République Algérienne Démocratique et Populaire

Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

UNIVERSITÉ MOHAMED KHIDER, BISKRA

FACULTÉ des SCIENCES EXACTES et des SCIENCES de la NATURE et de la VIE

DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES

Mémoire présenté en vue de l'obtention du Diplôme **:**

MASTER en Mathématiques

Option :**Probabilité**

Par

Labchaki Sabah

Titre :

Processus de Lévy

Membres du Comité d'Examen :

Dr.	GHERBEL Boulakhras	UMKB	Président
Dr.	YEKHLEF Samia	UMKB	Encadreur
Dr.	TABET Moufida	UMKB	Examinateur

Juin 2018

Dédicace

Ce travail est dédié

A ceux qui m'ont appris le respect et le sens du devoir ;

Ceux qui ne cessent de se sacrifier pour mon bien être ;

Ceux qui m'ont protégés,

A mes chèrs parents Khelifa, Mebarka ;

A mes étoiles les plus brillantes dans ma famille Rahma, Maissa, Hassna, Rima, Maria, Kater Nada, Nihel ;

A mon frère : Anouar ;

A mes chèrs sœurs Jolia, Donia, nadjwa, Nour elhouda, Samia, Sarra, Lamia ;

A mes chères amies : Amina, Sara, Rayen, Aicha, Sabrine, Wissem, Amina et...

A mes collègues de la promotion 2018 particulièrement ceux de la spècialité Mathématiques

REMERCIEMENTS.

D'abord nous remercions DIEU de nous avoir venu en aide pour que nous puissions aboutir à la réussite.

Tout le respect et les mots de remerciement à mon encadreur Dr. YEKHLEF Samia, pour son soutien, son aide, et ses conseils et ses directives du début jusqu'à la fin de ce travail.

Je tiens aussi à remercier notre chef du département de mathématique Dr.HAFAYE Mokhtar, et les enseignant qui

ont participés à notre formation, et tous les enseignants

du département de mathématiques de l'université Mohamed Kheider.

Mes remerciements aussi aux membres de jurés qui nous honorent à accepter de juger ce modeste travail.

Dr.GHERBEL Boulakhras et Dr. TABET Moufida

J'exprime aussi mes gratitudes à toutes les personnes qui ont contribués de prés ou de loin à la réalisation de ce travail.

Table des matières

Table des figures

Introduction

Un processus stochastique est un phénomène qui évolue dans le temps de manière aléatoire. La nature, la vie quotidienne et la science nous donnent beaucoup d'exemples divers de ce genre de phénomène, ou en tout cas des phénomènes qui peuvent être compris de cette façon-là : quelque chose qui bouge aléatoirement avec le temps. En finances, la valeur instantanée d'un actif obéit à ce schéma-ci, la population d'une ville, la météo, le nombre de personnes dans une file d'attente ou dans un bus et la position d'une particule de pollen dans un fluide, sont des exemples de processus stochastiques. Ce dernier fut étudié pour la premiére fois par le botaniste Robert Brown en 1827 et reçoit le nom de mouvement brownien. Il joue un rôle fondamental dans la théorie des processus aléatoires, un peu comme la distribution gaussienne dans la théorie des propabilitès.

Ce mémoire est principalement constituée trois chapitres :

Dans le premier chapitre, aprés avoire donner des définitions d'un processus stochastique puis des dèfinition d'un processus de Lévy et ces propriètès. nous avons étudié les lois infiniment divisibles, la décomposition de Lévy -khintchine, puis la décomposition de Lévy-Itô.

Le deuxième chapitre est consacré à l'étude de quelques exemples de processus qui sont des cas particulier du processus de Lévy, nous allons commencer par la définition et les propriétés de mouvement Brownien ainsi que le processus de Poisson et le processus de Poison composé.

Dans le dernier chapitre nous allons donner un exemple d'applications, nous allons nous placer dans le cas d'un réservoir (plan d'eau de retenue d'eaux pluviales, ou château d'eau) mais en fait ceci s'applique aussi bien à des problémes de stockage de denrées en micro- ou macroéconomie. Ou encore avec quelque modifications à la théorie des assurances

Chapitre 1

Processus de Lévy

Dans ce chapitre on donne une introduction sur les processus stochastiques et puis on donne des définitions du processus de Lévy et ces propriétés, nous avons étudié les lois infiniment divisibles, la décomposition de Lévy-Khintchine et la décomposition de Lévy-Itô.

1.1 Processus stochastique

Définition 1.1.1 *Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espace de probabilité et $(E, \mathcal{E})$ un espace mesurable. Soit $\mathbb{T}$ un ensemble ; on considère une application :*

$$X : \mathbb{T} \times \Omega \longmapsto \mathbb{E}$$

$$(t, \omega) \longmapsto X(t, \omega)$$

Un processus stochastique est une famille $\{X_t, t \in \mathbb{T}\}$ de variables aléatoires définies sur un même espace de probabilité.
Pour t fixe

$$\omega \longmapsto X(t, \omega)$$

est une variable aléatoire pour tout $t \in \mathbb{T}$.

Pour ω fixe

$$t \longmapsto X_t(\omega)$$

est appelé une trajectoire.

Le processus est en temps continue si $\mathbb{T}$ est continue (par exemple, $I = [1, 2]$) et en temps discret si $\mathbb{T}$ est discret ou processus à espace de temps discret (par exemple, $I = \{0, 1, 2, 3, ...\}$).

Définition 1.1.2 *On dit que le processus est à trajectoires continues (ou est continu) si les applications $t \longmapsto X_t(\omega)$ sont continues pour presque tout ω.*

Définition 1.1.3 *Un processus est dit càdlàg (continu à droite, limites à gauche).si ses trajectoires sont continues à droite, pourvues limites à gauche.*

Définition 1.1.4 *Un processus $\{X_t\}$ tel que $X_0 = 0$ est à accroissements indépendants si, pour tout suit finie $0 < t_1 < t_2 < ... < t_n$, les variables aléatoires :*

$$X_{t_1}, X_{t_2} - X_{t_1}, ..., X_{t_n} - X_{t_{n-1}}$$

sont indépendantes.

Définition 1.1.5 *Un processus à accroissements indépendants est à accroissements stationnaires si la loi de l'accroissement :*

$$X_{t+s} - X_t$$

ne dépend pas de t, pour tout $t \geq 0$.

Définition 1.1.6 *Une filtration $(\mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ est une suite croissante de sous tribus de $\mathcal{F}$:*

$$\mathcal{F}_n \subset \mathcal{F}_{n+1} \quad \textit{pour tout } n \geq 0$$

Un processus à temps discret $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est dit adapté à la filtration $(\mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ si pour tout n la variable aléatoire X_n est $\mathcal{F}_n-$mesurable.
En particulier, un processus $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est toujours adapté à sa filtration naturelle $\mathcal{F}^X$ définie par :

$$\mathcal{F}_n^X = \sigma(X_k,\ k \leq n)$$

1.2 Processus de Lévy

Soit $X = (X_t; t \geq 0)$ un processus stochastique défini sur un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{P})$. On dit que X est à accroissements indépendants si, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et pour tous $0 \leq t_1 \leq ... \leq t_n < \infty$, les variables aléatoires $\{X_{t_j+1} - X_{t_j}; 1 \leq j \leq n-1\}$ sont indépendants. On dit que X est à accroissements stationnaire ssi, pour tous $t, s > 0$, la v.a $X_{t+s} - X_s$ a même loi que $X_t - X_0$.

