République Algérienne Démocratique et Populaire

Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

UNIVERSITÉ MOHAMED KHIDER, BISKRA

FACULTÉ des SCIENCES EXACTES et des SCIENCES de la NATURE et de la VIE

DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES

Mémoire présenté en vue de l'obtention du Diplôme **:**

MASTER en Mathématiques

Option : **Analyse**

Par

SLIMANI Aicha

Titre :

Équations différentielles ordinaires et problème de Cauchy

Membres du Comité d'Examen :

Dr.	**LAIADI Abdelkader**	UMKB	Président
Dr.	**RAHMANI Naceur**	UMKB	Encadreur
Dr.	**GUIDAD Derradji**	UMKB	Examinateur

Juin 2018

Dédicace

Je dédie ce travail

♡ A ma chère belle mère ♡

♡ et mon beau père ♡

Pour leur amour, leur sacrifice, leur soutien, et leur encouragement

En témoignage de l'attachement, de l'amour et de

l'affection que je porte pour vous.

Je vous dédie ce travail avec tous mes voeux de bonheur,

et de santé .

♡ A mon frère et mes soeurs ♡

♡ A tous les membres de ma famille ♡

♡ A mes amies et mes camarades ♡

Je vous souhaite un avenir plein de joie, de bonheur, et de réussite.

REMERCIEMENTS

*Tout d'abord je remercie ‹‹**DIEU**›› le tout puissant de m'avoir donné la force, la valenté*

Et le courage pour finir ce travail.

On trouve dans ce travail le témoin de mon respect avec mes remerciements d'avoir accepté

*D'encadrer et de me guider à réaliser ce mémoire Dr. "**RAHMANI Naceur**".*

*Je veux exprimer tout mon respect aux membres du jury Dr. "**GUIDAD Derradji**" et Dr*

*"**LAIADI Abdelkader**", qui ont accepté d'évaluer et de juger mon travail.*

Je tiens aussi à remercier notre chef de département de mathématiques Dr.

*"**HAFAYED Mokhtar**" et touts les enseignants du département de mathématiques à l'université Mohamed*

Kheider.

Table des matières

Table des figures

Introduction

Lors de l'étude des phénomènes dans la nature, les solutions de plusieurs problèmes de la Physique, de la Chimie et de la Biologie ou d'autres sciences, sont rarement exprimables sous forme d'une relation directe entre les grandeurs décrivant l'un ou l'autre processus évolutif. Cependant dans la plupart des cas, on peut parvenir à établir une relation entre les grandeurs (fonctions) et les vitesses de leur changement c'est-à-dire on peut parvenir à trouver des équations dans lesquelles des fonctions inconnues entrent sous le signe de dérivée. Ces équations sont dites équations différentielles.

Depuis Isaac Newton, les équations différentielles jouent un rôle essentiel pour la modélisation de systèmes physiques, mécaniques, chimiques, biologique ou économiques et une part pré pond errante des phénomènes modélisés par les mathématiques le sont par des équations différentielles. Les équations différentielles constituent aujourd'hui l'un des thèmes importants de la compréhension scientifique et sont d'une grande utilité dans la modélisation de nombreux problèmes de la physique mathématique. Ces équations peuvent être classifiées en plusieurs catégories.

Lorsque ces équations ne font intervenir que des fonctions d'une variable, et souvent cette variable sera le temps, on parle d'équation différentielles ordinaires. De telles équations apparaissent chaque fois que l'on veut décrire l'évolution déterministe d'un système au cours du temps : systèmes de points matériels, réactions chimiques, problèmes d'évolution de population, de diffusion d'épidémies, bref chaque fois que l'on étudie la dépendance d'un système par rapport à une variable. Ces études sont rarement sous forme d'un problème à valeur initiale qui sera appelé problème de Cauchy.

Nous voilà en possession d'une équation qui nous permet de déterminer la trajectoire d'un système dans le temps. Remarquons en passant que nous faisons ici de la physique classique, galiléenne, avec un temps absolu dans un espace absolu. Ce qui nous intéresse, en fait, c'est de savoir où va notre système à partir d'un point de départ et où il arrivera, si par hasard il existe des limites à son évolution. Si l'on étudie la chute d'un corps, on laisse tomber ce corps d'une altitude connue. Autre exemple un peu plus compliqué, qui est régi par une équation aux dérivées partielles : lorsque vous chauffez une barre de fer depuis une de ses extrémités et que vous voulez suivre l'évolution de la température dans la barre, cette évolution dépend des deux paramètres : la température de la source de chauffage et la température de l'autre extrémité.

Ces contraintes qui fixent les solutions d'EDO pour $t = 0$ et pour t tendant vers la limite du domaine de résolution s'appellent respectivement les conditions initiales et les conditions aux limites. Dans la suite, et pour les équations que nous allons rencontrer dans cette page, nous ne nous préoccuperons que des conditions initiales du système. Une règle d'or (qui se démontre bien sur) à retenir : votre système présente autant de conditions initiales que l'ordre de l'équation différentielle qui le décrit. Une EDO de 1er ordre nécessite une condition initiale, une EDO de 2eme ordre, deux conditions initiales, etc.

Vous verrez plus tard en math que chaque EDO appartient à une classe que l'on définit par ses conditions initiales et aux limites. On appelle ces classes des "problèmes". Il existe par exemple le problème de Cauchy qui définit une EDO et ses conditions initiales, par exemple $y\prime(t) = f(y(t), t)$ et $y(0) = y_0$. C'est le type de problème que nous rencontrerons dans cette page. Il existe aussi d'autres problèmes plus complexes mêlant conditions initiales et conditions aux limites, comme les problèmes de Dirichlet ou Neumann.

Je diviserai ce Mémoire en trois parties :

Pour la première partie (chapitre 1), nous présentons une introduction aux équations différentielles ordinaires et équations différentielles d'ordre plus élevé. On traite les différents types d'équations différentielles ordinaires (Normale et Autonome) ainsi leurs solutions obtenues avec des techniques variées.
La deuxième partie (chapitre2) concerne le problème de Cauchy et le théorème de Cauchy-Lipschitz
La troisième partie (chapitre 3) on présente quelques applications.

Chapitre 1

ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES ORDINAIRES

1.1 Préliminaires aux équations différentielles ordinaires

Définition 1.1.1 *Une équation différentielle ordinaire d'ordre n, notée EDO, est une relation entre la variable réelle t une fonction inconnue $t \mapsto y(t)$ et ses dérivées $y', y'', ...y^{(n)}$ au point t définie par :*

$$F\left(t, y, y', y'', ..., y^{(n)}\right) = 0. \tag{1.1}$$

Où F n'est pas indépendant de sa dernière variable $y^{(n)}$.on prendra t dans un intervalle I de $\mathbb{R}$ (I peut être $\mathbb{R}$ tout entier). La fonction y qui vérifie $F\left(t, y, y', y'', ..., y^{(n)}\right) = 0$, s'appelle la solution de l'EDO. L'objectif est de résoudre l'EDO afin de déterminer l'expression de y en fonction de t. On dit aussi que l'on "intègre" l'EDO.

Exemples

$$\begin{aligned} y'(t)-t &= 0 \\ y^{2\prime}(t)-y(t) &= 0 \\ e^{y^{2\prime}(t)}-t^2+y &= 0. \end{aligned}$$

Sont équations différentielles ordinaires.

Remarque 1.1.1 *Si $n=1$ on parle l'équation différentielle scalaire. Si $n>1$ on parle d'équation différentielle vectorielle. Par exemple l'équation pour l'inconnue $y(t)=(y_1(t),y_2(t))\in\mathbb{R}^2$:*

$$y'(t)=\|y\|^2\,y.$$

Est un exemple simple d'équation vectorielle.

1.2 Les types d'équations différentielles

1.2.1 Équation différentielle ordinaire Normale

Définition 1.2.1 *On appelle équation différentielle normale d'ordre n toutes équations de la forme :*

$$y^{(n)}=f\left(t,y,y',...,y^{(n-1)}\right). \tag{1.2}$$

Où $f:U\to\mathbb{R}^m$ est une fonction définie sur $U\subset\mathbb{R}\times(\mathbb{R}^m)^n$ .On dit que cette équation est scalaire si f est à valeurs dans $\mathbb{R}$.

