République Algérienne Démocratique et Populaire

Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

UNIVERSITÉ MOHAMED KHIDER, BISKRA

FACULTÉ des SCIENCES EXACTES et des SCIENCES de la NATURE et de la VIE

DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES

Mémoire présenté en vue de l'obtention du Diplôme **:**

MASTER en Mathématiques

Option : **analyse**

Par

ARAR Khaoula

Titre :

Théorèmes du point fixe et applications

Membres du Comité d'Examen :

Dr.	**KHELIL Naceur**	UMKB	Président
Dr.	**GUIDAD Derradji**	UMKB	Encadreur
Dr.	**RAHMANI Naceur**	UMKB	Examinateur

Juin 2018

Dédicace

Avec unénorme plaisir, un coeur ouvert et une immense joie.

Que je dédie ce mémoire,

A mes trés chers, respectueux et magnifiques parents ma mére et mon pére,

Qui m'ont soutenus tout au long de ma vie.

Par leur patience, leur amourset leur encouragement .

A mes fréres,

A ma seour,

A toute ma famille,

A tout mes amis,

A mes collègues de département Mathématique d'université BISKRA.

Et à tous ceux qui ont contribué de près ou de loin pour que ce projet soit possible,

Je vous dis merci.

REMERCIEMENTS

Je tiens à exprimer ma plus profonde reconnaissance à :

D'abord, je tiens à remercier Allah, le tout Puissant, de m'avoir donné la santé, la volonté et la patience pour mener à terme ma formation de Master.

Je tenais à remercier mon encadreur de mémoire, Mr **GUIDAD Derradji** .

Je remercie égalemant Mr **KHELIL Naceur** et Mr **RAHMANI Naceur** pour leur consiels et leur écoute durant l'élaberation de ce mémoire.

Il est important pour moi de remercier ma famille : mon père(rahmaho Allah), ma mère, mes frères et ma soeur,

qui ont toujours été une source inépuisable d'encouragement .

Il est important pour moi de remercier tous mes amis.

Il est important pour moi de remercier tous enseignants de département Mathématique d'université de **MOHAMED KHIDER, BISKRA** .

....

Table des matières

Table des figures

Introduction

Dans ce mémoire, on étudiera quelques théorèmes du point fixe de Banach, Picard, Brouwer et Schauder et quelques-unes de leurs applications. Etant donné un ensemble M et une application $T : M \rightarrow M$; on s'intéresse à donner des conditions suffisantes sur T et M pour que T ait un point fixe.

Pour un application donnée, $T : A \rightarrow B$, chaque solution x de l'équation $Tx = x$, est appelé un point fixe de T. Chaque équation $F(x) = 0$ où F est une application dans un espace Banach, peut être écrit comme l'équation du point fixe

$$x = x + F(x) .$$

Par conséquent, les théorèmes des points fixes constituent un outil important pour prouver l'existence de solutions d'équations sans les déterminer explicitement.

La premiére apparition de la théorie du point fixe était à la fin du $19^{éme}$ siécle par le mathématicien polonais Banach intitulée, le principe de la contraction. Ce théorème est souvent mentionné comme le théorème du point fixe de Banach qui l'a énoncé en 1920 dans le cadre de la résolution des équations intégrales. Il est employé pour trouver des solutions approximatives et successives et l'existence d'un seule solution. Ce théorème est appliqué dans l'espace métrique complet.

L'un des problèmes que nous utilisons la théorème du point fixe à résoudre est le problème de la valeur initiale

$$\begin{cases} x'(t) = f(t, x(t)), \\ x(t_0) = y_0. \end{cases}$$

Pour$f$ continue, est équivalent à l'équation intégrale

$$x(t) = y_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, x(s))\, ds.$$

Le théorème de Picard-Lindelof garantit l'existence d'une solution unique à problème de la valeur initiale lorsque f est Lipschitz continue. Pour cela, il suffit que f soit continue. Afin de prouver ces théorèmes classiques d'une manière analytique fonctionnelle, nous écrivons l'équation intégrale comme une équation non linéaire,

$$x = Tx, \, x \in M \subseteq X,$$

sur un espace de fonction approprié X. Nous cherchons une solution d'équation non linéaire, c'est-à-dire, pour un point fixe de T sur M.

Le théorème du point fixe de Brouwer est un résultat de topologie algèbrique, sous sa forme la plus simple, ce théorème exige uniquement la continuité de l'application d'un intervalle fermée borné dans lui-même. Et de façon plus générale, l'application continue doit être définie dans un convexe compact d'un espace euclidien dans lui-même.

Le théorème du point fixe de Schauder établi en 1930 ; est une généralisation du théorème du point fixe de Brouwer et affirme qu'une application continue sur un convexe compact admet un point fixe, qui n'est pas nécessairement unique. mais qui nous permet de résoudre plusieurs problèmes.

Ce travail traite de trois chapitres, où le premier chapitre parle de certaines des définitions et des principes primaires liés à notre mémoire en préparation pour l'entrée dans le sujet, tandis que le deuxième chapitre nous abordons quelques théorèmes du point fixe de Banach [7], Picard [7], Brouwer et Schauder [2].

Enfin, nous voyons quelques applications dans le chapitre III.

Chapitre 1

Quelques définitions et propriétés de base

1.1 Espaces Topologiques

Dans toute la suite, E désigne un ensemble et $P(E)$ l'ensemble des parties de E.

1.1.1 Notion de topologie

Définition 1.1.1 *1. Une topologie sur un ensemble E est une partie Q de $P(E)$ qui possède les propriétés suivantes :*

(a) La réunion de toute famille d'éléments de Q est un élément de Q.

(b) L'intersection de toute famille finie d'éléments de Q est un élément de Q.

(c) L'ensemble vide $\emptyset$ et E sont des éléments de Q.

2. Le couple (E, Q) s'appelle un espace topologique.

3. Les éléments de Q s'appellent les ouverts de (E, Q).

Définition 1.1.2 *Soit (E, Q) et (E', Q') des espaces topologiques, et*

$$f : E \to E'$$

Une bijection de E sur E'. On dit que f est un homéomorphisme si f et f^{-1} conservent les ouverts, c'est-à-dire si l'image par f d'un ouvert de E est un ouvert de E' et l'image par f^{-1} d'un ouvert de E' est un ouvert de E.

1.1.2 Suites dans un espace topologique :

Une suite d'un espace topologique (E, Q) est une application $x : \mathbb{N} \to E$. On note x_n l'image de n par x et $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite elle même.

Définition 1.1.3 *Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'un espace topologique (E, Q). On dit que cette suite converge vers $a \in E$ si*

$$\forall v \in V(a), \quad \exists N \in \mathbb{N} \ \ \textit{tel que}\ \forall n \geq N, \quad x_n \in V(a)$$

Dans ce cas, on écrit :

$$\lim_{n\to\infty} x_n = a$$

1.2 Espaces Métriques

1.2.1 Métrique

Soit E un ensemble non vide.

Définition 1.2.1 *Une métrique (ou une distance) sur E est une application*

$$d : E \to \mathbb{R}^+$$

telle que, pour tous éléments x, y, z de E , on ait :

1. $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$;

2. $d(x, y) = d(y, x)$;

3. $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$,c'est -à-dire que d vérifie l'inégalité triangulaire.

On dit que (E, d) est un espace métrique.

Exemple 1.2.1 *Soit E un ensemble et $d : E \times E \to \mathbb{R}$ l'application définie par*

$$d(x, y) = \begin{cases} 1 & si \quad x \neq y \\ 0 & si \quad x = y \end{cases}$$

Vérifions que d vérifie les axiomes définissant une distance :

1. Par définition de d,

$$d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$$

2. Il est évident que pour tout $(x, y) \in E^2, d(x, y) = d(y, x)$.

3. Vérifions l'inégalité triangulaire. Soit $(x, y, z) \in E^3$.

- Si $x \neq y$ ou si $y \neq z$ on a $d(x, y) = 1$ ou $d(y, z) = 1$. donc

$$d(x, z) \leq 1 \leq d(x, y) + d(y, z)$$

- Si $x = y$ et $y = z$, alors $x = z$ et

$$d(x, z) = 0 = d(x, y) + d(y, z)$$

On déduit sans difficulté que d vérifie l'inégalité triangulaire.

En définitive, d est une distance sur E.

1.2.2 Topologie d'un espace métrique

Tout espace métrique (E, d) est canoniquement muni d'une topologie.

Définition 1.2.2 *Soit (E, d) un espace métrique. Alors*

$$Q = \{O \subset E : \forall x \in O, \ \exists r_x > 0, \ B(x, r_x) \subset O\}$$

est une topologie sur E.

Deux métriques d et d' définies sur un ensemble E sont équivalentes si les topologies Q_d et $Q_{d'}$ qui leur sont accociées sont égales.