Définition 1.2.1 *On dit que X est un processus de Lévy (issu de 0) si :*

1) $X_0 = 0$ presque sûrement ;

2) X est à accroissements indépendants et stationnaires ;

3) X est stochastiquement continu : pour tout $\epsilon > 0$ et $t \geq 0$:

$$\lim_{h\to 0} P(|X_{t+h} - X_t| > \epsilon) = 0.$$

On peut remarquer que (1) et (2) implique qu'il suffit de vérifier (3) pour $t = 0$.

Théorème 1.2.1 *Si X est un processus de Lévy, alors*

$$\forall u \in \mathbb{R}^d, \phi_{X_t}(u) = e^{t\eta(u)}$$

où η est le symbole de Lévy de X_1.

Notation 1.2.1

Soit B_0 ; la famille des ensemble de borel $U \in B_0$, en définie :

$$N(t,U) := N(t,U,\omega) = \sum_{0<s\leq t} \chi_U(\Delta\eta_s).$$

en d'autre termes $N(t,U)$ est le nombre de sauts de taille $\Delta\eta_s \in U$ qui se produit avant ou en temps $N(t,U)$ est appelé mesure aléatoire de Poisson (ou mesure de saut) de $\eta(.)$. La forme défférentiel de cette mesure est écrite : $N(dt,dz)$.
Soit la fonction :

$$\nu(U) = E[N(1,U)]$$

où : $E = E_P$ désinge l'attente de P, aussi définit une mesure $\sigma-$finie sur B_0 appelé" mesure de lévy " de $\{\eta_t\}$

1.2.1 Propriétés

Accroissements indépendants :

Un processus stochastique à temps continu associe une variable aléatoire X_t à tout instant $t \geq 0$. C'est donc une fonction aléatoire de t. Les accroissement d'un tel processus sont les différences $X_t - X_s$ entre ses valeurs à différents instants $s < t$.
Dire que les accroisements d'un processus sont indépendants signifie que les accoissement $X_t - X_s$ et $X_u - X_v$ sont des variables aléatoires indépendantes à partir du moment où les intervalles de temps ne se chevauchent pas, et plus généralement, tout nombre fini d'accoisements sur des intervalles de temps non chevauchant sont mutuellement indépendant (et pas seulement indépendants deux à deux).

Accoissements stationnaires :

Dire que les accroissements sont stationnaires signifie que la loi de chaque accroisement $X_t - X_s$ ne dépend que de la longueur $t - s$ de l'intervalle de temps.

Par exemple pour un processus de Poisson, la loi de $X_t - X_s$ est une loi de Poisson d'éspérance $\lambda(t-s)$, où $\lambda > 0$ est "l'intensité" ou le "taux" du processus. Pour un processus de Wiener, la loi de $X_t - X_s$ est une loi normale d'espérance nulle et de variance $(t-s)$.

Définition 1.2.2 $(X_t)_{t\geq 0}$ *est un processus de Lévy stable de paramétre* $\alpha \in [0, 2]$ *(ou un processus de Lévy* $\alpha - stable$*) si et seulement si les deux processus* $(X_{c}\alpha_t)_{t\geq 0}$ *et* $(cX_t)_{t\geq 0}$ *ont la même loi pour tout réel* $c > 0$.
Cette propriété s'appelle la propriété de stabilité (ou scalling).
Maintenant, on va étudie la loi infiniment divisibles, cette étude permet d'en fournir une décomposition caractéristique, appellée représentation de Lévy-Khintchine, comme convolution de trois termes asément identifiables : un terme de dérive (évolution de la valeur moyenne), un terme de diffusion (traduisant un mouvement Brawnien) et un terme de processus de Poisson.

1.3 Lois infiniment divisibles

Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{R}^d$ de loi μ_X. On dit que X est infiniment divisible si, pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe des v.a i.i.d $Y_1^{(n)}, ..., Y_n^{(n)}$ telles que

$$X \overset{loi}{=} Y_1^{(n)} + ... + Y_n^{(n)}.$$

Soit $\phi_X(u) = E[e^{i(u,X)}]$ la fonction caractéristique de X.

Proposition 1.3.1 *(1)* X *est infiniment divisible,*

(2) Pour tout n, ϕ_X *a une racine* n*-ième qui est la fonction caractéristique d'une variable aléatoire.*

Preuve. (1) implique (2). Il suffit de prendre la fonction caractéristique de $Y_1^{(n)}$.

(2) implique (1). Soit $Y_1^{(n)}, ..., Y_n^{(n)}$ des copies indépendantes de loi associée à ϕ_Y telle que $\phi_X(u) = (\phi_Y(u))^n$. Alors il est facile de voir que

$$X \overset{loi}{=} Y_1^{(n)} + ... + Y_n^{(n)}.$$

à l'aide des fonctions caractéristiques. ■

Exemple 1.3.1 ***Variables gaussiennes*** *Les lois gaussiennes sont infiniment divisibles.*

Exemple 1.3.2 ***Loi de Poisson*** *On prend* $d = 1$*. On définit une variable* X *par*

$$\forall n \in \mathbb{N}, P(X = n) = \frac{\lambda^n}{n!} e^{-\lambda}$$

On note $X \sim P(\lambda)$*. On a* $E[X] = Var(X) = \lambda$ *et*

$$\phi_X(u) = e^{\lambda(e^{iu}-1)}.$$

On en déduit que X *est infiniment divisible car* $\phi_X(u) = (\phi_Y(u))^n$ *avec* $Y \sim P(\lambda/n)$*.*

Exemple 1.3.3 ***Loi de Poisson composée****. On considère une suite* $(Z_n)_n$ *de v.a i.i.d à valeurs dans* $\mathbb{R}^d$ *de loi* μ_Z*. Soit* N *une loi de Poisson de paramètre* λ *indépendante de la suite* $(Z_n)_n$*. On définit une variable* X *par*

$$X = \sum_{k=1}^{N} Z_k$$

On a

$$\phi_X(u) = \exp(\int_{\mathbb{R}^d} (e^{i(u,y)} - 1)\lambda\mu_Z(dy).$$

On en déduit que X *est infiniment divisible car* $\phi_X(u) = (\phi_Y(u))^n$ *avec* $Y \sim P(\lambda/n)$*. On remarque que* $\phi_X(u) = (\phi_Y(u))^n$ *où* $Y \sim P(\lambda/n, \mu_Z)$*. Donc* X *est infiniment divisible.*

1.4 Décomposition de Lévy-Khintchine

Soit ν une mesure de Borel sur $\mathbb{R}^d\backslash\{0\}$. On dira que ν est une mesure de Lévy si

$$\int_{\mathbb{R}^d\backslash\{0\}} (1 \wedge z^2)\nu(dz) < +\infty. \tag{1.1}$$

C'est une mesure σ-finie. C'est équivalent de dire que

$$\int_{\mathbb{R}^d\backslash\{0\}} \frac{z^2}{1+z^2}\nu(dz) < +\infty. \tag{1.2}$$

Théorème 1.4.1 (Formule de Lévy-Khintchine) *Soit X une v.a à valeurs dans $\mathbb{R}^d$. Alors X est infiniment divisible s'il existe $b \in \mathbb{R}^d$, une matrice $A \in \mathbb{R}^{d\times d}$ et une mesure de Lévy ν tels que*

$$\forall u \in \mathbb{R}^d,\ \phi_X(u) = \exp(i(b,u) - \frac{1}{2}(u, A_u) + \int_{\mathbb{R}^d\backslash\{0\}} (e^{i(u,z)} - 1 - i(u,z)\chi_{\{|z|\leq 1\}})\nu(dy)). \tag{1.3}$$

Réciproquement, toute application de la forme ci-dessus est la fonction caractéristique d'une v.a infiniment divisible sur $\mathbb{R}^d$.