Remarque 1.2.1 *Equation du premier ordre sous la forme normale :*

$$y'=f(t,y). \tag{1.3}$$

Où

$$f:U\to\mathbb{R}^m, U\subset\mathbb{R}\times\mathbb{R}^m, \qquad y'=(y_1',...,y_n')$$

Exemple 1.2.1 $F(t, y, y') = 3y' + t^2 y - 1$

$3y' + t^2 y - 1 = 0$ *est une équation différentielle essentielle d'ordre* 1 *mais l'équation* $y' = \frac{-t^2}{3} y + \frac{1}{3}$ *est une équation sous forme résolue*

$$y' = f(t, y) = \frac{-t^2}{3} y + \frac{1}{3}.$$

1.2.2 Équation différentielle ordinaire Autonome

Définition 1.2.2 *On appelle équation différentielle autonome d'ordre* n *toutes équations de la forme :*

$$y^{(n)} = f\left(y, y', ..., y^{(n-1)}\right). \tag{1.4}$$

Autrement dit, f *ne dépende pas explicitement de* t. *Où* $f : U \to \mathbb{R}$ *est une fonction définie sur* $U \subseteq (\mathbb{R}^m)^n$.

Remarques

- Les équation autonome sont très importantes quand on cherchera des solutions stationnaires ainsi que leur stabilité.
- Equation du premier ordre sous la forme autonome :

$$y' = f(y)$$

Exemple 1.2.2 $2y' + y + 1 = 0$ *est une équation autonome*

$$y' = f(y) = \frac{-1}{2} y - \frac{1}{2}.$$

1.3 Écriture en coordonnés

Si $m \geq 2$, écrivons les fonctions à valeurs dans $\mathbb{R}^m$ en termes de leurs fonctions composantes, c'est-à-dire :

$$y = (y_1, ..., y_m), \qquad f = (f_1, ..., f_m).$$

L'équation (1.2) apparaît un système de m équations différentielles scalaire d'ordre n à m fonctions inconnues $y_1, ..., y_m$, on pourrait alors écrire :

$$\begin{cases} y_1^{(n)} = f_1\left(t, y, y', ..., y^{(n-1)}\right). \\ y_2^{(n)} = f_2\left(t, y, y', ..., y^{(n-1)}\right). \\ \qquad\vdots \\ y_m^{(n)} = f_m\left(t, y, y', ..., y^{(n-1)}\right). \end{cases} \tag{1.5}$$

Ce système est appelé **système d'équations différentielles ordinaires** d'ordre n.

Remarque 1.3.1 *Des fois, on utilise la notation* (1.5)*, mais pour la théorie abstraite la formule* (1.2) *semble plus facile.*

1.4 Réduction équation différentielle à l'ordre 1

Avant de commencer l'étude des équations différentielles d'ordre quelconque, on va se rendre compte qu'il est possible de réduire à l'ordre 1 en faisant quelques changements de variables. Voici comment on s'y prend :

Méthode

Considérons l'équation différentielle ordinaire d'ordre n suivante :

$$y^{(n)} = f\left(t, y, y', ..., y^{(n-1)}\right).$$

Où, y est valeurs dans $\mathbb{R}^m$ (on prend $m = 1$ en général) et Il clair que le système (1.5) est équivalent au système différentielle d'ordre 1 :

$$\begin{cases} Y_0' & = Y_1 \\ Y_1' & = Y_2 \\ & \vdots \\ Y_{n-2}' & = Y_{n-1} \\ Y_{n-1}' & = f\left(t, Y_0, Y_1, ..., Y_{n-1}\right). \end{cases} \tag{1.6}$$

Si l'on pose $Y_0 = y$, $Y_1 = y'$, ..., $Y_{n-1} = y^{(n-1)}$. Le système (1.6) peut encore s'écrire :

$$Y' = F\left(t, Y\right), \text{ où } Y = \left(Y_0, Y_1, ..., Y_{n-1}\right) \in \left(\mathbb{R}^m\right)^n.$$

Et

$$F = \left(F_0, F_1, ..., F_{n-1}\right) \in \left(\mathbb{R}^m\right)^n$$

$$F_0\left(t, Y\right) = Y_1, ..., \ F_{n-2}\left(t, Y\right) = Y_{n-1}, \ F_{n-1}\left(t, Y\right) = f\left(t, Y\right).$$

Alors, tout système différentielle (1.5) d'ordre n dans $\mathbb{R}^m$ est donc équivalent à un système différentielle (1.6) d'ordre 1 dans $\left(\mathbb{R}^m\right)^n$.

1.5 Caractéristiques des solutions

Comme on l'a vu précédemment. Il suffit étude de cas $n = 1$ et après cela on peut généraliser. Soit $U = I \times \mathbb{R}^m$ un ouvert de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^m$ et

$$f : U \to \mathbb{R}^m.$$

Une application continue. On considère l'équation différentielle suivante :

$$y' = f\left(t, y\right), \quad \left(t, y\right) \in U, \quad t \in I, \quad y \in \mathbb{R}^m. \tag{E}$$

On va utiliser cette notation dans les parties ultérieure.

Définition 1.5.1 *(**solution**) Une solution de* (E) *sur un intervalle* $I \subset \mathbb{R}$ *est une fonction dérivable* $y : I \to \mathbb{R}^m$ *telle que :*

1. $(\forall t \in I) \quad (t, y(t)) \in U.$
2. $(\forall t \in I) \quad y'(t) = f(t, y(t))\,.$

1.5.1 Solutions maximales

Nous introduisons d'abord le concept de prolongement d'une solution. L'expression solution maximale est alors fournie par le prolongement des solutions.

Définition 1.5.2 *(**Prolongement**) Soient* $y : I \to \mathbb{R}^m$ *et* $\tilde{y} : \tilde{I} \to \mathbb{R}^m$ *deux solutions d'une même équation différentielle. On dira que* $\tilde{y}$ *est un prolongement de* y *si* $I \subset \tilde{I}$ *et* $\tilde{y}\mid_I = y$.

Définition 1.5.3 *(**Solution Maximale**) Soient* I_1 *et* I_2*, deux intervalles sur* $\mathbb{R}$*, telle que :* $I_1 \subset I_2$.

On dit qu'une solution $y : I_1 \to \mathbb{R}^m$ *est maximale dans* I_2 *si et seulement si* y *n'admet pas de prolongement* $\tilde{y} : \tilde{I} \to \mathbb{R}^m$ *solution de l'équation différentielle telle que :* $I_1 \subsetneqq \tilde{I} \subset I_2$ *(on verra même plus tard que* I_1 *est nécessairement ouvert).*

1.5.2 Solution globale

On suppose ici que l'ouvert U est de la forme $U = I \times \Omega$ où I est un intervalle de $\mathbb{R}$ et Ω un ouvert de $\mathbb{R}^m$.

Définition 1.5.4 *(**solution globale**) Soient* I *un intervalle inclus dans* $\mathbb{R}$*. Une solution* $y : I \to \mathbb{R}^m$ *est dit globale dans* I *si elle est définie sur l'intervalle* I *tout entier.*

Remarques

1) En reprenant les mêmes notations que dans les définitions précédents, si une solution (y, I_1) peut se prolonger sur l'intervalle I_2 tout entier, alors y est globale dans I_2.

2) Tout solution globale est maximale, mais la réciproque est fausse.

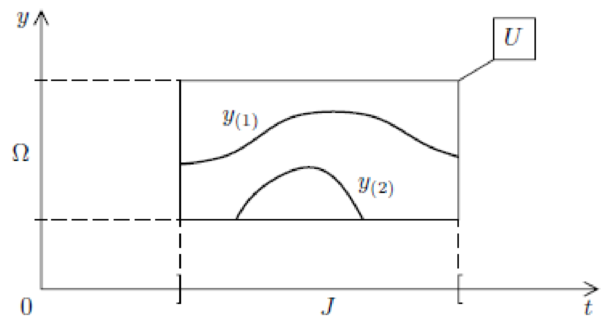


FIG. 1.1 – Solution globale et maximale.

Sur le schéma ci-dessus par exemple, $y_{(1)}$ est globale tandis que $y_{(2)}$ est maximale mais non globale.

Donnons un exemple explicite de cette situation.

Exemple 1.5.1 *On considère l'équation différentielle* $y' = -y^2, (t \in \mathbb{R})$, *si* $y \neq 0$ *on a :*

$$\begin{aligned} y' = -y^2 \implies \frac{\partial y}{\partial t} &= -y^2 \\ \implies \int -\frac{\partial y}{\partial y^2} &= \int \partial t \\ \implies \frac{1}{y} &= t + c \\ \implies y &= \frac{1}{t+c}, \quad c \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Cette formule donne deux solutions y_1 *et* y_2 *définies respectivement sur* $]-\infty, -c[$ *et* $]-c, +\infty[$, *ces solutions sont maximales mais pas globales. Si* $y = 0$; *on obtient que la fonction nulle est solution globale.*

1.5.3 Régularité des solutions

Rappelons qu'une fonction de plusieurs variables est dite de classe C^k si elle admet des dérivées partielles continues jusqu'à l'ordre $k \in \mathbb{N}$.

