République Algérienne Démocratique et Populaire

Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

UNIVERSITÉ MOHAMED KHIDER, BISKRA

FACULTÉ des SCIENCES EXACTES et des SCIENCES de la NATURE et de la VIE

DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES

Mémoire présenté en vue de l'obtention du Diplôme **:**

MASTER en Mathématiques

Option : **Analyse**

Par

MOKRANE FAWZIA

Titre :

Méthodes de résolution des équations intégrales

Membres du Comité d'Examen :

Dr.	**Houas Amrane**	UMKB	Président
Dr.	**Silabdi Noureddine**	UMKB	Encadreur
Dr.	**Kassi Fatma**	UMKB	Examinateur

Juin 2018

DÉDICACE

Ma mére, mon père. Merci du fond du coeur pour tout letemps que vous avez consacré à m'aider, merci pour votre soutien inconditionnel pendant toute ma vie. Ma mère je t'aime. Mon père je t'aime, merci parce que vous m'encouragez à aller jusqu'au bout, et vous permettez ce que je suis aujourd'hui. Je vous dédie ce mémoire.

À mes frères.

À mes soeurs.

À toute ma famille.

À tous mes amis et camarades. Particulièrement les éléments de l'ensemble $\hat{B} = \{$Nour el hayet, Badria, Hind, Ilia, Amina et moi$\}$. Merci pour les bons moments inoubliable. À Karima et Chafia.

Une grande dédicace à mon Cheikh qui j'ai eu le coran sous ses mains Doulama Ali. Merci pour votre prière pour moi et à tous mes camarades de la mosquée el-atiq djamourah

Merci à tous et toutes.

REMERCIEMENTS

Le moment est venu pour moi d'exprimer mas plus gratitude envers tous qui m'ont aidé et encouragé dans l'accomplissement de cette tâche. Et pour tous qui m'ont aidée depuis que j'ai écrit la première lettre jusqu'à mainetenent.

Avant tout, je tiens à remercier **ALLAH** le tous puissant qui m'a aidée et donnée la santé, la patience et le courage pour arriver ici.

Mes remerciements à **Mr.Silabdi Noureddine** pour m'avoir encadrée durant cette année de mémoire,je suis vraiment très heureuse d'avoir en cette chance de travailler avec vous.

Également, je remercie les membres du jury : **Dr.Houas Amrane** et **Dr.Kassi Fatma**, pour examiner et juger mon travail.

Je tiens à témoigner ma gratitude à tous mes enseignant et en particulier : **Mr. Thamer**, **Mr.Labed**, **Mr Yahia** et **Melle. Korichi**. vos remarques constructives m'ont permis de mener à bien ce travail et d'améliorer mes connaissances. Je vous tiens évidemment à vous exprimer un merci tout spécial.

Je tiens aussi à remercier mon amie **Nour el-hayet** pour ses aides et conseils.

Je profite aussi de l'occasion pour remercier tous mes enseignants commençant par mes études primaires terminant par mes études supérieures et je leur dis que ce travail n'aurait jamais pu voir le jour sans leurs efforts avec moi. À tous qui fatigué pour moi.

Merci à tous et à toutes du fond du coeur.

Table des matières

Introduction

Dans ce mémoire on étudie et on présente les différentes méthodes classiques et approchées.

Après un rappel dans le premier chapitre de notions fondamentales de l'espace L_2, les définitions de différentes types de ces équations : équations intégrales de Volterra, équations intégrales de Fredholm et la liaison entre les équations différentielles linéaires et les équations intégrales de Volterra, on présente dans le deuxième chapitre les méthodes de résolution dites analytiques : résolvante de l'équation intégrale de Volterra, méthode de Fredholm et les noyaux itérés, en illustrant ces méthodes par des exemples simples ce ci pour les deux types de ces équations. Enfin, nous donnons quelques méthodes numériques en incistant sur l'idée utilisée en général qui consiste à remplacer la partie intégrale de l'équation par une somme finie (intégration numérique).

Chapitre 1

1.1 Propriétés fondamentales des fonctions de $\mathbf{L_2}$

– Une fonction $f(x)$ non négative sur l'intervalle $[a, b]$ est dite sommable sur cet intervalle si $\int_a^b f(x)dx$ est finie.

– Une fonction $f(x)$ de signe arbitraire est sommable sur $[a, b]$ si et seulement s'il en est de même de la fonction $|f(x)|$, autrement dit, lorsque l'intégrale $\int_a^b |f(x)|\, dx$ est finie.

Dans la suite nous aurons affaire à l'intervalle fondamental $I = [a, b]$ ou $(I_0 = [0, b])$ et au carré fondamental $\Omega = \{a \leq x, t \leq b\}$(ou $\Omega_0 = \{0 \leq x, t \leq a\}$).

– **Espace** $\mathbf{L}_2(a, b)$. On dit qu'une fonction $f(x)$ est de carré intégrable sur $[a, b]$ si l'intégrale

$$\int_a^b |f(x)|^2\, dx$$

existe (est finie). L'ensemble de toutes les fonctions de carré intégrable sur $[a, b]$ sera noté $L_2(a, b)$ ou L_2 tout court.

1. Le produit de deux fonctions de carré intégrable est une fonction intégrable.
2. La somme de deux fonctions de L_2 est une fonction de L_2.
3. Si $f(x) \in L_2$ et si λ est un nombre réel quelconque, alors

$$\lambda f(x) \in L_2.$$

4. Si $f(x) \in L_2$ et $g(x) \in L_2$, on a l'inégalité de Cauchy-Schwarz :

$$\left(\int_a^b |f(x)g(x)|\,dx\right)^2 \leq \int_a^b |f(x)|^2\,dx \int_a^b |g(x)|^2\,dx.$$

5. Le produit scalaire de deux fonctions $f(x) \in L_2$, $g(x) \in L_2$ est le nombre

$$(f,g) = \int_a^b f(x)\overline{g(x)}dx.$$

6. On appelle norme d'une fonction $f(x)$ de L_2 le nombre non négatif

$$\|f\| = \sqrt{\int_a^b |f(x)|^2\,dx} = (f,f)^{\frac{1}{2}}.$$

7. Pour $f(x)$ et $g(x)$ de L_2 on a l'inégalité triangulaire :

$$\|f+g\| \leq \|f\| + \|g\|\,.$$

8. Soient $f(x), f_1(x), f_2(x), ..., f_n(x), ...$ des fonctions de carré intégrable sur (a,b). Si

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b [f_n(x) - f(x)]^2\,dx = 0 \Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} \|f_n - f\|_2 = 0$$

on dit que la suite de fonctions $f_1(x), f_2(x), ...$ converge en moyenne ou, plus précisément en moyenne quadratique vers $f(x)$.