Preuve. On ne démontre que la deuxième partie du théorème. La partie la plus difficile résultera de la décomposition d'Itô-Lévy.

Tout d'abord, on montre que le membre de droite est une fonction caractéristique. Pour simplifier les notations, on suppose $d = 1$. Soit $(\alpha_n)_n$ une suite décroissante vers 0 et on définit pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$\phi_X(u) = \exp(i(b - \int_{A_n} z\nu(dz), u) - \frac{1}{2}(u, A_u) + \int_{[-\alpha_n,\alpha_n]^c} (e^{i(u,z)} - 1)\nu(dy)). \tag{1.4}$$

où l'ensemble A_n est défini par $A_n = [-1,1] \cap [-\alpha_n, \alpha_n]^c$. Dans ce cas, ϕ_n est la fonction caractéristique d'une loi X qui est la somme d'une constante, d'une loi normale $\mathcal{N}(0, A)$

et d'une loi de Poisson composée $P(\lambda, \mu_Z)$ avec $\lambda = \nu([-\alpha_n, \alpha_n]^c)$ et $\mu_Z = \frac{1}{\lambda}\nu$.

On vérifie ensuite que

$$\phi_n(u) \to \phi_X(u);$$

quand $n \to \infty$ où ϕ_X est la fonction donnée par 1.5.Pour appliquer le théorème de continuité de Lévy, il suffit demontrer que ϕ_X est continue en 0. Pour cela, le seul terme nécessitant vérification est l'intégrale que l'on décompose en :

$$\begin{aligned}&\int\limits_{\mathbb{R}^d\setminus\{0\}} (e^{i(u,z)} - 1 - i(u,z)\chi_{\{|z|\leq 1\}}))\nu(dy)\\ &= \int\limits_{|z|\leq 1} (e^{i(u,z)} - 1 - i(u,z))\nu(dy) + \int\limits_{|z|>1} (e^{i(u,z)} - 1)\nu(dy)\end{aligned}$$

En utilisant les majorations $| e^{i(u,z)} - 1 - i(u,z) | \leq u^2 z^2$ pour $| z | \leq 1$ et $| e^{i(u,z)} - 1 | \leq 2$ pour $| z | > 1$ et les propriétés d'intégrabilité de la mesure de Lévy, on peut facilement appliquer le théorème de convergence dominée et en déduire

$$\int\limits_{\mathbb{R}^d\setminus\{0\}} (e^{i(u,z)} - 1 - i(u,z)\chi_{\{|z|\leq 1\}}))\nu(dy) \to 0$$

quand $u \to 0$. Donc ϕ_X est bien la fonction caractéristique d'une v.a X. On peut directement vérifier qu'elle est infiniment divisible à l'aide des fonctions caractéristiques.

■

Théorème 1.4.2 (Formule de Lévy-khintchine pour le processus de Lévy) *Soit X un processus de Lévy. Alors il existe $b \in \mathbb{R}^d$, une matrice $A \in \mathbb{R}^{d\times d}$ et une mesure de Lévy ν tels que $\forall u \in \mathbb{R}^d$, $\forall t \geq 0$*

$$E[e^{i(u,X_t)}] = \exp(t(i(b,u) - \frac{1}{2}(u, A_u) + \int\limits_{\mathbb{R}^d\setminus\{0\}} (e^{i(u,z)} - 1 - i(u,z)\chi_{\{|z|\leq 1\}}))\nu(dy) \qquad (1.5)$$

Proposition 1.4.1 *Si $X = (X_t; t \geq 0)$ est un processus stochastique et s'il existe une* *suite* $(X^n = (X_t^n; t \geq 0))_n$ *de processus de Lévy telle que :*

1) X_t^n *converge en probabilité vers* X_t *pour tout* $t \geq 0$

2) *pour tout* $\epsilon > 0$, $\lim_{n\to\infty} \limsup_{t\to 0} P(\mid X_t^n - X_t \mid > \epsilon) = 0$,

   alors X *est un processus de Lévy.*

1.5 Décomposition de Lévy-Itô

Théorème 1.5.1 (Décomposition de Lévy-Itô) *Si* X *est un processus de Lévy alors il existe* $b \in \mathbb{R}^d$*, un mouvement brownien* B*, une matrice de covariance* $A \in \mathbb{R}^{d\times d}$ *et une mesure aléatoire de Poisson indépendante* N *on* $\mathbb{R}^+ \times (\mathbb{R}^d/\{0\})$*, dont l'intensité est une mesure de Lévy* ν*, tels que, pour tous* $t \geq 0$ *:*

$$X_t = bt + A^{1/2}B_t + \int\limits_{|z|<1} z\tilde{N}(t, dz) + \int\limits_{|z|\geq 1} zN(t, dz). \tag{1.6}$$

Le processus $\int\limits_{|z|<1} z\tilde{N}(t, dz)$ *est la somme compensée des petits sauts. C'est une martingale càdlàg de carré intégrable. Le processus* $\int\limits_{|z|\geq 1} zN(t, dz)$ *représente les grands sauts du processus de Lévy. C'est un processus de Poisson composé.*

Chapitre 2

Exemples de processus de Lévy

Dans ce chapitre nous donnons quelques exemples bien connue de processus de Lévy, mouvement Brownien, processus de Poisson et de Poisson composée, et leurs définitions et propriétés.

2.1 Mouvement Brownien

Définition 2.1.1 *Soit $X = \{X_t, t \geq 0\}$ un processus issu de 0 et à valeurs dans $\mathbb{R}$. On dit que X est un mouvement Brownien s'il vérifie l'une des deux conditions suivantes (équivalentes) :*

a) X est un processus gaussien centré et de fonction de covariance

$E[X_s X_t] = s \wedge t.$

b) X est un processus à accroissements indépendants et stationnaires tel que

$X_t \sim \mathcal{N}(0, t)$ *pour tout* $t \geq 0$.

