République Algérienne Démocratique et Populaire

Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

UNIVERSITÉ MOHAMED KHIDER, BISKRA

FACULTÉ des SCIENCES EXACTES et des SCIENCES de la NATURE et de la VIE

DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES

Mémoire présenté en vue de l'obtention du Diplôme **:**

MASTER en Mathématiques

Option : **probabilités**

Par

Bramki L'akri

Titre :

EDS :cas localement lipschitzien

Membres du Comité d'Examen :

Dr.	**Chala Adel**	UMKB	Président
Dr.	**Khelfallah Nabil**	UMKB	Encadreur
Dr.	**Boughrara Saliha**	UMKB	Examinateur

Juin 2018

Dédicace

Je dédie ce mémoire

A mes parents pour son encouragement

A mes soeurs et mes frères que je souhaite un grand courage et une bonne réussite

A mes cousins et mes amis

A mes collègues de la promotion

A tous ceux que j'aime

REMERCIEMENTS

Tout d'abord , je commence par remercier "**Allah**" qui m'a doté de la volonté , du courage et surtout de la patience pour produire ce travail.

Mes sincères remerciements vont à mes parents qui ont sacrifié leur vie pour mon éducation et à mes professeurs qui ont sacrifié leur temps pour ma formation,durant mes études.

Je voudrais remercier très chaleureusement mon encadreur **Dr.Khelfallah Nabil,**pour les précieux conseils qu'il a pu me donner pour élaborer ce travail.

Je tiens à remercier les membres de jury qui ont honoré de leur présence **Dr.Chala Adel** et **Dr.Boughrara Saliha**.

Un merci particulier à mes années d'étude à **Biskra** promotion 2017/2018 option probabilités.

Table des matières

Introduction

Ce mémoire est consacré à l'étude l'existence et l'unicité de solution forte des équations différentielles stochastiques sur le cadre localement lipschitzien.C'est à dire on étudier les équations différentielles stochastiques de la forme :

$$X_t = Z + \int_0^t b(s, X_s)ds + \int_0^t \sigma(s, X_s)dW_s \tag{1}$$

telle que les coefficients b et σ vérifient des hypothèses de lipschitz locales suivante :

$$\begin{cases} \forall n > 0, \exists L_n > 0, \forall x, y \in B(0, n), \forall t \geq 0 \\ |b(t,x) - b(t,y)| + \|\sigma(t,x) - \sigma(t,y)\| \leq L_n |x - y| \end{cases}$$

Le théorème d'existence et d'unicité de la solution de équation 1 et leur démonstration ont été obtenus par kunze [7].

Dans la première chapitre,nous allons trouve quelque rappels de probabilité.De plus nous présentons les notions de base de théorie des calcul stochastique qui seront utilisée dans le long de ce mémoire.

Dans la deuxieme chapitre,nous avons choisir le théorème d'existence et d'unicité de solution dans une deux cas :

Cas lipschitzien : supposons que les coefficients de l'EDS 1 satisfaisant les conditions de lipschitz et les croissance linéaire.D'aprés Rhodes [6],en utiliser le théorème de point fixe pour démontre l'existence et l'unicité d'une solution de l'EDS 1.

Cas localement lipschitzien : dans ce cas, nous avons donné une démonstration détaillé de ce théorème à l'aide de temps d'arrêt.

Chapitre 1

Introduction au calcul stochastique

1.1 Rappel de probabilité

1.1.1 Probabilité

Définition 1.1.1 *Une probabilité sur l'espace mesurable* $(\Omega, \mathcal{F})$ *est une application* $\mathcal{P}$ *de* $\mathcal{F}$ *dans* $[0,1]$ *telle que*

1. $\mathcal{P}(\Omega) = 1$ et $\mathcal{P}(\varnothing)$=0.
2. Si $(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{F}$ deux à deux disjoints (i.e.$A_n \cap A_m = \varnothing, n \neq m$) alors $\mathcal{P}\left(\bigcup\limits_{n=0}^{\infty} A_n\right) = \sum\limits_{n=0}^{\infty}\mathcal{P}(A_n)$.

1.1.2 Ensembles négligeables

Définition 1.1.2 *Un ensemble est appelé négligeable s'il est de probabilité nulle* $(i.e.\mathcal{P}(A) = 0, \forall A \in \mathcal{F})$.

-Un union dénombrable d'ensembles négligeables est négligeables.

1.1.3 Quelques inégalités

Inégalité de Cauchy-Schwarz :

si X ,Y deux v.a de carré intégrable .Alors, XY est intégrable, et de plus

$$(E\,|XY|)^2 \leq E(X^2)E(Y^2)$$

Inégalité de chebyschev :

soient X une v.a et f une fonction borélienne,croissante sur $\mathbb{R}_+$,pour chaque $c > 0, f(c) > 0$ et $E\,[f(X)] < +\infty$.Donc :

$$P\left(\{X \geq c\}\right) \leq \frac{E\,[f(X)]}{f(c)}, \forall c > 0$$

Inégalité de Jensen :

soit X une v.a, $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction borélienne et convexe telle que $E\,[|f(X)|] < +\infty$.Donc

$$f\,[E\,(X)] \leq E\,[f(X)]$$

Lemme 1.1.1 (Lemme de Borel Cantelli) *:soit* (B_n) *une suite d'événements de la tribu* $\mathcal{F}$*.Si* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} P(B_n) < \infty$,*alors on obtient :*

$$P\left(\{\omega \in \Omega : \omega \in B_n \textit{ pour une infinité de } n\}\right) = 0$$

C'est à dire: $p\left(\overline{\lim} B_n\right) = 0$ *tel que* ,$\overline{\lim} B_n = \bigcap\limits_{n \in \mathbb{N}} \bigcup\limits_{k \geq n} B_k$.

1.2 Processus stochastique

Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{P})$ un espace de probabilité

Définition 1.2.1 (Filtration) *Une filtration* $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$ *sur* $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{P})$ *est une famille croissante de sous-tribus de* $\mathcal{F}$ *tq :* $\mathcal{F}_S \subset \mathcal{F}_t \subset \mathcal{F}$ *pour* $0 \leq s < t$

-la filtration $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ est continue à droite si $\forall t \geq 0$,$\mathcal{F}_t = \mathcal{F}_{t^+}$.

-la filtration $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$satisfait les conditions habituelles si elle est continue à droite et si $\mathcal{F}_0$ contient tous les ensembles $\mathbb{P}$-négligeables de $\mathcal{F}$.

