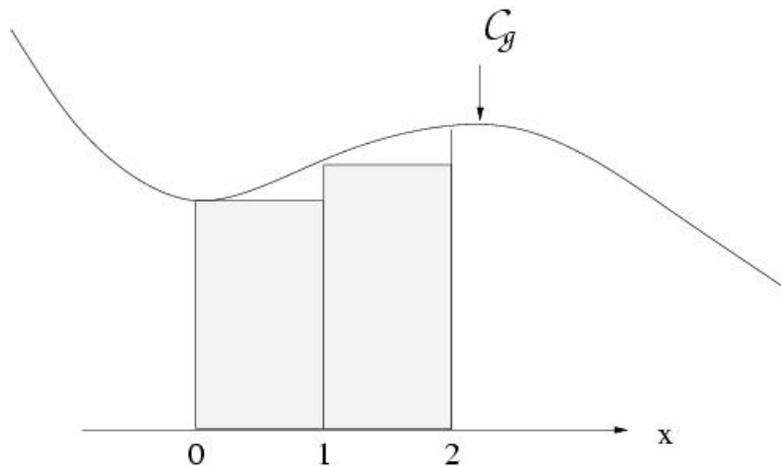


Fig 2.1- Méthode du rectangle

Preuve. Dans le cas général où on approche $f(x)$ par $f(x_0)$, on obtient pour la valeur approchée de l'intégrale,

$$I_0 = (b - a) f(x_0)$$

et pour l'erreur d'intégration,

$$E_0 = \int_a^b f[x_0, x] (x - x_0) dx$$

Lorsque $x = a$, $\phi_0(x)$ est de signe constant, et on a donc,

$$E_R = \int_a^b f[a, x] (x - a) dx = \frac{(b - a)^2}{2} f'(\xi) \text{ , avec } \xi \in]a, b[$$

■

Corollaire 2.2.2 (Méthode du point milieu) On approche la fonction f par $f\left(\frac{a+b}{2}\right)$.

Alors la valeur approchée obtenue pour l'intégrale est :

$$I_M = (b - a) f\left(\frac{a + b}{2}\right)$$

et si f est de classe C^2 sur $[a, b]$ alors l'erreur d'intégration vaut,

$$E_M = \frac{(b-a)^3}{24} f''(\xi) \text{ , avec } \xi \in]a, b[$$

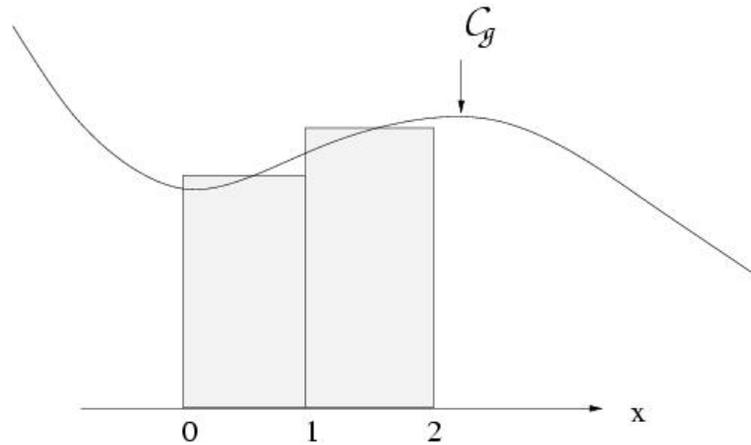


Fig 2.2 - Méthode du point milieu

Preuve. soit $m = \frac{b+a}{2}$, alors

$$E_M = \int_a^b f[m, x] (x - m) dx$$

mais

$$\int_a^b (x - m) dx$$

on a donc , pour x_1 quelconque dans $[a, b]$:

$$E_M = \int_a^b f[m, x_1, x] (x - x_m) (x - x_1) dx$$

En choisissant $x_1 = m$, on obtient :

$$E_M = \int_a^b f[m, m, x] (x - x_m)^2 dx$$

et donc il existe $\xi \in]a, b[$ tel que :

$$E_M = \frac{f''(\xi)}{2} \int_a^b (x - m)^2 dx$$

■

• **Programme formule de point milieu avec Matlab**

function $I =$ Point_Milieu_Composite(a, b, n)

$h = (b - a)/n;$

$I = 0;$

$x = a + h/2;$

for $i = 1 : n$

$I = I + f(x);$

$x = x + h;$

end

$I = h * I;$

2.2.3 Interpolation par un polynôme de degré 1

Proposition 2.2.1 *On suppose le support d'interpolation possède deux points x_0, x_1 . Si f est de classe C^2 sur $[a, b]$, la valeur approchée est :*

$$I_1 = \int_a^b (f[x_0] + [x_0, x_1](x - x_0)) dx$$

et l'erreur d'intégration est

$$E_1 = \int_a^b f[x_0, x_1, x](x - x_0)(x - x_1) dx$$

Corollaire 2.2.3 (Méthode du trapèze) Si f est de classe C^2 sur $[a, b]$ alors pour

$x_0 = a, x_1 = b$, la valeur approchée vaut

$$I_T = (b - a) \left(\frac{f(a) + f(b)}{2} \right)$$

et l'erreur vaut

$$E_T = -\frac{(b - a)^3}{12} f''(\xi), \text{ avec } \xi \in]a, b[.$$

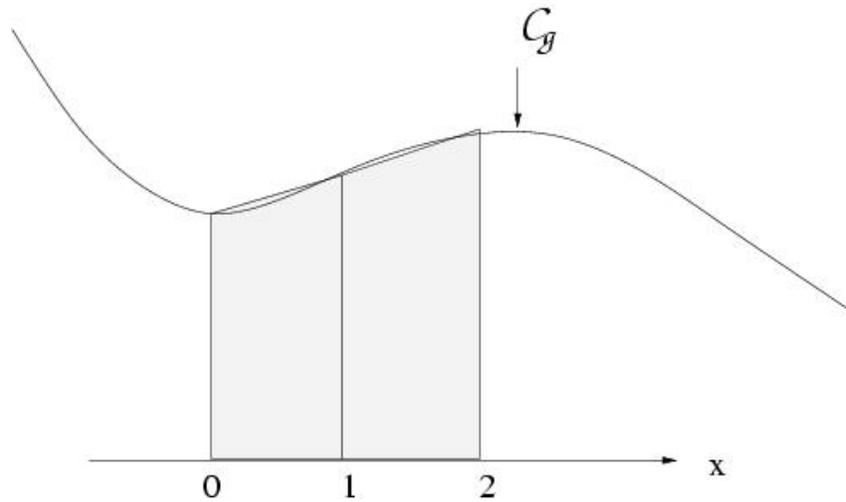


Fig 2.3 - Méthode du trapèze

Preuve. On a :