Définition 1.2.3 *(Isométrie) Soient* (E, d) *et* (E', d') *deux espaces métriques, et*

$$f : E \to E'$$

une bijection de E sur E'. On dit que f est une isométrie si f conserve les distances , c'est-à-dire si pour tout $(x, y) \in E^2$,

$$d'(f(x), f(y)) = d(x, y)$$

1.2.3 Suites dans un espace métrique

Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'un espace métrique (E, d). Cette suite converge vers $a \in E$ si et seulement si

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N} \text{ tel que } \forall n \geq N, d(x_n, a) < \varepsilon$$

1.3 Espaces Vectoriels Normés

Dans ce section, E désigne un espace vectoriel sur $\Lambda = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$

1.3.1 Norme

Définition 1.3.1 *1.Une norme sur* E *est une application*

$$n : E \to \mathbb{R}^+$$

telle que pour tous vecteurs x, y de E, et tout scalaire $\lambda \in \Lambda$,

(a) $n(x) = 0 \Rightarrow x = 0$;

(b) $n(\lambda x) = |\lambda| \, n(x)$, ou $|\lambda|$ désigne ici la valeur absolu (ou le module) de λ ;

(c) $n(x+y) \leq n(x) + n(y)$, c'est-à-dire que n vérifie l'inégalité triangulaire.

2. Le couple (E, n) s'appelle un espace vectoriel normé.

La norme d'un vecteur x se note traditionnellement $\|x\|_E$, ou plus simplement $\|x\|$, si aucune confusion n'est à craindre.

Exemple 1.3.1 *Pour tout* $x = (x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n$*,on pose*

$$\|x\|_1 = |x_1| + ... + |x_n| \, ;$$
$$\|x\|_2 = \sqrt{x_1^2 + ... + x_n^2};$$
$$\|x\|_\infty = \max_{1 \leq k \leq n} |x_k|$$

1. Montrons que $\|.\|_1$, $\|.\|_2$ et $\|.\|_\infty$ sont trois normes sur $\mathbb{R}^n$, il est évident que

- $\|.\|_1$,$\|.\|_2$ et $\|.\|_\infty$ sont à valeurs dans $\mathbb{R}$;

- Pour $j = 1, 2, \infty$

$$x = 0 \Leftrightarrow \|x\|_j = 0$$

- Pour $j = 1, 2, \infty$, $(\lambda, x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$,

$$\|\lambda x\|_j = |\lambda| \, \|x\|_j$$

Il reste donc à vérifier les inégalités triangulaire. Soient $x = (x_{1,} ...., x_n) \in \mathbb{R}^n$ et $(y_1, ..., y_n) \in \mathbb{R}^n$.

* Il est clair que

$$\|x + y\|_1 \leq \|x\|_1 + \|y\|_1 \, ,$$

donc $\|.\|_1$ vérifie l'inégalité triangulaire et c'est une norme.

* Rappelons l'inégalité de schwarz dans $\mathbb{R}^n$:

$$\left|\sum_{k=1}^{n} x_k y_k\right| \leq \left(\sum_{k=1}^{n} x_k^2\right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{k=1}^{n} y_k^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

Rappelons la prouve de cette inégalité : écrivons

$$\forall t \in \mathbb{R}, \sum_{k=1}^{n} (x_k + t y_k)^2 \geq 0$$

Considérons le membre gauche de cette inégalité comme un trinôme en t. Puisqu'il est toujours positif ou nul, son discriminant est positif ou nul :

$$\left(\sum_{k=1}^{n} x_k y_k\right)^2 - \left(\sum_{k=1}^{n} x_k^2\right)\left(\sum_{k=1}^{n} y_k^2\right) \leq 0$$

Il en résulte que

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n} (x_k + y_k)^2 &= \sum_{k=1}^{n} x_k^2 + \sum_{k=1}^{n} y_k^2 + 2\sum_{k=1}^{n} x_k y_k \\
&\leq \sum_{k=1}^{n} x_k^2 + \sum_{k=1}^{n} y_k^2 + 2\left|\sum_{k=1}^{n} x_k y_k\right| \\
&\leq \sum_{k=1}^{n} x_k^2 + \sum_{k=1}^{n} y_k^2 + 2\left(\sum_{k=1}^{n} x_k^2\right)^{\frac{1}{2}}\left(\sum_{k=1}^{n} y_k^2\right)^{\frac{1}{2}} \\
&= \left[\left(\sum_{k=1}^{n} x_k^2\right)^{\frac{1}{2}} + \left(\sum_{k=1}^{n} y_k^2\right)^{\frac{1}{2}}\right]^2
\end{aligned}$$

c'est-à-dire

$$\|x+y\|_2^2 \leq (\|x\|_2 + \|y\|_2)^2$$

ce qui est équivalent à

$$\|x+y\|_2 \leq \|x\|_2 + \|y\|_2$$

Donc $\|.\|_2$ vérifie l'inégalité triangulaire et c'est une norme.

* Enfin

$$
\begin{aligned}
\|x+y\|_\infty = \max_{1\le k\le n}\left(|x_k+y_k|\right) &\le \max_{1\le k\le n}\left(|x_k|+|y_k|\right)\\
&\le \max_{1\le k\le n}|x_k| + \max_{1\le k\le n}|y_k| = \|x\|_\infty + \|y\|_\infty
\end{aligned}
$$

Donc $\|.\|_\infty$ vérifie l'inégalité triangulaire et c'est une norme.

2. Montrons que ces normes sont équivalentes :$\forall x = (x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n$,

$$
\begin{aligned}
\|x\|_\infty &= \max_{1\le k\le n}|x_k| \le \sqrt{x_1^2+...+x_n^2} = \|x\|_2\\
\|x\|_1^2 &= \sum_{k=1}^n x_k^2 + 2\sum_{1\le i\le j\le n}|x_i|\,|y_j| \ge \sum_{k=1}^n x_k^2 = \|x\|_2^2\\
\|x\|_1 &= |x_1|+...+|x_n| \le n\max_{1\le k\le n}|x_k| = n\,\|x\|_\infty
\end{aligned}
$$

Donc

$$\|x\|_\infty \le \|x\|_2 \le \|x\|_1 \le n\,\|x\|_\infty$$

par suite, ces trois normes sont équivalentes.

Voici quelques propriétés fondamentale.

1. $x = 0 \Rightarrow \|x\| = 0$.
2. Pour tous vecteurs x et y,

$$|\|x\| - \|y\|| \le \|x-y\|$$

3. Une norme n'est jamais bornée.

1.3.2 Métrique associée à une norme

A toute norme$\|.\|$ sur un espace vectoriel E est associée une métrique d définie en posant pour tous x et y de E :

$$d(x,y) = \|x-y\|$$

Remarque 1.3.1 - *Il est intéressant de remarquer que cette distance est invariante par translation :*

Pour tout x, y, a de E , on a

$$d\left(x+a, y+a\right) = d\left(x, y\right)$$

- Un espace normé $(E, \|.\|)$ est canoniquement muni d'une topologie. C'est la topologie associée à la métrique d qui est elle même associée à $\|.\|$.

1.3.3 Continuité dans les espaces normés

Soient $(E, \|.\|)$ et $(E', \|.\|')$ deux espaces normé, et $f : E \to E'$ une application.
f est continue en $x_0 \in E$ si et seulement si :

$$\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x \in E : \|x - x_0\| < \delta \Rightarrow \|f\left(x\right) - f\left(x_0\right)\| < \epsilon.$$

C-à-d :

$$\lim_{x \to x_0} f\left(x\right) = f\left(x_0\right)$$

Elle est dit continue sur E si elle est continue en tout point de E.

Définition 1.3.2 *On dit que f est uniformément continue sur E si*

$$\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x, y \in E : \|x - y\| < \delta \Rightarrow \|f\left(x\right) - f\left(y\right)\| < \epsilon.$$

1.4 Compacité

Définition 1.4.1 *Soient E un ensemble quelconque et A une partie de E.*

Une recouvrement de A est une famille $(B_i)_{i\in I}$ des parties de E vérifiant :

$$A \subset \cup_{i\in I} B_i$$

Définition 1.4.2 *Soit* $(E, \|.\|)$ *un espace normé.*

On dit que E est relativement compact si pour tout $\epsilon > 0$, il existe un recouvrement fini de E par des parties de E dans le diamêtre est inférieure à ϵ.

Définition 1.4.3 *1. Un espace normé* $(E, \|.\|)$ *est dit compact s'il est relativement compact et complet.*

2. Une partie A d'un espace normé $(E, \|.\|)$ est dite compacte si le sous-espace normé $(A, \|.\|_A)$ est compact.

Théorème 1.4.1 *Soit* $(E, \|.\|)$ *un e.v.n sur* E *de dimension fini. Alors les parties compactes de* E *sont les parties fermées et bornées de* E.