Définition 1.2.2 (Processus stochastique) *Soit $I = \mathbb{R}_+$ou $I = [0, T]$*

-un processus stochastique $X = (X_t)_{t\in I}$ à valeurs dans $\mathbb{R}^d$ indexé par I est une famille de variables aléatoires définie sur un même espace de probabilité.

-la filtration naturelle d'un processus stochastique X est donnée par

$$\mathcal{F}_t^X = \sigma(X_s, 0 \leq s \leq t)$$

-pour $\omega \in \Omega$,la fonction $t \mapsto X_t(\omega)$ est une trajectoire du processus X.

Définition 1.2.3 *Pour deux processus stochastique X et Y on dit que*

-X est une modification de Y si :

$$\forall t \geq 0, \mathbb{P}(X_t = Y_t) = 1$$

-X et Y sont indistinguables si :

$$\mathbb{P}(X_t = Y_t, \forall t \geq 0) = 1$$

C'est à dire,$\mathbb{P} - p.s$,les trajectoires de X et Y sont les mêmes.

Alors,on déduit que la notion d'indistinguabilité est très forte que la notion de modification.

Définition 1.2.4 *Un processus $(X_t)_{t\geq 0}$est dit*

- adapté à la filtration $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ si,pour chaque t, X_t est $\mathcal{F}_t-$mesurable.

-progressivement mesurable par rapport à $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ si,$\forall t \geq 0$,l'application $(s, \omega) \rightarrow X_s(\omega)$ est $\mathcal{B}([0, t]) \otimes \mathcal{F}_t-$mesurable.

Définition 1.2.5 (Processus à trajectoire continue) *Un processus* $(X_t)_{t\geq 0}$ *est à trajectoire continue (ou simplement continu) si*

$$\mathbb{P}(\{\omega \in \Omega, t \to X_t(\omega) \text{ est continue}\}) = 1$$

-un processus est appelé càdlàg (continu à droite et limité à gauche) si ses trajectoires sont continues à droite et limites à gauche.Même conditions pour càglàd**.**

1.2.1 Processus gaussiens

Définition 1.2.6 *On dit que* X *est un procesus gaussien si*

$$\forall n, \quad \forall t_i, \quad 1 \leq i \leq n, \quad \forall a_i, \quad \sum_{i=1}^{n} a_i x_i, \text{ est une v.a.r gaussienne}$$

c'est-à-dire si toute combinaison linéaire finie de $(X_t, t \geq 0)$ est une v.a gaussienne.

-Un processus gaussien est caractérisé par son espérance et sa covariance.

1.2.2 Mouvement brownien

Définition 1.2.7 *Un processus stochastique* $W = (W_t)_{t\geq 0}$ *est appelé mouvement brownien s'il satisfait les conditions suivantes :*

- $\mathbb{P} - p.s.$le trajectoire $t \mapsto X_t(\omega)$ est continue.

-si $0 \leq s \leq t$,l'accroissement $X_t - X_s$ est indépendant de $\mathcal{F}_s = \sigma(X_u, u \leq s)$ et de plus

$$X_t - X_s \sim \mathcal{N}(0, t-s)$$

- $W_0 = 0 \quad \mathbb{P} - p.s.$

Définition 1.2.8 *Le MB standard à valeurs dans* $\mathbb{R}^d$*,est un vecteur* $W = (W^1, ..., W^d)$*,tel que les* W^i *sont des MB réels indépendants.*

Remarque 1.2.1 *W est un $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}-MB$ s'il est continu et $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}-$adapté,tel que :*

$$\forall u \in \mathbb{R}, \quad \forall 0 \leq s \leq t; \quad E\left[e^{iu(W_t - W_s)}/\mathcal{F}_s\right] = \exp\{-u^2(t-s)/2\}$$

-un mouvement brownien est un processus gaussien,d'espérance nulle et sa covariance $cov(W_t, W_s) = s \wedge t$ ·

1.3 Martingale à temps continue :

Définition 1.3.1 *Soit $M = (M_t)_{t\geq 0}$ un processus $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}-$adapté et intégrable (vérifiant $E\,|M_t| < +\infty, \forall t$),on dit que M est :*

-une martingale si,pour tout $s \leq t$, $E(M_t/\mathcal{F}_s) = M_s$.

-une sur-martingale si,pour tout $s \leq t, E(M_t/\mathcal{F}_s) \leq M_s$.

-une sous-martingale si,pour tout $s \leq t, E(M_t/\mathcal{F}_s) \geq M_s$.

Proposition 1.3.1 *Soit W un mouvement brownien*

-$(W_t)_{\geq 0}$ est une martingale.

-$(W_t^2 - t)_{t\geq 0}$ est egalement une martingale.

-$\forall \sigma \in \mathbb{R}, (\exp(\sigma W_t - \sigma^2 t/2))_{t\geq 0}$ est une martingale.

1.3.1 Variation quadratique

Définition 1.3.2 *Soit (M_t) une martingale continue de carré intégrable.Donc (M_t^2) est une sous-martingale et de plus il existe une unique processus (A_t) croissant,continu et $(\mathcal{F}_t)-$adapté tel que $(M_t^2 - A_t)$ est une martingale et $A_0 = 0$.*

-On obtient $A_t = \langle M \rangle_t$ ce processus est dite la variation quadratique de (M_t) .

Remarque 1.3.1 *La variation quadratique d'une martingale c'est un processus à variation bornée.*

1.3.2 Temps d'arrêt

Définition 1.3.3 *Un temps d'arrêt pour la filtration $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ (ou $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$-temps d'arrêt) est une v.a τ à valeur dans $\mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$,vérifiant :*

$$\{\tau \leq t\} \in \mathcal{F}_t \quad , \forall t \geq 0$$

Si τ un temps d'arrêt,on définie la tribu $\mathcal{F}_\tau$ par

$$\mathcal{F}_\tau = \{A \in \mathcal{F}_\infty, A \cap \{\tau \leq t\} \in \mathcal{F}_t, \forall t\}$$

cette tribu appellé la tribu des évènements antérieurs à τ.

propriétés

-soit T un temps d'arrêt.Alors T est $\mathcal{F}_T-$mesurable.

-si T et S sont deux temps d'arrêt alors $S \wedge T$ et $S \vee T$ sont temps d'arrêt.

-si T et S sont deux temps d'arrêt,et $S \leq T$ $\mathbb{P}-p.s$,alors $\mathcal{F}_S \subset \mathcal{F}_T$.