$$I_T = \int_a^b f(a) dx + \int_a^b f(a, b)(x - a) dx = (b - a) f(a) + \frac{f(b) - f(a)(b - a)^2}{b - a} \frac{1}{2}$$

et ,

$$E_T = \int_a^b f(a, b, x)(x - a)(x - b) dx$$

Ici, $\phi_1(x) = (x - a)(x - b)$ garde un signe constant sur $[a, b]$. Donc :

$$E_T = \frac{f''(\xi)}{2} \int_a^b (x - a)(x - b) dx, \text{ avec } \xi \in]a, b[.$$

■

• **Programme Matlab**

function I =trapeze(a, b, n)

h = (b - a)/n;

I = 0;

xi = a;

for i = 1 : n

xf = xi + h;

I = I + (f(xi) + f(xf));

xi = xf;

end

I = h/2 * I

2.2.4 Interpolation par un polynôme de degré 2

Proposition 2.2.2 *On suppose le support d'interpolation possède trois points x_0, x_1, x_2 .*

Si f est de classe C^3 sur $[a, b]$, la valeur approchée est :

$$I_2 = \int_a^b (f[x_0] + f[x_0, x_1](x - x_0) + f[x_0, x_1, x_2](x - x_0)(x - x_1)) dx$$

et l'erreur d'intégration est

$$E_2 = \int_a^b f[x_0, x_1, x_2](x - x_0)(x - x_1)(x - x_2) dx$$

Corollaire 2.2.4 (Méthode de Simpson) *Si f est de classe C^4 sur $[a, b]$ alors pour $x_0 = a$, $x_1 = b$ et $x_2 = \frac{a+b}{2}$, la valeur approchée vaut*

$$I_S = \frac{b-a}{6} (f(a) + 4f(m) + f(b)) \quad \text{où } m = \frac{a+b}{2}$$

et l'erreur vaut

$$E_S = -\frac{(b-a)^5}{2880} f^{(4)}(\xi) \quad \text{avec } \xi \in]a, b[.$$

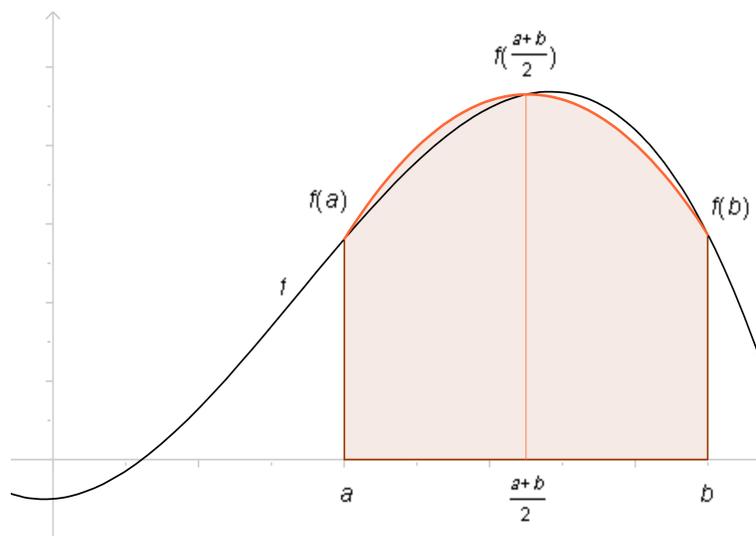


Fig 2.4 - Méthode de simpson

Preuve. On a :

$$\begin{aligned} I_S &= \int_a^b f[a] dx + \int_a^b f[a, b](x-a) dx + \int_a^b f[a, b, m](x-a)(x-b) dx \\ &= (b-a) \frac{f(a) + f(b)}{2} + \int_a^b f[a, b, m](x-a)(x-b) dx \end{aligned}$$

et ,

$$\begin{aligned} f[a, b, m] &= f[a, m, b] = \frac{1}{b-a} \left(\left(\frac{f(b) - f(m)}{b-m} \right) - \left(\frac{f(m) - f(a)}{m-a} \right) \right) \\ &= \frac{2(f(a) - 2f(m) + f(b))}{(b-a)^2} \end{aligned}$$

et ,

$$\int_a^b (x-a)(x-b) dx = -\frac{(b-a)^3}{6}$$

On en déduit le résultat par calcul. Pour l'erreur d'intégration ;

$$E_S = \int_a^b f [a, b, m, x] (x - a) (x - b) (x - m) dx$$

ici, $\int_a^b \phi_2(x) = \int_a^b (x - a) (x - b) (x - m) dx = 0$

$$E_S = \int_a^b f [a, b, m, m, x] (x - a) (x - b) (x - m)^2 dx$$

Alors $\phi_3(x) = (x - a) (x - b) (x - m)^2$ est de signe constant sur $[a, b]$, donc

$$E_S = \frac{f^{(4)}(\xi)}{24} \int_a^b (x - a) (x - b) dx \quad \text{avec } \xi \in]a, b[.$$

■

• Programme Matlab

function I=Simpson(a, b, n)

h = (b - a)/n;

x = [a : h : b];

f = 3 * x.^2 + 2 * x;

I = f (1) + f (n + 1);

for i = 2 : 2 : n

I = I + 4 * f (i);

end

for i = 3 : 2 : n

I = I + 2 * f (i);

end

I = h/3 * I;