Théorème 1.4.2 *(Le théorème de Heine-Borel) Un sous-ensemble* C *de* $\mathbb{R}$ *est compact si et seulement s'il est fermé et borné.*

Corollaire 1.4.1 *Un ensemble* $C \subset \mathbb{R}^n$ *est compact si et seulement s'il est fermé et borné.*

Proposition 1.4.1 *Soit* C *un sous-ensemble d'un espace métrique complet* X. *Alors* C *est compact si et seulement si* C *est fermé et totalement borné.*

Proposition 1.4.2 *Soit* X *un espace métrique. Ensuite, les éléments suivants sont équivalents :*

(a) X est compact.

(b) Toute suite de X a une sous-suite convergente.

(c) X est complet et totalement borné.

1.5 Convexité

Définition 1.5.1 *Un sous ensemble X d'un espace vectoriel E est dit convexe ssi*

$$\forall (x, y) \in X^2, \forall \alpha \in [0, 1], \quad (1 - \alpha) x + \alpha y \in X$$

(le segment $[x, y]$ est contenu dans X)

Définition 1.5.2 *Soit X un espace linéaire et $f : X \to \mathbb{R}$ une fonction. Alors, f est dit convexe si*

$$f(\lambda x + (1 - \lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1 - \lambda) f(y) \text{ , pour tout } x, y \in X \text{ et } \lambda \in [0, 1];$$

1.6 Espaces complets

Définition 1.6.1 *Soit $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite d'éléments de (E, d) un espace métrique . On dit que $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy si*

$$\forall \varepsilon, \exists N \in \mathbb{N} : n > N, p > N \Rightarrow d(x_n, x_p) < \varepsilon$$

Définition 1.6.2 *Un espace métrique dans lequel toute suite de Cauchy converge est dit complet.*

Définition 1.6.3 *(Convergence dans un espace vectoriel normé.)*

Soit $(E, \|.\|)$ un espace normé et $x = (x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de $(E, \|.\|)$. On dit que x admet une limite $l \in E$ dans $(E, \|.\|)$ si et seulement si $\lim_{n \to \infty} \|x_n - l\| = 0$.
Cela s'écrit encore :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N} : n > N \Rightarrow \|x_n - l\| \leq \varepsilon$$

Définition 1.6.4 *Soit* $(E, \|.\|)$ *un espace normé. Une suite d'éléments* $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ *de* E *est dite « de Cauchy » si, et seulement si :*

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N_0 \in \mathbb{N} : \forall (n, p) \in \mathbb{N}^2, n > N_0 \Rightarrow \|x_{n+p} - x_n\| < \varepsilon$$

Définition 1.6.5 *Un espace normé* $(E, \|.\|)$ *est dit complet si et seulement si toute suite de Cauchy de* E *converge dans* E*.*

Définition 1.6.6 *On appelle espace de Banach tout espace vectoriel normé complet .*

L'espace vectoriel $\mathbb{R}$ muni de la norme définie par la valeur absolue est complet. De même, $\mathbb{C}$ muni de la norme définie par le module est complet.
Pour tout $n \geq 1$, $\mathbb{R}^n$ et $\mathbb{C}^n$ munies d'une norme quelconque sont des espaces de Banach.

1.7 Espace de Hilbert

Définition 1.7.1 *(Produit scalaire) Soit* H *un espace vectoriel sur* $\mathbb{R}$*.*

Un produit scalaire sur un espace vectoriel réel H, est une application de $H \times H$ dans $\mathbb{R}$, notée $(./.)$, et qui est :
- bilinéaire,
$\forall (x_1, x_2) \in H \times H$, $\forall y \in H$, $\forall (\alpha, \beta) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$,

$$(\alpha x_1 + \beta x_2 / y) = \alpha (x_1 / y) + \beta (x_2 / y)$$

$\forall (y_1, y_2) \in H \times H$, $\forall x \in H$, $\forall (\alpha, \beta) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$,

$$(x / \alpha y_1 + \beta y_2) = \alpha (x / y_1) + \beta (x / y_2)$$

- symétrique,

$$\forall (x, y) \in H \times H, \ (x / y) = (y / x)$$

- positive,

$$\forall x \in H,\ (x\diagup x) \geq 0$$

- définie,

$$(x\diagup x) = 0 \Rightarrow x = 0$$

Définition 1.7.2 *Une espace de Hilbert est un espace vectoriel H muni d'un produit scalaire $(u\diagup v)$ et qui est complet pour la norme $(u\diagup v)^{\frac{1}{2}}$.*

Chapitre 2

Théorèmes de point fixe

2.1 Théorème de point fixe de Banach

Ce théorème est dit principe de l'application contractante, il est la base de la théorie du point fixe. Ce principe garantit l'existence d'un unique point fixe pour toute application contractante d'un espace métrique complet dans lui-même.

Théorème 2.1.1 *Supposons que*

(i) On nous donne un application $T : M \subseteq X \to M$ *;*

(ii) M *est un ensemble non vide fermé dans un espace métrique complet* (X, d) *;*

(iii) T *est k-contractif, c'est-à-dire,*

$$d(Tx, Ty) \leq kd(x, y) \tag{2.1}$$

pour tous $x, y \in M$ *et pour un canstante* k*,* $0 \leq k < 1$*.*

Ensuite, nous pouvons conclure ce qui suit :

(a) Existence et unicité : l'équation

$$x = Tx, \;\; x \in M \tag{2.2}$$

a exactement une solution, c'est-à-dire T a exactement un point fixe sur M ;

(b) Convergence de l'itération : La suite (x_n) d'approximations successives converge vers la solution x pour un choix arbitraire du point initial x_0 dans M ;

(c) Estimations d'erreur : Pour tout $n = 0, 1, 2, \cdots$ nous avons l'estimation de l'erreur a priori

$$d(x_n, x) \leq k^n (1-k)^{-1} d(x_0, x_1) \tag{2.3}$$

et l'estimation de l'erreur a posteriori

$$d(x_{n+1}, x) \leq k(1-k)^{-1} d(x_n, x_{n+1}) \tag{2.4}$$

(d) Taux de convergence : Pour tous $n = 0, 1, 2 \cdots$ nous avons

$$d(x_{n+1}, x) \leq kd(x_n, x) \tag{2.5}$$

Nous utilisons la terminologie suivante.

Définition 2.1.1 *Un application $T : M \subseteq X \to X$ sur un espace métrique (X, d) est appelé k-contractive si 2.1 est valable pour tous $x, y \in M$ avec un constante k, $0 \leq k < 1$. Si cela vaut pour $k = 1$, T est appelé non expansif; et si cela vaut pour la constante k, $0 \leq k < \infty$, T est appelé Lipschitz continu.*

Si $d(Tx, Ty) < d(x, y)$ pour tout $x, y \in M$ avec $x \neq y$, T est appelé contractive.

Pour T, nous avons évidemment les implications

k-contractive $\Rightarrow$ contractive $\Rightarrow$ non-expansive $\Rightarrow$ Lipschitz continuous.

Chaque B-espace $(X, \|\cdot\|)$ est également un espace métrique complet (X, d) sous

$$d(x, y) = \|x - y\|$$

Sur un B-espace, 2.1 devient donc

$$\|Tx - Ty\| \leq k \|x - y\|$$

Pour un operateur linéaire continu $T : X \to X$ sur un B-espace X, cela devient

$$\|Tx - Ty\| \leq \|T\| \|x - y\|, \forall x, y \in X \tag{2.6}$$

Par conséquent, T est Lipschitz continue. Si $\|T\| \leq 1$, T est non-expansif, et si $\|T\| < 1$, T est k-contracte avec $k = \|T\|$.

Preuve. (de théorème 2.1.1) (I) (x_n) est une suite de Cauchy. Cela découle de

$$\begin{aligned} d(x_n, x_{n+1}) &= d(Tx_{n-1}, Tx_n) \\ &\leq kd(x_{n-1}, x_n) \end{aligned}$$

utiliser 2.1,

$$\begin{aligned} &\leq k^2 d(x_{n-2}, x_{n-1}) \leq \cdots \\ \cdots &\leq k^n d(x_0, x_1) \cdot \end{aligned}$$

Application répétée de l'inégalité triangulaire et enfin la formule de somme pour une série géométrique

$$\begin{aligned} d(x_n, x_{n+m}) &\leq d(x_n, x_{n+1}) + d(x_{n+1}, x_{n+2}) + \cdots + d(x_{n+m-1}, x_{n+m}) \\ &\leq \left(k^n + k^{n+1} + \cdots + k^{n+m-1}\right) d(x_0 + x_1) \\ &\leq k^n (1 - k)^{-1} d(x_0 + x_1) \end{aligned}$$

Puisque X est complet, la suite de Cauchy converge, c'est à dire, $x_n \to x$ quand $n \to \infty$.

L'équation 2.3 suit en laissant $m \to \infty$.