Proposition 1.3.2 *Soit τ un t.a,on définie le processus d'arrêt X^τ par $X_t^\tau = X_{\tau \wedge t}$.*

-si le processus X est progressivement mesurable alors X_t^τ est progressivement mesurable.

1.3.3 Théorème d'arrêt :

Définition 1.3.4 *Si M est une martingale continue par rapport à $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ et si τ_1 et τ_2 sont deux temps d'arrêt bornés tels que $\tau_1 \leq \tau_2 \leq K$,K une constante réelle finie,donc M_{τ_2} est intégrable et :*

$$E[M_{\tau_2}/\mathcal{F}_{\tau_1}] = M_{\tau_1} \quad \mathbb{P}-p.s.$$

1.4 L'intégrale stochastique (Intégrale d'Itô) :

On définie $\Lambda^2([0,T])$ le sous espace de $L^2(\Omega \times [0,T], \mathbb{P} \otimes dt)$ constitué des classes de processus progressivement mesurables.Muni du produit scalaire

$$(\psi, \varphi) = E\left[\int_0^T \psi_t \varphi_t dt\right]$$

pour finir,on obtient

$$\Lambda^2 = \bigcap_{T>0} \Lambda^2([0,T])$$

Définition 1.4.1 *Soit $(X_t)_{0 \leq t \leq T}$ un processus $\mathcal{F}_t-$adapté et $(W_t)_{t \geq 0}$ un $\mathcal{F}_t$-MB.On définie l'intégrale stochastique :*

$$\int_0^t X_s dW_s$$

si $\int_0^T X_s^2 ds < +\infty$ $\mathbb{P}-p.s$ alors

$$E\left[\int_0^T X_s^2 ds\right] < +\infty \iff E\left[\sup_{t \in [0,T]} \left(\int_0^t X_s dW_s\right)^2\right] < +\infty$$

dans ce cas ona par l'isométrie d'Itô

$$E\left[\left(\int_0^T X_s dW_s\right)^2\right] = E\left[\int_0^T X_s^2 ds\right]$$

1.4.1 Propriétès de l'intègrale stochastique

1. **Linéarité :**

$$\int_0^t (X_s + Y_s) dW_s = \int_0^t X_s dW_s + \int_0^t Y_s dW_s$$

et

$$\int_0^t c X_s dW_s = c \int_0^t X_s dW_s \quad , c \text{ constante}$$

2. **Additivité :**pour $0 \leq s < u < t \leq T$

$$\int_s^t X_v dW_v = \int_s^u X_v dW_v + \int_u^t X_v dW_v$$

3. Si τ un temps d'arrêt :

$$\int_0^\tau X_s dW_s = \int_0^T 1_{\{s \leq \tau\}} X_s dW_s, \mathbb{P} - p.s.$$

4. si $E\left[\int_0^T X_t^2 dt\right] < +\infty$,alors pour chaque $t \leq T$, $E\left[\int_0^t X_s dW_s\right] = 0$

et plus le processus $\left(\int_0^t X_s dW_s\right)_{0 \leq t \leq T}$ est une martingale.

Intégration par parties

Théorème 1.4.1 *Soit f une fonction de classe C^1*

$$\int_0^t f(s) dW_s = f(t)W(t) - \int_0^t f'(s) W_s ds$$

Théorème de représentation des martingales browniennes

Soient $(M)_{0 \leq t \leq T}$ une martingale de carré intégrable et $(\mathcal{F}_t)_{t \in [0,T]}$ la filtration canonique de mouvement brownien $(W)_{0 \leq t \leq T}$. Alors,il existe un unique processus $(Z)_{0 \leq t \leq T}$ adapté et $E\left(\int_0^T Z_s^2 ds\right) < \infty$,tel que

$$\forall t \in [0, T], M_t = M_0 + \int_0^t Z_s dW_s \ p.s.$$

Théorème 1.4.2 *Si $M = (M_t)_{t \geq 0}$ une martingale continue,alors l'inégalité de Doob donnée par :*

$$E[\sup_{0 \leq t \leq T} |M_t|^2] \leq 4E[|M_T|^2].$$

Comme $M \in \Lambda^2([0,T])$ *.On a*

$$E\left[\sup_{0\leq t\leq T}\left|\int_0^t M_s dW_s\right|^2\right] \leq 4E\left[\int_0^T M_s^2 dW_s\right].$$

Théorème 1.4.3 (Inégalité maximale) *Si* M *est une martingale continue à droite.Donc,*

$$\forall p>1, E[\sup_t |X_t|^p] \leq q^p \sup_t E[|X_t|^p] \quad \text{oŭ } q = \tfrac{p}{p-1}$$

Définition 1.4.2 (Martingale locale) *Soit* M *un processus à trajectoires continues à droite,*$(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}-$*adapté.On dit que* M *est une martingale locale s'il existe une suite croissante de temps d'arrêt* $\{\tau_n\}_{n\geq 1}$*telle que :*

-$\lim\limits_{n\to\infty} \tau_n = +\infty \ \mathbb{P}-p.s$.
-pour toute n, $M^{\tau_n}1_{\{\tau_n>0\}}$ est une martingale.

Proposition 1.4.1 *Pour* M *une martingale locale continue.Il y a équivalence entre*

1. $M_0 \in L^2$ et $E[\langle M,M\rangle_\infty] < \infty$.
2. M est une martigale bornée dans L^2.

1.4.2 Les inégalités de Burkholder-Davis-Gundy (BDG) :

Théorème 1.4.4 *Soit* W *un MB (en dimension d).Il existe une constante* $c_p \geq 1$*,pour tout* $p>0$ *et* $T>0$ *,telle que* $\forall \varphi \in \Lambda^2$

$$\frac{1}{c_p}E\left[\left(\int_0^T |\varphi_t|^2 dt\right)^{p/2}\right] \leq E\left[\sup_{t\leq T}\left|\int_0^t \varphi_s dW_s\right|^p\right] \leq c_p E\left[\left(\int_0^T |\varphi_t|^2 dt\right)^{p/2}\right]$$

1.4.3 Formule d'Itô et processus d'Itô :

Soit $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}, \mathcal{P})$ un espace de probabilité filtré et W un mouvement brownien réel (en dimonsion 1).