2.3 Formules composées

Lorsque l'on souhaite calculer une intégrale sur un intervalle donné $[a, b]$, on n'utilise en général pas la formule directement sur l'intervalle $[a, b]$, mais on le découpe en n sous intervalles et on applique la formule sur chacun des sous intervalles :

$$I(f) = \int_a^b f(x) dx = \sum_{i=0}^{n-1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)$$

En approchant $\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)$ par une formule de quadrature $Q_i(f)$ sur $[x_i, x_{i+1}]$

On obtient :

$$I(f) \simeq \sum_{i=0}^{n-1} Q_i(f)$$

On retrouve ainsi les sommes de Riemann . En effet , si on approche f sur $[x_i, x_{i+1}]$ par sa valeur en $\xi_i \in [x_i, x_{i+1}]$, on obtiendra

$$Q_i(f) \simeq (x_{i+1} - x_i) f(\xi_i)$$

Et donc

$$I(f) = \sum_{i=0}^{n-1} (x_{i+1} - x_i) f(\xi_i)$$

2.3.1 Formule composée des rectangles($p = 0, n = m$)

La méthode des rectangles composite applique la méthode des rectangles simple($p = 0$) sur chacun des m intervalles. Le nombre total de sous-intervalles est donc $n = m$. L'aire de chaque intervalle vaut :

$$\tilde{I}_{0,k} = (x_{k+1} - x_k) f_k = h f_k$$

Si bien que l'intégrale totale vaut :

$$\begin{aligned}\tilde{I}_0 &= h (f_0 + f_1 + \dots + f_{n-1} + 0 \times f_n) \\ &= h \sum_{k=0}^{n-1} f_k\end{aligned}$$

Dans cette formule, tous les points ont le même coefficient (1), sauf le dernier point f_n qui n'est pas utilisé (coefficient 0).

L'erreur est simplement la somme de toutes les erreurs :

$$\begin{aligned}\varepsilon_0 &= \sum_{k=0}^{n-1} \varepsilon_{0,k} = \frac{h^2}{2} \sum_{k=0}^{n-1} f'(\xi_k) \\ &= \frac{h^2}{2} n f'(\xi_k)\end{aligned}$$

$$|\varepsilon_0| \leq \frac{(b-a)^2}{2n} \sup_{[a,b]} (|f'|)$$

où l'on a utilisé le fait que $h = (b-a)/n$ pour la dernière inégalité .

2.3.2 Formule composée des trapèzes ($p = 1, n = m$)

La méthode des trapèzes composite applique la méthode des trapèzes simple ($p = 1$) sur chacun des m intervalles. Le nombre total de sous-intervalles est donc à nouveau $n = m$.

Chaque intégrale vaut :

$$\tilde{I}_{1,k} = (x_{k+1} - x_k) \frac{f_k + f_{k+1}}{2}$$

Si bien que l'intégrale totale vaut :

$$\begin{aligned}\tilde{I}_1 &= h \left(\frac{f_0 + 2f_1 + \dots + 2f_{n-1} + f_n}{2} \right) \\ &= h \left(\frac{f_0}{2} + \sum_{k=1}^{n-1} f_k + \frac{f_n}{2} \right)\end{aligned}$$

Dans cette formule, les points du bord du domaine ont des coefficients différents (1/2) de tous les points intérieurs (1).

L'erreur est simplement la somme de toutes les erreurs :

$$\begin{aligned}\varepsilon_1 &= \varepsilon_{1,0}/2 + \sum_{k=1}^{n-1} \varepsilon_{1,k} + \varepsilon_{1,n}/2 \\ &= -\frac{h^3}{12} \left(f''(\xi_0)/2 + \sum_{k=1}^{n-1} f''(\xi_k) + f''(\xi_n)/2 \right) \\ &= -\frac{h^3}{12} n f''(\xi)\end{aligned}$$

$$|\varepsilon_0| \leq \frac{(b-a)^3}{12n^2} \sup_{[a,b]} (|f''|)$$

2.3.3 Formule composée de Simpson ($p = 2, n = 2m$)

La méthode de Simpson composite applique la méthode de Simpson simple ($p = 2$) sur chacun des m intervalles. Le nombre total de sous-intervalles est donc cette fois-ci $n = 2m$ (il est forcément pair et le nombre de points $n + 1$ est forcément impair !). Chaque intégrale vaut :

$$\tilde{I}_{2,k} = (x_{k+2} - x_k) \frac{f_k + 4f_{k+1} + f_{k+2}}{6}$$

Si bien que (pour un nombre d'intervalles n pair) l'intégrale totale vaut :

$$\begin{aligned}\tilde{I}_2 &= h \left(\frac{f_0 + 4f_1 + 2f_2 + 4f_3 \dots + 2f_{n-2} + 4f_{n-1} + f_n}{3} \right) \\ &= \frac{h}{3} \left(f_0 + 4 \sum_{k=0}^{n/2-1} f_{2k+1} + 2 \sum_{k=1}^{n/2-1} f_{2k} + f_n \right)\end{aligned}$$

A nouveau, l'erreur est simplement la somme de toutes les erreurs :

$$\varepsilon_2 = -\frac{h^5}{90} m f^{(4)}(\xi)$$

$$|\varepsilon_2| = \frac{(b-a)^5}{180n^4} \sup_{[a,b]} (|f^{(4)}|)$$

Exemple 2.3.1 • $I_1 = \int_0^{\frac{1}{2}} \exp(-x^2) dx$

La valeur approchée de I_1 en utilisant la méthode de trapèze :

$$\tilde{I}_1 = \left(\frac{b-a}{2}\right) (f(a) + f(b)) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \left(f(0) + f\left(\frac{1}{2}\right)\right) \simeq 0,4447$$

et avec la méthode de simpson :

$$\tilde{I}_2 = \left(\frac{b-a}{6}\right) \left(f(a) + f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b)\right) = \frac{1}{6 \times 2} \left(f(0) + 4f\left(\frac{1}{4}\right) + f\left(\frac{1}{2}\right)\right) \simeq 0,461371$$

La valeur approchée de I_2 en utilisant la méthode de point milieu :

$$\tilde{I}_3 = (b-a) f\left(\frac{a+b}{2}\right) = \frac{f\left(\frac{1}{4}\right)}{2} \simeq 0,469707$$