(II) L'estimation de l'erreur 2.4 suit en laissant $m \to \infty$ dans

$$\begin{aligned} d(x_{n+1}, x_{n+m+1}) &\leq d(x_{n+1}, x_{n+2}) + \cdots + d(x_{n+m}, x_{n+m+1}) \\ &\leq \left(k + k^2 + \cdots + k^m\right) d(x_n + x_{n+1}) \\ &\leq k(1-k)^{-1} d(x_n + x_{n+1}) \end{aligned}$$

(III) Le point x est une solution de 2.2. Car T est continu par 2.1. Depuis $T(M) \subseteq M$ et $x_0 \in M$, on a aussi $x_n \in M$, pour tout n. Puisque M est fermé et $x_n \to x$ quand $n \to \infty$, on obtient $x \in M$. L'équation

$$x_{n+1} = Tx_n, x_0 \in M, n = 0, 1, 2 \cdots$$

implique que $Tx = x$ pour $n \to \infty$.

(IV) Équation 2.5 découle de

$$d(x_{n+1}, x) = d(Tx_n, Tx) \leq kd(x_n, x) \cdot$$

(V) Unicité de la solution. Supposer $Tx = x$ et $Ty = y$, alors $d(x,y) = d(Tx, Ty) \leq kd(x,y)$, qui forces $d(x,y) = 0$, c'est à dire, $x = y \cdot$ ■

Exemple 2.1.1 *(Contre-exemples) Nous voulons montrer que toutes les hypothèses du théorème de point fixe de Banach sont essentielles : si l'un est omis, il n'y a pas besoin d'un point fixe.*

Soit $X = \mathbb{R}$. Les applications suivantes n'ont pas de point fixe :

(i)

$$T : M \to M,\ M = \left]0, 1\right[,\ Tx = \frac{x}{2} \text{ sur } M;$$

(ii)

$$T : M \to M,\ M = \mathbb{R},\ Tx = \left(\frac{\pi}{2}\right) + x - \arctan(x) \text{ sur } M;$$

(iii)

$$T : M \to N,\ M = [0, 1]\,,\ N = [2, 3]\,;$$

(iv)

$$T : M \to M,\ M = \emptyset.$$

En (i), M n'est pas fermé. L'application n'a pas de point fixe dans M, pour le point fixe $x = 0$ sur la figure 2.1 (a) ne se trouve pas dans M.

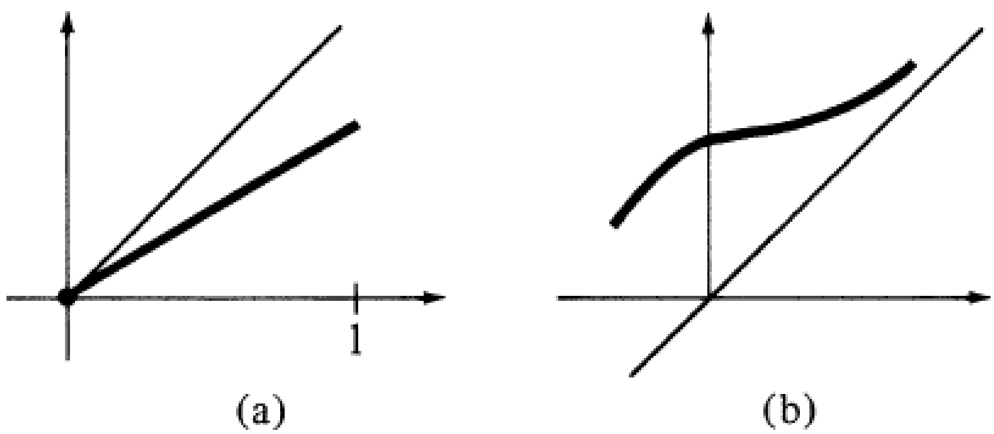


FIG. 2.1 – Figure 2.1

En (ii), T est contractif, mais pas k-contractif. Pour le dérivé,

$$T'(x) = 1 - \frac{1}{(1 + x^2)},$$

appliqué dans les rendements le théorème des accroissements finis

$$|T(x) - T(y)| \leq \left|1 - \frac{1}{(1 + \xi^2)}\right| |x - y| < |x - y|\,, \text{ pour tout } x, y \in \mathbb{R}.$$

La figure 2.1 (b) indique clairement que $Tx = x$ ne peut pas être résolu. En (iii), M n'est pas appliquée sur lui-même. En (iv), T est trivialement sans point fixe, puisque M est vide.

2.2 Théorème point fixe de Picard-Lindelöf

Le théorème de Picard-Lindelof garantit l'existence d'une solution unique à problème de la valeur initiale lorsque f est Lipschitz continue.

Soit $x : [t_0 - c, t_0 + c] \to Y$ un application dans B-espace Y, et considérons le problème de la valeur initiale

$$x\'(t) = f(t, x(t)), \; x(t_0) = y_{0.} \tag{2.7}$$

Ici $y_0 \in Y$. La norme sur Y est notée $\|\cdot\|$. Nous mettons

$$X = C([t_0 - c, t_0 + c], Y), \; 0 < c < \infty;$$

c'est-à-dire que X est l'espace de toutes les fonctions continues $x : [t_0 - c, t_0 + c] \to Y$. En tant que norme, nous choisissons

$$\|x\|_X = \max_{t \in [t_0 - c, t_0 + c]} \|x(t)\|;$$

Théorème 2.2.1 *Soit $t_0 \in \mathbb{R}$, $y_0 \in Y$, et*

$$Q_b = \{(t, y) \in \mathbb{R} \times Y : |t - t_0| \leq a, \|y - y_0\| \leq b\},$$

pour $a, b > 0$ des constantes. Supposons que $f : Q_b \to Y$ est continue et

$$\|f(t, x) - f(t, y)\| \leq L \|x - y\|, \; \textit{pour tout } (t, x), (t, y) \in Q_b,$$

et

$$\|f(t, y)\| < K, \; \textit{pour tout } (t, y) \in Q_b,$$

où $L \geq 0$ et $K > 0$ sont des nombres réels fixes. Choisissez c tel que $0 < c < a$ et $Kc < b$. Alors ce qui suit est vrai.

(a) *Existence et unicité. Le problème de valeur initiale 2.7 a exactement une solution différentiable continuellement $x(\cdot)$ sur l'intervalle $[t_0 - c, t_0 + c]$.*

(b) *Approximation successive. Les approximations successives (x_n) où*

$$x_{n+1}(t) = y_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, x_n(s))\, ds, \ \ x_0(t) \equiv y_0,$$

converger uniformément sur $[t_0 - c, t_0 + c]$ comme $n \to \infty$ vers la solution $x(\cdot)$.

(c) *Dépendance continue sur la valeur initiale. La solution $x(\cdot)$ dépend continuellement, par rapport à la norme sur $C([t_0 - c, t_0 + c], Y)$, de la valeur initiale y_0.*

Corollaire 2.2.1 *Soit $Q = [t_0 - a, t_0 + a] \times Y$, pour un constante positif a, être donné. Supposons que $f : Q \to Y$ est continu et satisfait*

$$\|f(t,x) - f(t,y)\| \leq L \|x - y\|, \ \ \textit{pour tout} \ \ (t,x), (t,y) \in Q,$$

et fixé $L \geq 0$. Ensuite, le problème de la valeur initiale 2.7 a exactement une solution différentiable en continu sur $[t_0 - a, t_0 + a]$ pour chaque valeur initiale $y_0 \in Y$.

Contrairement au théorème 2.2.1, qui fait une déclaration d'existence pour un voisinage approprié de t_0, nous donnons maintenant des conditions qui garantissent l'existence d'une solution pour tout $t \in \mathbb{R}$.

Corollaire 2.2.2 *(Existence de solutions globales). Soit à nouveau Y un B-espace, et soit $f : \mathbb{R} \times Y \to Y$ un application avec les propriétés suivantes :*

(i) f est continue sur $\mathbb{R} \times Y$ et localement Lipschitz-continue par rapport à Y ; c'est-à-dire que, pour tout $(t_0, y_0) \in \mathbb{R} \times Y$, il existe des nombres réels $a, b > 0$ et $L \geq 0$ tels que

$$\|f(t,x) - f(t,y)\| \leq L \|x - y\|,$$

pour tout $t \in \mathbb{R}$, $x, y \in Y$ avec $|t - t_0| \leq a$, $\|x - y_0\| \leq b$, et $\|y - y_0\| \leq b$.

(ii) (Estimation a priori) Il existe une constante K telle que $\|f(t, x(t))\| \leq K$ pour tout t pour lequel existe une solution $x(\cdot)$ du problème de valeur initiale 2.7.

Alors le problème de valeur initiale 2.7 a exactement une solution différentiable continuellement $x(\cdot)$ sur $\mathbb{R}$ pour chaque valeur initiale $y_0 \in Y$.

Notez que la condition (ii) est satisfaite trivialement si f est bornée ; c'est-à-dire, si $\|f(t, y)\| \leq K$ pour tout $(t, y) \in \mathbb{R} \times Y$.