On donne le théorème suivant sur la régularité des solutions :

Théorème 1.5.1 *Si $f : U \to \mathbb{R}^m$ est de classe C^k, toute solution de (E) est de classe C^{k+1}.*

Preuve. On raisonne par récurrence, en notant δ_k la propriété suivante : si $f \in C^k(U, \mathbb{R}^m)$ alors toute solution de (E) est de classe $C^{k+1}(I, \mathbb{R}^m)$.

- La propriété δ_0 est vraie. En effet pour f continue, toute solution y étant dérivable sur I et donc continue, on tire de la relation $y'(t) = f(t, y(t))$ valable pour tout $t \in I$ que y' est continue comme composée d'applications continues. Ainsi, $y \in C^1$.
- Supposons δ_k est vraie pour un certain k et montrons que δ_{k+1} est vérifiée. Pour cela, on considère $f \in C^{k+1}$ et y une solution de (E). On a en particulier f de classe C^k et donc, puisque δ_k est vraie, $y \in C^{k+1}$. Mais alors y' est de classe C^{k+1} comme composée de fonctions de classes C^{k+1}. Par conséquent y est de classe C^{k+2} et δ_{k+1} est vraie.

■

On peut donc conclure par le principe de récurrence que δ_k est vraie pour tout $k \in \mathbb{N}$.

Exemple 1.5.2 *Dans le cas où la dimension $m = 1$, si f de classe C^1, toute solution de (E) est de classe C^2 et pour tout $t \in I$, on a :*

$$\begin{aligned} y''(t) = \frac{d}{dt} f(t, y(t)) &= f'_t(t, y(t)) + f'_y(t, y(t))\, y'(t) \\ &= f'_t(t, y(t)) + f'_y(t, y(t))\, f(t, y(t)). \end{aligned}$$

Où f'_t et f'_y désignent les dérivées partielles de la fonction f par rapport aux première et deuxième variables, donc $y \in C^2$.

1.6 Quelques techniques de résolution

Dans cette section, nous allons nous intéresser à différentes techniques pour résoudre certains types d'équations différentielles. Il faut cependant garder à l'esprit que la résolution explicite des EDO n'est pas une chose aisée, et la plupart du temps ce sera trop difficile, voire impossible. Nous devrons alors nous contenter d'une analyse d'existence, unicité, positivité...etc, des solutions.

Mais attardons nous quelques temps à des cas nous savons résoudre. Comme nous l'avons montré à la fin de la section précédente, nous allons restes dans le cadre d'EDO d'ordre 1. Nous resterons toutefois dans le cas scalaire, Commençons alors par un cas assez général, et nous irons vers les cas particuliers ensuite.

1.6.1 Équations à variables séparées (ou séparables)

Ce sont des équations du premier ordre sous forme normale données par l'équation (1.3), autrement dit $y' = f(t, y)$. Le but est d'exprimer $f(t, y)$ sous la forme $g(t)\, h(y)$. Ce qui permettre de résoudre une équation du type

$$y' = g(t)\, h(y).$$

Les équations les plus simples sont de la forme :

$$y' = f(t). \tag{1.7}$$

C'est à dire $h \equiv 1$ et $g(t) = f(t)$.

On suppose que f est continue sur un intervalle $I \subset \mathbb{R}$ d'intérieur non vide. Les solutions de (1.7) sont données alors par :

$$y(t) = \int f(t)\, dt + c, \qquad \forall t \in I, \quad \text{et } c \text{ est une constante.}$$

Définition 1.6.1 *Une équation différentielle du premier ordre est dite à variables séparées si elle peut s'écrire sous la forme :*

$$b\,(y)\,y' = a\,(t)\,. \tag{1.8}$$

Où a et b sont deux fonctions définies et continue respectivement sur I et J, deux intervalles de $\mathbb{R}$.
L'équation (1.8) peut s'écrire aussi comme :

$$b\,(y)\,dy = b\,(t)\,dt. \tag{1.9}$$

Exemple 1.6.1

$$\begin{array}{rcl} 3ty' & = & (1+y^2) \\ \Rightarrow \quad 3t\dfrac{dy}{dt} & = & (1+y^2) \\ \Rightarrow \quad \dfrac{1}{(1+y^2)}dy & = & \dfrac{1}{3t}dt \end{array}$$

Théorème 1.6.1 *Soient B une primitive de b sue I et A une primitive de a sur J. Une fonction $y : t \to y\,(t)$, définie et dérivable sur un sous-intervalle de J, est une solution de l'équation (1.8) si et seulement si :*

$$B\,(y) + A\,(t) + c, \qquad \text{où } c \text{ est une constante}$$

Preuve. Pour que la fonction

$$H : t \to H\,(t) = B\,(y\,(t)) - A\,(t)\,.$$

Est constante sur l'intervalle de définition de la fonction y, il faut et il suffit que sa dérivée H' soit nulle sur cet intervalle.

En effet :

$$H'(t) = B'(y(t)) \times y'(t) - A'(t) = b(y)\,y' = a(t) = 0.$$

Cependant, les solutions de l'équation (1.9) sont définies par :

$$\int b(y)\,dy = \int a(t)\,dt$$

■

Exemple 1.6.2 *Résoudre l'équation suivant :*

$$t^2 y' - y^2 = 0.$$

Cette équation est à variables séparées

$$t^2 y' = y^2$$

donc

$$t^2 dy = y^2 dt \Longleftrightarrow \frac{dy}{y^2} = \frac{dt}{t^2}.$$

Ses solutions sont

$$\int \frac{dy}{y^2} = \int \frac{dt}{t^2}.$$

Ou encore

$$\frac{1}{y} = \frac{1}{t} + c.$$

Soit $y = \dfrac{t}{1+ct}$, *où* c *est un constante.*

1.6.2 Équations scalaires autonomes

Comme nous l'avons vu un peut plus haut les équations scalaires autonomes sont de la forme :

$$y' = f(y)$$

On remarque que $y \equiv a$ avec a racine de f est nécessairement une solution de ce type d'équations.

On a également une propriété importante concernant la monotonie de la fonction f.

Proposition 1.6.1 ***(Autonome et monotone)*** *Soit $f : I \to \mathbb{R}$ continue sur I un intervalle de $\mathbb{R}$, alors toute solution non triviale de l'équation scalaire autonome $y' = f(y)$ est monotone sur son domaine.*

1.6.3 Equations linéaires

Une EDO de type (1.1) d'ordre n est linéaire si elle est de la forme

$$a_n(t)\, y^n + a_{n-1}(t)\, y^{(n-1)} + ... + a_0(t)\, y(t) = g(t).$$

Avec tout les $y^{(i)}$ de degré 1 et tout les coefficients dépendant au plus de t.

Nous restons toujours sur les EDO d'ordre 1. Nous non intéressons ici aux équations différentielles ordinaires linéaires.

Définition 1.6.2 ***(EDO du premier ordre)*** *On appelle une équation différentielle du premier ordre si elle est linéaire par rapport à la fonction inconnue y et par à sa dérivée y'. Alors elles sont de la forme suivante :*

$$a(t)\, y' + b(t)\, y = g(t).$$

Où a, b et g sont des fonctions continues sur un intervalle $I \subset \mathbb{R}$.

EDO linéaire sans seconde membre

Commençons par résoudre une équation linéaire d'ordre 1 sans second membre. On l'appelle EDO linéaire du premier ordre homogène. C'est une équation de la forme :

$$a(t)\,y' + b(t)\,y = 0.$$

C'est une équation à variables séparables sur $I \times J$ tq : $a(t) \neq 0, \forall t \in I$.

Il est à noter que $y \equiv 0$ est une solution de l'équation linéaire homogène ci-dessus. On l'appelle solution triviale comme dans le cas équations autonomes.

Proposition 1.6.2 ***(solutions équations homogènes)***
L'ensemble des solutions de l'équation linéaire homogène

$$a(t)\,y' + b(t)\,y = 0.$$

Sur le domaine I, avec pour un certain t_0 dans I telle que $y(t_0) = t_0$ est définie pour tout $t \in I$ par :

$$y(t) = y_0 \exp(F(t))$$

Avec,

$$F(t) = \int_{t_0}^{t} -\frac{b(s)}{a(s)}ds$$

Proposition 1.6.3 ***(solution triviale)*** *Si une solution de l'équation linéaire homogène s'annule en au -moins un point t_0 alors elle est identiquement nulle.*

Remarque 1.6.1 *La solution $y \equiv 0$ sur I est appelée intégral dégénérée de l'équation linéaire homogène.*

EDO linéaire avec seconde membre

Considérons l'équation

$$a(t)\,y' + b(t)\,y = g(t)\,.$$

Sur l'intervalle I où a ne s'annule pas.

Soit y_h une solution particulière non dégénérée de l'équation homogène associée à l'équation ci-dessus sur I.