Définition 1.4.3 *Un processus d'Itô est un processus X à valeur réelles tel que :*

$$\mathbb{P}-p.s.\forall 0 \leq t \leq T, \quad X_t = X_0 + \int_0^t K_s ds + \int_0^t H_s dW_s$$

sous forme différentielle

$$dX_t = K_t dt + H_t dW_t$$

où X_0 est $\mathcal{F}_0$-mesurable,K et H sont deux processus progressivement mesurables tels que :

$$\int_0^T |K_s| \, ds < +\infty \quad \mathbb{P}-p.s \ , \ \int_0^T |H_s|^2 \, ds < +\infty \quad \mathbb{P}-p.s.$$

Formule d'intégration par parties :

Proposition 1.4.2 *Soient X,Y deux processus d'Itô de la forme*

$$X_t = X_0 + \int_0^t K_s ds + \int_0^t H_s dW_s \quad , Y_t = Y_0 + \int_0^t K'_s ds + \int_0^t H'_s dW_s$$

Alors

$$X_t Y_t = X_0 Y_0 + \int_0^t X_s dY_s + \int_0^t Y_s dX_s + \langle X, Y \rangle_t$$

tel que $\langle X, Y \rangle_t = \displaystyle\int_0^t H_s H'_s ds$.

Théorème 1.4.5 (Formule d'Itô unidimensionnel) *Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe C^2 à dérivées bornées.et soit X un processus d'Itô réel Alors*

$$f(X_t) = f(X_0) + \int_0^t f'(X_s) dX_s + \frac{1}{2} \int_0^t f''(X_s) H_s^2 ds$$

sous forme différentielle

$$df(X_t) = f'(X_t) dX_t + \frac{1}{2} f''(X_t) H_t^2 dt$$

Théorème 1.4.6 (Fonction dépendant du temps) *Soit f définie sur $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}$ de classe C^1 par rapport à t et de classe C^2 par rapport à x ,à dérivées bornées $\left(f \in C_b^{1,2}(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R})\right)$,donc*

$$f(t, X_t) = f(0, X_0) + \int_0^t f_t'(s, X_s)ds + \int_0^t f_x'(s, X_s)dX_s + \frac{1}{2}\int_0^t f_{xx}''(s, X_s)H_s^2 ds$$

Formule d'Itô multidimensionnel (vectorielle)

Cette formule est donnée dans ce cas d'un mouvement brownien d-dimensionnel et d'un processus d'Itô n-dimensionnel.

Définition 1.4.4 *On dit que X est un processus d'Itô à valeur dans $\mathbb{R}^n$,s'il écrit de la forme :*

$$X_t = X_0 + \int_0^t K_s ds + \int_0^t H_s dW_s \tag{1.1}$$

où X_0 est un vecteur aléatoire à valeur dans $\mathbb{R}^n$,$\mathcal{F}_0-$mesurable,$K = (K^i)_{1\leq i\leq n}$ et $H = (H^{i,j})_{1\leq i\leq n, 1\leq j\leq d}$ satisfaisants

$$\forall t \geq 0, \mathbb{P} - p.s., \textstyle\int_0^t |K_s|\, ds < \infty \quad , H \in \Lambda^2$$

On définie $C_b^{1,2}(\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^d)$ l'espace des fonctions continues qui sont une fois continûment différentiable par rapport à t et deux fois par rapport à x,à dérivées bornées.

Théorème 1.4.7 *Si la fonction $f \in C_b^{1,2}(\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^d)$,et X un processus d'Ito de la forme 1.1.Donc la formule d'Ito s'écrit,$\mathbb{P} - p.s.$*

$$\begin{aligned} f(t, X_t) = f(0, X_0) + \int_0^t \frac{\partial f}{\partial s}(s, X_s)ds + \int_0^t \langle \nabla_x f(s, X_s), K_s\rangle\, ds + \int_0^t \langle \nabla_x f(s, X_s), H_s dW_s\rangle \\ + \frac{1}{2}\int_0^t Tr(\partial_{xx}^2 f(s, X_s) H_s H_s^*)ds \end{aligned}$$

Chapitre 2

Existence et unicité de la solution

2.1 Équations différentielles stochastiques (EDS)

Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{P})$ un espace de probabilité et soit W un mouvement brownien d-dimonsionnel sur cet espace.

2.1.1 Définition

Il s'agit de résoudre l'équation différentielle stochastique de la forme :

$$\begin{cases} dX_t &= b(t, X_t)dt + \sigma(t, X_t)dW_t \\ X_0 &= Z \end{cases} \tag{2.1}$$

où T est un réel strictement positive,$b : [0, T] \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ et $\sigma : [0, T] \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^{n \times d}$ sont deux fonctions mesurables.Z est une variable aléatoire de carré intégrable.
On peut écrire 2.1 en terme intégrable

$$X_t = Z + \int_0^t b(s, X_s)ds + \int_0^t \sigma(s, X_s)dW_s$$

Le coefficient $b(t, X_t)$ de dt appelé drift (dérive) et $\sigma(t, X_t)$ de dW_t appelé coefficient de diffussion.

Définition 2.1.1 (solution forte) *La solution forte de l'EDS 2.1 sur* $[0,T]$ *est un processus* $n-$*dimensionnel* $X \in \Lambda^2([0,T])$ *qui satisfait :*

1. $\mathbb{P}-p.s, \int_0^T |b(s,X_s)|\, ds < \infty$ et $\int_0^t E\left[|\sigma(s,X_s)|^2\right] ds < \infty$.
2. $\mathbb{P}-p.s$,On a :
$$X_t = Z + \int_0^t b(s,X_s)ds + \int_0^t \sigma(s,X_s)dW_s.$$

Lemme 2.1.1 (Lemme de Gronwall) *Soit* $f : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}$ *une application localement intégrable,a et b sont deux applications croissantes et non négatives telles que pour tout* $t \in [0,T]$
$$f(t) \leq a(t) + b(t)\int_0^t f(s)ds.$$
donc
$$f(t) \leq a(t)\exp(bt), \forall 0 \leq t \leq T.$$