Définition 2.1.2 *Un processus aléatoire $\{X_t, t \geq 0\}$ réel est un mouvement Brownien standard à une dimension si*

1. $X(0) = 0$, *P.p.s*
2. $\{X_t, t \geq 0\}$ *est un processus à accroissements indépendants ;*

3. *$\{X_t, t \geq 0\}$ est un processus à accroissements stationnaires : la loi de l'accroissement $X_{t+s} - X_t$ est indépendante t pour tout $s, t \geq 0$.*

4. *Pour tous $t > 0$, X_t est une variable aléatoire gaussienne de moyenne 0 et de variance t.*

Proposition 2.1.1 *Soit $\epsilon > 0$ et $\{X_t, t \geq 0\}$ un mouvement Brownien standard (dimension 1). On a*

$$\lim_{h \to 0} \frac{1}{h} P(\mid X_{t+h} - X_t \mid > \epsilon) = 0 \tag{2.1}$$

Preuve. *Soit $h > 0$. Par définition, l'accroisement $X_{t+h} - X_t$ admet pour loi $\mathcal{N}(0, h)$. Donc*

$$\begin{aligned} \frac{1}{h} P(\mid X_{t+h} - X_t \mid > \epsilon) &= \frac{2}{h} \int_{\epsilon}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi h}} e^{-\frac{x^2}{2h}} dx \\ &< 2 \int_{\epsilon}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{h^{3/2}} e^{-\frac{\epsilon x}{2h}} dx \\ &= \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{h}} \frac{1}{h^{3/2}} \frac{2h}{\epsilon} e^{-\frac{\epsilon^2}{2h}} \end{aligned} \tag{2.2}$$

Le dernier terme converge vers 0 lorsque $h \to 0$. ■

2.1.1 Propriétés du mouvement Brownien

Scaling

Proposition 2.1.2 *Soit $(B_t)_{t \geq 0}$ un mouvement Brownien sur $(\Omega, (\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. Alors les processus suivants sont des mouvements Browniens :*

1) $(-B_t)_{t \geq 0}$. C'est la propriété de symétrie du mouvement Brownien.

2) $(B_{T+t} - B_T)_{t \geq 0}, T \geq 0$. C'est la propriété d'invariance par translation du mouvement Brownien.

3) $(\frac{1}{\sqrt{c}} B_{ct})_{t \geq 0}$, pour $c > 0$. C'est la propriété d'autosimilarité du mouvement Brownien.

4) $(tB_{1/t})_{t>0}$. *C'est la propriété d'invariance par inversion du mouvement Brownien .*

Processus Gaussien

Proposition 2.1.3 *Le processus B est un processus gaussien, sa loi est caractérisée par son espérance nulle et sa covariance $Cov(B_t, B_s) = s \wedge t$.*

Propriété de Markov

La propriété de Markov du mouvement Brownien est utilisée sous la forme (un peu plus forte que la propriété de Markov) : pour tout s, le processus $(W_t, t \geq 0)$ défini par
$W_t \overset{Def}{=} B_{t+s} - B_s$ est un mouvement Brownien indépendant de $\mathcal{F}_s$.

Théorème 2.1.1 *Pour f borélienne bornée, $E(f(B_u)|\mathcal{F}_t) = E(f(B_u)|\sigma(B_t))$ pour $u > t$.*

Proposition 2.1.4 (Propriété de Markov forte) *Soit T un temps d'arrêt à valeurs finies. On a alors $E(f(B_{T+s})|\mathcal{F}_T) = E(f(B_{T+s})|\sigma(B_T))$. En particulier, pour tout temps d'arrêt fini T, le processus $(W_t, t \geq 0)$ défini par*
$W_t \overset{Def}{=} B_{t+T} - B_T$ *est un mouvement Brownien indépendant de $\mathcal{F}_T$.*

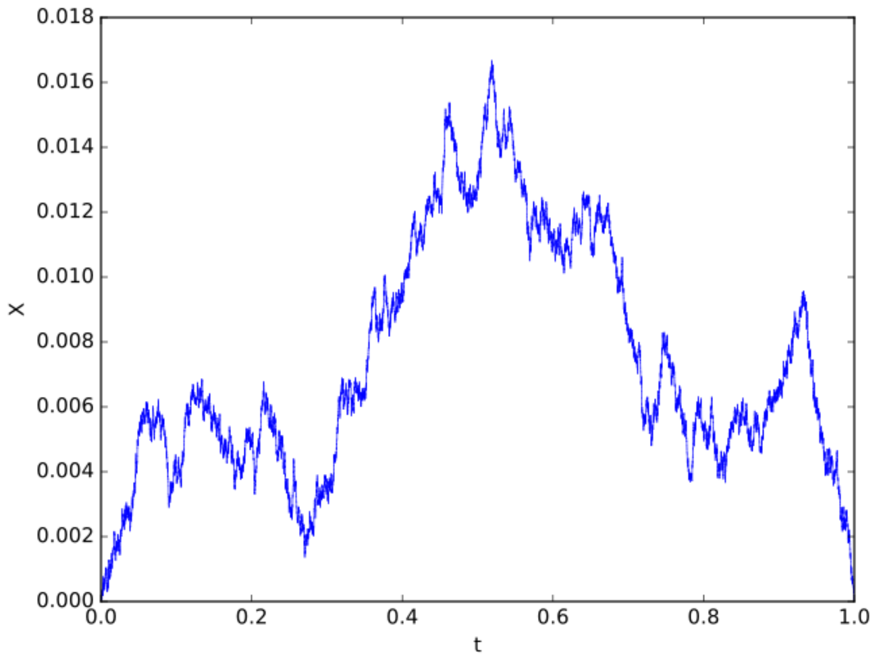

FIG. 2.1 – Trajectoire d'un Mouvement Brownien

2.2 Processus de Poisson

2.2.1 Présentation du processus de Poisson

Définition 2.2.1 *Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de v.a. indépendantes et de même loi, exponentielle de paramétre λ. Posons $S_0 = 0$ et pour tout entier $n \geq 1$, $S_n = X_1 + ... + X_n$. Pour tout réel $t \geq 0$, définissons la v.a. N_t, à valeurs entières, par :*

$$N_t = n \Leftrightarrow S_n \leq t < S_{n+1}$$

Le processus stochastique $\{N_t\}_t \geq 0$ est appelé processus de Poisson d'intensité λ.

Le processus de Poisson est un modèle de comptage d'événements aléatoires isolés dans le temps.

Théorème 2.2.1 *Considérons un processus de Poisson $\{N_t\}_{t\geq 0}$ d'intensité λ. Il vérifie* *les propriétés suivantes :*

(P1) $\{N_t\}_{t\geq 0}$ *est un processus de comptage ; il est à valeurs entiéres, vérifie* $N_0 = 0$ *p.s. et pour tous réels* $0 \leq s \leq t, N_s \leq N_t$.

(P2) $\{N_t\}_{t\geq 0}$ *est un processus à accroissements indépendants ; pour tout entier* k *et pour toute suite d'instants* $0 \leq t_1 < t_2 < ... < t_k$*, les accroissements* $N_{t_2} - N_{t_1}, ..., N_{t_k} - N_{t_{k-1}}$ *sont des v.a. indépendantes.*

(P3) Les accroissements du processus $\{N_t\}_{t\geq 0}$ *sont poissonniens ; pour tous réels* $0 \leq s < t$*, la v.a.* $N_t - N_s$ *suit la loi de Poisson de paramétre* $\lambda(t-s)$ *;*

(P4) $\{N_t\}_{t\geq 0}$ *est un processus homogène ou à accroissements stationnaires ; pour tous instants* $0 \leq t_1 < t_2$ *et* $s \geq 0$*, la v.a.* $N_{t_2+s} - N_{t_1+s}$ *suit la même loi que* $N_{t_2} - N_{t_1}$ *;*

(P5) $\{N_t\}_{t\geq 0}$ *est un processus d'événements rares ;* $\mathbb{P}(N_{t+h} - N_t \geq 2) = o(h)$.