Proposition 1.6.4 ***(solution générale)*** *La solution générale de l'équation*

$$a(t)\,y' + b(t)\,y = g(t)\,.$$

Sur I avec pour un certain t_0 dans I telle que $y(t_0) = t_0$ est donnée par

$$y(t) = \exp\left(-\int_{t_0}^{t} \frac{b(s)}{a(s)}ds\right)\left(y_0 + \int_{t_0}^{t} \frac{d(s)}{a(s)} \exp\left(\frac{b(\sigma)}{a(\sigma)}d\sigma\right) ds\right)$$

Remarque 1.6.2 *La méthode fréquemment utilisée pour trouver une solution de l'équation linéaire non homogène à partir de l'équation homogène est appelée méthode de variation de la constante.*

1.6.4 Équation de Bernoulli

Définition 1.6.3 *Une équation de Bernoulli est une équation différentielle scalaire non linéaire de la forme suivant :*

$$y' + P(t)\,y + Q(t)\,y^r = 0.$$

Où $r \in \mathbb{R}$, P et Q sont deux fonctions définies et continues sur un intervalle I de $\mathbb{R}$.

Théorème 1.6.2 ***(solution Bernoulli)*** *Une fonction dérivable strictement positive (au cas où $r = \dfrac{1}{2}$ par exemple, où $r \leq 0$) y sur I est solution de l'équation de Bernoulli si et seulement si $u = y^{1-r}$ est une solution strictement positive de l'équation linéaire*

$$u' + (1-r)\,P(t)\,u + (1-r)\,Q(t) = 0.$$

Remarques

a/ Connaissant la solution u de l'équation linéaire associée à l'équation de Bernoulli, on peut en déduire les solutions strictement positives de l'équation de Bernoulli.

b/ Nous pouvons trouver quelques propriétés sur les solutions suivant les valeurs de r :

1. Si $r > 0$ l'équation de Bernoulli admet la solution triviale $y \equiv 0$.
2. Si $r > 0$ toute solution de l'équation de Bernoulli qui prend la valeur 0 en un point, est partout nulle.
3. Si $0 < r < 1$, la fonction nulle n'est pas nécessairement la seule solution qui prenne la aleur 0 en un point.

c/ L'équation particulière :

$$t^2 y' + y + y^2 = 0.$$

Est appelée équation de Ricatti.

1.6.5 Équation de Lagrange et Clairaut

Définition 1.6.4 ***(équation de Lagrange)*** *On appelle équation le Lagrange toute équation du premier ordre scalaire non linéaire de la forme*

$$y = tf\left(y'\right) + g\left(y'\right).$$

Où f et g sont définies, dérivables sur un certain intervalle J de $\mathbb{R}$.

Définition 1.6.5 ***(équation de Clairaut)*** *On appelle équation de Clairaut toute équation de Lagrange avec $f \equiv Id$ où Id est la fonction identité, c'est à dire $Id(x) = x$), autrement dit elle est de la forme*

$$y = ty' + g\left(y'\right).$$

Où g est définie et dérivable sur un certain intervalle J de $\mathbb{R}$.

Proposition 1.6.5 ***(Solutions Lagrange)*** *Les seules solutions affines de l'équation de Lagrange sont les fonctions de la forme*

$$y(t) = mt + g(m).$$

Où m est une racine de l'équation $m = f(m)$ avec $m \in J$.

Remarque 1.6.3 *Si de telles fonctions existent, alors elles sont globales sur $\mathbb{R}$.*
En particulier, $\forall m \in J$ les fonctions $t \mapsto mt + g(m)$ sont les seules fonctions affines solutions de l'équation de Clairaut et elles sont globales sur $\mathbb{R}$.

Chapitre 2

THÉORÈME DE CAUCHY-LIPSCHITZ

L'objectif de ce chapitre est le théorème de Cauchy-Lipschitz : existence et unicité au problème de Cauchy pour une équation différentielle $y' = f(t, y)$ avec f suffisamment régulière.

Nous présenterons dans ce polycopié deux preuves du théorème de Cauchy-Lipschitz (théorème de point fixe et lemme de Gronwall).

2.1 Le problème de Cauchy

Sans la donnée de conditions initiales consistantes, il est impossible de définir la notion de solution d'un système différentiel du premier ordre. C'est pourquoi, on introduit un problème standard qui est le problème de Cauchy.

Définition 2.1.1 *On appelle problème de Cauchy le problème suivant :*

Étant donnés :

— un intervalle $I \subset \mathbb{R}$

— Une fonction f, définie et continue sur $I \times \mathbb{R}^m$ à valeurs dans $\mathbb{R}^m$

Trouver une fonction $y \in C^1(I)$ telle que :

$$\begin{cases} y'(t) = f(t, y(t)), \quad \forall t \in I, \quad \forall y \in \mathbb{R}^m \\ y(t_0) = y_0, \quad t_0 \in I, \quad \text{condition initiale.} \end{cases} \tag{PC}$$

Le problème de Cauchy peut se mettre sous une forme équivalente donnée par le théorème suivant :

Théorème 2.1.1 *Une fonction $y : I \to \mathbb{R}^m$ est une solution du problème de Cauchy si et seulement si :*

1. la fonction y est continue et $\forall t \in I, \ (t, y(t)) \in I \times \mathbb{R}^m$
2. $$\forall t \in I, \quad y(t) = y_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, y(s))\, ds. \tag{2.1}$$

Preuve. La preuve est simple. Si y vérifie les deux hypothèses de ce théorème alors y est différentiable et $y(t_0) = y_0$ et $y'(t) = f(t, y(t))$. Réciproquement, si les relations du problème de Cauchy (PC) sont satisfaites, l'équation (2.1) se déduit directement par intégration. La solution y du problème de Cauchy est parfois appelée l'intégrale du problème et la résolution de ce système est parfois appelée intégration de l'EDO. ■

Remarques

1. Si f est une fonction uniquement de t, le PC se ramène à la recherche d'une primitive.

Dans la cas unidimensionnel, $y(t) \in \mathbb{R}$, c'est également le cas lorsque l'on peut effectuer une séparation des variables, i.e :

$$f(t, y) = g(t)\, h(y).$$

Dans ce cas, si $h(y) \neq 0$, on peut écrire le PC sous la forme suivant :

$$\int_{y_0}^{y} \frac{dy}{h(y)} = \int_{t_0}^{t} g(t)\, dt$$

2. Si f est une fonction linéaire de y, il existe alors de nombreuses méthodes analytiques pour résoudre le problème (Variation de la contant).

3. Si f est une fonction non linéaire de y, ce problème est plus généralement abordé numériquement.

2.2 Théorème de Cauchy-Lipschitz forme faible

Si la fonction $f : I \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ est de classe C^1 alors pour tout donnée de Cauchy $(t_0, y_0) \in I \times \mathbb{R}^m$, il existe un intervalle $J \subset I$ contenant t_0 tel qu'il existe dans J une unique solution du PC associé.

En particulier, pour toute telle donnée, il existe une unique solution maximale associée et toute autre solution vérifiant la condition de Cauchy est une restriction de cette solution maximale.

En réalité, ce théorème est encore vrai sous des hypothèses plus faibles.

Définition 2.2.1 *Une fonction continue $f : I \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ est dite **localement Lipschitzienne** par rapport à la variable d'état (ou à la seconde variable). Si pour tout $(t_0, y_0) \in I \times \mathbb{R}^m$, il existe $C_{t_0,y_0} > 0$ et un voisinage U de (t_0, y_0) dans $I \times \mathbb{R}^m$ telle que $\forall t \in I, \quad \forall y_1, y_2 \in \mathbb{R}^m$ et $(t, y_1), (t, y_2) \in U$, on a :*

$$\|f(t, y_1) - f(t, y_2)\| \leq C_{t_0,y_0} \|y_1 - y_2\| . \tag{2.2}$$

Remarque 2.2.1 *Si f est continue et localement Lipschitzienne par rapport à la variable d'état alors elle Lipschitzienne par rapport à la variable d'état sur tout compact. Plus précisément cela signifie que pour tout compacte $K \subset I \times \mathbb{R}^m$ il existe une constants $C_K > 0$ telle que*

$\forall t \in I, \forall y_1, y_2 \in \mathbb{R}^m$, tels que $(t, y_1), (t, y_2) \in K$, on a $\|f(t, y_1) - f(t, y_2)\| \leq C_K \|y_1 - y_2\|$.

2.3 Théorème de Cauchy-Lipschitz forme forte

Grâce au théorème des accroissements finis, on vérifie que toute fonction de classe C^1 est localement lipschitzienne par rapport à sa deuxième variable. C'est pourquoi le théorème suivant est bien plus fort que le précédent.

Théorème 2.3.1 *Le théorème de CL est encore vrai si f est continue et localement lipschitzienne par rapport à la variable d'état.*

Ces théorèmes admettent plusieurs démonstrations, ce sera l'objet du paragraphe suivant.