9. Si une suite $\{f_n(x)\}$ de fonctions de converge uniformément vers $f(x)$ c'est-à-dire converge en norme sup, alors $f(x) \in L_2$ et $\{f_n(x)\}$ converge en moyenne vers $f(x)$.

10. On dit qu'une suite $\{f_n(x)\}$ de fonctions de L_2 converge en moyenne vers un de ses propres éléments si à chaque $\varepsilon > 0$ on peut associer un nombre $N > 0$ tel qu'on ait

$$\int_a^b [f_n(x) - f_m(x)]^2\,dx \leq \varepsilon$$

pour $n > N$ et $m > N$. De telles suites sont appelées suites de Cauchy. Pour qu'une suite $\{f_n(x)\}$ converge en moyenne vers une fonction, il faut et il suffit qu'elle soit de Cauchy. L'espace L_2 est complet, i.e. toute suite de Cauchy de L_2 converge vers une fonction de L_2.

11. Deux fonctions $f(x)$ et $g(x)$ appartenant à $L_2(a,b)$ sont équivalentes sur (a,b) si $f(x) \neq g(x)$

seulement sur un ensemble de mesure nulle. Dans ce cas, on dit que $f(x) = g(x)$ presque partout (p.p.) sur (a,b).

1.2 Equations intégrales de Volterra

1.2.1 Notions fondamentales

Une équation, à une inconnue $\varphi(x)$, de la forme :

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda \int_a^x K(x,t)\varphi(t)dt \tag{1.1}$$

où $f(x)$, $K(x,t)$ sont des fonctions connues et λ est un paramètre numérique, est appelée équation intégrale linéaire de Volterra de seconde espèce. La fonction $K(x,t)$ est le noyau de l'équation de Volterra. Si $f(x) = 0$, l'équation (1.1)s'écrit :

$$\varphi(x) = \lambda \int_a^x K(x,t)\varphi(t)dt \tag{1.2}$$

et s'appelle équation homogène de Volterra de seconde espèce.

Une équation, à une inconnue $\varphi(x)$ de la forme :

$$\int_a^x K(x,t)\varphi(t)dt = f(x) \tag{1.3}$$

est appelée équation intégrale de Volterra de première espèce.

On appelle solution de l'équation intégrale(1.1), (1.2) ou (1.3) une fonction $\varphi(x)$ qui, dès qu'elle est portée dans cette équation, la change en identité (en x).

Exemple 1.2.1 *La fonction $\varphi(x) = \frac{1}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}}$ est solution de l'équation intégrale deVolterra. Après un calcul simple on trouve que la fonction vérifie l'équation :*

$$\varphi(x) = \frac{1}{1+x^2} - \int_a^x \frac{t}{1+x^2}\varphi(t)dt. \tag{1.4}$$

1.3 Liaison entre les équations différentielles linéaires et les équations intégrales de Volterra

La résolution de l'équation différentielle linéaire

$$\frac{d^n y}{dx^n} + a_1(x)\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + ... + a_n(x)y = F(x) \tag{1.5}$$

à coefficients continus $a_1(x)$ $(i = 1, ..., n)$ avec les conditions initiales :

$$\begin{cases} y(0) = C_0, \\ y'(0) = C_1, \\ \quad ... \\ y^{(n-1)}(0) = C_{n-1} \end{cases} \tag{1.6}$$

peut être ramenée à la résolution d'une équation intégrale de Volterra de seconde espèce. Illustrons notre affirmation sur l'exemple de l'équation différentielle du secon dordre

$$\frac{d^2y}{dx^2} + a_1(x)\frac{dy}{dx} + a_2(x)y = F(x), \tag{1.7}$$

$$y(0) = C_0, \quad y'(0) = C_1. \tag{1.8}$$

Posons :

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \varphi(x). \tag{1.9}$$

D'où, vu les conditions initiales (1.8), on obtient successivement :

$$\frac{dy}{dx} = \int_0^x \varphi(t)dt + C_1, \quad y = \int_0^x (x-t)\varphi(t)dt + C_1x + C_0. \tag{1.10}$$

Nous avons utilisé la formule :

$$\underbrace{\int_{x_0}^x dx \int_{x_0}^x dx ... \int_{x_0}^x}_{n\ fois} f(x)dx = \frac{1}{(n-1)!} \int_{x_0}^x (x-z)^{n-1} f(z)dz.$$

Compte tenu de (1.9) et (1.10) mettons l'équation différentielle (1.7) sous la forme :

$$\varphi(x) + \int_0^x a_1(x)\varphi(t)dt + C_1a_1(x) + \int_0^x a_2(x)(x-t)\varphi(t)dt + C_1xa_2(x) + C_0a_2(x) = F(x)$$

ou

$$\varphi(x) + \int_0^x \left[a_1(x) + a_2(x)(x-t)\right] \varphi(t)dt = F(x) - C_1a_1(x) - C_1xa_2(x) + C_0a_2(x). \tag{1.11}$$

Posant :

$$K(x,t) = -\left[a_1(x) + a_2(x)(x-t)\right], \tag{1.12}$$

$$f(x) = F(x) - C_1a_1(x) - C_1xa_2(x) + C_0a_2(x) \tag{1.13}$$

nous ramenons l'équation (1.11) à la forme suivante :

$$\varphi(x) = f(x) + \int_0^x K(x,t)\varphi(t)dt, \tag{1.14}$$

i.e. nous obtenons une équation intégrale de Volterra de seconde espèce.

L'unicité de la solution de (1.14) résulte de l'existence et de l'unicité de la solution du problème de Cauchy (1.7)-(1.8) pour l'équation différentielle linéaire à coefficients continus dans un voisinage du point $x = 0$.

Inversement, en résolvant l'équation intégrale (1.14) avec K et f définis par les formules (1.12) et (1.13), puis portant $\varphi(x)$ obtenus dans la dérnière équation (1.10), nous obtenons la solution de (1.7) vérifiant les conditions initiales (1.8).

Exemple 1.3.1 *Formons l'équation intégrale correspondant à l'équation différentielle*

$$y'' + xy + y = 0$$

et aux conditions initiales :

$$y(0) = 1, \quad y'(0) = 0.$$

Posons :

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \varphi(x). \tag{1.15}$$

Alors :

$$\frac{dy}{dx} = \int_0^x \varphi(t)dt + y'(0) = \int_0^x \varphi(t)dt, \quad y = \int_0^x (x-t)\varphi(t)dt + 1. \tag{1.16}$$

Portons (1.15) et (1.16) dans l'équation différentielle donnée, il vient :

$$\varphi(x) + \int_0^x x\varphi(t)dt + \int_0^x (x-t)\varphi(t)dt + 1 = 0$$

ou

$$\varphi(x) = -1 - \int_0^x (2x-t)\varphi(t)dt.$$

1.4 Equations intégrales de Fredholm

1.4.1 Notions fondamentales

On appelle équation intégrale linéaire de Fredholm de seconde espèce une équation de la forme :

$$\varphi(x) - \lambda \int_a^b K(x,t)\varphi(t)dt = f(x), \tag{1.17}$$

où $\varphi(x)$ est la fonction inconnue, $K(x,t)$ et $f(x)$ des fonctions données, x et t deux variables réelles parcourant l'intervalle (a,b) et un paramètre numérique.