Proposition 2.2.1 *Si* N *est un processus de Poisson alors*

1. *Les trajectoires de* N *sont constantes par morceaux, avec des sauts de taille* 1 *seulement.*
2. *Les trajectoires sont càdlàg,*
3. $\forall t > 0$, $\mathbb{P}(N_{t-} = N_t) = 1$.
4. $\forall t > 0$, N_t *suit une loi de Poisson de paramètre* λt *:*

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \mathbb{P}(N_t = n) = e^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^n}{n!} \tag{2.3}$$

   En particulier on a

$$E[N_t] = \lambda t = Var[N_t], \quad E[e^{iuN_t}] = \exp(\lambda t(e^{iu} - 1)),$$

5. $\forall n \geq 1$, T_n *suit une loi gamma de paramètre* (n, λ) *de densité*

$$f_{T_n}(x) = \frac{(\lambda t)^{n-1}}{(n-1)!}\lambda e^{-\lambda t}\chi_{\{t>0\}}$$

Théorème 2.2.2 (Comportement asymptotique) *Si N est un processus de Poisson d'intensité $\lambda > 0$ alors, lorsque t tend vers $+\infty$:*

$$p.s. \frac{N_t}{t} \to \lambda \ et \ \sqrt{\frac{t}{\lambda}}(\frac{N_t}{t} - \lambda) \overset{loi}{\to} \mathcal{N}(0,1).$$

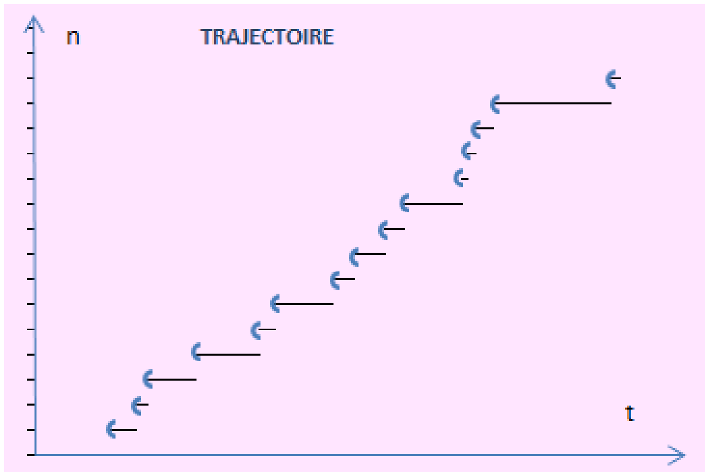

FIG. 2.2 – Trajectoir d'un processus de Poisson

2.3 Processus de Poisson composés

Définition 2.3.1 *Un processus de Poisson avec intensité $\lambda > 0$ et loi de sauts ν_Z est un processus stochastique défini par*

$$X_t = \sum_{k=1}^{N_t} Z_{k,} \tag{2.4}$$

où $(Z_n)_n$ est une suite de v.a i.i.d à valeurs dans $\mathbb{R}^d$ de loi ν_Z et N est un processus de Poisson de paramètre λ indépendant de la suite $(Z_n)_n$.

En d'autres mots, un processus de Poisson composé est un processus constant par morceaux qui saute aux instants de sauts d'un processus de Poisson standard, et dont les tailles de sauts sont des variables i.i.d. d'une loi donnée.

Citons quelques exemples de phénomènes susceptibles d'être décrits par des processus de

Poisson composés

* Arrivées d'avion dans un aéroport : chaque avion transporte un certain nombre de passagers,
* Arrivées de clients aux caisses d'un supermarché : chaque client dépense une certaine somme d'argent,
* Trafic routier : à chaque accident correspond un certain nombre de personnes blessées,
* Assurance-sinistre : à chaque sinistre est associé un coût de réparation des dégâts.

Un processus de Poisson composé est clairement un processus càdlàg et constant par morceaux. Sa fonction caractéristique est donnée par

$$\phi_{X_t}(u) = \exp(t \int_{\mathbb{R}^d} (e^{i(u,y)} - 1)\lambda \nu_Z(dy)). \tag{2.5}$$

Proposition 2.3.1 *Soit X un processus de Poisson composé. Alors X est à accroissements indépendants et stationnaires.*

Chapitre 3

Exemple d'application

Dans ce chapitre on étudiée des exemples d'applications comme la théorie des réservoirs, des stocks et des assurances.

3.1 Théorie des réservoirs, des stocks et des assurances

Nous allons nous placer dans le cas d'un réservoir (plan d'eau de retenue d'eaux pluviales, ou château d'eau) mais en fait ceci s'applique aussi bien à des problémes de stockage de denrées en micro- ou macroéconomie. Ou encore avec quelque modifications à la théorie des assurances.

Nous considérons donc un réservoir alimenté en eau s'écoule de façon uniforme pour autant qu'il n'est pas vide. Nous supposons en revanche que sa capacité est trés grande et non limitée (donc mathématiquement infinie).

Nous réprésentons la quantité d'eau arrivant au réservoir pendant l'intervalle de temps $]s,t]$ par l'acroissement $X_t - X_s$ d'un processus de lévy de mesure de lévy ν sur $\mathbb{R}_+ - \{0\}$. X_t réprésentant la quantité d'eau arrivée dépuis l'instant 0 est un processus croissant présentant des sauts d'amplitude variable contrôlée par la mesure ν.

3.1.1 Equation du niveau d'eau

Appellons Z_t la quantité d'eau dans le réservoir à l'instant t, supposons $X_0 = 0$. Le réservoir se vidant régulièrement quand il n'est pas vide, la quantité d'eau écoulée du réservoir durant $]0,t]$ est

$$k\int_0^t \chi_{Z_s>0}ds \tag{3.1}$$

où k est une constante.

De sorte que l'on a l'équation du niveau d'eau suivante

$$Z_t = Z_0 + X_t - k\int_0^t \chi_{Z_s>0}ds \tag{3.2}$$

Proposition 3.1.1 *L'équation stochastique 3.2 a une solution unique si $Z_0 \geq 0$ donnée par*

$$Z_t = Z_0 + X_t - kt + (m(t) + Z_0)^- \tag{3.3}$$

où

$$m(t) = \inf_{0<s\leq t}(X_s - ks) \tag{3.4}$$

et

$$x^- = \begin{cases} 0 \ si \ x > 0 \\ -x \ si \ x < 0 \end{cases} \tag{3.5}$$

Preuve. Ce résultat est purement déterministe et l'on peut raisonner ω par ω, c'est -a-dire, étant donné $x(t)$ croissante càdlàg nulle en zéro étudier les fonctions $f(t)$ positives vérifiant

$$f(t) = f(0) + x(t) - k\int_0^t \chi_{\{f_{(s)}>0\}}ds. \tag{3.6}$$

Ceci peut s'écrire

$$f(t) = f(0) + x(t) - kt + k\int_0^t \chi_{\{f_{(x)}=0\}}ds. \tag{3.7}$$

Il résulte de cette équation que $f(t)$ est càdlàg et à sauts positifs comme $x(t)$ et si

$$0 < s \leq t. \quad f(t) - f(s^-) = x(t) - kt - x(s^-) + ks + k\int_s^t \chi_{\{f_{(u)=0}\}}du.$$