• On prend $J = 3$, sous intervalles sur $\left[0, \frac{1}{2}\right]$ ce qui revient à poser $h = \frac{1}{6}$ et les points :

$$a_0 = 0, a_1 = \frac{1}{6}, a_2 = \frac{1}{3}, a_3 = \frac{1}{2}$$

avec la méthode du trapèze composite :

$$\begin{aligned} \tilde{I}_1 &= h \sum_{j=1}^3 \frac{f(a_{j-1}) + f(a_j)}{2} \\ &= h \left(f(a_1) + f(a_2) + \frac{f(a_0) + f(a_3)}{2} \right) \\ &\simeq 0,459474 \end{aligned}$$

et avec la méthode de simpson composite :

$$\begin{aligned} \tilde{I}_2 &= \frac{h}{3} \left(\frac{f(0) + f\left(\frac{1}{2}\right)}{2} + f\left(\frac{1}{6}\right) + f\left(\frac{1}{3}\right) + 2 \left[f\left(\frac{1}{12}\right) + f\left(\frac{1}{4}\right) + f\left(\frac{5}{12}\right) \right] \right) \\ &\simeq 0,461282 \end{aligned}$$

2.4 Comparaison

- Le tableau suivant résume les performances théoriques de chaque méthode :

TAB. 2.1 – Tableau comparatif

<i>Nom de la méthode</i>	<i>Degré du polynôme</i>	<i>Nombre de points</i>	<i>Degré d'exactitude (ordre)</i>	<i>Degré d'erreur globale</i>	<i>Degré d'erreur finale</i>
Rectangle	0	1	0	2	1
Point Milieu	0	1	1	3	2
Trapèze	1	2	1	3	2
Simpson	2	3	3	5	4

- Le tableau suivant résume les performances théoriques de chaque méthode :

Signification des titres des colonnes :

Degré du polynôme : degré des polynômes sur lesquels se base la formule.

Nombre de points : sur chacun desquels la fonction est évaluée.

Degré d'exactitude : degré maximal des polynômes pour lequel la formule est exacte (c'est l'ordre de la méthode).

Degré d'erreur globale : la puissance du facteur $b-a$ dans l'erreur pour une application globale de la formule sur l'intervalle.

Degré d'erreur finale : la puissance du facteur h dans la formule composite.

- On veut approximer l'intégrale $I_1 = \int_0^1 \exp(-x^2) dx$ et $I_2 = \int_0^1 \exp(x) dx$ par les 3 méthodes .

TAB. 2.2 – Table de comparaison

$f(x)$	$\exp(-x^2)$	$\exp(x)$
valeur exacte	0.74682	1.718282
M.Rectangle	1	1.716295
M.Trapèze composée	0.68394	1.722257
M.Simpson composée	0.74718	1.718289

TAB. 2.3 – Table d'erreur

$f(x)$	$\exp(-x^2)$	$\exp(x)$
M.Rectangle	0.25318	0.001987
M.Trapèze composée	-0.06288	0.003975
M.Simpson composée	0.00036	0.000007

- On remarque que la méthode de Simpson donne les meilleurs résultats.

Chapitre 3

Intégration numérique d'une fonction en 2D

3.1 Sur les quadrilatères

C'est le cas le plus simple puisque l'on peut utiliser directement les techniques d'intégration numériques développées en dimension 1. Puisque dans ce cas nous avons choisi le carré $[1, -1]^2$ comme élément de référence, il suffit de constater que :

$$\begin{aligned} I &= \int_{-1}^1 \left(\int_{-1}^1 g(\xi, \eta) d\xi \right) d\eta \simeq \int_{-1}^1 \left(\sum_{i=1}^{m_G} w_i g(\xi_i, \eta) \right) d\eta \\ &\simeq \sum_{i=1}^{m_G} w_i \left(\int_{-1}^1 g(\xi_i, \eta) d\eta \right) \simeq \sum_{i=1}^{m_G} \sum_{j=1}^{n_G} w_i w_j g(\xi_i, \eta_j) \end{aligned} \quad (3.1)$$

En quelque sorte, l'intégration numérique en dimension 2 sur le carré $[1, -1]^2$ consiste donc à utiliser les formules obtenues en dimension 1 pour chacune des variables.

Remarque 3.1.1 • *Il n'y a donc dans ce cas nul besoin de développer des méthodes d'intégration numérique particulière. Si la fonction à intégrer est un polynôme appartenant à l'espace Q_k , c'est-à-dire un polynôme de degré k en chacune des variables d'espace, il suffit de choisir une quadrature de **Gauss-Legendre** en dimension 1 qui soit exacte pour*

les polynômes de degré k et utiliser les formules 3.1.

3.2 Sur les triangles

Définition 3.2.1 Les formules d'intégration numériques sont plus difficiles à obtenir sur les triangles. On ne peut plus utiliser directement les formules en dimension 1. On utilise ensuite la relation :

$$\int_0^1 \int_0^{1-\xi} g(\xi, \eta) d\eta d\xi = \int_0^1 \int_0^{1-\eta} g(\xi, \eta) d\xi d\eta \simeq \sum_i w_i g(\xi_i, \eta_i)$$

On utilise les formules de **Hammer** d'ordre m qui font partie des méthodes directes consistant à intégrer de manière exacte des monômes.

Ordre m	nbr de points nipts	coordonnées		poids	
		ξ_k	η_k	w_k	
1	1	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$	
2	3	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{6}$	
		0	$\frac{1}{2}$		
5	7	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{6}$	
		$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$		$\frac{9}{80}$
		a	a		A
		$1 - 2a$	a		A
		a	$1 - 2a$		A
		b	b		B
		$1 - 2b$	b		B
b	$1 - 2b$	B			

avec $a = \frac{6+\sqrt{15}}{21}$, $b = \frac{4}{7} - a$, $A = \frac{155+\sqrt{15}}{2400}$, $B = \frac{31}{240} - A$

Définition 3.2.2 Soit Ω un domaine polygonale. On recouvre exactement Ω par des domaines élémentaires du type triangle (ou du type rectangle).