Remarque 2.3.1

— La propriété d'existence de solutions maximales persiste sous la seule hypothèse de continuité de f (Théorème de Cauchy-Arzela).

— L'exemple canonique d'équation pour laquelle le PC n'a pas de solution unique est l'équation suivante

$$y' = 2\sqrt{|y|} \tag{2.3}$$

qui possède une infinité de solution vérifiant $y(0) = 0$ dont la fonction identiquement nulle et la fonction $y(t) = |t|\, t$ qui est bien de classe C^1. Nous dessinons trois telles solutions dans la figure ci-dessous :

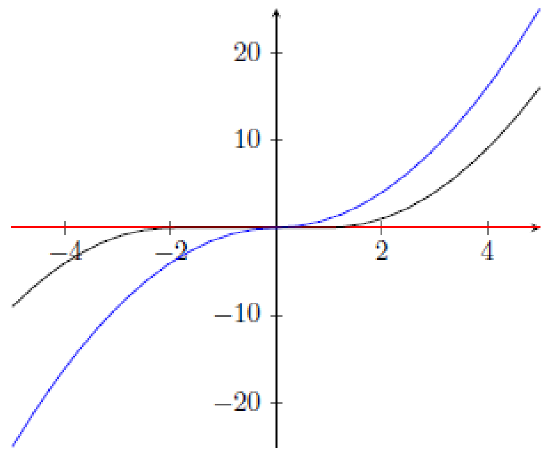


FIG. 2.1 – les solutions de l'équation (2.3)

2.4 Existence et unicité locale

2.4.1 Unicité locale des solutions

Le lemme de Gronwall

Un outil central dans tous les problèmes d'équations différentielles est le lemme de Gronwall qui permet de déduire des bornes sur les solutions à partir d'inégalité intégrales qu'elles vérifient.

Lemme 2.4.1 *(**Gronwall**) Soit ψ une fonction continue définie sur un intervalle $[a, b] \subset \mathbb{R}$ et à valeurs dans $\mathbb{R}_+$. On suppose qu'il existe $t_0 \in [a, b]$ et trois constantes $A \geq 0, B \geq 0, C \geq 0$ telles que :*

$$\psi(t) \leq A + B \left| \int_{t_0}^{t} \psi(s)\, ds \right| + C\, |t - t_0|\,, \qquad \forall t \in [a, b]\,.$$

Alors, pour tout $t \in [a, b]$ on a l'estimation :

$$\psi(t) \leq A \exp(B\, |t - t_0|) + \frac{C}{B}(\exp(B\, |t - t_0|) - 1)\,.$$

Preuve. Si $t = t_0$, la conclusion est évidente. Intéressons nous dans un premier temps aux valeurs de t telles que $t_0 < t \leq b$ et posons :

$$\psi(r) = \int_{t_0}^{r} \psi(s)\, ds, \qquad \forall r \in [t_0, b].$$

La continuité de ψ entraîne que $\psi \in C^1([t_0, b])$ et

$$\left(\psi(r)\, e^{-Br}\right)' = \left(\psi'(r) - B\psi(r)\right) e^{-Br} = \left(\psi(r) - B\int_{t_0}^{r} \psi(s)\, ds\right) e^{-Br}.$$

On en déduit, d'après l'inégalité vérifiée par ψ, que :

$$\left(\psi(r)\, e^{-Br}\right)' \leq e^{-Br}\left(A + C(r - t_0)\right), \qquad \forall r \in [t_0, b],$$

puis, en intégrant cette relation entre t_0 et t, on obtient :

$$\psi(t)\, e^{-Bt} \leq \frac{A}{B}\left(e^{-Bt_0} - e^{-Bt}\right) + C\int_{t_0}^{t} e^{-Br}(r - t_0)\, dr.$$

Une intégration par parties nous permet de calculer le dernier terme :

$$\int_{t_0}^{t} e^{-Br}(r - t_0)\, dr = \frac{1}{B} e^{B(t-t_0)} - \frac{1}{B} - (t - t_0),$$

ce qui nous permet d'estimer la fonction ψ comme suit :

$$\left|\int_{t_0}^{t} \psi(s)\, ds\right| = \psi(t) \leq \frac{A}{B}\left(e^{B(t-t_0)} - 1\right) + \frac{C}{B}\left(\frac{1}{B} e^{B(t-t_0)} - \frac{1}{B} - (t - t_0)\right).$$

En combinant cette relation avec l'égalité donné dans les hypothèses, on obtient la conclusion du Lemme dans le cas $t_0 < t \leq b$.

Pour le cas $a \leq t \leq t_0$, on procède de la même façon mais en posant

$$\psi(r) = \int_r^{t_0} \psi(s)\, ds.$$

■

2.4.2 Existence locale des solutions

Le théorème de point fixe

Soit $J = [t_0 - \alpha, t_0 + \alpha]$ un intervalle inclus dans I (où nous avons supposé que I est ouvert) contenant t_0. On pose $y^0(t) = y_0$ pour tout $t \in J$ et on construit, par récurrence, la suite de fonctions

$$y^{n+1}(t) = y_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, y^n(s))\, ds, \qquad \forall t \in J.$$

Ceci revient à définir $y^{n+1} = \Phi(y^n)$ où $\Phi : C^0(J, \mathbb{R}^n) \to C^0(J, \mathbb{R}^m)$ est l'application qui à y associe

$$\Phi(y)(t) = y_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, y(s))\, ds, \qquad \forall t \in J.$$

Résoudre l'équation (2.1) $\forall t \in J$ revient à trouver un point fixe de l'application Φ. Comme J est compact on peut munir $E = C^0(J, \mathbb{R}^m)$ de la norme infinie, ce qui en fait un espace complet. On peut donc espérer appliquer le théorème du point fixe de Banach à cette fonction. Pour cela, il faudrait montrer que Φ est contractante. Comme on ne possède aucune information globale sur F, il se peut que $\|f(s, y)\|$ soit très grand quand $\|y\|$ est grand et il y a donc aucune chance que nous arrivions à montrer que Φ est contractante sur E.

On va donc essayer l'appliquer le théorème sur le sous-espace fermé $F = C^0\left(J, \overline{B}(y_0, r)\right)$ de E (qui est donc complet). Pour cela, on peut jouer sur les paramètres α et r pour faire en sorte que $\Phi(f) \subset F$ et que Φ soit contractante.

— Fixons une valeur $\alpha_0 > 0$ et un nombre $r_0 > 0$ tels que le compact $K_0 = [t_0 - \alpha_0, t_0 + \alpha_0] \times \overline{B}(y_0, r_0)$ soit inclus dans l'ouvert U sur lequel (2.2) est vraie.

— On note maintenant

$$M = \sup_{[t_0-\alpha_0, t_0+\alpha_0] \times \overline{B}(y_0, r_0)} \|f\| .$$

Ainsi,

$$\forall y \in C^0 \left([t_0 - \alpha_0, t_0 + \alpha_0], \overline{B}(y_0, r_0) \right).$$

On a

$$\|\Phi(y)(t) - y_0\| \leq \left\| \int_{t_0}^{t} f(s, y(s))\, ds \right\| \leq M |t - t_0| .$$

Si on veut s'assurer que $\Phi(y)(t)$ reste dans la boule $\overline{B}(y_0, r_0)$, il faut se restreindre à un intervalle $[t_0 - \alpha, t_0 + \alpha]$ avec $0 < \alpha \leq \alpha_0$ choisi pour que

$$\alpha M \leq r_0. \tag{2.4}$$

Ainsi, l'espace $F_\alpha = C^0 \left([t_0 - \alpha, t_0 + \alpha], \overline{B}(y_0, r_0) \right)$ est laissé fixe par Φ dès que (2.4) est vérifiée.

— Essayons maintenant d'étudier le caractère contractant de Φ sur un tel espace. Soient $y, z \in F_\alpha$, on a

$$\|\Phi(y)(t) - \Phi(z)(t)\| \leq \left| \int_{t_0}^{t} \|f(s, y(s)) - f(s, z(s))\|\, ds \right| \leq C_{t_0, y_0} |t - t_0| \, \|y - z\|_\infty ,$$

et donc

$$\|\Phi(y) - \Phi(z)\|_\infty \leq C_{t_0, y_0} \alpha \, \|y - z\|_\infty .$$

En conclusion, Φ sera contractante dès que

$$\alpha C_{t_0, y_0} < 1. \tag{2.5}$$

— En conclusion, on va choisir $0 < \alpha \leq \alpha_0$ qui satisfait (2.4) et (2.5), ce qui est bien entendu possible. La fonction Φ laisse alors invariant le sous-espace fermé $F_\alpha \subset E$ et elle est contractante dans cet espace. D'après le théorème du point fixe de Banach, il existe donc une unique solution $y \in F_\alpha$ à l'équation (2.1) $\forall t \in J$ et ainsi $([t_0 - \alpha, t_0 + \alpha], y)$ est une solution du PC considéré. C'est également l'unique solution sur cet intervalle qui prend ses valeurs dans la boule $\overline{B}(y_0, r_0)$.