Définition 2.1.2 *Supposons que les fonctions b,σ vérifient les conditions de Lipschitz .Il existe deux constantes* M, K *,*$\forall x,y \in \mathbb{R}^n$ *telles que*

$$|b(t,x)| + |\sigma(t,x)| \leq M(1+|x|) \tag{2.2}$$

$$|b(t,x)-b(t,y)| + |\sigma(t,x)-\sigma(t,y)| \leq K\,|x-y| \tag{2.3}$$

2.1.2 Estimations préliminaires

Proposition 2.1.1 *On prenant le couple de fonctions* (b,σ) *vérifie la condition 2.2,soit* $U \in \Lambda^2([0,T])$ *et le processus* X *satisfait*

$$X_t = U_0 + \int_0^t b(s,U_s)ds + \int_0^t \sigma(s,U_s)dW_s.$$

Donc $X \in \Lambda^2([0,T])$ *il existe une constante* $C = C(T,M), \forall t \in [0,T]$ *telle que*

$$E[\sup_{t\in[0,T]} |X_t|^2] \leq C(1 + E[\sup_{t\in[0,T]} |U_t|^2]).$$

Preuve. Pour appliquons la formule d'Itô d'un processus X et à la fonction $\phi(x) = |x|^2$,et en utilisant l'inégalité $ab \leq a^2/2 + b^2/2$,on a donc :

$$\begin{aligned}
|X_s|^2 &= |U_0|^2 + 2\int_0^s \langle X_u, b(u,U_u)\rangle\, du + 2\int_0^s \langle X_u, \sigma(u,U_u)dW_u\rangle + \int_0^s Tr(\sigma\sigma^*)(u,U_u)du \\
&\leq |U_0|^2 + 2M\int_0^s |X_u|\,(1+|U_u|)du + 2\sup_{t\in[0,s]}\left|\int_0^t \langle X_u, \sigma(u,U_u)dW_u\rangle\right| + M^2\int_0^s (1+|U_u|)^2 du \\
&\leq (1 + MT + 2M^2T)\sup_{t\in[0,T]}|U_t|^2 + (M+2M^2)T + (2M)T\sup_{t\in[0,s]}|X_t|^2 \\
&+ 2\sup_{t\in[0,s]}\left|\int_0^t \langle X_u, \sigma(u,U_u)dW_u\rangle\right|
\end{aligned}$$

pour prenant l'espérance et par utilisant les inégalités de Burkholder-Davies-Gundy,on a alors :

$$\begin{aligned}
E\left[\sup_{t\in[0,s]}\left|\int_0^t \langle X_u, \sigma(u,U_u)dW_u\rangle\right|\right] &\leq CE\left[\left(\int_0^s |X_u|^2 |\sigma(u,U_u)|^2 du\right)^{1/2}\right] \\
&\leq CME\left[\left(\int_0^s |X_u|^2 (1+|U_u|)^2 du\right)^{1/2}\right] \\
&\leq CME\left[\left(\int_0^s |X_u|^2 \left(2 + 2|U_u|^2\right) du\right)^{1/2}\right] \\
&\leq CME\left[\left(\int_0^s (2|X_u|^4 + 1 + |U_u|^4) du\right)^{1/2}\right] \\
&\leq CME\left[\left(\int_0^s 2|X_u|^4 du\right)^{1/2}\right] + CMT^{1/2} \\
&+ CME\left[\left(\int_0^s |U_u|^4 du\right)^{1/2}\right] \\
&\leq CMT^{1/2} + CM(2T)^{1/2}E\left[\sup_{t\in[0,s]}|X_u|^2\right] + CMT^{1/2}E\left[\sup_{t\in[0,s]}|U_u|^2\right]
\end{aligned}$$

tel que la constante C est une celle provenant des inégalités de BDG.pour rassemblant les inégalités précédentes,en déduit l'existence d'une constante C(dépendant de M et T) où

$$E\left[\sup_{[0,t]} |X_u|^2\right] \leq C + CE\left[\sup_{[0,t]} |X_u|^2\right] + CE\left[\sup_{[0,T]} |U_u|^2\right].$$

Et donc le lemme de Gronwall permet de conclure. ■

2.2 Existence et unicité de la solution

On obtient S_T l'espace des processus X progressivement mesurables sur $[0,T]$ telle que

$$E\left[\sup_{t\in[0,T]} |X_t|^2\right] < +\infty.$$

Définition 2.2.1 *On dit qu'il y a unicité trajectorielle sur l'EDS 2.1 ,si l'espace $\left(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}, \mathcal{P}\right)$ et le mouvement brownien W étant fixés,et soient X,Y sont solution de l'EDS 2.1 ,alors $X = Y$ p.s.(ie :X, Y sont indistinguables).*

2.2.1 cas lipschitzien

Dans ce cas nous allons utiliser le théorème du point fixe pour une application contractante,c'est à dire,on démontrer que la solution de l'EDS est un point fixe de cette application.

Théorème 2.2.1 *Sous les hypothèses 2.2 et 2.3 ,pour $X_0 \in L^2(\Omega)$ et $\mathcal{F}_0-$mesurable,alors l'EDS 2.1 admet une unique solution $(X_t)_{t\geq 0} \in S_T$.*

Preuve. On considèrons l'application $\Phi : S_T \longrightarrow S_T$ définie par

$$\forall U \in (\Lambda^2)^d, \quad \Phi(U)_t = Z + \int_0^t b(s, U_s)ds + \int_0^t \sigma(s, U_s)dW_s.$$

La solution de l'EDS 2.1 est un point fixe de Φ, Φ est une application strictement contractante sur S_T muni de la norme :

$$\|X\|_\alpha = \left(E\left[\sup_{t\in[0,T]} e^{\alpha t} \left|X_t\right|^2 \right]^{1/2} \right).$$

α choisi convenablement.

Soit $U, U' \in S_T$.On obtient $\overline{U} = U - U'$, $\bar{b}_t = b(t, U_t) - b(t, U'_t)$ et $\overline{\sigma}_t = \sigma(t, U_t) - \sigma(t, U'_t)$, $\overline{\Phi}_t = \Phi(U)_t - \Phi(U')_t$ .En appliquons la formule d'Itô vectorielle au processus d'Itô $\overline{\Phi}$ et à la fonction