La fonction $K(x,t)$ est le noyau de l'équation intégrale (1.17) ; on suppose que le noyau $K(x,t)$ est défini dans le carré $\Omega = \{a \leq x \leq b, a \leq t \leq b\}$ du plan (x,t) et continu dans Ω, ou bien présente des discontinuités telles que l'intégrale

$$\int_a^b \int_a^b |K(x,t)|^2 < +\infty$$

C'est-à-dire est finie.

Si $f(x) \neq 0$, l'équation (1.17) est dite non homogène, dans le cas contraire, l'équation intégrale (1.17) s'écrit :

$$\varphi(x) - \lambda \int_a^b K(x,t)\varphi(t)dt = 0, \tag{1.18}$$

et on dit qu'elle est homogène.

Une équation intégrale de la forme :

$$\int_a^b K(x,t)\varphi(t)dt = f(x), \tag{1.19}$$

où la fonction inconnue $\varphi(x)$ n'intervient que sous le signe d'intégration, s'appelle équation intégrale de Fredholm de première espèce.

Les bornes a et b dans les équations (1.17), (1.18), et (1.19) toute fonction $\varphi(x)$ telle qu'après sa substitution dans l'équation, celle-ci devient une identité en $x \in (a,b)$.

Exemple 1.4.1 *La fonction* $\varphi(x) = \sin\frac{\pi x}{2}$ *est solution de l'équation intégrale de Fredholm*

$$\varphi(x) - \frac{\pi^2}{2}\int_0^1 K(x,t)\varphi(t)dt = \frac{x}{2},$$

où le noyau est de la forme :

$$K(x,t) = \begin{cases} \frac{x(2-t)}{2}, & 0 \le x \le t \le 1, \\ \frac{t(2-x)}{2}, & 0 \le t \le x \le 1, \end{cases}$$

En effet Mettons le premier membre sous la forme suivante :

$$\varphi(x) - \frac{\pi^2}{4}\int_0^1 K(x,t)\varphi(t)dt = \varphi(x) - \frac{\pi^2}{4}\left\{\int_0^x K(x,t)\varphi(t)dt + \int_x^1 K(x,t)\varphi(t)dt\right\}$$

$$= \varphi(x) - \frac{\pi^2}{4}\left\{\int_0^x \frac{t(2-x)}{2}\varphi(t)dt + \int_x^1 \frac{x(2-t)}{2}\varphi(t)dt\right\}$$

$$= \varphi(x) - \frac{\pi^2}{4}\left\{\frac{2-x}{2}\int_0^x t\varphi(t)dt + \frac{x}{2}\int_x^1 (2-t)\varphi(t)dt\right\}$$

Portons dans l'expression obtenue $\sin\frac{\pi x}{2}$ *au lieu de* $\varphi(x)$, *il vient :*

$$\sin\frac{\pi x}{2} - \frac{\pi^2}{4}\left\{(2-x)\int_0^x t\frac{\sin\frac{\pi t}{2}}{2}dt + x\int_x^1 (2-t)\frac{\sin\frac{\pi t}{2}}{2}dt\right\} = \cos\pi t$$

$$= \sin\frac{\pi x}{2} - \frac{\pi^2}{4}\left\{(2-x)(-\frac{t}{\pi}\cos\frac{\pi t}{2} + \frac{2}{\pi^2}\sin\frac{\pi t}{2}) + x(-\frac{(2-t)}{\pi}\cos\frac{\pi t}{2} + \frac{2}{\pi^2}\sin\frac{\pi t}{2}\right\} = \frac{x}{2}.$$

Ainsi, on a $\frac{x}{2} \equiv \frac{x}{2}$ *ce qui signifie par définition que* $\varphi(x) = \sin\frac{\pi x}{2}$ *est solution de l'équation intégrale donnée.*

Chapitre 2

Méthodes de résolution

2.1 Résolution des équations intégrales à l'aide des résolvantes

2.1.1 Résolvante de l'équation intégrale deVolterra

Soit l'équation intégrale de Volterra de seconde espèce :

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda \int_0^x K(x,t)\varphi(t)dt, \tag{2.1}$$

où $K(x,t)$ est une fonction continue pour $0 \leq x \leq a$, $0 \leq t \leq x$ et $f(x)$ est continue lorsque $0 \leq x \leq a$.

Cherchons la solution de cette équation sous la forme d'une série entière illimités suivant les puissances de λ :

$$\varphi(x) = \varphi_0(x) + \lambda\varphi_1(x) + \lambda^2\varphi_2(x) + ... + \lambda^n\varphi_n(x) + ... \tag{2.2}$$

Portons formellement cette série dans (2.1), il vient :

$$\varphi(x) = \varphi_0(x)+\lambda\varphi_1(x)+...+\lambda^n\varphi_n(x)+... = f(x)+\lambda\int_0^x K(x,t)\left[\varphi_0(t)+\lambda\varphi_1(t)+...+\lambda^n\varphi_n(t)+...\right]dt$$

En procédant par identification nous obtenons :

$$\varphi_0(x) = f(x),$$

$$\varphi_1(x) = \int_0^x K(x,t)\varphi_0(t)dt = \int_0^x K(x,t)f(t)dt,$$

$$\varphi_2(x) = \int_0^x K(x,t)\varphi_1(t)dt = \int_0^x K(x,t)\int_0^t K(t,t_1)f(t_1)dt_1, \tag{2.3}$$

$$...........$$

Moyennant les relations (2.3) on peut définir successivement les fonctions $\varphi_n(x)$. On montre que, sous les hypothèses faites sur $f(x)$ et $K(x,t)$, la série (2.2) ainsi obtenus converge uniformément en x et t pour tout λ et $x \in [0,a]$ et que sa somme est la solution de l'équation (2.1).