— Il reste à montrer que toute autre solution éventuelle z du PC définie sur un intervalle de la forme $[t_0 - \beta, t_0 + \beta]$ avec $\beta \leq \alpha$ coïncide avec y.

— Si z prend ses valeurs dans la boule $\overline{B}(y_0, r_0)$, alors la propriété d'unicité dans le théorème du point fixe donne le résultat.

— Si z ne prend pas ses valeurs dans cette boule, on note $\widetilde{\beta}$ le plus grand nombre dans $[0, \beta]$ tq $z([t_0 - \beta, t_0 + \beta])$ est contenu dans cette boule. On a $\widetilde{\beta} < \beta$ par hypothèse et $\widetilde{\beta} > 0$ car $z(t_0) = y_0$ est dans l'intérieur de la boule et que z est continue.

  On a alors

$$\|z(t) - y_0\| \leq M |t - t_0| \leq \widetilde{\beta} M < \beta M \leq \alpha M \leq r_0, \quad \forall t \in \left[t_0 - \widetilde{\beta}, t_0 + \widetilde{\beta}\right].$$

  Ce qui contredit la maximalité de $\widetilde{\beta}$.

Remarque 2.4.1 *La méthode de point fixe ne permet pas réellement, en générale, le calcule effectif des solutions des équations différentielles.*

2.4.3 La preuve de l'existence via la méthode d'Euler

Pour montrer l'existence d'une solution sous la seule hypothèse que f est continue, on va prouver que l'approximation obtenue par la méthode d'Euler converge.
Pour simplifier un peu les notations, on va supposer que f indépendant du temps t (cela ne change pas fondamentalement la preuve qui suit).

Soit M une borne de f sur le compact $\overline{B}(y_0, 1)$. On pose maintenant

$$T = \min\left(1, \frac{1}{M}\right).$$

On fixe un nombre $N > 0$, on pose

$$\Delta t = T/N.$$

Et

$$t^n = t_0 + n\Delta t.$$

Et on construit l'approximation d'Euler comme suit

$$\begin{cases} y^0 & = y_0 \\ y^{n+1} & = y^n + \Delta t f(y^n), \qquad \forall n \in \{0, ..., N-1\}. \end{cases}$$

- On vérifie aisément par récurrence que $y^n \in \overline{B}(y_0, 1) \, \forall n \in \{0, ..., N\}$.
- A l'aide de cette suite, on construit l'unique fonction continue affine par morceaux φ_N vérifiant (voire FIG.2.2)

$$\varphi_N(t^n) = y^n, \qquad \forall n \in \{0, ..., N\},$$

et l'unique fonction constante par morceaux $\overline{\varphi}_N$ définie par

$$\overline{\varphi}_N(t) = y^n, \qquad \forall t \in \left[t^n, t^{n+1}\right[.$$

On voit que φ_N est lipschitzienne sur $[t_0, t_0 + T]$ et que $\mathrm{Lip}(\varphi_N) \leq M$. De plus, les fonctions φ_N sont uniformément bornées sur $[t_0, t_0 + T]$.

Par ailleurs, par construction, nous avons

$$\|\overline{\varphi}_N - \varphi_N\|_\infty \leq M\Delta t = \frac{MT}{N} \underset{N\to+\infty}{\longrightarrow} 0. \tag{2.6}$$

- La suite de fonction $(\varphi_N)_N$ est donc bornée dans $C^0([0,T], \mathbb{R}^m)$ et également équiuniformément continue. On peut donc appliquer le théorème d'Ascoli et obtenir l'existence d'une sous-suite $(\varphi_{N_k})_k$ qui converge uniformément vers une fonction continue $\varphi : [0,T] \times \mathbb{R}^m$.

  D'après (2.6), on a également la convergence uniforme de la suit $\left(\overline{\varphi}_{N_k}\right)_k$ vers la même limite φ.

  Constatons maintenant que, par construction, φ_{N_k} et $\overline{\varphi}_{N_k}$ vérifient

$$\varphi_{N_k}(t) = y_0 + \int_{t_0}^{t} f\left(\overline{\varphi}_{N_k}(s)\right) ds, \qquad \forall t \in [t_0, t_0+T]. \tag{2.7}$$

  On va chercher à passer à la limite dans (2.7) et ainsi prouver que la limite $\varphi \in C^0([0,T], \mathbb{R}^m)$ est bien solution de l'équation recherchée.

  On note ω le module d'uniforme continuité de f sur le compact $[t_0, t_0+1] \times \overline{B}(y_0, 1)$.

  On a donc

$$\forall s \in [t_0, t_0+T], \quad \left\|f\left(\overline{\varphi}_{N_k}(s)\right) - f(\varphi(s))\right\| \leq \omega\left(\left\|\overline{\varphi}_{N_k}(s) - \varphi(s)\right\|\right) \leq \omega\left(\left\|\overline{\varphi}_{N_k} - \varphi\right\|_\infty\right),$$

  et donc

$$\left\|f \circ \overline{\varphi}_{N_k} - f \circ \varphi\right\|_\infty \leq \omega\left(\left\|\overline{\varphi}_{N_k} - \varphi\right\|_\infty\right) \underset{k\to+\infty}{\longrightarrow} 0,$$

  ce qui prouve que $f \circ \overline{\varphi}_{N_k}$ converge uniformément vers $f \circ \varphi$. On peut donc, à bon droit passer à la limite dans (2.7) ce qui montre φ vérifie

$$\varphi(t) = y_0 + \int_{t_0}^{t} f(\varphi(s))\, ds, \qquad \forall t \in [t_0, t_0+T],$$

et donc elle est bien solution du PC souhaité.

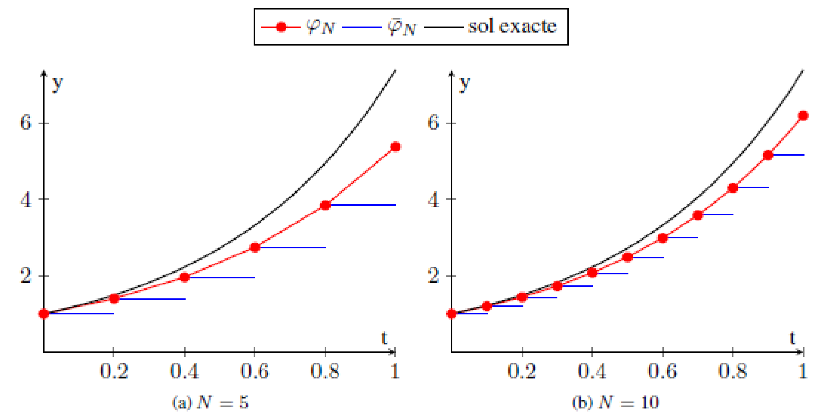


FIG. 2.2 – Illustration de la méthode d'Euler explicite pour l'équation $y' = 2y$

2.4.4 Le Théorème de Cauchy-Arzela-Peano

Soit $f : I \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ est continue. Alors pour tout couple $(t_0, y_0) \in I \times \mathbb{R}^m$, il existe au mois une solution du PC associé.

On a également (presque) démontré le théorème suivant qui donne la convergence de la méthode d'Euler.

Théorème 2.4.1 *Sous les hypothèses du théorème de CL si $y : [t_0, t_0 + T] \to \mathbb{R}^m$ est une solution du PC considéré sur un temps T assez petit et $(y^n)_n$ la suite des itérées obtenues par la méthode d'Euler explicite associée à un pas de temps Δt, nous avons*

$$\sup_{0 \leq n \leq T/\Delta t} \|y(t^n) - y^n\| \underset{\Delta t \to 0}{\longrightarrow} 0.$$

Preuve. Rappelons que Δt est relié à N par la formule $\Delta t = T/N$ et que par ailleurs, comme $\Delta_N(t^n) = y^n$, on a

$$\sup_{0 \leq n \leq T/\Delta t} \|y(t^n) - y^n\| \leq \|\varphi_N - y\|_\infty .$$

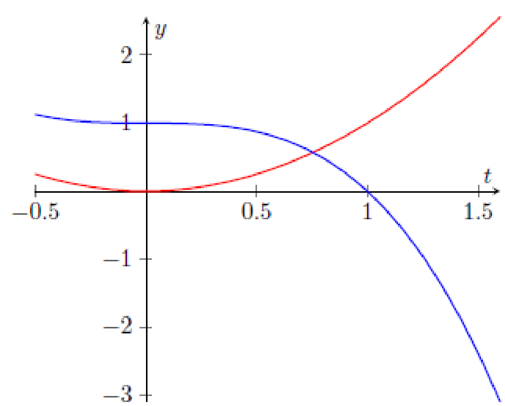
On a vu plus haut que $y = \varphi$, la limite uniforme de la sous-suite $(\varphi_{N_k})_k$. Le résultat sera donc prouvé si on montre que toute la suite $(\varphi_K)_N$ converge vers $\varphi = y$. ■

2.5 Les conséquences du théorème de Cauchy-Lipschitz

La conséquence du théorème est bien sûr l'existence et l'unicité d'une solution à un PC qui peut modéliser une situation physique donnée. En réalité, les conséquences du théorème sont bien plus nombreuses.