$g(t, x) = e^{\alpha t} \left|x\right|, \forall \alpha \in \mathbb{R}_+^*$:

$$\begin{aligned}
e^{\alpha t} \left|\overline{\Phi}_t\right|^2 &= \int_0^t \alpha e^{\alpha s} \left|\overline{\Phi}_s\right|^2 ds + 2\int_0^t e^{\alpha s} \left\langle \overline{\Phi}_s, \bar{b}_s \right\rangle ds + 2\int_0^t e^{\alpha s} \left\langle \overline{\Phi}_s, \overline{\sigma}_s dW_s \right\rangle \\
&+ \int_0^t e^{\alpha s} Tr(\overline{\sigma}_s \overline{\sigma}_s^*) ds \\
&\leq \int_0^t \alpha e^{\alpha s} \left|\overline{\Phi}_s\right|^2 ds + 2\int_0^t e^{\alpha s} K \left|\overline{\Phi}_s\right| \left|\overline{U}_s\right| ds + 2\sup_{[0,t]} \left| \int_0^s e^{\alpha r} \left\langle \overline{\Phi}_r, \overline{\sigma}_r dW_r \right\rangle \right| \\
&+ \int_0^t e^{\alpha s} K^2 \left|\overline{U}_s\right|^2 ds \\
&\leq (\alpha T + KT) \sup_{[0,t]} e^{\alpha s} \left|\overline{\Phi}_s\right|^2 + (KT + TK^2) \sup_{[0,t]} e^{\alpha s} \left|\overline{U}_s\right|^2 + 2\sup_{[0,t]} \left| \int_0^s e^{\alpha r} \left\langle \overline{\Phi}_r, \overline{\sigma}_r dW_r \right\rangle \right|
\end{aligned}$$

Pour prenant l'espérance,on a alors :

$$\begin{aligned}
E\left[\sup_{[0,t]} e^{\alpha s} \left|\overline{\Phi}_s\right|^2 \right] &\leq (\alpha T + KT) E\left[\sup_{[0,t]} e^{\alpha s} \left|\overline{\Phi}_s\right|^2 \right] + (KT + K^2 T) E\left[\sup_{[0,t]} e^{\alpha s} \left|\overline{U}_s\right|^2 \right] \\
&+ E\left[2\sup_{[0,t]} \left| \int_0^s e^{\alpha r} \left\langle \overline{\Phi}_r, \overline{\sigma}_r dW_r \right\rangle \right| \right]
\end{aligned}$$

Par les inégalités de Burkholder-Davies-Gundy,on obtient

$$
\begin{aligned}
E\left[\sup_{[0,t]}\left|\int_0^s e^{\alpha r}\left\langle\overline{\Phi}_r,\overline{\sigma}_r dW_r\right\rangle\right|\right] &\leq CE\left[\left(\int_0^t e^{2\alpha r}\left|\overline{\Phi}_r\right|^2\left|\overline{\sigma}_r\right|^2 dr\right)^{1/2}\right]\\
&\leq CE\left[\left(\int_0^t e^{2\alpha r}\left|\overline{\Phi}_r\right|^2 K^2\left|\overline{U}_r\right|^2 dr\right)^{1/2}\right]\\
&\leq Ct^{1/2}KE\left[\sup_{[0,t]} e^{\alpha s/2}\left|\overline{\Phi}_s\right|\sup_{[0,t]} e^{\alpha s/2}\left|\overline{U}_s\right|\right]\\
&\leq Ct^{1/2}K/2E\left[\sup_{[0,t]} e^{\alpha s}\left|\overline{\Phi}_s\right|^2\right]+Ct^{1/2}K/2E\left[\sup_{[0,t]} e^{\alpha s}\left|\overline{U}_s\right|^2\right]
\end{aligned}
$$

Finalement, on a

$$
\begin{aligned}
E\left[\sup_{[0,t]} e^{\alpha s}\left|\overline{\Phi}_s\right|^2\right] &\leq (\alpha T+KT+CT^{1/2}K/2)E\left[\sup_{[0,t]} e^{\alpha s}\left|\overline{\Phi}_s\right|^2\right]\\
&+(TK+TK^2+CT^{1/2}K/2)E\left[\sup_{[0,t]} e^{\alpha s}\left|\overline{U}_s\right|^2\right]
\end{aligned}
$$

ce équivalent à

$$
E\left[\sup_{[0,t]} e^{\alpha s}\left|\overline{\Phi}_s\right|^2\right] \leq \frac{TK+TK^2+CT^{1/2}K/2}{1-(\alpha T+KT+CT^{1/2}K/2)}E\left[\sup_{[0,t]} e^{\alpha s}\left|\overline{U}_s\right|^2\right].
$$

Fixons $T>0$ quelconque.Pour choisir $\alpha\in\mathbb{R}$ tel que $\frac{TK+TK^2+CT^{1/2}K/2}{1-(\alpha T+KT+CT^{1/2}K/2)}$ est une terme strictement compris entre 0 et 1.Ceci implique que Φ est une contraction .On applique donc le théorème de point fixe,on obtient l'existence et l'unicité d'une solution de l'EDS 2.1 . ∎

2.2.2 Cas localement lipschitzien

Dans ce cas en utilisant le temps d'arrêt,pour démontrer l'existence et l'unicité des solutions , tel que les coefficients de l'EDS vérifient des hypothèses de lipschitz locales.

Définition 2.2.2 *soient $b:[0,T]\times\mathbb{R}^n\longrightarrow\mathbb{R}^n$ et $\sigma:[0,T]\times\mathbb{R}^n\longrightarrow\mathbb{R}^{n\times d}$ sont boréliennes* *mesurable ,pour toute condition initiale Z est $\mathcal{F}_0-$mesurable (n'est pas nécessairement de carre intégrable),alors la solution de l'EDS 2.1 est $X \in S_T$ qui satisfait*

1. $p.s., \int_0^T |b(s, X_s)|\, ds < \infty$ et $\int_0^T \|\sigma(s, X_s)\|^2\, ds < \infty.$
2. $\forall t \in [0, T]\,,$

$$p.s., \quad X_t = Z + \int_0^t b(s, X_s)ds + \int_0^t \sigma(s, X_s)dW_s \;\; .$$

Proposition 2.2.1 *Supposons que b et σ sont localement lipschitz continus en x,uniformément en t,c'est à dire,pour chaque $n \in \mathbb{N}$,il existe une constante L_n,pour x, y avec $\|x\| \leq n, \|y\| \leq n$,telle que*

$$\begin{cases} \|b(t,x) - b(t,y)\| \leq L_n \|x - y\| \\ \|\sigma\,(t,x) - \sigma\,(t,y)\| \leq L_n \|x - y\| \end{cases}$$

$\forall t \in [0, T]\,$,si X et Y sont solutions de la même EDS 2.1,alors $X = Y$ p.s.