Ensuite, (2.3) entraîne

$$\varphi_1(x) = \int_0^x K(x,t)f(t)dt,$$

$$\varphi_2(x) = \int_0^x K(x,t)\left[\int_0^t K(t,t_1)f(t_1)dt_1\right]dt = \int_0^x f(t_1)dt_1\int_{t_1}^x K(x,t)K(t,t_1)dt = \int_0^x K_2(x,t_1)f(t_1)dt_1$$

où

$$K_2(x,t_1) = \int_{t_1}^x K(x,t)K(t,t_1)dt.$$

On établit de façon analogue qu'en général :

$$\varphi_n(x) = \int_0^x K_n(x,t)f(t)dt, \quad (n=1,2,...). \tag{2.4}$$

Les fonctions $K_n(x,t)$ s'appellent noyaux itérés et sont définies on le montre aisément, par les formules de récurrence :

$$K_1(x,t) = K(x,t)$$

$$K_{n+1}(x,t) = \int_t^x K(x,z)K_n(z,t)dz \quad (n = 1, 2, ...) \tag{2.5}$$

Compte tenu de (2.4) et (2.5) l'égalité (2.2) peut s'écrire :

$$\varphi(x) = f(x) + \sum_{v=1}^{\infty} \lambda^v \int_0^x K_v(x,t)f(t)dt.$$

Une fonction $R(x,t;\lambda)$ définie par la série :

$$R(x,t;\lambda) = \sum_{v=0}^{\infty} \lambda^v K_{v+1}(x,t) \tag{2.6}$$

est la résolvante (ou le noyau résolvant) de l'équation intégrale (2.1).

Si le noyau $K(x,t)$ est continu, la série (2.6) converge absolument et uniformément.

La résolvante $R(x,t;\lambda)$ satisfait à l'équation fonctionnelle suivante :

$$R(x,t;\lambda) = K(x,t) + \lambda \int_t^x K(x,s)R(s,t;\lambda)ds.$$

La solution de l'équation intégrale (2.1) en fonction de la résolvante s'écrit comme suit :

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda \int_0^x R(x,t;\lambda)f(t)dt.$$

Exemple 2.1.1 *Cherchons la résolvante de l'équation intégrale de Volterra à noyau* $K(x,t) = 1$*. On a* $K_1(x,t) = K(x,t) = 1$*. Conformément aux formules (2.5)*

$$K_2(x,t) = \int_t^x K(x,z)K_1(z,t)dz = \int_t^x dz = x - t,$$

$$K_2(x,t) = \int_t^x 1.(x-t)dz = \frac{(x-t)^2}{2!},$$

$$K_2(x,t) = \int_t^x 1.\frac{(x-t)^2}{2}dz = \frac{(x-t)^3}{3!}$$

....

$$K_n(x,t) = \int_t^x 1.K_{n-1}(z,t)dz = \int_t^x 1.\frac{(z-t)^{n-2}}{(n-2)!}dz = \frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!}.$$

Ainsi par définition,

$$R(x,t;\lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^n K_{n+1}(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\lambda^n (x-t)^n}{n!} = e^{\lambda(x-t)}.$$

Théorème 2.1.1 *L'équation intégrale deVolterra de seconde espèce*

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda \int_0^x K(x,t)\varphi(t)dt,$$

dont les noyaux $K(x,t)$ *et la fonction* $f(x)$ *appartiennent respectivement à* $L_2(\Omega_0)$ *et à* $L_2(0,a)$*, admet une solution et une seule dans* $L_2(0,a)$*. Cette solution est donnée par la formule :*

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda \int_0^x R(x,t;\lambda)f(t)dt,$$

où la résolvante $R(x,t;\lambda)$ *est définie par la série :*

$$R(x,t;\lambda) = \sum_{v=0}^{\infty} \lambda^v K_{v+1}(x,t)$$

de noyaux itérés qui converge presque partout.

2.2 Méthode de Fredholm

La solution de l'équation de Fredholm de seconde espèce est donnée par la formule :

$$\varphi(x) - \lambda \int_a^b K(x,t)\varphi(t)dt = f(x) \tag{2.7}$$

est donnée par la formule :

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda \int_a^b R(x,t;\lambda) f(t) dt \tag{2.8}$$

où la fonction $R(x,t;\lambda)$, dite Résolvante de Fredholm de l'équation (2.7), est définie par l'égalité :

$$R(x,t;\lambda) = \frac{D(x,t;\lambda)}{D(\lambda)} \tag{2.9}$$

sous la condition $D(\lambda) \neq 0$. Ici $D(x,t;\lambda)$ et $D(\lambda)$ sont des séries de puissance de λ :

$$D(x,t;\lambda) = K(x,t) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} B_n(x,t)\lambda^n, \tag{2.10}$$

$$D(\lambda) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} C_n \lambda^n, \tag{2.11}$$

avec les coefficients ainsi définis :

$$B_n(x,t) = \underbrace{\int_a^b \ldots \int_a^b}_{n\ fois} \begin{vmatrix} K(x,t) & K(x,t_1) & \ldots & K(x,t_n) \\ K(t_1,t) & K(t_1,t_1) & \ldots & K(t_1,t_n) \\ K(t_2,t) & K(t_2,t_1) & \ldots & K(t_2,t_n) \\ & \ldots\ldots\ldots\ldots & & \\ K(t_n,t) & K(t_n,t_1) & \ldots & K(t_n,t_n) \end{vmatrix} dt_1 \ldots dt_n, \tag{2.12}$$

et

$$B_0(x,t) = K(x,t)$$

$$C_n(x,t) = \underbrace{\int_a^b \ldots \int_a^b}_{n\ fois} \begin{vmatrix} K(t_1,t_1) & K(t_1,t_2) & \ldots & K(t_1,t_n) \\ K(t_2,t_1) & K(t_2,t_2) & \ldots & K(t_2,t_n) \\ K(t_3,t_1) & K(t_3,t_2) & \ldots & K(t_3,t_n) \\ & \ldots\ldots\ldots\ldots & & \\ K(t_n,t_1) & K(t_n,t_2) & \ldots & K(t_n,t_n) \end{vmatrix} dt_1 \ldots dt_n, \tag{2.13}$$

Les fonctions $D(\lambda)$ et $D(x,t;\lambda)$ sont respectivement le déterminant de Fredholm et le mineur du déterminant de Fredholm. Si le noyau $K(x,t)$ est borné ou si l'intégrale

$$\int_a^b \int_a^b |K(x,t)|^2 \, dxdt < +\infty$$

est finie, les séries (2.10) et (2.11) convergent quelque soit et sont donc des fonctions analytiques entières de λ.

La résolvante :

$$R(x,t;\lambda) = \frac{D(x,t;\lambda)}{D(\lambda)}$$

est une fonction analytique de λ, sauf les λ qui sont zéros de $D(\lambda)$ $(D(\lambda)=0)$.

