

République Algérienne Démocratique et Populaire

Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

UNIVERSITÉ MOHAMED KHIDER, BISKRA

FACULTÉ des SCIENCES EXACTES et des SCIENCES de la NATURE et de la VIE

DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES



Mémoire présenté en vue de l'obtention du Diplôme :

MASTER en Mathématiques

Option : **Analyse**

Par

BOUZINAOUI Nour Elyakine

Titre :

Systemes dynamiques et chaos

Membres du Comité d'Examen :

Dr. CHEMCHEM Madani	UMKB	Président
Dr. BOUZIANE Nadjette	UMKB	Encadreur
Dr. GUIDAD Derradji	UMKB	Examineur

Juin 2018

DÉDICACE

Je dédie ce mémoire à :

Mon chère père et ma chère mère

Mes frères et toutes ma famille

Toute mes amies.

A mes collègues de mathématique 2018-2019

REMERCIEMENTS

Je tiens tout d'abord à remercier mon encadreur Bouziane Nadjette, maitre assistant à l'université de Biskra, pour ma voir proposé ce sujet qui m'a permis de m'initier à la recherche scientifique. Son suivi régulier de l'évolution de mon travail, ses conseils et ses encouragements m'ont permis de réaliser ce mémoire dans d'excellentes conditions de travail.

Mes précieux remerciements vont au président et membres de jury : " Dr. CHEMCHEM Madani " et " GUIDAD Derradji " pour l'honneur qu'il m'ont fait en acceptant de juger mon travail.

Table des matières

Remerciements	ii
Table des matières	ii
Liste des figures	v
Introduction	1
1 Systèmes dynamique	3
1.1 Notions des systèmes dynamiques	3
1.2 Systèmes dynamiques à temps continu	4
1.2.1 Différents types de systèmes dynamiques à temps continu	5
1.3 Systèmes dynamiques à temps discret	6
1.4 Échantillonnage : passage de temps continu à temps discret	7
1.5 Systèmes dynamiques non linéaire	8
1.6 Orbite	8
1.7 Flot	10
1.8 Système conservatifs et systèmes dissipatifs	10
1.9 Points d'équilibre	11
1.10 Stabilité	12
1.11 Attracteurs	13
1.11.1 Attracteurs régulières	13

1.11.2	Attracteurs étranges	13
1.12	Théorie des bifurcations	13
1.12.1	Bifurcation noeud-col	14
1.12.2	Bifurcation transcritique	15
1.12.3	Bifurcation transcritique	15
1.12.4	Bifurcation fourche (Pitchfork)	16
1.12.5	Bifurcation Hopf	17
2	Chaos	18
2.1	Théorie du chaos	18
2.1.1	Détection du chaos	18
2.1.2	Propriétés du chaos	20
2.1.3	Avantages du chaos	21
2.2	Transition vers le chaos	21
2.3	Exemples de systèmes dynamiques chaotiques	23
2.3.1	Modèle de lorenz	23
	Conclusion	31
	Bibliographie	32

Table des figures

2.1	Attracteur de lorenz $\sigma = 10, b = 8/3, r = 28$	24
2.2	Séries temporelles $x(t), y(t), z(t)$, du système de lorenz $\sigma = 10, b = 8/3, r = 28$	25
2.3	Attracteur de lorenz (a) l'espace $(x-z)$, (b) l'espace $(y-x)$, (c) l'espace $(y-z)$	27

Introduction

Un système dynamique déterministe est une structure qui évolue au cours de temps peut alors se modéliser de deux façon distinctes, une évolution continue dans le temps, représentée par une équation différentielle ordinaire et une évolution discrète dans le temps, l'étude théorique de ces modèles discrets est fondamentale, car elle permet de mettre en évidence des résultats importants, qui se généralisent souvent aux évolutions dynamiques continues. Elle est représentée par le modèle générale des équations aux différences finie. La théorie des systèmes dynamique a son origine dans les travaux d'Henri Poincaré. Dès le début du siècle, le mathématicien montra son étude de système solaire qu'il existait des orbites stables et des orbites instables et que, quelquefois, une très faible perturbation dans le système pouvait induire un changement d'état d'une orbite. Il s'aperçut que des causes identiques pouvaient ne pas conduire au même effet. Le système étudié était déterministe, mais le principe de causalité était violé. Aussi Henri Poincaré en (1854-1912), à la fin du 19^{ème} siècle, à mis en évidence l'imprévisibilité d'un système de trois corps en interaction, à proposé, au lieu de s'intéresser à une solution particulière du système, d'utiliser des arguments topologiques et géométriques pour déterminer les propriétés de l'ensemble de toutes les solutions.

L'œuvre de Poincaré a donc la particularité de constituer un point d'origine incontestable du domaine, par la variété des outils, des méthodes et des concertes nouveaux qui s'y déploient au service du problème de la mécanique céleste.