Preuve. (de Corollaire 2.2.2)

Par le théorème 2.1.1 (a), il y a, pour tout (t_0, y_0) exactement une solution $x(\cdot)$ du problème de valeur initiale 2.7, où cette solution existe sur un certain intervalle $[t_0 - c, t_0 + c]$. Nous fixons maintenant (t_0, y_0), et prétendons que la solution correspondante $t \to x(t)$ existe pour tout $t \in \mathbb{R}$.

Soit J être le plus grand intervalle ouvert sur lequel $t \to x(t)$ existe. Nous devons montrer que $J = \mathbb{R}$. Supposons que $J \neq \mathbb{R}$ disons $J =]\alpha, \beta[$, Où $-\infty < \alpha < \beta \leq \infty$. Nous intégrons 2.7 et obtenons

$$x(t) = y_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, x(s))\, ds, \text{ pour tout } t \in J.$$

Cela implique que

$$x(t_2) = x(t_1) + \int_{t_1}^{t_2} f(s, x(s))\, ds, \text{pour tout } t_1, t_2 \in J, \tag{2.8}$$

et donc

$$\|x(t_2) - x(t_1)\| \leq \left\| \int_{t_1}^{t_2} f(s, x(s))\, ds \right\| \leq |t_2 - t_1| K < \varepsilon,$$

pour tout $t_1, t_2 \in J$ tel que $|t_2 - t_1| < \frac{\varepsilon}{K}$. Ainsi, il existe la limite $x(t) \to y$ comme $t \to \alpha$.

Utilisez ceci et laissez $t_1 \to \alpha$ dans 2.8 pour obtenir

$$x(t) = y + \int_{\alpha}^{t} f(s, x(s))\, ds, \text{pour tout } t \in [\alpha, \beta[\,. \tag{2.9}$$

Considérons maintenant le problème de la valeur initiale $x' = f(t, x)$ avec $x(\alpha) = y$. Par le théorème 2.2.1, il doit y avoir une solution unique dans un voisinage de $t = \alpha$, ce qui satisfait 2.9. Mais ceci est une continuation de la solution initiale, en contradiction avec la maximalité de J.

Ainsi la solution à travers (t_0, y_0) existe pour tout $t \in \mathbb{R}$ sans pouvoir se ramifier à tout $(t; x(t))$. Ce dernier découle de l'unicité locale de la solution du problème de valeur initiale. Ainsi, l'unicité globale de la solution est établie. ■

Exemple 2.2.1 *(Contre-exemples) Les exemples suivant montrent que chacune des hypothèses du théorème est réellement nécessaire.*

1. X n'est pas stable par f :

$$f(x) = \sqrt{x^2 + 1}$$

sur $X = [0, 1]$. Or X est fermé dans $\mathbb{R}$, et complet car $\mathbb{R}$ est complet. De plus,

$$f'(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}} < 1 \Rightarrow \sup_{x \in X} |f'(x)| < 1$$

$\Longrightarrow f$ est contractante. Mais f n'a pas de point fixe car $f([0, 1]) = \left[1, \sqrt{2}\right]$,i.e. X n'est pas stable par f.

2. f n'est pas contractante :

$$f(x) = \sqrt{x^2 + 1}$$

sur $X = [0, \infty[$.Or $f : X \to X$, et X est un fermé de $\mathbb{R}$. $\mathbb{R}$ est complet donc X est complet. Mais $\sup_{x \in X} |f'(x)| = 1$ donc f n'est pas contractante.

3. X n'est pas complet :

$$f(x) = \frac{\sin(x)}{2}$$

sur $X = \left]0, \frac{\pi}{4}\right]$. Or $f\left(\left]0, \frac{\pi}{4}\right]\right) = \left]0, \frac{\sqrt{2}}{4}\right] \subset \left]0, \frac{\pi}{4}\right]$, et $\sup_{x\in X} |f'(x)| = \frac{1}{2} < 1$, donc, f est contractante. Mais X n'est pas fermé dans $\mathbb{R}$ donc pas complet.

Remarque 2.2.1 *théorème de point fixe de Banach $\Rightarrow$ théorème Picard-Lindelöf*

2.3 Théorèmes de point fixe de Brouwer et Schauder

Dans cette section, nous présentons la théorie des points fixes pour des applications continues à valeurs uniques dans des espaces de Banach de dimension finie et infinie. En particulier, nous présentons les théorèmes de Brouwer et Schauder

Définition 2.3.1 *Un espace topologique X a la propriété de point fixe si chaque continue $f : X \to X$ a un point fixe.*

Théorème 2.3.1 *Si X a la propriété point fixe et X est homéomorphe à Y, alors Y a la propriété point fixe.*

Preuve. Soit $h : X \to Y$ être un homéomorphisme et supposons que $g : Y \to Y$ est continue. Nous devons montrer que g a un point fixe dans Y. Notez que

$$h^{-1} \circ g \circ h : X \to X$$

est continue. Puisque X a la propriété de point fixe, il existe $x_0 \in X$ avec

$$h^{-1} \circ g \circ h(x_0) = x_0.$$

Donc $g(y_0) = y_0$ où $y_0 = h(x0)$. ■

Définition 2.3.2 *Un sous-ensemble A d'un espace topologique X est un retrait de X s'il existe une application continue $r : X \to A$ avec $r(a) = a$, pour tout $a \in A$. L'application r est appelée une rétraction.*

Théorème 2.3.2 *Si X a la propriété point fixe et A est une rétractation de X, alors A a la propriété point fixe.*

Preuve. Soit $f : A \to A$ être continue et $r : X \to A$ une rétraction. Nous devons montrer que f a un point fixe dans A. Remarquez d'abord que

$$f \circ r : X \to A \subseteq X.$$

Puisque X a la propriété de point fixe, il existe $x_0 \in X$ avec

$$f \circ r(x_0) = x_0.$$

cependant, $f(r(x_0)) \in A$ et donc $x_0 \in A$. Mais puisque $x_0 \in A$ et $r : X \to A$ est une rétraction, nous avons que $r(x_0) = x_0$. Par conséquent,

$$f(x_0) = x_0, x_0 \in A.$$

■

Dans $\mathbb{R}$, notez que $f : [-1, 1] \to [-1, 1]$ a un point fixe puisque la fonction $g : x \to x - f(x)$ vérifie $g(-1) \leq 0 \leq g(1)$ et donc g doit prendre la valeur zéro. Par conséquent, $[-1, 1]$ a la propriété de point fixe. Bien sûr, le théorème 2.3.1 garantit immédiatement que tous les intervalles compacts ont la propriété de point fixe. Cependant, la situation dans $\mathbb{R}^n$, $n > 1$, n'est pas aussi simple. Une partie substantielle de cette section sera consacrée à prouver le résultat de point fixe suivant dû à Brouwer.

Théorème 2.3.3 *La boule de l'unité fermée B^n, dans $\mathbb{R}^n$, a la propriété de point fixe.*

Pour le reste de cette section, nous supposerons que $\mathbb{R}^n$ est doté de son produit intérieur standard.

$$\langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$$

et norme

$$\|x\| = \langle x, x \rangle^{\frac{1}{2}}$$

De plus, B^n la boule d'unité fermée dans $\mathbb{R}^n$

$$B^n = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| \leq 1\}$$

Théorème 2.3.4 *Tout sous-ensemble non vide, fermé, convexe C de $\mathbb{R}^n$ est un retrait de $\mathbb{R}^n$.*

Définition 2.3.3 *Soit H un espace de Hilbert et $C \subseteq H$ un ensemble fermé et convexe. Définir $P_C : H \to C$ est l'application qui envoie chaque $x \in H$ au point le plus proche dans C.*

Preuve. Pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, nous savons qu'il existe un unique $y = P_C(x) \in C$ avec

$$\|x - y\| = \inf \{\|x - u\| : u \in C\}$$

c'est-à-dire que P_C est l'application qui envoie chaque $x \in H$ au point le plus proche en C. Le P_C est non-expansif, donc en particulier, une rétraction de $\mathbb{R}^n$ sur C. ■

Théorème 2.3.5 *(de Brouwer) Tout sous-ensemble non vide, borné, fermé, convexe C de $\mathbb{R}^n$ a la propriété de point fixe.*

Preuve. Notez que C est un sous-ensemble d'une boule $B^\star$ Dans $\mathbb{R}^n$. Depuis $\mathbb{R}^n$ et $B^\star$ sont homéomorphes, le théorème 2.3.1 et le théorème 2.3.3 garantissent que $B^\star$ a la propriété du point fixe. En outre, le théorème 2.3.4 implique que C est une rétractation de $B^\star$ et donc le théorème 2.3.2 s'assure que C a la propriété du point fixe. ■

Remarque 2.3.1 *Puisque tout espace linéaire normé de dimension finie X est isomorphe à $\mathbb{R}^n$ avec $n = \dim X$, nous avons : tout sous-ensemble non vide, borné, fermé, convexe d'un espace linéaire normé de dimension finie a la propriété de point fixe.*

Nous aimerions étendre le théorème 2.3.5 à un paramètre d'espace infini. Pour ce faire, des hypothèses supplémentaires (voir l'exemple suivant) doivent être placées sur f.