Preuve. On définit le temps d'arrêt τ_n par :

$$\tau_n := \inf\{t > 0 : \|X(t)\| \geq m\} \wedge \inf\{t > 0 : \|Y(t)\| \geq m\}\,.$$

Soient X et Y sont solutions de l'EDS 2.1 ,et pour des estimations similaires comme dans la preuve de théorème 2.2.1,on a

$$\begin{aligned} E\,\|X^{\tau_n}(t) - Y^{\tau_n}(t)\|^2 &= E\left\|\int_0^{t\wedge\tau_n} [b\,(s, X_s) - b(s, Y_s)]\, ds + \int_0^{t\wedge\tau_n} [\sigma\,(s, X_s) - \sigma\,(s, Y_s)]\, dW_s\right\|^2 \\ &\lesssim TE\left[\int_0^{t\wedge\tau_n} \|b\,(s, X_s) - b\,(s, Y_s)\|^2\, ds\right] + E\left[\int_0^{t\wedge\tau_n} \|\sigma\,(s, X_s) - \sigma\,(s, Y_s)\|^2\, ds\right] \\ &\leq TE\left[\int_0^{t\wedge\tau_n} L_n\,\|X_s - Y_s\|^2\, ds\right] + E\left[\int_0^{t\wedge\tau_n} L_n\,\|X_s - Y_s\|^2\, ds\right] \\ &\leq \int_0^t E\,\|X_s^{\tau_n} - Y_s^{\tau_n}\|^2\, ds \end{aligned}$$

par conséquent,on pose que $\varphi_m(t) := E\,\|X_t^{\tau_n} - Y_t^{\tau_n}\|^2$,pour une constante $C_m, \varphi_m\,(t) \leq C_m \int_0^t \varphi_m\,(s)\, ds.$

Par le lemme de Gronwall,avec $a(t) = 0$ et $b(t) = C_m$,alors en déduit que $\varphi_m(t) = 0, \forall t \geq 0$.Ensuit ,$\forall t \in [0, T]$,on a

$$X_t^{\tau_n} = Y_t^{\tau_n} \quad p.s.$$

Notes que l'ensemble exceptionnel peut dépendent de t.Par la continuité des processus X et Y,en obtient l'union des ensembles exceptionnels pour $t \in [0, T] \bigcap \mathbb{Q}$,en prenant un ensemble nul à l'éxtérieur du quel $X_t^{\tau_n} = Y_t^{\tau_n}, \forall t \in [0, T]$.D'aprés la continuité des processus ,nous avons $\Omega = \bigcup\limits_{m \in \mathbb{N}} \{\tau_n = T\}$,alors nous déduisons que $X = Y$ $p.s.$Ce qui prouve l'unicité trajectorielle. ■

Corollaire 2.2.1 *Soient $b_1, b_2 : [0, T] \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ et $\sigma_1, \sigma_2 : [0, T] \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^{n \times d}$ sont localement lipschitz en x,uniformément en t,supposons que ,*

$$\forall t \in [0, T], b_1(t, x) = b_2(t, x), \sigma_1(t, x) = \sigma_2(t, x)$$

et x avec $\|x\| \leq n$,tel que ,pour Z_1, Z_2 sont $\mathcal{F}_0-$mesurables,

$$Z_1 1_{\{\|Z_1\| \leq n\}} = Z_2 1_{\{\|Z_2\| \leq n\}}.$$

Enfin,soit X_i une solution de l'EDS par les coefficients b_i, σ_i,et soit la condition initiale $Z_i, \sigma_i = \inf \{t \in [0, T] : \|X_i\| \geq n\}$ .Donc, p.s, $\sigma_1 = \sigma_2$ et $X_1^{\sigma_1} = X_2^{\sigma_2}$.

Preuve. Le même chose pour le preuve de proposition 2.2.1,avec replacer τ_n par $\tau_n \wedge \sigma_1$,dans ce cas en notez ,$b_1(s, X_1(s)) = b_2(s, X_2(s))$ pour $s \leq \tau_n \wedge \sigma_1$ et similaire par $\sigma' s$.On prenant alors

$$X_1^{\sigma_1} = X_2^{\sigma_1}, X_1^{\sigma_2} = X_2^{\sigma_2}$$

■

Proposition 2.2.2 *Soient $b : [0, T] \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ et $\sigma : [0, T] \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^{n \times d}$ sont boréliennes mesurable et localement lipschitz continu en x,uniformément en t, telle que*

,$\forall n \in \mathbb{N}, \exists L_n$

$$\begin{cases} \|b(t,x) - b(t,y)\| \leq L_n \|x - y\| \\ \|\sigma(t,x) - \sigma(t,y)\| \leq L_n \|x - y\| \end{cases}$$

$\forall t \in [0,T]$ *et pour* x, y *vérifiant* $\|x\| \leq n, \|y\| \leq n$,*il existe* $a, b \geq 0$ *telles que :*

$$\begin{cases} \|b(t,x)\| \leq a + b\|x\| \\ \|\sigma(t,x)\| \leq a + b\|x\| \end{cases}$$

Alors,pour toute condition initiale Z *de carré intégrable* $(Z \in L^2(\Omega))$,*l'EDS 2.1 admet une unique solution.*

Preuve. La démonstration de l'unicité est immédiate de la proposition 2.2.1, pour démontrer l'existence d'une solution ,on peut choisir

$$b_n(t,x) := \begin{cases} b(t,x) & ; \|x\| \leq n \\ b(t, \frac{nx}{\|x\|}) & ; \|x\| > n \end{cases} \quad \text{et } \sigma_n(t,x) := \begin{cases} \sigma(t,x) & ; \|x\| \leq n \\ \sigma\left(t, \frac{nx}{\|x\|}\right) & ; \|x\| > n \end{cases}$$

pour b_n et σ_n satisfiants les conditions de théorème 2.2.1 .Alors pour chaque n, X_n est la solution unique de l'EDS :

$$\begin{cases} dX_n(t) = b_n(t, X_n(t))dt + \sigma_n(t, X_n(t))dW_t \\ X_0^n = Z \end{cases} \tag{2.4}$$

Donc,pour démontrer l'existence globale d'un solution de l'EDS 2.4 ,il suffit démontrer que $E\|X_n\|_\infty^2 \leq C$,telle que C est une constante indépendant de n.En effet ,dans ce cas,par l'inégalité de Chebyshev

$$P(\|X_n\|_\infty \geq n) \leq Cn^{-2}.$$

et comme $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n^{-2} < \infty$,d'apres le lemme de Borel-Cantelli on a

$$P\left(\overline{\lim}\{\|X_n\|_\infty \geq n\}\right) = 0.$$

Donc

$$\begin{aligned} P\left(\underline{\lim}\left\{\|X_n\|_\infty < n\right\}\right) &= 1 - P\left(\overline{\lim}\left\{\|X_n\|_\infty \geq n\right\}\right) \\ &= 1 \end{aligned}$$

en déduite que,pour chaque n assez grand,$p.s$,

$$\tau_n := \inf\left\{t \in [0,T] : \|X_n(t)\| \geq n\right\} = T.$$

Alors,le processus $X(t) := X_n(t)$ dans $[0, \tau_n]$,est une solution de notre équation qui est défini pour tout $t \in [0, T]$.