Le domaine Ω est partitionné en N triangles K_i :

$$\Omega = \cup_{i=1}^N K_i$$

La méthode composite s'écrit alors :

$$\int_{\Omega} f(x, y) dx dy = \sum_{i=1}^N \int_{K_i} f(x, y) dx dy$$

Il suffit alors de déterminer une approximation de \int_{K_i} pour obtenir celle sur Ω . Comme en dimension 1, on va construire des méthodes d'intégrations sur un triangle de référence fixe \hat{K} et puis en déduire celle sur un triangle quelconque.

Proposition 3.2.1 Transformation affine de \hat{K} dans K

soit \hat{K} le triangle de référence de sommets $\hat{A} = (0, 0)$, $\hat{B} = (1, 0)$ et $\hat{C} = (0, 1)$. On désigne par K un triangle quelconque de sommets $A = (x_1, y_1)$, $B = (x_2, y_2)$ et $C = (x_3, y_3)$. On cherche la transformation affine inversible $F_K : \hat{K} \mapsto K$

$$F \begin{pmatrix} \hat{x} \\ \hat{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}\hat{x} + a_{12}\hat{y} + b_1 \\ a_{21}\hat{x} + a_{22}\hat{y} + b_2 \end{pmatrix}$$

L'application F_K est déterminée de façon unique par

$$F_K(\hat{A}) = A, F_K(\hat{B}) = B, F_K(\hat{C}) = C$$

en effet

$$\begin{aligned} F \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} \implies b_1 = x_1, b_2 = x_2 \\ F \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} \implies a_{11} = x_2 - x_1, a_{12} = y_2 - y_1 \\ F \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} x_3 \\ y_3 \end{pmatrix} \implies a_{21} = x_3 - x_1, a_{22} = y_3 - y_1 \end{aligned}$$

avec J_K dépend de K , et F_K inversible $\iff \det J_K \neq 0$

on a $\det J_K = (x_2 - x_1)(y_3 - y_1) - (y_2 - y_1)(x_3 - x_1)$.

• On montre que $|\det J_K| = 2\text{aire}(k)$

En effet on a : $\text{aire}(k) = \frac{H|\overrightarrow{AB}|}{2}$, On considère les deux vecteurs \overrightarrow{AB} et \overrightarrow{AC}

on a $|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}| = |\overrightarrow{AB}| |\overrightarrow{AC}| \sin \theta$, ou $\sin \theta = \frac{H}{|\overrightarrow{AC}|}$,

aussi $|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}| = |\overrightarrow{AB}| H = 2\text{aire}(k)$

D'autre part, $\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} x_2 - x_1 \\ y_2 - y_1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x_3 - x_1 \\ y_3 - y_1 \end{pmatrix} = (x_2 - x_1)(y_3 - y_1) - (y_2 - y_1)(x_3 - x_1)$

avec Changement de variable, on pose $X = F_K(\hat{X})$ on a :

$$\int_K f(x, y) dx dy = \int_K (f \circ F_K)(\hat{X}) |\det \nabla F_K| d\hat{x} d\hat{y}$$

soit encore

$$\int_K f(x, y) dx dy = 2\text{aire}(k) \int_K (f \circ F_K)(\hat{X}) d\hat{x} d\hat{y} \quad (3.2)$$

cette formule est très intéressante car on connaît $\text{aire}(K)$ en fonction des coordonnées des sommets et en posant $g = f \circ F_K$, il suffit alors de construire des formules d'intégrations sur le triangle de référence \hat{K} .

Exemple 3.2.1 Intégration par P_1 -sommets

On cherche α, β et γ pour que la méthode

$$\int_{\hat{K}} g(x, y) d\hat{x} d\hat{y} \approx \alpha g(\hat{A}) + \beta g(\hat{B}) + \gamma g(\hat{C})$$

soit exacte pour les polynômes de degré 1. En dimension 2 d'espace, l'espace de polynômes de degré 1 est de dimension 3, $P_1 = \langle 1, \hat{x}, \hat{y} \rangle$.

pour $g = 1$

$$\int_{\hat{K}} d\hat{x}d\hat{y} = \frac{1}{2} = \alpha + \beta + \gamma$$

pour $g = \hat{x}$

$$\int_{\hat{K}} g(x, y) d\hat{x}d\hat{y} = \int_{\hat{K}} \hat{x} d\hat{x}d\hat{y} = \int_0^1 \left(\int_0^{1-\hat{x}} \hat{x}d\hat{y} \right) d\hat{x} = \int_0^1 \hat{x} (1 - \hat{x}) d\hat{x} = \frac{1}{6} = \beta$$

pour $g = \hat{y}$

$$\int_{\hat{K}} g(x, y) d\hat{x}d\hat{y} = \int_{\hat{K}} \hat{y} d\hat{x}d\hat{y} = \int_0^1 \left(\int_0^{1-\hat{x}} \hat{y}d\hat{y} \right) d\hat{x} = \int_0^1 (1 - \hat{x})^2 d\hat{x} = \frac{1}{6} = \gamma$$

La méthode est complètement déterminée par

$$\int_{\hat{K}} g(x, y) d\hat{x}d\hat{y} \approx \frac{1}{6} \left(g(\hat{A}) + g(\hat{B}) + g(\hat{C}) \right)$$

On vérifie que le degré de précision est 1 car pour $g = \hat{x}^2$,

$$\int_{\hat{K}} \hat{x}^2 d\hat{x}d\hat{y} = \int_0^1 \hat{x}^2 (1 - \hat{x})^2 d\hat{x} = \frac{1}{12} \text{ et } \frac{1}{6} \left(g(\hat{A}) + g(\hat{B}) + g(\hat{C}) \right) = \frac{1}{6}$$

Sur un triangle quelconque K , et on utilisant la formule 3.2, il vient :

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} f(x, y) dx dy &= 2 \text{aire}(k) \int_K (f \circ F_K) (\hat{X}) d\hat{x}d\hat{y} \\ &\approx \frac{1}{3} \text{aire}(k) \left((f \circ F_K) (\hat{A}) + (f \circ F_K) (\hat{B}) + (f \circ F_K) (\hat{C}) \right) \\ &= \frac{1}{3} \text{aire}(k) (f(A) + f(B) + f(C)) \end{aligned}$$

Enfin, la formule composite sur Ω par intégration P_1 -sommets s'écrit

$$\int_{\Omega} f(x, y) dx dy = \sum_{i=1}^N \frac{\text{aire}(K_i)}{3} (f(A_{K_i}) + f(B_{K_i}) + f(C_{K_i}))$$

avec $A_{K_i}, B_{K_i}, C_{K_i}$ sont les trois sommets du triangle K_i .