Exemple 2.3.1 *Soit*

$$l_2 = \left\{ x = (x_1, x_2, \cdots) : \|x\|^2 = \sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^2 < \infty \right\}$$

et

$$B = \{x \in l_2 : \|x\| \leq 1\}$$

Définir $f : B \to \partial B \subseteq B$ par

$$f(x) = \left(\sqrt{1 - \|x\|^2}, x_1, x_2, \cdots \right)$$

$$\|f(x)\| = \sqrt{\left(\sqrt{1 - \|x\|^2} \right)^2 + x_1^2 + x_2^2 + \ldots} = \sqrt{1 - \|x\|^2 + \|x\|^2} = 1$$

Il est clair que f est continue mais f ne posséde pas de point fi fixe.

Définition 2.3.4 *Soit X et Y des espaces linéaires normés. Une application $F : X \to Y$ est appelée compacte si $F(X)$ est contenue dans un sous-ensemble compact de Y. Une application compacte $F : X \to Y$ est appelée dimension finie, si $F(X)$ est contenue dans un sous-espace linéaire de dimension finie Y.*

Nous étendons ensuite le théorème du point fixe de Brouwer à des applications compactes dans des espaces linéaires normés. Cette généralisation est due à Schauder. L'idée principale est d'approximer des applications compactes par des applications avec des gammes de dimensions finies.

Soit $A = \{a_1, a_2, \cdots, a_n\}$ être un sous-ensemble fini d'un espace linéaire normé $E = (E, \|\cdot\|)$ et pour fixe $\varepsilon > 0$ let

$$A_\varepsilon = \bigcup_{i=1}^{n} B(a_i, \varepsilon)$$

où

$$B(a_i, \varepsilon) = \{x \in E : \|x - a_i\| < \varepsilon\}.$$

Pour chaque $i = 1, \cdots, n$ soit $\mu_i : A_\varepsilon \to \mathbb{R}$ soit l'application donnée par

$$\mu_i(x) = \max\{0, \varepsilon - \|x - a_i\|\}.$$

Soit $co(A)$ le plus petit ensemble convexe contenant A. La projection de Schauder est l'application $P_\varepsilon : A_\varepsilon \to co(A)$ donnée par

$$P_\varepsilon(x) = \frac{\sum_{i=1}^{n} \mu_i(x) a_i}{\sum_{i=1}^{n} \mu_i(x)}, x \in A_\varepsilon.$$

L'avis $P_\varepsilon(x)$ est bien défini puisque si $x \in A_\varepsilon$, alors $x \in B(a_i, \varepsilon)$ Pour certains $i \in \{1, 2, \cdots\}$ et donc $\sum_{i=1}^{n} \mu_i(x) \neq 0$. Aussi $P_\varepsilon(x) \subseteq co(A)$ puisque chaque $P_\varepsilon(x)$ est une combinaison convexe des points $a_1, a_2, \cdots, a_n$.

Théorème 2.3.6 *Soit C un sous-ensemble convexe d'un espace linéaire normé, et $A = \{a_1, a_2, \cdots, a_n\} \subseteq C$. Si P_ε désigne la projection de Schauder, puis*
(i) P_ε est une application compacte et continue de A_ϵ en $co(A) \subseteq C$, et
(ii) $\|x - P_\varepsilon\| < \varepsilon$ pour tout $x \in A_\epsilon$.

Preuve. (i) La continuité de P_ε est immédiat. Pour montrer la compacité, soit $\{P_\varepsilon(x_m)\}_{m=1}^{\infty}$ soit n'importe quelle séquence dans $P_\varepsilon(A_\epsilon)$. Soit $\mu(x) = \sum_{i=1}^{n} \mu_i(x)$ et donc

$$P_\varepsilon(x_m) = \frac{\sum_{i=1}^{n} \mu_i(x_m) a_i}{\mu(x_m)}.$$

Notez que pour chaque $m \in \{1, 2, \cdots\}$,

$$\left(\frac{\mu_1 (x_m)}{\mu (x_m)}, \frac{\mu_2 (x_m)}{\mu (x_m)}, ..., \frac{\mu_n (x_m)}{\mu (x_m)} \right) \in [0, 1]^n ,$$

donc la compacité du n-cube implique la compacité de l'application P_ε.

(ii) Notez que pour $x \in A_\epsilon$,

$$\begin{aligned} \|x - P_\varepsilon (x)\| &= \frac{1}{\mu (x)} \left\| \mu (x) x - \sum_{i=1}^{n} \mu_i (x) a_i \right\| \\ &\leq \frac{1}{\mu (x)} \sum_{i=1}^{n} \mu_i (x) \|x - a_i\| < \frac{1}{\mu (x)} \sum_{i=1}^{n} \mu_i (x) \varepsilon = \varepsilon, \end{aligned}$$

puisque $\mu_i (x) = 0$ sauf si $\|x - a_i\| < \varepsilon$. ■

Notre prochain résultat est connu sous le nom de théorème d'approximation de Schauder.

Théorème 2.3.7 *Soit C un sous-ensemble convexe d'un espace linéaire normé E et $F : E \to C$ une application compacte et continue. Alors pour chaque $\varepsilon > 0$, il y a un ensemble fini $A = \{a_1, ..., a_n\}$ dans $F (E)$ et une application continue de dimension finie $F_\varepsilon : E \to C$ avec les propriétés suivantes :*

(i)

$$\|F_\varepsilon (x) - F (x)\| < \varepsilon, \textit{pour tout } x \in E,$$

(ii)

$$F_\varepsilon (x) \subseteq co (A) \subseteq C.$$

Preuve. $F (E)$ est contenue dans un sous-ensemble compact K de C, donc puisque K est totalement borné, il existe un ensemble $\{a_1, ..., a_n\} \subseteq F (E)$ avec $F (E) \subseteq A_\varepsilon$. Soit $P_\varepsilon : A_\varepsilon \to co (A)$ être la projection de Schauder et définir l'application $F_\varepsilon : E \to C$ par

$$F_\varepsilon (x) = P_\varepsilon (F (x)) , \text{pour } x \in E.$$

Le théorème 2.3.6 garantit maintenant le résultat. ■

Avant de démontrer le théorème du point fixe de Schauder, nous introduisons d'abord la notion d'un ε-fixé point. Soit D un sous-ensemble d'un espace linéaire normé E et $F : D \to E$ une application. Donné $\varepsilon > 0$, un point $d \in D$ avec $\|d - F(d)\| < \varepsilon$ est appelé un ε-fixé point pour F.

Théorème 2.3.8 *Soit D un sous-ensemble fermé d'un espace linéaire normé E et $F : D \to E$ une application compacte et continue. Alors F a un point fixe si et seulement si F a un ε-fixé point.*

Preuve. Supposons que F a un ε-fixé point pour chaque $\varepsilon > 0$. Maintenant pour chaque $n \in \{1, 2, ...\}$, soit d_n un $\left(\frac{1}{n}\right)$-fixé point pour F, c'est-à-dire

$$\|d_n - F(d_n)\| < \frac{1}{n}. \tag{2.10}$$

Puisque F est compact, $F(D)$ est contenu dans un sous-ensemble compact K de E et il existe donc une sous-séquence S d'entiers et un $x \in K$ tels que

$$F(d_n) \to x \in K \text{ comme } n \to \infty \text{ dans } S\ .$$

Maintenant 2.10 implique que $d_n \to x$ comme $n \to \infty$ dans S et puisque D est fermé, nous avons ce $x \in D$. De plus, la continuité F implique que $F(d_n) \to F(x)$ comme $n \to \infty$ dans S et ceci ensemble avec 2.10 donne $\|x - F(x)\| = 0$, c'est-à-dire $x = F(x)$. ■

Nous énonçons et prouvons maintenant le théorème du point fixe de Schauder.