Exemple 2.2.1 *A l'aide des déterminants de Fredholm trouvons la résolvante du noyau $K(x,t) = xe^t$.Ensuite*

$$B_1(x,t) = \int_0^1 \begin{vmatrix} xe^t & xe^{t_1} \\ t_1e^t & t_1e^{t_1} \end{vmatrix} dt_1 = 0,$$

$$B_2(x,t) = \int_0^1 \int_0^1 \begin{vmatrix} xe^t & xe^{t_1} & xe^{t_2} \\ t_1e^t & t_1e^{t_1} & t_1e^{t_2} \\ t_2e^t & t_2e^{t_1} & t_2e^{t_2} \end{vmatrix} dt_1dt_2 = 0,$$

puisque les déterminants sous $\int$ sont nuls. Il est évident que tous les $B_n(x,t)$ suivants sont nuls eux aussi. Trouvons les coefficients C_n :

$$C_1 = \int_0^1 K(t_1,t_1)dt_1 = \int_0^1 t_1e^{t_1}dt_1 = 1,$$

$$C_1 = \int_0^1 \int_0^1 \begin{vmatrix} t_1e^{t_1} & t_1e^{t_2} \\ t_2e^{t_1} & t_2e^{t_2} \end{vmatrix} dt_1dt_2 = 0.$$

Exemple 2.2.2 *Evidemment, tous les C_n suivants sont nuls. Dans notre cas, nous avons* *conformément aux formules (2.10) et (2.11) :*

$$D(x,t;\lambda) = K(x,t) = xe^t, \quad D(\lambda) = 1-\lambda.$$

Donc

$$R(x,t;\lambda) = \frac{D(x,t;\lambda)}{D(\lambda)} = \frac{xe^t}{1-\lambda}.$$

Appliquons le résultat obtenu à l'équation intégrale

$$\varphi(x) - \lambda \int_a^b xe^t \varphi(t)dt = f(x) \quad (\lambda \neq 1).$$

D'après la formule (2.8),

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda \int_a^b \frac{xe^t}{1-\lambda} f(t)dt.$$

En particulier, nous obtenons pour $f(x) = e^{-x}$

$$\varphi(x) = e^{-x} + \frac{\lambda}{1-\lambda} x.$$

Remarque 2.2.1 *Si les fonctios* $\varphi_1(x), \varphi_2(x), ..., \varphi_n(x)$ *sont solutions de l'équation homogène de Fredholm, il en est également de leur combinaison linéaire*

$$\varphi(x) = c_1\varphi_1(x), c_2\varphi_2(x), ..., c_n\varphi_n(x) = \sum_{k=1}^{n} c_k \varphi_k(x)$$

où c_k $(k = 1, 2, ..., n)$ *sont des constantes arbitraires.*

2.3 Noyaux itérés

2.3.1 Construction de la résolvante à l'aide des noyaux itérés

Soit l'équation intégrale de Fredholm

$$\varphi(x) - \lambda \int_a^b K(x,t)\varphi(t)dt = f(x). \tag{2.14}$$

A l'instar des équations de Volterra, l'équation de Fredholm peut être résoudre par la méthode des approximations successives. A cette fin on pose :

$$\varphi(x) = f(x) + \sum_{n=1}^{\infty} \psi_n(x)\lambda^n, \tag{2.15}$$

avec $\psi_n(x)$ définis par les formules :

$$\psi_1(x) = \int_a^b K(x,t)f(t)dt,$$

$$\psi_2(x) = \int_a^b K(x,t)\psi_1(t)dt = \int_a^b K_2(x,t)f(t)dt,$$

$$\psi_3(x) = \int_a^b K(x,t)\psi_2(t)dt = \int_a^b K_3(x,t)f(t)dt,$$

et ainsi de suite.

Ici

$$K_2(x,t) = \int_a^b K(x,z)K_1(z,t)dz,$$

$$K_3(x,t) = \int_a^b K(x,z)K_1(z,t)dz,$$

et en général

$$K_n(x,t) = \int_a^b K(x,z)K_{n-1}(z,t)dz, \tag{2.16}$$

$n = 1, 2, ...,$ et $K_1(x,t) = K(x,t)$. Les fonctions $K_n(x,t)$ définies par les formules s'appellent noyaux itérés. Elles vérifient la relation :

$$K_n(x,t) = \int_a^b K_m(x,s)K_{n-m}(s,t)ds \tag{2.17}$$

où m est un nombre naturel quelconque inférieur à n.

La résolvante de l'équation intégrale (2.14) est définie en fonction des noyaux itérés de la façon suivante :

$$R(x,t;\lambda) = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda^{n-1} K_n(x,t). \tag{2.18}$$

Le second membre est la série de *Neumann* du noyau $K(x,t)$. Cette série converge pour

$$|\lambda| < \frac{1}{B}, \tag{2.19}$$

avec

$$B = \sqrt{\int_a^b \int_a^b |K(x,t)|^2 \, dxdt}.$$

La solution de l'équation de Fredholm des seconde espèce (2.14) s'exprime par :

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda \int_a^b R(x,t;\lambda) f(t)dt.$$

La borne (2.19) est essentielle pour la convergence de la série (2.18). Mais l'équation (2.14) peut également admettre une solution pour $|\lambda| > \frac{1}{B}$.

Exemple 2.3.1 *Trouvons les itérés du noyau* $K(x,t) = x - t$ *si* $a = 0$, $b = 1$. *En Utilisant les formules (2.16) on obtient de proche en proche*

$$K_1(x,t) = x - t,$$

$$K_2(x,t) = \int_0^1 (x-s)(s-t)ds = \frac{x+t}{2} - xt - \frac{1}{3},$$

$$K_3(x,t) = \int_0^1 (x-s)(\frac{x+t}{2} - xt - \frac{1}{3})ds = -\frac{x-t}{12},$$

$$K_4(x,t) = -\frac{1}{12}\int_0^1 (x-s)(s-t)ds = -\frac{1}{12}(\frac{x+t}{2} - xt - \frac{1}{3}),$$

$$K_5(x,t) = -\frac{1}{12}\int_0^1 (x-s)(\frac{x+t}{2} - xt - \frac{1}{3})ds = -\frac{1}{12}K_3(x,t) = \frac{x-t}{12^2},$$

$$K_6(x,t) = \frac{1}{12^2}\int_0^1 (x-s)(s-t)ds = \frac{1}{12^2}K_2(x,t) = \frac{1}{12^2}(\frac{x+t}{2} - xt - \frac{1}{3}).$$

Il en résulte que les noyaux itérés sont de la forme :

1. *pour n impaire($n = 2k-1$) :*

$$K_{2k-1}(x,t) = -\frac{(-1)^{k-1}}{12^{k-1}}(x-t);$$

2. *pour n paire($n = 2k$) :*

$$K_{2k}(x,t) = -\frac{(-1)^{k-1}}{12^{k-1}}(\frac{x+t}{2} - xt - \frac{1}{3}),$$

où $k = 1, 2, ...$

Chapitre 3

Méthodes de résolution approchée des équations intégrales

3.1 Remplacement du noyau d'une équation intégrale par un noyau dégénéré

Soit l'équation intégrale donnée :

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda \int_a^b K(x,t)\varphi(t)dt, \tag{3.1}$$

avec $K(x,t)$ quelconque. On pense naturellement à remplacer de façon approchée le noyau $K(x,t)$ et à accepter la solution $\tilde{\varphi}(x)$ de la nouvelle équation

$$\tilde{\varphi}(x) = f(x) + \lambda \int_a^b L(x,t)\tilde{\varphi}(t)dt$$

pour solution approchée de l'équation proposée (3.1). On peut prendre pour ce noyau dégénéré $L(x,t)$ (c'est-à-dire $L(x,t) = X(x).T(t)$) une série partielle de Taylor ou de Fourier de la fonction $K(x,t)$ par rapport à tout système de fonctions $\{u_n(x)\}$ complet orthonormé dans $L_2(a,b)$, etc. Indiquons certaines estimations d'erreurs sur la solution de (3.1) dues au remplacement du noyau donné par un noyau dégénéré.