Exemple 3.2.2 *Intégration par P_1 -centre de gravité*

La méthode suivante :

$$\int_{\hat{K}} g(x, y) d\hat{x}d\hat{y} \approx \frac{1}{2}g\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$$

est exacte pour P_1

Sur un élément K quelconque

$$\int_K f(x, y) dxdy \approx \text{aire}(K) f(x_G, y_G)$$

avec (x_G, y_G) est le barycentre du triangle K .

3.3 Interpolation de Lagrange en dimension 2

Contrairement au cas unidimensionnel, nous avons ici le choix de la forme géométrique des éléments. Le plus souvent, on utilise des triangles ou des quadrilatères. Les espaces de polynômes correspondants sont légèrement différents.

3.3.1 Interpolation sur les triangles

Voyons en premier lieu le cas des triangles. L'espace de polynômes le plus fréquemment utilisé est l'espace P_K dont on construit une base à l'aide du tableau suivant :

$$\begin{array}{l} P_0 : \\ P_1 : \\ P_2 : \\ P_3 : \end{array} \left| \begin{array}{cccc} & & & 1 \\ & & \xi & \eta \\ & \xi^2 & \xi\eta & \eta^2 \\ \xi^3 & \xi^2\eta & \xi\eta^2 & \eta^3 \end{array} \right.$$

et ainsi de suite.

Pour déterminer uniquement un polynôme de degré k , on doit choisir N points d'interpolation distincts. Le choix des points d'interpolation est dicté par les propriétés de la

fonction que l'on souhaite interpoler.

Polynômes de degré 1

Commençons par l'exemple le plus simple. Construisons les fonctions d'interpolation linéaires (P_1) sur l'élément de référence. Du triangle précédent, la base de monômes est $1, \xi, \eta$ de sorte que tout polynôme de P_1 peut s'écrire :

$$P_1(\xi, \eta) = a_1 + a_2\xi + a_3\eta$$

La dimension de cet espace étant 3, quoi de plus naturel que de choisir les 3 sommets du triangle $\xi_1 = (0, 0), \xi_2 = (1, 0)$ et $\xi_3 = (0, 1)$. On va construire, suivant la démarche utilisée en dimension 1, des fonctions d'interpolation $L_i = (\xi, \eta)$ de sorte que :

$$L_j(\xi_i) = L_j(\xi_i, \eta_i) = \delta_i^j$$

Pour la première fonction d'interpolation devient :

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

ce qui donne immédiatement :

$$\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

d'où :

$$L_1(\xi_i, \eta_i) = 1 - \xi - \eta$$

de manière similaire, on trouve les fonctions $L_2(\xi, \eta)$ et $L_3(\xi, \eta)$. Le tableau résume la situation. Puisqu'elles sont également utiles pour l'évaluation des systèmes élémentaires,

nous avons également indiqué les dérivées partielles des polynômes de Lagrange.

TAB. 3.1 – Polynômes de Lagrange P1 sur le triangle de référence

i	$L_i(\xi, \eta)$	$\frac{\partial L_i}{\partial \xi}$	$\frac{\partial L_i}{\partial \eta}$
1	$1 - \xi - \eta$	-1	-1
2	ξ	1	0
3	η	0	1

Polynômes de degré 2

Une base de l'espace P_2 est constituée des polynômes $1, \xi, \eta, \xi^2, \xi\eta$ et η^2 ce qui constitue un espace de dimension 6. Dans ce cas, on trouve le système :

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{4} & 0 & 0 \\ 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ 1 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{1}{4} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \\ a_5 \\ a_6 \end{bmatrix} = e_i$$

En résolvant ces 6 systèmes linéaires, on trouve les fonctions du tableau. Pour simplifier les expressions, on a posé :

$$\lambda = 1 - \xi - \eta$$

Remarque 3.3.1 *On peut procéder différemment et éviter complètement la résolution d'un système linéaire. L'idée est de se servir de polynômes de degré 1 et d'annuler la fonction $L_i(\xi, \eta)$ aux endroits appropriés.*

La fonction $L_3(\xi, \eta)$ doit s'annuler aux autres nœuds. On peut dans un premier temps introduire le facteur (qui s'annule aux nœuds 1, 2 et 4) et le facteur $\eta - \frac{1}{2}$ qui à son tour s'annule aux nœuds 5 et 6. La fonction résultante $\eta(\eta - \frac{1}{2})$ s'annule à tous les nœuds sauf

TAB. 3.2 – Polynômes de Lagrange P2 sur le triangle de référence

i	$L_i(\xi, \eta)$	$\frac{\partial L_i}{\partial \xi}$	$\frac{\partial L_i}{\partial \eta}$
1	$-\lambda(1-2\lambda)$	$1-4\lambda$	$1-4\lambda$
2	$-\xi(1-2\xi)$	$-1+4\xi$	0
3	$-\eta(1-2\eta)$	0	$-1+4\eta$
4	$4\xi\lambda$	$4(\lambda-\xi)$	-4ξ
5	$4\xi\eta$	4η	4ξ
6	$4\eta\lambda$	-4η	$4(\lambda-\eta)$

le troisième. Par contre, à ce nœud, elle vaut $\frac{1}{2}$ ce qui bien sûr est différent de 1. Il suffit alors de diviser par cette valeur et on obtient :

$$L_3(\xi, \eta) = \frac{\eta(\eta - \frac{1}{2})}{\frac{1}{2}} = -\eta(\eta - 2\eta)$$

3.3.2 Interpolation Sur les quadrilatères

Nous utiliserons l'espace Q_k sur l'élément de référence $[-1, 1]^2$. Il est facile de construire une base pour cet espace puisqu'il suffit de faire le produit cartésien des ensembles $1, \xi, \xi^2, \dots, \xi^k$ et $1, \eta, \eta^2, \dots, \eta^k$.