Théorème 2.3.9 *(le théorème du point fixe de Schauder) Soit C un sous-ensemble fermé convexe d'un espace linéaire normé E. Ensuite, toute applications compacte et continue $F : C \to C$ possède au moins un point fixe.*

Preuve. D'après le théorème 2.3.8, avec $D = C$, il suffit de montrer que F a un ε-fixé point pour tout $\varepsilon > 0$. Fix $\varepsilon > 0$. Le théorème 2.3.7 garantit l'existence d'une application continue de dimension finie $F_{\varepsilon} : C \to C$ avec

$$\|F_{\varepsilon}(x) - F(x)\| < \varepsilon, \text{ pour } x \in C \tag{2.11}$$

et $F_{\varepsilon}(C) \subseteq co(A) \subseteq C$ pour un ensemble fini $A \subseteq C$. Puisque $co(A)$ est fermé et borné et $F_{\varepsilon}(co(A) \subseteq co(A))$, on peut appliquer le théorème 2.3.5 (théorème du point fixe de Brouwer) pour déduire qu'il existe $x_{\varepsilon} \in co(A)$ avec $x_{\varepsilon} = F_{\varepsilon}(x_{\varepsilon})$. De plus, 2.11 rendements

$$\|x_{\varepsilon} - F_{\varepsilon}(x_{\varepsilon})\| = \|F_{\varepsilon}(x_{\varepsilon}) - F(x_{\varepsilon})\| < \varepsilon.$$

■

2.4 Comparaison entres les différents type des théorèmes du point fixe

Théorèmes du point fixe est un résultat qui permet d'affirmer qu'une fonction f admet sous certaines fonction d'un point fixe, ces théorèmes révèlent être des outils très importantes en mathématiques. Le théorème du point fixe de Banach procède d'itération d'une fonction tende vers un point fixe, il garantit l'existence et unicité d'un point fixe , très différent, le théorème du point fixe de Brouwer garantit l'existence d'un point fixe d'une fonction continue définie de la boule unité fermée euclidienne sur elle même et le théorème du point fixe de Schauder prolonge le résultat du théorème de Brouwer pour montrer l'existence d'un point fixe pour une fonction continue sur un convexe compact dans un espace de Banach.

Chapitre 3

Applications

Le but de ce chapitre est d'esquisser les applications des théorèmes du point fixe

3.1 Applications aux équations non linéaires

Comme l'application la plus simple du théorème 2.1.1, nous considérons l'équation non linéaire

$$x = T(x), \quad x \in [a, b], \tag{3.1}$$

avec la méthode itérative

$$x_{n+1} = T(x_n), \, x_0 \in [a, b], \, n = 0, 1, 2... \tag{3.2}$$

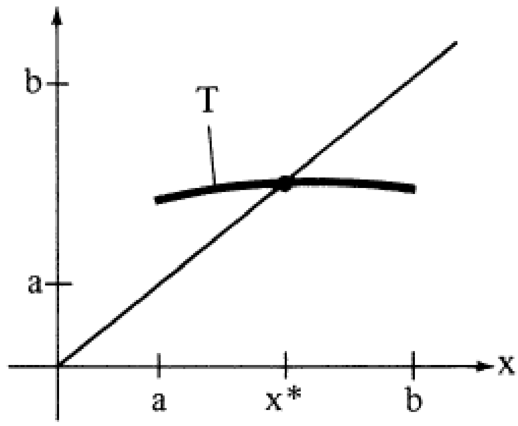
Les solutions x^* de 3.1 sont les intersections x^* du graphe de T avec la diagonale de la figure 3.1.

Proposition 3.1.1 *(Solution de 3.1). Supposons que*

(i) $T : [a, b] \to [a, b]$ est une fonction réelle, où $-\infty < a < b < \infty$, et

(ii) $|T(x) - T(y)| \leq k|x - y|$ pour tout $x, y \in [a, b]$ et fixe $k \in [0, 1[$.

22



3.png

FIG. 3.1 – Figure 3.1

Alors 3.1 a exactement une solution x, et pour $n = 0, 1, 2...$c'est vrai que

$$|x_n - x| \leq k^n (1-k)^{-1} |x_1 - x_0| \quad \text{(estimation d'erreur a priori)}\,; \tag{3.3}$$

$$|x_{n+1} - x| \leq k (1-k)^{-1} |x_{n+1} - x_n| \quad \text{(estimation de l'erreur aposteriori)}\,; \tag{3.4}$$

$$|x_{n+1} - x| \leq k |x_n - x| \ \text{(convergence linéaire)}. \tag{3.5}$$

Donc $x_n \to x$ comme $n \to \infty$ pour initial arbitraire $x_0 \in [a, b]$.

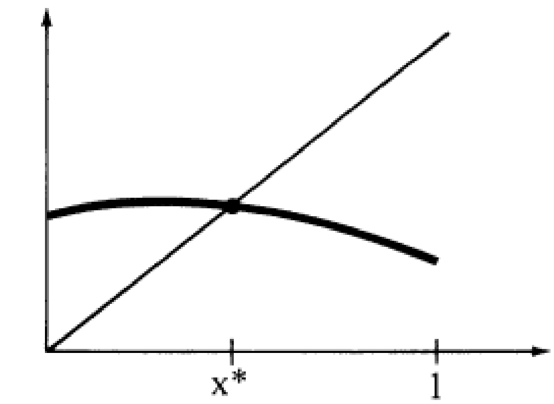
Remarque 3.1.1 *La condition (ii) signifie géométriquement que la pente de la sécante de la figure 3.1 est, en valeur absolue, inférieure ou égale à k, pour* $0 \leq k < 1$.

En particulier, (ii) est satisfait chaque fois que T est continue sur $[a, b]$ et différentiable sur $]a, b[$ avec $\left|T'(x)\right| \leq k < 1$ pour tout $x \in \,]a, b[$. Dans ce cas, le théorème des accroissements finis implique que

$$|T(x) - T(y)| = \left|T'(\xi)(x-y)\right| \leq k |x-y|\,, \text{ pour tout } x, y \in [a, b]\,.$$

Preuve. Nous appliquons le théorème 2.1.1 avec $X = \mathbb{R}$, $M = [a, b]$, et $d(x, y) = |x - y|$.

33



4.png

FIG. 3.2 – Figure 3.2

Méthode	**Simple Iteration (convergence linéaire)**
Iteration	x_n
$n = 0$	0.50000 00000 00000
$n = 1$	0.48445 62108 55322
$n = 2$	0.47763 10742 76604
$n = 3$	0.47462 49588 12801
$n = 4$	0.47329 91278 63845
$n = 5$	0.47271 40284 22385
$n = 10$	0.47225 93491 78005
$n = 20$	0.47225 15936 42896
$n = 25$	0.47225 15914 95831
$n = 26$	0.47225 15914 75369
$n = 27$	0.47225 15914 66336

TAB. 3.1 – tableau 3.1

Ainsi, le théorème 2.1.1 (ii) est satisfait. Le théorème 2.1.1 (i) découle de l'hypothèse (i), et le théorème 2.1.1 (iii), de (ii).

Comme exemple numérique, nous considérons l'équation

$$x = T(x), \text{ où } T(x) = \frac{1}{2}\left(\cos\left(\frac{x}{2}\right) - \left|x - \frac{1}{2}\right|\right). \tag{3.6}$$

La méthode itérative est $x_{n+1} = T(x_n)$, $n = 0, 1, 2$...L'esquisse de la figure 3.2 montre que l'on peut s'attendre à une solution proche de $x = 0,5$. Nous choisissons cela comme notre valeur initiale, donc $x_0 = 0,5$. ■

Exemple 3.1.1 *L'équation 3.6 a exactement une solution* x *dans l'intervalle* $[a, b] = [0.45, 0.55]$ *; on obtient*

$$0.472251591454 < x < 0.472251591479. \tag{3.7}$$

La deuxième colonne du tableau 3.1 contient les valeurs itératives x_n. Les décimales soulignées dans le tableau 3.1 sont celles qui se sont stabilisées.

Preuve. Pour tout $x, y \in [a, b]$, nous avons

$$\begin{aligned} \left|\frac{1}{2}\cos\left(\frac{x}{2}\right) - \frac{1}{2}\cos\left(\frac{y}{2}\right)\right| &\leq \left|\sin\left(\frac{x+y}{4}\right)\right| \left|\sin\left(\frac{x-y}{4}\right)\right| \\ &\leq \left|\frac{x+y}{4}\right| \left|\frac{x-y}{4}\right| \leq \frac{b}{8}\left|x-y\right| \end{aligned}$$

et

$$\left|\left|x - \frac{1}{2}\right| - \left|y - \frac{1}{2}\right|\right| \leq |x-y|\,,$$

pour que

$$|T(x) - T(y)| \leq k\,|x-y|\,,\ \text{où } k = \frac{b}{8} + \frac{1}{2} = 0,57 < 1,$$

d'où T est k-contractif sur$[a, b]$.

Depuis $T(0.5) = 0.484$, l'intervalle $[a, b]$ est appliquée sur lui-même par T. Par la proposition 3.1.1, il y a exactement une solution $x \in [a, b]$ de 3.6. L'estimation a posteriori 3.4 donne

$$|x_{27} - x| \leq k\,(1-k)^{-1}\,|x_{27} - x_{26}| = 1.2 \times 10^{-11},$$

ce qui prouve 3.7.