Soit donnée deux noyaux $L(x,t)$ et $K(x,t)$. Supposons que :

$$\int_a^b |K(x,t) - L(x,t)|\, dt < h,$$

et la résolvante $R(x,t;\lambda)$ de l'équation à noyau $L(x,t)$ vérifie l'inégalité :

$$\int_a^b R(x,t;\lambda)dt < R$$

et que $|f(x) - f_1(x)| < \eta$. Sousl'hypothèse :

$$1 - |\lambda|\, h(1 + |\lambda|\, R) > 0,$$

l'équation

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda \int_a^b K(x,t)\varphi(t)dt,$$

possède alors une seule solution $\varphi(x)$, et l'écart entre $\varphi(x)$ et $\tilde{\varphi}(x)$, solution de l'équation

$$\tilde{\varphi}(x) = f_1(x) + \lambda \int_a^b L(x,t)\tilde{\varphi}(t)dt,$$

est inférieur à

$$|\varphi(x) - \tilde{\varphi}(x)| < \frac{N\, |\lambda|\, (1 + |\lambda|\, R)^2 h}{1 - |\lambda|\, h(1 + |\lambda|\, R)} + \eta,$$

où N est la borne supérieure de $|f(x)|$.

Pour le noyau dégénéré $L(x,t)$ la résolvante $R_L(x,t;\lambda)$ se calcule aisement : si $L(x,t) = \sum\limits_{k=1}^{n} X_k(x).T_k(t)$ et si l'on pose :

$$\int_a^b X_k(x).T_s(t)dx = a_{sk},$$

on a :

$$R_L(x,t;\lambda) = \frac{D(x,t;\lambda)}{D(\lambda)},$$

où

$$D(x,t;\lambda) = \begin{vmatrix} 0 & X_1(x) & \dots & X_1(x) \\ T_1(t) & 1-\lambda a_{11} & \dots & -\lambda a_{1n} \\ & \dots\dots\dots\dots & & \\ T_n(t) & -\lambda a_{n1} & \dots & 1-\lambda a_{nn} \end{vmatrix},$$

$$D(\lambda) = \begin{vmatrix} 1-\lambda a_{11} & -\lambda a_{12} & \dots & -\lambda a_{1n} \\ -\lambda a_{21} & 1-\lambda a_{22} & \dots & -\lambda a_{2n} \\ & \dots\dots\dots\dots & & \\ -\lambda a_{n1} & -\lambda a_{n2} & \dots & 1-\lambda a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Les racines de $D(\lambda)$ sont les nombres caractéristiques du noyau $L(x,t)$.

Effectuons une autre évaluation ($\lambda = 1$). Soit :

$$K(x,t) = L(x,t) + \Lambda(x,t).$$

$L(x,t)$ étant le noyau dégénéré et $\Lambda(x,t)$ possédant une petite norme dans une métrique. Supposons que, $R_K(x,t;\lambda)$, $R_L(x,t;\lambda)$ sont les résolvantes respectives des noyaux $K(x,t)$, $L(x,t)$ et $\|\Lambda\|$, $\|R_K\|$, $\|R_L\|$ les normes des opérateurs aux noyaux correspondants. Alors :

$$\|\varphi - \tilde{\varphi}\| \leq \|\Lambda\| \left(1 + \|R_K\|\right)(1 + \|R_L\|) \, \|f\| \,, \tag{3.2}$$

La norme dans (3.2) pouvant être prise dans n'importe quel espace fonctionnel. La norme de la résolvante R_L de tout noyau $K(x,t)$ est évaluée par :

$$\|R_K\| \leq \frac{\|K\|}{1 - |\lambda| \,.\, \|K\|}.$$

Ceci étant, on a dans l'espace $C(0,1)$ de fonctions continues sur le segment $[0,1]$

$$\|K\| = \max_{0\leq x\leq 1} \int_0^1 |K(x,t)|\, dt,$$

$$\|f\| = \max_{0\leq x\leq 1} |f(x)|\,,$$

et dans l'espace de fonctions de carré sommable sur $\Omega = \{a \leq x, t \leq b\}$

$$\|K\| \leq \left(\int_a^b \int_a^b |K(x,t)|^2\, dxdt \right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\|f\| = \left(\int_a^b |f(x)|^2\, dx \right)^{\frac{1}{2}}.$$

3.2 Remplacement de l'intégrale par une somme finie

Soit l'équation de Fredholm de seconde espèce

$$\varphi(x) - \lambda \int_a^b K(x,t)\varphi(t)dt = f(x) \tag{3.3}$$

où $K(x,t)$ et $f(x)$ admettent des dérivéés continues d'ordre requis et λ est un nombre donné.

Prenons une formule de quadrature :

$$\int_a^b \Phi(x)dx \approx \sum_{k=1}^{n} A_k \Phi(x_k), \tag{3.4}$$

avec $x_1, x_2, ..., x_n$ les abscisses des points de $[a,b]$ et $A_1, A_2, ..., A_n$ les coefficients indépendants de la forme de la fonction $\Phi(x)$.

Posons $x = x_k$ $(k = 1, 2, ..., n)$ dans l'équation (3.3), il vient :

$$\varphi(x_k) - \lambda \int_a^b K(x_k,t)\varphi(t)dt = f(x_k), \tag{3.5}$$

Moyennant la formule (3.4) replaçons l'intégrale de la dérnière équation par une somme :

$$\varphi(x_k) - \lambda \sum_{m=1}^{n} A_m K(x_k, x_m)\varphi(x_m) = f(x_k) \quad k = 1, 2, ..., n. \tag{3.6}$$

Nous avons obtenus un système linéaire de n équations à n inconnues $\varphi(x_1), \varphi(x_2), ..., \varphi(x_n)$, valeurs approchées de la solution $\varphi(x)$ aux points de base $x_1, x_2, ..., x_n$. On peut prendre pour solution approchée de l'équation (3.3) sur le segment $[a, b]$ la fonction suivante :

$$\tilde{\varphi}(x) = f(x) + \lambda \sum_{m=1}^{n} A_m K(x, x_m)\varphi(x_m),$$

dont les valeurs aux points $x_1, x_2, ..., x_n$ sont respectivement $\varphi(x_1), \varphi(x_2), ..., \varphi(x_n)$.
Les valeurs des coefficients A_k et des abscisses x_k de (3.4) :