Polynôme de degré 1 (Q_1)

Le cas le plus simple est bien sûr Q_1 dont la dimension est 4. Une base possible est $1, \xi, \eta, \xi\eta$. Il nous faut donc 4 points d'interpolation et les 4 coins semblent un choix idéal. On obtient les 4 fonctions de Lagrange toujours de la même façon et nous limiterons à les lister.

Remarque 3.3.2 *Tout comme pour le cas triangulaire, on pourrait penser choisir comme points d'interpolation les 4 milieux de côtés soit les points $(0, -1), (1, 0), (0, 1)$ et $(-1, 0)$. Ce qui semble naturel ne fonctionne pas toujours. En effet, en se servant encore ici de la*

base 1, ξ , η et $\xi\eta$, la matrice s'écrit :

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

et est singulière. La solution n'est donc pas unique et on peut facilement le constater puisque les fonctions 0 et $\xi\eta$ sont toutes deux des fonctions de \mathbf{Q}_1 qui prennent les mêmes valeurs (0)

aux milieux des côtés. On ne peut donc pas choisir ces points d'interpolation pour construire des approximations non conformes, contrairement à ce que nous avons fait sur les triangles

3.4 Méthodes d'intégration numérique en 2D

3.4.1 La méthode des trapèzes en 2D

Maintenant, si nous avons une intégrale 2D avec des limites d'intégration variables, nous écrivons ceci :

$$I_{2D} = \int_{x_0}^{x_f} \int_{y_0(x)}^{y_f(x)} f(x, y) dy dx = \int_{x_0}^{x_f} g(x) dx \quad (3.3)$$

où

$$g(x) = \int_{y_0(x)}^{y_f(x)} f(x, y) dy \approx \frac{h_y}{2} \left[f(x, y_0(x)) + f(x, y_f(x)) + 2 \sum_{i=2}^{n_y(x)} f(x, y_i(x)) \right] \quad (3.4)$$

Le nombre d'intervalles y, $n_y(x)$, est maintenant une fonction de x parce que la taille de la plage y d'intégration est une fonction de x . En substituant l'approximation discrétisée

pour $g(x)$ dans l'équation 3.4 dans l'équation 3.3, nous avons

$$\int_{x_0}^{x_f} \int_{y_0(x)}^{y_f(x)} f(x, y) dy dx \approx \int_{x_0}^{x_f} \frac{h_y}{2} \left[f(x, y_0(x)) + f(x, y_f(x)) + 2 \sum_{i=2}^{n_y(x)} f(x, y_i(x)) \right] dx$$

au bien, nous pouvons répéter l'application de la méthode de trapèze :

$$I_{2D} \approx \frac{h_x}{2} \left\{ \begin{array}{l} \frac{h_y}{2} \left[f(x_0, y_0(x_0)) + f(x_0, y_f(x_0)) + 2 \sum_{i=2}^{n_y(x_0)} f(x_0, y_i(x_0)) \right] \\ + \frac{h_y}{2} \left[f(x_f, y_0(x_f)) + f(x_f, y_f(x_f)) + 2 \sum_{i=2}^{n_y(x_f)} f(x_f, y_i(x_f)) \right] \\ + 2 \sum_{j=2}^{n_x} \frac{h_y}{2} \left[f(x_j, y_0(x_j)) + f(x_j, y_f(x_j)) + 2 \sum_{i=2}^{n_y(x_j)} f(x_j, y_i(x_j)) \right] \end{array} \right\}$$

Maintenant, nous pouvons simplifier cela autant que possible,

$$I_{2D} \approx \frac{h_x h_y}{4} \left\{ \begin{array}{l} f(x_0, y_0(x_0)) + f(x_0, y_f(x_0)) + f(x_f, y_0(x_f)) + f(x_f, y_f(x_f)) \\ + 2 \left[\sum_{i=2}^{n_y(x_0)} f(x_0, y_i(x_0)) + \sum_{i=2}^{n_y(x_f)} f(x_f, y_i(x_f)) \right] \\ + \sum_{j=2}^{n_x} f(x_j, y_0(x_j)) + \sum_{j=2}^{n_x} f(x_j, y_f(x_j)) \\ + 4 \sum_{j=2}^{n_x} \sum_{i=2}^{n_y(x_j)} f(x_j, y_i(x_j)) \end{array} \right\}$$

Exemple 3.4.1 Intégrons $f(x, y) = cxy$ sur l'intervalle $0 \leq x \leq 1$ et $0 \leq x \leq y$

$$I_{2D} = \int_{x_0}^{x_f} \int_{y_0}^{y_f} f(x, y) dy dx = \int_0^1 \int_0^y cxy dy dx = \int_0^1 \left[\frac{cxy^2}{2} \right]_0^y dx = \int_0^1 \frac{cx^3}{2} dx = \left[\frac{cx^4}{8} \right]_0^1 = \frac{c}{8}$$

Maintenant, faisons-le analytiquement avec $\Delta x = \Delta y = h = 0.1, c = 2$

i	x	$y_0(x)$	$y_f(x)$	$n_y(x)$	$f(x, y_0)$	$f(x, y_f)$	somme $f(x, y_j)$	intégrale(x)
0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0.1	0	0.1	10	0	0.2	0	0.01
2	0.2	0	0.2	2	0	0.4	0.02	0.022
3	0.3	0	0.3	3	0	0.6	0.12	0.42
4	0.4	0	0.4	4	0	0.8	0.36	0.076
5	0.5	0	0.5	5	0	1	0.8	0.13
6	0.6	0	0.6	6	0	1.2	1.5	0.21
7	0.7	0	0.7	7	0	1.4	2.52	0.322
8	0.8	0	0.8	8	0	1.6	3.92	0.472
9	0.9	0	0.9	9	0	1.8	5.76	0.666
10	1	0	1	10	0	2	8.1	0.91
							totale	0.2405

La solution numérique est $I_{2D} = 0.2405$ et la solution exacte $I_{2D} = 0.25$.