2.5.1 Quelques exemples

- **Une solution maximale est forcément définie sur un intervalle ouvert.**
- **Deux trajectoires distinctes ne peuvent pas se couper :** Soient (J, y_1) et (J, y_2) deux solutions de l'EDO $y' = f(t, y)$ définies sur le même intervalle.



  S'il existe $t_0 \in J$ telle que $y_1(t_0) = y_2(t_0)$ alors $y_1 \equiv y_2$.

- **Dans $\mathbb{R}$ les trajectoires sont ordonnées** : On pose ici que $m = 1$. Avec les mêmes notations que précédemment :

  S'il existe $t_0 \in J$ telle que $y_1(t_0) < y_2(t_0)$ alors $y_1(t) < y_2(t)\, \forall t \in J$. Il suffit de raisonner par l'absurde et d'utiliser le théorème des valeurs intermédiaires pour se ramener à la propriété précédente.

- **Trajectoires périodiques** : On suppose que $I = \mathbb{R}$ et que f est une fonction T-périodique. Alors une solution $(\mathbb{R}, y)$ de l'EDO est T-périodique si et seulement s'il existe un $t_0 \in \mathbb{R}$ telle que :

$$y\left(t_0 + T\right) = y\left(t_0\right).$$

En effet, si ceci est vrai, la fonction $z\left(t\right) = y\left(t + T\right)$ vérifie la même équation différentielle que y et la même donnée de Cauchy $z\left(t\right) = y\left(t_0 + T\right) = y\left(t_0\right)$. Par unicité dans le théorème de CL, on sait que ces deux solutions sont donc identiques, ce qui prouve le résultat.

2.6 Théorème de Cauchy-Lipschitz global

Théorème 2.6.1 *Si la fonction f est continue et globalement Lipschitzienne par rapport à y, alors toutes les solutions maximales sont globales. Plus précisément, s'il existe $k : I \to \mathbb{R}$ continue et positive telle que*

$$\forall t \in I, \forall y_1, y_2 \in \mathbb{R}^m, \quad \left\| f\left(t, y_1\right) - f\left(t, y_2\right)\right\| \leq k\left(t\right)\left\| y_1 - y_2\right\|.$$

Alors toutes les solutions maximales sont globales.

Preuve. Si (J, y) est une solution maximale et $a \in J$, on a

$$y\left(t\right) = y\left(a\right) + \int_a^t f\left(s, y\left(s\right)\right) ds.$$

On prend la norme, pour $t > a$ et on utilise l'hypothèse

$$\left\| y\left(t\right)\right\| \leq \left\| y\left(a\right)\right\| + \int_a^t \left(k\left(s\right)\left\| y\left(s\right)\right\| + \left\| f\left(s, 0\right)\right\|\right) ds.$$

Supposons que la limite supérieure β de J soit finie et dans I, on a alors

$$\|y(t)\| \leq \left(\|y(a)\| + \int_a^\beta \|f(s,0)\|\, ds\right) + \int_a^t k(s)\, \|y(s)\|\, ds, \quad \forall a \leq t < \beta$$

D'après le lemme de Gronwall, on en déduit que

$$\|y(t)\| \leq \left(\|y(a)\| + \int_a^\beta \|f(s,0)\|\, ds\right) \exp\left(\int_a^\beta k(s)\, ds\right), \quad \forall a \leq t < \beta.$$

Ceci montre que la fonction y est bornée au voisinage de la borne β, ce qui contredit le théorème d'explosion en temps fini, donc $\beta \notin I$. ■

Chapitre 3

Exemple. D'application basés sur des équations différentielles ordinaires

L'usage des équations différentielles pour décrire le comportement des systèmes évoluant dans le temps est d'un usage universel dans toutes les sciences qui utilisent la modélisation mathématique. Cet outil commun a plusieurs disciplines ou sous-disciplines, on commence par donner quelques exemples d'équations différentielles issues de différentes disciplines.

3.1 Quelques modèles basés sur des équations différentielles ordinaires

Les modèles basés sur des équations différentielles ordinaires sont extrêmement courants. Donnons quelques exemples tirés de divers champs scientifiques.

3.1.1 Mécanique

La relation fondamentale de la mécanique, écrit à 1 dimension d'espace pour une particule ponctuelle, fournit une source intarissable d'équations différentielles. Dans un système d'unités adaptées, elle s'écrit

$$\ddot{x} = f\left(x, \dot{x}, t\right).$$

Où x désigne la position de la particule, $\dot{x}$ sa dérivée par rapport au temps (la vitesse), et où f représente les forces appliquées sur la particule. Cette équation, du second ordre en x, est généralement complétée par des conditions initiales qui spécifient la position et la vitesse à une instante origine :

$$x(0) = x_0, \ \dot{x}(0) = \upsilon_0.$$

Il est utile de remarquer que cette équation du second ordre est équivalente à un système différentiel de deux équation du 1^{er} ordre. En effet, introduisons la vitesse $\upsilon \equiv \dot{x}$, l'équation précédente s'écrit aussi :

$$\begin{cases} \dot{x} & = \upsilon \\ \dot{\upsilon} & = f(x, \upsilon, t) \end{cases}$$

Le plan (x, υ) est appelé, aussi bien en physique qu'en mathématique, plan ou plus généralement espace des phases.

Dans la cas particulier où f ne dépend pas de x c'est-à-dire $f = f(\upsilon, t)$, dans le cas des mouvements dominés par les frottements, l'équation d'évolution de la vitesse :

$$\dot{\upsilon} = f(\upsilon, t)$$

peut être résolue indépendamment de x. On obtient ensuite x par intégration de l'équation $\dot{x} = \upsilon$ si par contre f ne dépend que de x c'est-à-dire $f = f(x)$, l'équation obtenue, en divisant les deux équations différentielles, s'écrit

$$\begin{cases} \dfrac{d\upsilon}{dx} & = \dfrac{f(x)}{\upsilon} \\ \upsilon(0) & = \upsilon_0 \end{cases}$$

On obtient donc encore une équation différentielle du 1^{er} ordre, l'inconnue étant la fonction $v(x)$. Cette équation qui est séparable dans les variables v et x conduit directement à l'existence d'un invariant (l'énergie).

3.1.2 Dynamique des populations

Les équations différentielles ordinaires sont très utilisées pour modéliser l'évolution d'une population. Un exemple est donné par les équations de Lokta-Volterra. Il s'agit d'un modèle de type prédateurs-proies. On note P la concentration de prédateurs et N la concentration de proies. L'évolution de P et N satisfait :

$$\begin{cases} \dot{N} & = N(a - bP) \\ \dot{P} & = P(cN - d) \end{cases}$$

avec a, b, c, d quatre coefficients strictement positifs qui s'interprètent de la façon suivante :

– a est un taux de naissance pour les proies,

– b est un taux de prédation,

– d est un taux de mortalité pour les prédateurs

– c est un taux de reproduction pour les prédateurs.

Quelques solutions sont représentées sur la FIG.3.1. On observe que les solutions semblent périodiques, restent positives et confinées le long d'une courbe dans le plan (N, P).

Supposons que les paramètres suivants : $a = 2$, $b = 1$, $c = 2$, $d = 1$.

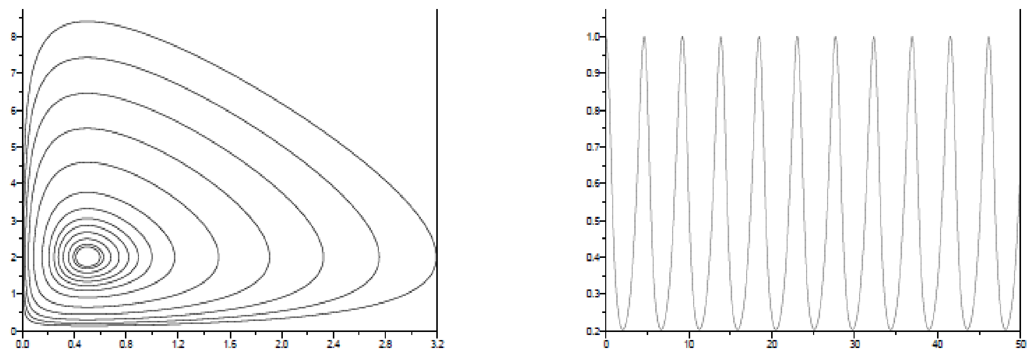


FIG. 3.1 – Solutions des équations de Lotka-volterra.