d'où puisque f est positive

$$f(t) \geq x(t) - kt - (x(s^-) - ks) \tag{3.8}$$

a. Si $\{s : f(s^-) = 0\}$ est vide, on a

$$f(s) \neq 0. \forall s \in]0, s]$$

donc

$$f(t) = f(0) + x(t) - kt \tag{3.9}$$

b. Si $\{s : f(s^-) = 0\} \neq \phi$ posons

$$s_0 = \sup_{0<s\leq t} \{s : f(s^-) = 0\}$$

on a alors

$$f(t) = f(t) - f(s_0^-) = x(t) - kt - (x(s_0^-) - ks_0) \tag{3.10}$$

La comparaision de 3.8 et de 3.10 montre qu'alors

$$f(t) = \sup_{0<s\leq t} (x(t) - kt - (x(s^-) - ks))$$

On a toujours $f(s^-) = f(0) + x(s^-) - ks > 0$ donc d'aprés 3.9

$f(t) = f(0) + x(t) - kt > x(t) - kt - (x(s^-) - ks)$

donc dans tous les cas

$$
\begin{aligned}
f(t) &= \{ \sup_{0<s\leq t} (x(t) - k(t) - x(s) - ks)\} \\
&= (x(t) - kt - m(t)) \vee (f(0) + x(t) - kt) \\
&= x(t) - kt + [(-m(t)) \vee f(0)] \\
&= f(0) + x(t) - kt + [(-f(0) - m(t) \vee 0] \\
&= f(0) + x(t) - kt + (f(0) + m(t))^{-}
\end{aligned}
$$

où on a posé $m(t) = \inf_{0<s\leq t}(x(s) - k(s))$ ce qui démontre la proposition. ■

Posons

$$Y_t = X_t - kt \ ,$$

$$I_t = k\int_0^t 1_{\{Z_s=0\}} ds = (m(t) + Z(0))$$

de sorte que

$$Z_t = Z_0 + Y_t + I_t$$

Calculons le loi conjointe de (Z_t, I_t).

Remarquons pour cela que

$$\int_0^t e^{-\theta I(s)} dI(s) = [-\frac{1}{\theta} e^{-\theta I(s)}]_0^t = \frac{1 - e^{-\theta I(t)}}{\theta}$$

donc

$$e^{-\theta I(t)} = 1 - \theta k \int_0^t e^{-\theta I(s)} 1_{\{Z_s=0\}} ds$$

alors

$$e^{\theta_1 I(t)-\theta_2 Z(t)} = e^{-\theta[Z(0)+Y(t)]}e^{-(\theta_1+\theta_2)I(t)} \tag{3.11}$$

$$= e^{-\theta_2[Z(0)+Y(t)]} - k(\theta_1+\theta_2)\int_0^t e^{-\theta_2[Y_t-Y_s]-\theta_1 I_s}1_{\{Z_s=0\}}ds$$

d'où en prenant l'espérance, compte tenu du fait que $Y_t - Y_s$ est indépendant de $F_s = \sigma\{Y_u, u \leq s\}$,

$$\mathbb{E}[e^{-\theta_1 I(t)-\theta_2 Z(t)} \mid z_0 = x]$$

$$= e^{-\theta_2 x + kt\theta_2 + t\varphi(\theta_2)} - k(\theta_1+\theta_2) \times \int_0^t e^{(t-s)\varphi(\theta_2)+k\theta_2(t-s)}\mathbb{E}[e^{-\theta_1 I_s}1_{\{Z_s=x\}} \mid z_0 = x]ds$$

en posant $\varphi(\theta) = \int_0^\infty (e^{-\theta x}-1)d\nu(x)$.

Remarque 3.1.1 *Il est commode d'utiliser alors la transformation de Laplace.*

Rappellons à ce sujet que si f est mesurable positive bornée sur $\mathbb{R}_+$

$$\hat{f}(\lambda) = \int_0^\infty e^{-\lambda t} f(t)dt, \lambda > 0$$

est continue pour $\lambda > 0$ et que si $f(t) \to L$ quand $t \to \infty$ alors

$$L = \lim_{\lambda \downarrow 0} \lambda \hat{f}(\lambda)$$

De 3.2 on tire alors

$$\int_0^\infty e^{-\lambda t}\mathbb{E}[e^{-\theta_1 I(t)-\theta_2 Z(t)} \mid z_0 = x]dt = \tag{3.12}$$

$$\frac{e^{-\theta_2 x}}{\lambda - \theta_2 k - \varphi(\theta_2)} - k(\theta_1 - \theta_2)\frac{H(\lambda,\theta_1)}{\lambda - \theta_2 k - \varphi(\theta_2)}$$

où

$$H(\lambda, \theta_1) = \int_0^\infty e^{-\lambda t}\mathbb{E}[e^{-\theta_1 I(t)} 1_{\{Z_t=0\}}]dt$$

et où on a utilisé le fait que la transformée de Laplace transforme le convolution en produit.

La fonction

$$\varphi(\theta) = \int_0^\infty (e^{-\theta x} - 1)d\nu(x).$$

est continue décroissante, nulle en zéro et convexe .

Comme $\lambda > 0$ le dénominateur $\lambda - k\theta - \varphi(\theta)$ s'annule pour une valeur positive unique de θ soit $\theta_0(k, \lambda)$.

Comme le membre de gauche de 3.12 pour λ fixé et θ_1 fixé est une fonction bornée de θ_2 on a nécessairement

$$e^{-\theta_0 x} - k(\theta_1 + \theta_2)H(\lambda, \theta_1) = 0 \tag{3.13}$$

soit

$$H(\lambda, \theta_1) = \frac{e^{-\theta_0(k,\lambda)x}}{k(\theta_1 + \theta_0(k, \lambda))}$$

On tire alors de 3.12 et de 3.13 la loi (Z_t, I_t). En particulier, on a en faisant successivement $\theta_1 = 0$, $\theta_2 = 0$:

Proposition 3.1.2 *Soit*

$$\varphi(\theta) = \int_0^\infty (e^{-\theta x} - 1)d\nu(x) \qquad \theta > 0$$

On a

$$\int_0^\infty e^{-\lambda t}\mathbb{E}[e^{-\theta_1 Z_t} \mid Z_0 = x]dt = \frac{e^{-\theta x} - \theta k \frac{e^{-\theta_0(k,\lambda)x}}{k\theta_0(k,\lambda)}}{\lambda - \theta k - \varphi(\theta)}$$

$$\int_0^\infty e^{-\lambda t}\mathbb{E}[e^{-\theta_1 I(t)} \mid Z_0 = x]dt = \frac{1}{\lambda}\left[1 - \theta\frac{e^{-\theta_0(k,\lambda)x}}{\theta + \theta_0(k,\lambda)}\right]$$

où $\theta_0(k,\lambda)$ est la racine positive en θ de $\lambda - \theta k - \varphi(\theta) = 0$.

Comme la fonction $I(t)$ est croissante ($\frac{I(t)}{k}$ représente le temps durant lequel le réservoir a été vide pendant $]0,t]$), si $I = \lim \uparrow I(t)$, on a

$$\mathbb{E}[e^{-\theta I} \mid Z = x] = \lim_{\lambda \downarrow 0} \left[1 - \theta \frac{e^{-\theta_0(k,\lambda)x}}{\theta + \theta_0(k,\lambda)} \right]$$

Si nous posons

$$\mathbb{E}(X_t) = \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{E}(Y_t^{(n)}) = t \int_0^{\infty} x d\nu(x) = t\mu \leq +\infty.$$

On voit que la pente de $\varphi(\theta)$ à l'origine vaut $-\mu$ (on suppose que la mesure ν est telle que $\mu < \infty$).