1. Formule des rectangles :

$$x_1 = a, \quad x_2 = a + h, ..., x_n = a + (n-1)h;$$

$$A_1 = A_2 = ... = A_n = h, \quad \text{où} \quad h = \frac{b-a}{n};$$

2. Formule des trapèzes :

$$x_1 = a, \quad x_2 = a + h, ..., x_n = a + (n-1)h = b;$$

$$A_1 = A_n = \frac{h}{2}, \quad A_2 = ... = A_{n-1} = h, \quad \text{où} \quad h = \frac{b-a}{n-1};$$

3. Formule de Simpson $(n = 2m + 1)$:

$$x_1 = a, \quad x_2 = a + h, ..., x_{2m+1} = a + 2mh = b;$$

$$A_1 = A_{2m+1} = \frac{h}{3}, \quad A_2 = A_4 = ... = A_{2m} = \frac{4h}{3};$$

$$A_3 = A_5 = ... = A_{2m-1} = \frac{2h}{3}, \quad \text{où} \quad h = \frac{b-a}{2m};$$

3.3 Méthodes des approximations successives

3.3.1 Equation intégrale de Volterra de seconde espèce

Soit l'équation intégrale de Volterra de seconde espèce

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda \int_0^x K(x,t)\varphi(t)dt \tag{3.7}$$

Supposons que $f(x)$ est continue dans $[0,a]$ et $K(x,t)$ l'est pour $0 \leq x \leq a$, $0 \leq t \leq x$. Prenons une fonction $\varphi_0(x)$ continue dans $[0,a]$ et

$$\varphi_1(x) = f(x) + \lambda \int_0^x K(x,t)\varphi_0(t)dt.$$

La fonction $\varphi_1(x)$ est continue sur le segment $[0,a]$. En continuant le processus nous avons la suite $\varphi(x_1), \varphi(x_2), ..., \varphi(x_n), ...$
où

$$\varphi_n(x) = f(x) + \lambda \int_0^x K(x,t)\varphi_{n-1}(t)dt.$$

Sous les hypothèses sur $f(x)$ et $K(x,t)$, la suite $\{\varphi_n(x)\}$ converge vers la solution de l'équation intégrale (3.3) lorsque $n \to +\infty$.

Exemple 3.3.1 *Par la méthode des approximations successives, on résoudre l'équation intégrale*

$$\varphi(x) = 1 + \int_0^x \varphi(t)dt$$

Posant $\varphi_0(x) = 0$, *on a* $\varphi_1(x) = 1$. *Puis, de proche en proche,*

$$\varphi_2(x) = 1 + \int_0^x 1dt = 1 + x,$$

$$\varphi_2(x) = 1 + \int_0^x (1+t)dt = 1 + x + \frac{x^2}{2},$$

$$\varphi_3(x) = 1 + \int_0^x (1+t+\frac{t^2}{2})dt = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!}.$$

Et par suite, on a :

$$\varphi_n(x) = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + ... + \frac{x^{n-1}}{(n-1)!}.$$

Donc $\varphi_n(x)$ est la n-ième somme partielle de la série $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = e^x$. D'où $\varphi_n(x) \to e^x$ lorsque $n \to +\infty$. On vérifie que la fonction $\varphi(x) = e^x$ est solution de l'équation proposée.

3.3.2 Equations intégrales de Fredholm de seconde espèce

Soit l'équation intégrale de Fredholm de seconde espèce

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda \int_a^b K(x,t)\varphi(t)dt. \tag{3.8}$$

Construisons la suite $\{\varphi_n(x)\}$ moyennant la formule de recurrence

$$\varphi_n(x) = f(x) + \lambda \int_a^b K(x,t)\varphi_{n-1}(t)dt. \tag{3.9}$$

On considère les fonctions $\varphi_n(x)$ $(n = 1, 2, ...)$ comme les valeurs approchées de la solution de l'équation (3.8), l'approximation initiale $\varphi_0(x)$ pouvant être arbitraire.

Dans la condition :

$$|\lambda| < \frac{1}{B}, \quad \text{où} \quad B = \sqrt{\int_a^b \int_a^b |K(x,t)|^2 \, dxdt}.$$

La suite (3.9) converge vers la solution de l'équation (3.8) dans la métrique de $L_2(a,b)$.

L'erreur sur la $(m+1)$-ième approximation est évaluée en module par l'inégalité :

$$|\varphi(x) - \varphi_{m+1}(x)| \leq AB^{-1} \left|\lambda B\right|^{m+1} (\Phi + \frac{F}{1 - |\lambda B|}) \tag{3.10}$$

où

$$F = \sqrt{\int_a^b |f(x)|^2 \, dx}, \quad \Phi = \sqrt{\int_a^b |\varphi_0(x)|^2 \, dx}, \quad A = \sqrt{\max_{a \leq x \leq b} \int_a^b |K(x,t)|^2 \, dt}$$

Exemple 3.3.2 *En procédant par approximations successive, on trouvons la solution de l'équation*

$$\varphi(x) = \int_0^1 xt^2 \varphi(t) dt + 1. \tag{3.11}$$

En effet $\varphi_0(x) = 1,$ *Alors :*

$$\varphi_1(x) = \int_0^1 xt^2.1dt + 1 = 1 + \frac{x}{3},$$

$$\varphi_2(x) = \int_0^1 xt^2(1 + \frac{t}{3})dt + 1 = 1 + \frac{x}{3}(1 + \frac{1}{4}),$$

$$\varphi_3(x) = \int_0^1 xt^2 \left[1 + \frac{t}{3}(1 + \frac{1}{4})\right] dt + 1 = 1 + \frac{x}{3}(1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{4^2}),$$

....

$$\varphi_{m+1}(x) = 1 + \frac{x}{3}(1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{4^2} + ... + \frac{1}{4^m}).$$

D'où

$$\lim_{m \to +\infty} \varphi_{m+1}(x) = 1 + \frac{4}{9}x.$$

Nous trouvons que

$$\varphi(x) = 1 + \frac{4}{9}x$$

est solution de l'équation (3.11).

L'erreur sur la $(m+1)$-ième approximation est évaluée par l'inégalité (3.10). Dans notre cas :

$\lambda = 1,\ \ \Phi = 1,\ \ F = 1,\ \ A = \frac{1}{\sqrt{5}},\ \ B = \frac{1}{\sqrt{15}},$

de sorte que

$$|\varphi(x) - \varphi_{m+1}(x)| \leq \frac{29 + \sqrt{15}}{14\sqrt{5}(\sqrt{15})^m}.$$

3.3.3 Equations intégrales de Fredholm de première espèce

Soit l'équation intégrale de Fredholm de première espèce

$$\int_a^b K(x,t)\varphi(t)dt = f(x) \tag{3.12}$$

à $K(x,t)$ symétrique, de carré sommable, défini positif et $f(x) \in L_2\,[a,b]$.