— A gauche, quelques trajectoires $(N(t), P(t))_{t\geq 0}$ pour diverses conditions initiales (en abscisse N, et en ordonnée P).

— A droite, une trajectoire $t \mapsto N(t)$ (en abscisse t, et en ordonnée N).

3.1.3 Electricité

L'état d'un circuit électrique composé de résistances, bobines et condensateurs, peut être décrit par l'intensité I et la différence de potentiel U dans chacun de ces composants. Et les différentes lois de l'éctricité montrent que cet état est régi par un système d'équations différentielles. Typiquement, pour un circuit fermé comprenant un composant de chaque sorte, dans l'ordre résistance-bobine-condensateur, la bobine ayant pour inductance L et le condensateur ayant pour capacité C, le comportement de la résistance étant régi par la loi d'Ohm généralisée :

$$U_R = F(I_R).$$

On a les équations différentielles :

$$\begin{cases} L\dfrac{dI_L}{dt} & = U_L \\ C\dfrac{dU_C}{dt} & = I_C. \end{cases}$$

Assorties des relations

$$U_C = U_L + U_R, \quad I_R = I_L = -I_C.$$

Notez qu'il ya de l'arbitraire dans l'orientation du circuit, mais les équations sont invariantes par changement d'orientation. En éliminant les autres inconnues, on se ramène à un système de deux équations pour $x = I_L$ et $y = U_C$ par exemple :

$$\begin{cases} L\dfrac{dx}{dt} & = y - F(x) \\ C\dfrac{dy}{dt} & = -x \end{cases}$$

Dans le cas particulier ou $F(x) = x^3 - x$, ce système est connue sous le nom d'équation de Van der Pol.

3.1.4 Météorologie

Les équations qui permettent de modéliser l'évolution des différents paramètres météorologiques (température, humidité, pression, etc....) sont très complexes. Un système très simple mais qui permet de retrouver plusieurs des caractéristiques de ces équations à été proposé par Lorenz. Il s'agit d'un système d'équations différentielles ordinaires en dimension 3 :

$$\begin{cases} \dot{x} & = \sigma (y - x), \\ \dot{y} & = rx - y - xz, \\ \dot{z} & = xy - bz. \end{cases}$$

Des valeurs classiques pour les paramètres sont $\sigma = 10$, $r = 28$ et $b = 8/3$.

Sur la FIG.3.2, on trace quelques solutions de ces équations. On n'observe en particulier que les trajectoires divergentes très vite pour deux conditions initiales très proches. En particulier, il semble vain de vouloir étudier les trajectoires pour des conditions initiales précises, car une simple variation des conditions initiales induit rapidement des modifications importantes. Une meilleure approche serait peut-être d'étudier l'évolution d'un ensemble de conditions initiales (propagation d'une mesure de probabilité par la dynamique), ou bien le comportement moyen le long d'une trajectoire (moyenne trajectorielle).

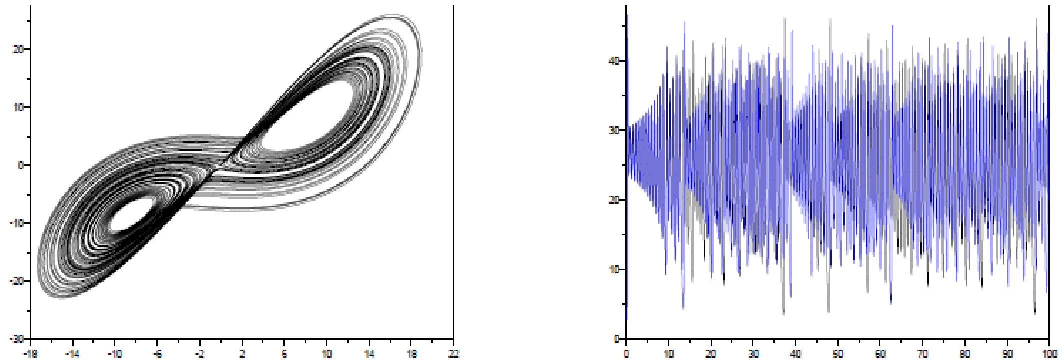


FIG. 3.2 – Solutions des équations de Lorenz

Pourtant, il semble que la dynamique contienne des structures "simples" cachées derrière la complexité des trajectoires $t \mapsto (x, y, z)(t)$. Ainsi les trajectoires s'approchent de courbes limites dans la limite des temps longe. Sur la FIG.3.3, on vérifie que la suite des maxima de la trajectoire $t \mapsto z(t)(t)$ vérifie une relation simple du type

$$z_{m+1} = T(z_m),$$

où $T : I \to I$ (I un intervalle de $\mathbb{R}$) est une application de forme caractéristique. On étudiera dans la suite un tel système dynamique.

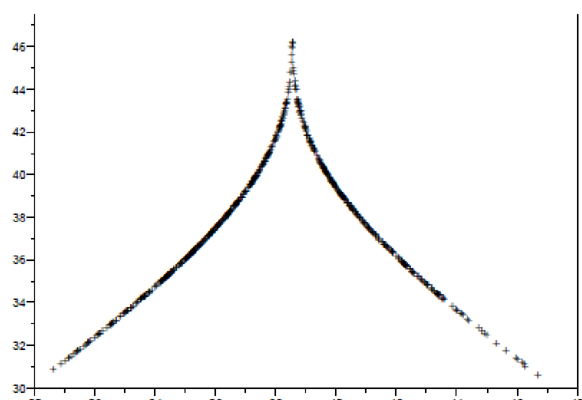


FIG. 3.3 – Solutions des équations de Lorenz

Chaque point a pour coordonnées (z_m, z_{m+1}) où les $(z_n)_{n\geq 0}$ sont les maxima successifs observés le long d'une trajectoire $t \mapsto z(t)$.

3.1.5 Cinétique chimique

Considérons une relation chimique sur trois espèces :

$$Y_3 \xrightarrow{k_3} Y_2 \xrightarrow{k_2} Y_1 \xrightarrow{k_1} Y_2.$$

L'évolution de la concentration $(y_i)_{1\leq i\leq 3}$ des trois espèces $(Y_i)_{1\leq i\leq 3}$ satisfait le système d'équations différentielles ordinaires :

$$\begin{cases} \dot{y_1} &= -k_1 y_1 + k_2 y_2, \\ \dot{y_2} &= k_1 y_1 - k_2 y_2 + k_3 y_3, \\ \dot{y_3} &= -k_3 y_3. \end{cases}$$

Dans ce genre de problème, on observe typiquement de grandes disparités dans les coefficients k_i. Le système dynamique contient donc des échelles de temps très différentes. Il faut évidemment tenir compte de cette information pour discrétiser les équations de manière efficace. Dans l'exemple précédent, si k_3 est très grand par rapport à k_1 et k_2, on comprend que très rapidement, la concentration de Y_3 tend vers 0. On peut donc légitimement se demander si on ne peut pas construire analytiquement un modèle plus simples, seulement sur les concentrations des espèces Y_1 et Y_2.

Conclusion

A la fin de ce travail, nous devrions être en mesure :

1. Démontrer et comprendre les équations différentielles et maitriser les différentes techniques afin de les appliquer dans la vie courant (Mécanique, Dynamique des populations, Electricité).
2. Démontrer et comprendre le problème de Cauchy et les concepts et les propriétés di Théorème de Cauchy-Lipschitz.
3. d'expliciter l'utilité des TIC (technologies de l'information et des communications en général.
4. Application des commaissances acquises en mathématiques de base (dérivation et intégration).

Bibliographie

[1] Demailly, J.P. (2006) . Analyse numérique et équations différentielles. EDP science.

[2] Pujo-Menjouet, L. Équations différentielles ordinaires et Partielles.Université Calude Bernard Lyon I.

[3] Boyer, F. (2012). Agrégation Externe de Mathématiques Equations différentielles ordinaires.

[4] Teschi, G. (2012). Ordinary Differential Equations and Dynamical Systems, AMS, 364 pages.

[5] Guibert, D. (2009). Analyse de méthodes de résolution parallèles d'EDO/EDA raides (Doctoral dissertation, Université Claude Bernard-Lyon I).

[6] Benzoni, S. (2007). Equations différentielles ordinaires.

[7] Munnier, A. (2006-2007). Théorie des équations différentielles ordinaires. Université Henri Poincaré.

[8] Hulin, D. (2017). Cours d'équations différentielles ordinaires études qualitatives. Université paris-Sud.