Cet exemple sert également à souligner la différence décisive entre les estimations d'erreur a priori et a posteriori. Par 3.3, l'estimation de l'erreur a priori est

$$|x_n - x| \leq k^n\,(1-k)^{-1}\,|x_1 - x_0|\,, \qquad k = 0.57.$$

En conséquence, il faudrait 40 itérations pour obtenir la précision souhaitée de 10 décimales, alors qu'en réalité, seulement 27 étaient nécessaires. ■

3.2 Equations différentielles et intégrales

Soit $f(x,y)$ être une fonction réelle continue sur $[a,b]\times[c,d]$. Le Cauchy problème de valeur initiale est de trouver une fonction différentiable continue y sur $[a,b]$ satisfaire l'équation différentielle

$$\frac{dy}{dx}=f(x,y)\,,\ y(x_0)=y_0. \tag{3.8}$$

Considérez l'espace de Banach $C[a,b]$ des fonctions réelles à valeur réelle avec norme supremum définie par

$$\|y\|=\sup\{|y(x)|:x\in[a,b]\}\,.$$

Intégration, nous obtenons une équation intégrale

$$y(x)=y_0+\int_{x_0}^{x}f(t,y(t))\,dt. \tag{3.9}$$

Le problème 3.8 est équivalent au problème de résolution de l'équation intégrale 3.9.
Nous définissons un application intégral $T:C(a,b)\to C(a,b)$ par

$$T(y(x))=y_0+\int_{x_0}^{x}f(t,y(t))\,dt.$$

Ainsi, une solution du problème de la valeur initiale de Cauchy 3.8 correspond à point fixe de T. On peut facilement vérifier que si T est la contraction, alors le problème 3.8 a une solution unique.
Maintenant, notre but est d'imposer certaines conditions sur f sous lequel l'intégrale l'application T est Lipschitzian .

Théorème 3.2.1 *Soit $f(x,y)$ être une fonction continue de $Dom(f) = [a,b] \times [c,d]$ tel que f est Lipschitzien par rapport à y ,c'est-à-dire qu'il existe $L > 0$ tel que*

$$|f(x,u) - f(x,v)| \leq L|u-v|,$$

pour tout $u, v \in [c,d]$ et pour $x \in [a,b]$.
Supposer $(x_0, y_0) \in int(Dom(f))$. Ensuite, pour suffisamment petit $h > 0$. Il existe une solution unique du problème 3.8.

Preuve. Soit $M = \sup\{|f(x,y)| : x, y \in Dom(f)\}$ et choisissez $h > 0$ tel que $Lh < 1$ et $[x_0 - h, x_0 + h] \subseteq [a,b]$. Ensemble

$$C = \{y \in C[x_0 - h, x_0 + h] : |y(x) - y_0| \leq Mh\}.$$

Alors C est un sous-ensemble fermé de l'espace métrique complet $C[x_0 - h, x_0 + h]$ et donc C est complet. Note $T : C \to C$ est une application contraction. En effet, pour $x \in [x_0 - h, x_0 + h]$ et deux fonctions continues $y_1, y_2 \in C$, Nous avons

$$\begin{aligned}\|T(y_1(x)) - T(y_2(x))\| &= \left\| \int_{x_0}^{x} f(t, y_1(t)) - f(t, y_2(t))\, dt \right\| \\ &\leq |x - x_0| \sup_{s \in [x_0 - h, x_0 + h]} L|y_1(s) - y_2(s)| \\ &\leq Lh\|y_1 - y_2\|.\end{aligned}$$

Par conséquent, T a un point fixe unique impliquant que le problème 3.8 a un solution unique. ■

Maintenant, considérons l'équation intégrale de Fredholm pour une fonction inconnue $y : [a,b] \to \mathbb{R}$ $(-\infty < a < b < \infty)$:

$$y(x) = f(x) + \lambda \int_a^b k(x,t)\, y(t)\, dt, \tag{3.10}$$

où

$$k(x,t) \text{ est continu sur } [a,b] \times [a,b],$$

et

$$f(x) \text{ est continu sur } [a,b].$$

Considérez l'espace de Banach $X = C[a,b]$ de fonctions continues à valeur réelle avec la norme supremum

$$\|y\| = \sup\{|y(x)| : x \in [a,b]\},$$

et définir un application $T : C[a,b] \to C[a,b]$ par

$$T(y(x)) = f(x) + \lambda \int_a^b k(x,t)\, y(t)\, dt. \tag{3.11}$$

Ainsi, une solution de l'équation intégrale de Fredholm 3.10 est un point fixe de T.

Nous imposons maintenant une restriction sur le nombre réel λ tel que T devient une contraction.

Théorème 3.2.2 *Soit $K(x,t)$ une fonction continue sur $[a,b] \times [a,b]$ avec*

$$M = \sup\{|k(x,t)| : \; x,t \in [a,b]\},$$

f une fonction continue sur $[a,b]$ et λ un nombre réel tel que $M(b-a)|\lambda| < 1$. Alors l'équation intégrale de Fredholm 3.10 a une solution unique.

Preuve. Il suffit de montrer que l'application T défini par 3.11 est une contraction. Pour deux fonctions continues $y_1, y_2 \in C[a,b]$, Nous avons

$$\begin{aligned}
\|T(y_1(x)) - T(y_2(x))\| &= \sup_{x\in[a,b]} |\lambda| \left| \int_a^b k(x,t)[y_1(t) - y_2(t)]\,dt \right| \\
&\leq |\lambda| \sup_{x\in[a,b]} \int_a^b |k(x,t)|\,|y_1(t) - y_2(t)|\,dt \\
&\leq |\lambda|\, M \int_a^b \sup_{t\in[a,b]} |y_1(t) - y_2(t)|\,dt \\
&= |\lambda|\, M\, \|y_1 - y_2\| \int_a^b dt \\
&= M(b-a)\,|\lambda|\, \|y_1 - y_2\|.
\end{aligned}$$

■

Conclusion

La théorie du point fixe est d'une importance capitale dans l'étude de l'existence de solution pour les équations non linèaires.

De nombreux théorèmes d'existence sont obtenus à partir des théorèmes de Banach et Schauder, en transformant le problème d'existence en un problème de point fixe. Mais celui de Brouwer est particulièrement célèbre.

Le théorème de Banach ne s'appuie pas sur les propriétés topologiques du domaine de définition mais sur le fait que la fonction étudiée soit contractante.

Le résultat de Brouwer est l'un des théorèmes-clef caractèrisant la topologie d'un espace euclidien. Il intervient pour établir des résultats finis sur les équations différentielles ; il est présent dans la géométrie différentielle.

Ce théorème est généralisé en 1930 aux espaces de Banach. Cette généralisation est due à Schauder. Ce théorème affirme qu'une application continue sur un convexe compact admet un point fixe, qui n'est pas nécessairement unique, mais qui nous permet de résoudre plusieurs problèmes.

De cette théorie découlent plusieurs applications qui constituent un domaine très actif de la recherche.

Bibliographie

[1] Agarwal, R. P., O'Regan, D., & Sahu, D. R. (2009). Fixed point theory for Lipschitzian-type mappings with applications (Vol. 6, pp. x+-368). New York : Springer.

[2] Agarwal, R. P., Meehan, M., & O'Regan, D. (2001). Fixed point theory and applications (Vol. 141). Cambridge university press..

[3] Brezis, H., Ciarlet, P. G., & Lions, J. L. (1999). Analyse fonctionnelle : théorie et applications (Vol. 91). Paris : Dunod.

[4] Sondaz, D. Bien Maîtriser les mathématiques. Compacité, Connexité. Introduction à la topologie. L3, Masters, Capes, Agrégation. Exercices corrigés avec rappels de cours.

[5] Sondaz, D., & Morvan, R. Titre : Bien maîtriser les mathématiques. Introduction à la topologie. Espaces topologiques, métriques, normés. L3, Masters, CAPES, Agrégation. Editeur : Cépaduès éditions Toulouse, 2008 Collection : Bien maîtriser les mathématiques Format : 14, 5 cm x 20, 5 cm, 157 p. Index.

[6] Sondaz, D., & Morvan, R. Titre : Bien maîtriser les mathématiques. Limites, applications continues, espaces complets. Introduction à la topologie. Editeur : Cépaduès éditions Toulouse, 2010 Collection : Bien maîtriser les mathématiques Format : 14, 5 cm x 20, 5 cm, 138 p. Index.

[7] Zeidler, E. (1998). Nonlinear functional analysis and its applications : I Fixed-Point Theorems . Springer Science .

Annexe : Abréviations et Notations

Les différentes abréVariations et notations utilisées tout au long de ce mémoire sont expliquées ci-dessous.

ε, λ	Des petites paramètres positives.
$\mathbb{N}$	Ensemble des nombres naturels.
$\mathbb{R}$	Ensemble des nombres réels.
$\mathbb{C}$	Ensemble des nombres complexes.
$C[a,b]$	Espace de fonctions continues, $f : [a,b] \to \mathbb{R}$.
$co(A)$	Le plus petit ensemble convexe contenant A.
dom	Le domaine.
$(g \circ f)(x)$	$g(f(x))$, f appliqué à g.
$\varnothing$	ensemble vide.
B-espace	Espace de Banach
B^n	La boule d'unité fermée dans $\mathbb{R}^n$.
∂B	frontières de la boule B
$int(G)$	L'intérieur de l'ensemble G.