Il reste à prouver que $E\|X\|_\infty^2$ est bornée,d'aprés l'hypothèse de croissance linéaire sur les coefficients et les estimations similaires à celles de la preuve du théorème 2.2.1 on a :

$$E\|X_n\|_\infty^2 \leq C(T)E\|X_n\|_\infty^2 + C_1 + C_2 E\|Z\|^2 .$$

tel que C_1 et C_2 sont coefficients indépendent sur le coefficients dans l'hypothèse de croissance linéaire,de plus $C(T) \longrightarrow 0$, pour $T \longrightarrow 0$.

Ensuit,pour T_0 assez petit on a donc :

$$E\left[\sup_{t\in[0,T_0]} |X_n(t)|^2\right] \leq \frac{1}{1 - C(T_0)}\left(C_1 + C_2 E\|Z\|^2\right).$$

La prochaine on note sur l'espace $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{T_0 \leq t \leq T}, \mathcal{P})$ que le mouvement brownien $\widetilde{W}(t)$ définie par

$$\widetilde{W}(t) := W(T_0 + t) - W(t).$$

De plus, le processus $(X_n(t))_{T_0 \leq t \leq T}$ est un solution de l'EDS 2.4 avec la condition initiale $X_n(T_0)$.Ainsi

$$E\left[\sup_{t\in[T_0,2T_0]} |X_n(t)|^2\right] \leq \frac{1}{1-C(T_0)}\left(C_1 + C_2 E\|X_n(T_0)\|^2\right)$$
$$\leq \frac{1}{1-C(T_0)}\left(C_1 + C_2\left(\frac{1}{1-C(T_0)}\left(C_1 + C_2 E\|Z\|^2\right)\right)\right)$$

nous posons des constantes C_k telle que ,$\forall n \in \mathbb{N}$,

$$E\left[\sup_{t\in[0,kT_0]} |X_n(t)|^2\right] \leq C_k(1 + E\|Z\|^2).$$

Enfin, nous avons montrer que $\forall t \in [0,T]$,la majoration de $E\left[\sup_{t\in[0,T]} |X_n(t)|^2\right]$ independant de n. ■

2.2.3 Exemple

Mouvement brownien geométriques :

On considère l'équation différentielle stochastique suivante

$$\begin{cases} dX(t) = \mu X(t)dt + \sigma X(t)dW(t) \\ X_0 = Z \end{cases}$$

Notez que les coefficients de cette équation sont lipschitzien continus $b(t,x) = \mu x$ et $\sigma(t,x) = \sigma x$,donc,d'apres le théorème 2.2.1 il y a une unique solution pour chaque condition initiale Z.Pour simplifier,prenons $Z = 1$.Comment pouvons-nous calculer un solution à cette equation ?

Pour divisant par X et l'intégration on obtient

$$\int_0^t \frac{dX(s)}{X(s)} = \int_0^t \mu ds + \int_0^t \sigma dW(s) = \mu t + \sigma W(t).$$

pour applique la formule d'Itô alors :

$$\begin{aligned} d\log(X_t) &= \frac{1}{X_t}dX_t + \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{X_t^2}\right)d\left\langle X\right\rangle_t \\ &= \frac{dX_t}{X_t} - \frac{1}{2X_t^2}\sigma^2 X_t^2 dt = \frac{dX_t}{X_t} - \frac{\sigma^2}{2}dt \end{aligned}$$

oŭ $\left\langle X\right\rangle_t = \int_0^t \sigma^2 X_s^2 ds$ et $d\left\langle X\right\rangle_t = \sigma^2 X_t^2 dt$

Finalement,on obtient

$$\log(X_t) = \log Z + \mu t + \sigma W(t) - \frac{1}{2}\sigma^2 t$$

Donc

$$X(t) = \exp\left[\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)t + \sigma W(t)\right].$$

Conclusion

Dans ce travail,nous prouvons que l'équation différentielle stochastique (EDS) admet une unique solution,dans ce cas aux les coefficients de cette equation satisfaisant des hypothéses de lipschitz locales.

Bibliographie

[1] Berglund, N. (2005). Introduction aux Equations Différentielles Stochastiques

[2] Breton, J. C. (2014). Calcul stochastique. M2 mathématiques, Université de Rennes 1

[3] Briand, P. (2001). Équations Différentielles Stochastiques Rétrogrades. Mars

[4] Jeanblanc, M. (2006). Cours de calcul stochastique. Master 2IF EVRY

[5] Kunze, M. (2012). Stochastic Differential Equations .Lecture Notes

[6] Lamberton, D. (1991). Introduction au calcul stochastique appliqué à la finance

[7] Lévêque, O. (2005). Cours de probabilités et calcul stochastique

[8] Rhodes, R .Cours de probabilités. Saint-Louis. Sénégal

Abréviations et Notations

Les différentes abréviations et notations utilisées tout au long de ce mémoire sont expliquées ci-dessous

$v.a.r$	Variable aléatoire réelle
$\mathbb{R}^d$	L'espace réel euclidien de dimension d
$p.s$	Presque sûrement
$\mathbb{P}-p.s$	Presque sûrement pour la mesure de probabilité $\mathbb{P}$
$S \vee T$	$\max(S,T)$
$S \wedge T$	$\min(S,T)$
$\mathbb{P} \otimes dt$	La mesure produit de la mesure de probabilité $\mathbb{P}$ et la mesure de lebesgue
$\left(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}, \mathcal{P}\right)$	Espace de probabilité filtré
MB	Mouvement brownien
$L^2(\Omega)$	L'espace des variables aléatoires de carré intégrable
$\nabla_x f$	Le gradient de f en x
H^*	La transposée de H
$\partial^2_{xx} f$	La hesienne de la fonction f
$\mathbb{N}$	L'ensemble des entiers naturels
$\mathcal{B}([0,t])$	Tribu borélien de $[0,t]$
EDS	Équation différentielle stochastique