Supposons que (3.12) admet une solution unique.

La suite $\{\varphi_n(x)\}$ définie par la relation :

$$\varphi_{n+1}(x) = \varphi_n(x) + \lambda \left[f(x) - \int_a^b K(x,t)\varphi_n(t)dt \right], \tag{3.13}$$

où $\varphi_0(x) \in L_2\,[a,b]$ et $0 < \lambda < 2\lambda_1$ (λ_1 étant le plus petit nombre caractéristique du noyau $K(x,t)$), converge en moyenne vers la solution de l'équation (3.12).

Exemple 3.3.3 *On considère l'équation intégrale :*

$$\int_0^1 K(x,t)\varphi(t)dt = \sin \pi x,$$

où

$$K(x,t) = \begin{cases} (1-x)t, & 0 \leq t \leq x, \\ (1-t)x, & x \leq t \leq 1. \end{cases} \tag{3.14}$$

Elle admet une solusion $\varphi(x) = \pi^2 \sin \pi x$ et cette solution seulement. Le noyau (3.14) a pour le plus petit nombre caractéristique la valeur $\lambda_1 = \pi^2$.

Formons les approximations selon la formule (3.13) tel que $\varphi_0(x) = 0$ et $\lambda = 1 < 2\lambda_1$.

Nous obtenons :

$$\varphi_1(x) = \sin \pi x,$$

$$\varphi_2(x) = \sin \pi x + (1 - \frac{1}{\pi^2}) \sin \pi x,$$

$$\varphi_3(x) = \sin \pi x + (1 - \frac{1}{\pi^2}) \sin \pi x + (1 - \frac{1}{\pi^2})^2 \sin \pi x,$$

....

$$\varphi_{n+1}(x) = \sin \pi x \left[1 + (1 - \frac{1}{\pi^2}) + (1 - \frac{1}{\pi^2})^2 + ... + (1 - \frac{1}{\pi^2})^n \right].$$

On voit que

$$\lim_{n \to +\infty} \varphi_n(x) = \pi^2 \sin \pi x$$

donne la solution exacte de l'équation proposée.

3.4 Méthode de Boubnov-Galerkin

Soit à chercher une solution approchée de l'équation intégrale

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda \int_a^b K(x,t)\varphi(t)dt. \tag{3.15}$$

Par la méthode de Boubnov-Galerkin. On choisit un système de fonctions $\{u_n(x)\}$ complet dans $L_2(a,b)$ et tel que, quel que soit n, les fonctions $u_1(x), u_2(x), ..., u_1(x)$ soient linéairements indépendantes, et on cherche une solution approchée $\varphi_n(x)$ de la forme :

$$\varphi_n(x) = \sum_{k=1}^{n} a_k u_k(x). \tag{3.16}$$

Les coefficients a_k $(k = 1, 2, ..., n)$ se définissent à partir du système linéaire

$$(\varphi(x), u_k(x)) = (f(x), u_k(x)) + \lambda(\int_a^b K(x,t)\varphi(t)dt, u_k(x)) \tag{3.17}$$

où (f,g) désigne $\int_a^b f(x)g(x)dx$ et où on remplace $\varphi_n(x)$ par $\sum\limits_{k=1}^{n} a_k u_k(x)$.Si la valeur de λ dans (3.16) n'est pas un nombre caractéristique, alors, pour n sufisamment grands, le système (3.17) admet une solution unique et lorsque $n \to +\infty$, la solution approchée $\varphi_n(x)$ de (3.16) tend, dans la métrique de $L_2(a,b)$, vers la solution exacte $\varphi(x)$ de l'équation (3.15).

Exemple 3.4.1 *On résoudre par le procédé de Boubnov-Galerkin l'équation suivante :*

$$\varphi(x) = x + \int_{-1}^{1} xt\varphi(t)dt. \tag{3.18}$$

Choisissons pour système complet sur $[-1,1]$ *un système de polynômes de Legendre* $P_n(x)$ $(n = 0,1,2,...)$ *et cherchons une solution approchée* $\varphi_n(x)$ *de (3.18) de la forme :*

$$\varphi_3(x) = a_1.1 + a_2 x + a_3 \frac{3x^2-1}{2}.$$

Portons dans (3.18) $\varphi_3(x)$ *à la place de* $\varphi(x)$,*il vient :*

$$a_1 + a_2 x + a_3 \frac{3x^2-1}{2} = x + \int_{-1}^{1} xt(a_1 + a_2 t + a_3 \frac{3t^2-1}{2})dt$$

ou

$$a_1 + a_2 x + a_3 \frac{3x^2-1}{2} = x + x\frac{2}{3}a_2. \tag{3.19}$$

En multipliant successivement les deux membres de la dernière équation par 1, x, $\frac{3x^2-1}{2}$ *et en intégrant par rapport à* x *de* -1 *à* 1, *nous obtenons :*

$$2a_1 = 0,$$

$$\frac{2}{3}a_2 = \frac{2}{3} + \frac{4}{9}a_2,$$

$$\frac{2}{5}a_3 = 0.$$

D'où $a_1 = 0$, $a_2 = 3$, $a_3 = 0$, *et donc* $\varphi_3(x) = 3x$. *On vérifie de suite que c'est la solution exacte de (3.18).*

Conclusion

La résolution des équations intégrales par les méthodes classique est limité à des cas simples, d'où l'utilisation des méthodes approchées qui sont simples à mise en oeuvre avec les moyens de calculs scientifiques.Ces méthodes approchées conduisent à la résolution de système linéaire.

Bibliographie

[1] Krasnov, M. Kisselev, A. Makarenko, G. (1977). Equations Intégrales. Edition Mir Moscou.

[2] Hermann, B. ($5-16$ July 2010). Theory and numerical solution of Volterra functional intégral équation. Département of Mathematics Hong Kong Baptist University Hong Kong SAR P.R China.

[3] Kress, R. (1999). Linear integral equations. Sptinger-Verlag. New York.

Annexe : Abréviations et Notations

Les différentes abréVariations et notations utilisées tout au long de ce mémoire sont expliquées ci-dessous.

$L_2[a,b]$	Classe des fonctions de carré intégrable.
$C[a,b]$	Enssemble des fonctions continues sur $[a,b]$.
$K(x,t)$	Noyau de l'équation intégrale.
φ	La fonction inconnue dans l'équation intégrale.
φ_n	Solution approchée.
λ	Paramètre numérique.
$R(x,t;\lambda)$	La résolvante (le noyau résolvant).
$D(\lambda)$	Le déterminant de Fredholm.
$D(x,t;\lambda)$	Le mineur du déterminant de Fredholm.