Et donc si $\mu \leq \lim_{\lambda \downarrow 0} \theta_0(k,\lambda) = 0$ donc $\mathbb{E}[e^{-\theta I}] = 0 : I \equiv +\infty$ et si $\mu > k$,

il existe une racine > 0 unique de

$$K\alpha + \varphi(\alpha) = 0,\ \mathbb{E}e^{-\theta I} = 1 - \frac{\theta e^{-\alpha x}}{\theta + \alpha}$$

Proposition 3.1.3 *On a si*

a. $\mu \leq k$, $I(t) \uparrow +\infty$ *$\mathbb{P}.p.s.$*

b. $\mu > k$, $I(t) \uparrow I$ *variable aléatoire dont la loi est donnée par*

$$\mathbb{E}[e^{-\theta I} \mid Z_0 = x] = 1 - \frac{\theta e^{-\alpha x}}{\theta + \alpha}$$

donc I a pour loi $\alpha e^{-(x+s)\alpha} d/s + (1 - e^{-x\alpha})\delta_0$ où α est la racine > 0 de $k\alpha + \varphi(\alpha) = 0$.

Ceci montre que si $\mu > k$ le réservoir reste toujours en eau avec une probabilité $1 - e^{-x\alpha}$ strictement positive si $x \neq 0$.

Etudions le comportement asymptotique du niveau d'eau $Z(t)$.

1. D'abord si $Z(0) = 0$ d'aprés la démonstration de la proposition 3.1.1

$$Z_t = Y_t - (\inf_{0<s\leq t} Y_s) = \sup_{0<s\leq t} [Y_t - Y_s].$$

Le processus Y_t est un PAIS (Processus a accroissement indépendant stationnaire) et les processus

$$(Y_t - Y_s)1_{\{s\in]0,t]\}} \ et \ (Y_{t-s})1_{\{s\in]0,t]\}}$$

sont équivalents (c'est -à-dire,mêmes lois martingales) donc Z_t a même loi que $M_t = \sup_{0<s\leq t} Y_s$.

M_t est croissant donc converge en loi donc Z_t également lorsque $t \uparrow \infty$.

Il résulte alors de la remarque 3.1.1 et de la proposition 3.1.2 que

a) si $\mu \leq k$

$$\begin{aligned}\lim_{t\uparrow\infty} \ & \mathbb{E}[e^{-\theta Z_t} \mid Z_0 = 0] \\ &= \lim_{t\downarrow 0} \lambda \int_0^\infty e^{-\lambda t}\mathbb{E}[e^{-\theta Z_t} \mid Z_0 = 0] \\ &= \frac{\theta}{\theta k + \varphi(\theta)} \lim_{\lambda\downarrow 0} \frac{\lambda}{\theta_0(k,\lambda)},\end{aligned} \tag{3.14}$$

lorsque $\mu < k$ on a au voisinage de $\lambda = 0$, $\theta_0(k,\lambda)\sum\lambda/(k-\mu)$ donc si $\mu < k$

$$\lim_{t\uparrow\infty} \mathbb{E}[e^{-\theta Z_t} \mid Z_0 = 0] = \frac{\theta(k-\mu)}{\theta k + \varphi(\theta)},$$

Si $\mu = k$, $(\theta_0(k,\lambda))/\lambda \to +\infty$ donc si $\mu = k$

$$\lim_{t\uparrow\infty} \mathbb{E}[e^{-\theta Z_t} \mid Z_0 = 0] = 0 \quad \forall\theta > 0$$

Z_t converge en loi vers $+\infty$.

b) si $\mu > k$ donc $\lim_{\lambda \downarrow 0} \theta_0(k, \lambda) = \alpha > 0$ donc

$$\lim_{t \uparrow \infty} \mathbb{E}[e^{-\theta Z_t} \mid Z_0] = 0 \quad \forall \theta > 0$$

Z_t converge en loi vers $+\infty$.

2. Si $Z(0) = x$. Notons $Z^{(0)}$ le niveau d'un réservoir auxiliaire identique de niveau initial nul d'après la proposition précédente on a

$$\begin{aligned} Z^{(0)}(t) &= Y_t - m(t) \\ Z(t) &= x + Y_t + (m(t) + x)^- \\ &= Z^{(0)}(t) + (m(t) + x)^- + x + m(t) \\ &= Z^{(0)}(t) + (x + m(t))^+ \end{aligned}$$

a) de $Z(t) \geq Z^{(0)}(t)$ on déduit que si $\mu \geq k$, $Z(t)$ converge en loi vers $+\infty$;

b) si $Z(t) \geq Z^{(0)}(t)$ on a vu la proposition 3.1.3 que $I(t) \uparrow +\infty$ p.s en particulier appliquant ceci au cas $x = 0$ on voit que

$$m(t) = -I(t) \downarrow -\infty$$

donc ici

$$(x + m(t))^+ \to 0 \quad \text{p.s}$$

donc $Z(t)$ a même limite en loi que $Z^{(0)}(t)$.

Remarque 3.1.2 *Dans le cas $\mu > k$ on peut voir que $Z_t \to +\infty$ p.s. En effet de la proposition 3.1.1 il résulte que*

$$Z(t) \geq Y(t) = X_t - kt.$$

Or il résulte de la loi des grands nombres (considérer les variables $X_{n+1} - X_n$) que

$$\frac{X_t - \mu t}{t} \to 0 \ \mathbb{P}.p.s \qquad X_t = \mu t + t\varepsilon(t) \qquad \varepsilon(t) \to 0$$

donc

$$Z(t) > X_t - kt = (\mu - k + \varepsilon(t))t \to +\infty \ \mathbb{P}.p.s,$$

En résumé, on a le résultat suivant :

Proposition 3.1.4 $Z(0) = x$.

a. *Si $\mu > k$, c'est-à-dire si le débit moyen d'entrée est strictement supérieur au débit théorique de sortie*

   * *Le niveau d'eau*

   $$Z(t) \to +\infty \ \mathbb{P}.p.s.$$

   * *Le réservoir reste toujours en eau avec la probabilité*

   $$1 - e^{-x\alpha},$$

   où α est a racine > 0 de $k\alpha + \varphi(\alpha) = 0$.