3.4.2 La méthode de simpson en 2D

Maintenant, si nous avons une intégrale 2D, nous écrivons ceci :

$$I_{2D} = \int_{x_0}^{x_f} \int_y^{y_f} f(x, y) dy dx = \int_{x_0}^{x_f} g(x) dx \quad (3.5)$$

où

$$g(x) = \int_{y_0}^{y_f} f(x, y) dy \quad (3.6)$$

$$\approx \frac{h_y}{3} \left[f(x, y_0) + f(x, y_f) + 4 \sum_{i=2,4,6}^{n_y-1} f(x, y_i) + 2 \sum_{i=3,5,7}^{n_y-2} f(x, y_i) \right]$$

En substituant l'approximation discrétisée pour $g(x)$ dans l'équation 3.6 dans l'équation 3.5, nous avons

$$\int_{x_0}^{x_f} \int_{y_0}^{y_f} f(x, y) dy dx \approx \int_{x_0}^{x_f} \frac{h_y}{3} \left[f(x, y_0) + f(x, y_f) + 4 \sum_{i=2,4,6}^{n_y-1} f(x, y_i) + 2 \sum_{i=3,5,7}^{n_y-2} f(x, y_i) \right] dx$$

et

$$I_{2D} \approx \frac{h_x}{3} \left\{ \begin{array}{l} \frac{h_y}{3} \left[f(x_0, y_0) + f(x_0, y_f) + 4 \sum_{i=2,4,6}^{n_y-1} f(x_0, y_i) + 2 \sum_{i=3,5,7}^{n_y-2} f(x_0, y_i) \right] \\ + \frac{h_y}{3} \left[f(x_f, y_0) + f(x_f, y_f) + 4 \sum_{i=2,4,6}^{n_y-1} f(x_f, y_i) + 2 \sum_{i=3,5,7}^{n_y-2} f(x_f, y_i) \right] \\ + 4 \sum_{i=2,4,6}^{n_y-1} \frac{h_y}{3} \left[\begin{array}{l} f(x_j, y_0) + f(x_j, y_f) + 4 \sum_{i=2,4,6}^{n_y-1} f(x_j, y_i) \\ + 2 \sum_{i=3,5,7}^{n_y-2} f(x_j, y_i) \end{array} \right] \\ + 2 \sum_{i=3,5,7}^{n_y-2} \frac{h_y}{3} \left[\begin{array}{l} f(x_j, y_0) + f(x_j, y_f) + 4 \sum_{i=2,4,6}^{n_y-1} f(x_j, y_i) \\ + 2 \sum_{i=3,5,7}^{n_y-2} f(x_j, y_i) \end{array} \right] \end{array} \right\}$$

Nous pouvons simplifier cela autant que possible, $I_{2D} \approx \frac{h_x h_y}{9}$

$$\left\{ \begin{array}{l} f(x_0, y_0) + f(x_0, y_f) + f(x_f, y_0) + f(x_f, y_f) \\ + 2 \left(\sum_{i=3,5,7}^{n_y-2} [f(x_0, y_i) + f(x_f, y_i)] + \sum_{i=3,5,7}^{n_y-2} [f(x_j, y_i) + f(x_j, y_i)] \right) \\ + 4 \left(\sum_{i=2,4,6}^{n_y-1} [f(x_0, y_i) + f(x_f, y_i)] + \sum_{i=2,4,6}^{n_y-1} [f(x_j, y_i) + f(x_j, y_i)] \right) \\ + 8 \left(\sum_{i=2,4,6}^{n_y-1} \sum_{i=3,5,7}^{n_y-2} f(x_j, y_i) + \sum_{i=3,5,7}^{n_y-2} \sum_{i=2,4,6}^{n_y-1} f(x_j, y_i) \right) \\ + 4 \sum_{i=3,5,7}^{n_y-2} \sum_{i=3,5,7}^{n_y-2} f(x_j, y_i) + 16 \sum_{i=2,4,6}^{n_y-1} \sum_{i=2,4,6}^{n_y-1} f(x_j, y_i) \end{array} \right\}$$

Conclusion

Dans le domaine de mathématique, l'intégration numérique est une méthode pour le calcul approche d'une intégrale ou d'une équation différentielle ou autre .

Dans notre mémoire, on a donné quelques méthodes de résolutions numériques comme Trapèze, Simpson,..., et comparez ces méthodes et concluez la meilleure méthode d'approximation .En ainsi que les formules de l'évaluation de l'erreur

Bibliographie

- [1] André Fortin. Département de mathématiques et de statistique, Université Laval et André Garon. Département de génie mécanique, école Polytechnique de Montréal. 4 novembre 2017
- [2] Calcul intégral.15 décembre 2008.
- [3] Feda Abdel Aziz Mustafa Salameh.(2014) .Analytical and numerical solutions of volterra integral equation of the second kind .Faculty of Graduate studies An -Najah national university, Nablus, Palestine.
- [4] Jean Gounon. Intégrale de Riemann et intégrale de Lebsgue .
- [5] Jean-Pierre Demailly.(1996).Analyse numérique et équations . Presses Universitaires de Grenoble .
- [6] Méthodes d'intégration numérique. 2014-2015.Université Paul Sabatier.
- [7] Méthodes numériques et programmation. 2ème physique.

Annexe B : Abréviations et Notations

Les différentes abréviations et notations utilisées tout au long de ce mémoire sont expliquées ci-dessous.

E	l'erreur d'interpolation.
I	la valeur exacte de l'intégrale $\int_a^b f(x) dx$.
exp	exponentiel.
f, g	fonction
F	fonction de répartition.
\forall	qu'elle que soit.
\exists	il existe.
p_n	polynôme de degré n .
\mathbb{R}	l'ensemble des fonction réels.
\mathbb{C}	l'ensemble des fonction continue et dérivable.
h	le pas de l'intervalle $[x_i, x_{i+1}]$.
$f^{(n)}$	fonction de dérivée N fois.