   * *le temps durant lequel le réservoir est vide $]0, \infty[$ est une variable aléatoire finie de loi*

   $$(1 - e^{-x\alpha})\delta_0(s) + k\alpha e^{-x\alpha} e^{-k\alpha s} ds.$$

b. *Si $\mu = k$ alors*

   * *$Z(t)$ converge en loi vers $Z(\infty) \equiv +\infty$.*

   * *Durant $[0,\infty[$ le réservoir reste vide un temps infini $\mathbb{P}.p.s.$*

c. *Si $\mu < k$ alors*

* Z_t *converge en loi vers une variable* Z_0 *finie* $\mathbb{P}$*.p.s. ne dépendant pas du niveau initial* x*, de loi donnée par*

$$\mathbb{E}[e^{-\theta Z_\infty}] = \frac{\theta(k-\mu)}{\theta k + \varphi(\theta)}.$$

* *Durant* $[0, \infty[$ *le réservoir reste à sec un temps infini* $\mathbb{P}$*.p.s. On a posé*

$$\varphi(\theta) = \int_0^\infty (e^{-\theta x} - 1) d\nu(x).$$

Remarque 3.1.3 *Dans le cas (b) on voit que* $Z(t)$ *converge en loi vers* $+\infty$ *mais cette convergence n'est pas presque sûre puisque* $Z(t) = 0$ *durant un temps infini* $\mathbb{P}$*.p.s.*

Exemple 3.1.1 *Dans le cas où* $\nu(dx) = e^{-x/\varrho \frac{dx}{x}}$

$$\mathbb{E}[X_t] = t\int_0^\infty x d\nu(x) = tp \qquad (i.e\ \mu = \varrho)$$

$$\varphi(\theta) = Log(1+\theta\varrho)$$

1) *dans le cas* $\mu = \theta > k$*, le nombre* $\alpha > 0$ *est donné par* $1 + \alpha e = e^{k\alpha}$;

2) *dans le cas* $\mu = e < k$*, de*

$$\mathbb{E}[e^{-\theta Z_\infty}] = \frac{\theta(k-\varrho)}{\theta k - Log(1+\theta\varrho)},$$

on tire

$$\mathbb{E}Z_\infty = \frac{\varrho^2}{2(k-\varrho)}\ .$$

3.1.2 Application à la théorie des assurances

On schématise le fonctionnement d'une compagnie d'assurance de la façon suivante :

1. les cotisations représentent un flux régulier qu'on représente par un flux continu kt;
2. les remboursements de frais d'accidents interviennent à des dates formant un processus de Poisson et sont de montants indépendants et forment donc un processus de Poisson composé que nous généralisons par un processus de Lévy X_t de mesure de Lévy ν.

(Même dans le cas où les polices d'assurances imposent une franchise, le nombre de petits accidents voisins de la franchise est souvent grand.)

On suppose que le "risque moyen par unité de temps" μ donné par

$$\mathbb{E}X_t = t\int_0^\infty x d\nu(x) = t\mu \tag{3.15}$$

est fini.

Le rapport k/μ s'appelle le coefficient de securité de lundberg.

Soit $\bar{Z}_t$ le niveau des réserves de la compagnie, on a

$$\bar{Z}_t = \bar{Z}_0 + kt - X_t$$

du moin tant que $\bar{Z}_t \geq 0$. On suppose $\bar{Z}_0 \geq 0$. (Si $\bar{Z}_t$ venait à devenir négatif.

la compagnie serait obligée de recourir à une procédure nouvelle : délais de paiement, ou assurance auprés d'une autre compagnie. ce qui reléve des téchniques de gestions des assurance et que nous n'étudierons pas.)

La premiére question est donc d'évaluer le temps T durant lequel la compagnie est en"période de prospérité"

$T = \inf\{t = \bar{Z}_t < 0\}$.

Si nous notons comme précédemment

$$Y_t = X_t - kt$$

et

$$M_{t.} = \sup_{0<s\leq t} Y_s$$

nous voyons que

$$\begin{aligned}
\{T \geq t\} &= \{\inf_{0<s\leq t}(\bar{Z}_0 - X_s + k_s) \geq 0\} \\
&= \{\inf_{0<s\leq t}(\bar{Z}_0 - Y) \geq 0\} \\
&= \{M_t \leq \bar{Z}_0\}
\end{aligned}$$

Or nous avons vu que le processus M_t a même loi que le niveau d'eau Z_t d'un réservoir auxiliaire vérifiant l'équation 3.2 et de niveau initial $Z_0 = 0$ (cf.aprés la proposition 3.1.3) et donc la proposition 3.1.2 nous donne

$$\int_0^\infty e^{-\lambda t}\mathbb{E}[e^{-\theta M_t}]dt = \frac{1 - \frac{\theta}{\theta_0(k.\lambda)}}{\lambda - \theta k - \varphi(\theta)}.$$

M_t est un processus croissant donc convrege p.s. quand t. On en déduit comme précédemment que

a) si le coefficient de sécurité de lundberg $\frac{k}{\mu}$ est > 1. M_t converge p.s vers une v.a. M_∞ de loi donnée par

$$\mathbb{E}[e^{\theta M_\infty}] = \frac{\theta(k-\mu)}{\theta k + \varphi(\theta)}.$$

le calcul de cette loi nous donnant la probabilité de prospérité à horizon infini

$$\mathbb{P}\{T = \infty\} = \mathbb{P}(M_\infty \leq x) \qquad\qquad si \quad \bar{Z}_0 = x$$

En particulier, si $\bar{Z}_0 = 0$

$$\mathbb{P}\{T = \infty\} = \mathbb{P}\{M_\infty = 0\} = \frac{\frac{k}{\mu} - 1}{\frac{k}{\mu}}$$

b) si le coefficient de sécurité de lundberg $\frac{k}{\mu}$ est ≤ 1, la probabilité de prospérité indéfinie est nulle.

Bibliographie

[1] David, C. Processus Stochastique. POLYTECH'LILLE.

[2] Jeanblanc, M. & Simon, T. (*Septembre* 2005). Elements de calcul stochastique. IRBID.

[3] Jeanblanc, M. (*Septembre* 2006). Cours de calcul stochastique. Master 2IF EVRY.

[4] Lévêque, O. (2005). Cours de probabilités et calcul stochastique. (No. LTHI-TEACHING-2006 − 001).

[5] Oksendal, B. Stochastic differential equations. Sixth Edition. Springer-Verlag.

[6] Prabhu, NU. (1980). Stochastic storage processes. Springer.

[7] Rémi, R. (2010). Processus de Lévy et calcul stochastique. Document de travail, Université Paris-Dauphine.

Abréviations et Notations

Les différentes abréviations et notations utilisées tout au long de ce mémoire sont expliquées ci-dessous.

$(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$	Espace de probabilité.
$(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}, \mathbb{P})$	Espace de probabilité filtré.
B_t	Mouvement Brownien.
$v.a$	Variabe aléatoire
$i.i.d$	Indépendante identiquement distribuée
$\mathbb{E}[X]$	Espérance mathématique ou moyenne du $v.a.X$.
$Var[X]$	Variance de X
$\mathcal{B}\left(\mathbb{R}^d\right)$	Tribu borélienne sur $\mathbb{R}^d$
$\mathbb{R}^d$	Espace réel euclidien de dimension d.
$X \sim \mathcal{N}(0;t)$	Variable X suit la loi normale centré et de variance t.
$\xrightarrow{p.s.}$	Convergence presque sûre.
$\xrightarrow{loi}$	Convergence en loi.
$\mathbb{P}.p.s$	Prêsque sûrement pour la mesure de probabilité $\mathbb{P}$
$B(\mathbb{R}^d)$	Tribu borélienne sur $\mathbb{R}^d$.
$\mathbb{N}$	Ensemble des entiers naturels.
$\lim$	Limite.

sup	Supérieur
inf	Inférieur
$PAIS$	Processus à accroissement indépendant et stationnaire
càdlàg	Continu à droite pourvu de limite à gauche.
ν	Mesure de Lévy