Après cette œuvre fondatrice, on peut mentionner les principaux moments suivants :

- La théorie de la stabilité d'Alexander Lyapunov à la fin du 19^{ème} siècle.
- Les travaux de Géorgie D. Birkhoff sur la topologisation des systèmes dynamiques conservatifs dans l'entre deux guerres.
- Les travaux autour de Andrei Kolmogorov sur l'étude de la stabilité des systèmes hamiltoniens, etc...
- Les travaux d'Eberhard Hopf ou ceux de Kurt Otto Frierichs sur les bifurcations.
- En 1963, Edward Lorenz découvre le premier système chaotique dans la météo ou encore appelé attracteur étrange
- En 1975, Tien-Yien Li et James A. York ont présenté pour la première fois le terme "chaos" dans un article intitulé " Period three implies chaos ".

Ce mémoire a pour objet l'étude de quelques notions élémentaires sur le système dynamique afin de mieux appréhender ce qu'est le chaos : ses apparitions dans un système et la manière de le quantifier. Il contient deux chapitres.

Dans le premier chapitre, nous donnons des notions de la théorie des systèmes dynamiques (notion des orbites, de flot, des points d'équilibre, stabilité, attracteurs et des bifurcations) .

Au deuxième chapitre, est consacré à l'étude de système dynamique chaotique où nous allons donner les propriétés du chaos et ses avantages du chaos, aussi les différentes manières de transition vers le chaos. Finalement est une illustration concrète de quelques notions précédentes par un exemple célèbre (modèle de Lorenz).

Chapitre 1

Systemes dynamique

1.1 Notions des systemes dynamiques

Il ya des plusieurs systemes que l'on etudie dans les sciences comme la physique, la chimie, la biologie, ...etc sont des systemes deterministes car il est possible de calculer son evolution au cours du temps est completement determinee par son etat a un instant donnee. Citons par exemple de la croissance des populations, l'evolution de concentration des reactifs dans une reaction chimique,...., etc. La description de ses systemes ce fait au moyen de quantites numeriques, souvent appelees variables ou observables, Donc on peut definir un systeme dynamique comme une description d'un phenomene physique qui evolue au cours du temps (systemes continu), ou par rapport a une autre variable (systeme discret). Cette description nous oblige a faire une representation graphique : a chaque etat du systeme est associe un vecteur \mathbf{x} dans un espace vectoriel appele espace de phases.

La modelisation mathematique de cette evolution nous permet de definir une equation differentielle de la forme :

$$\frac{dX}{dt} = F(X, t) \quad (1.1)$$

Ou de la forme généralisée :

$$\frac{d^\alpha X}{d^\alpha t} = F(X, t), \quad \alpha \in \mathbb{R}^+, \quad (1.2)$$

si dans le cas continu, ou une itération de la forme :

$$X_{K+1} = F(X_K, K), K \in \mathbb{Z}, \quad (1.3)$$

si dans le cas discret.

Lorsque F dépend explicitement du temps (1.1) est dit non autonome. Dans le cas contraire on dit que (1.1) autonome.

1.2 Systèmes dynamiques à temps continu

Un système dynamique continu est quant à lui défini par une équation différentielle de première ordre où le temps est la variable décrivant l'évolution du système : $X'(t) = F(X(t), t)$ avec une condition initiale $X(t_0) = X_0$, la donnée d'une condition initiale définit une unique solution qui est une courbe de l'espace .

Supposons que nous cherchons un modèle permettant d'étudier le mouvement d'un pendule de masse m et de longueur l donnée. La position de pendule à tout moment du temps est complètement déterminée si l'on connaît l'angle $\theta(t)$. On peut donc choisir l'angle comme unique variable d'état de ce système. En utilisant les lois de Newton, on peut facilement écrire l'équation différentielle pour $\theta(t)$:

$$m \cdot l \cdot \ddot{\theta} = -m \cdot g \cdot \sin(\theta) - K \cdot l \cdot \dot{\theta}, \theta(0) = \theta_0, \dot{\theta}(0) = \theta_1.$$

Nous avons donc construit le modèle de notre système.

Dans le cas général un système dynamique en temps continu peut être représenté par une équation différentielle. Selon l'équation, on distingue quelques types différents de système.

1.2.1 Différents types de systemes dynamiques à temps continu

Systemes autonome :

$$\dot{X} = f(X), \quad X(t_0) = X_0$$

Systemes non-autonome :

$$\dot{X} = f(t, X), \quad X(t_0) = X_0$$

Systemes avec plusieurs variables d'état (autonomes ou non-autonomes) :

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{X}_1 = F(t, X_1, X_2, \dots, X_m), \quad X_1(t_0) = X_0^1 \\ \dot{X}_2 = F(t, X_1, X_2, \dots, X_m), \quad X_2(t_0) = X_0^2 \\ \cdot \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \cdot \\ \cdot \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \cdot \\ \cdot \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \cdot \\ \dot{X}_m = F(t, X_1, X_2, \dots, X_m), \quad X_m(t_0) = X_0^m \end{array} \right. \quad (1.4)$$

Pour ces systemes on utilise souvent la notation vectorielle. Si l'on note :

$$X = \begin{pmatrix} X_1 & X_2 & \dots & X_m \end{pmatrix}, \quad F = \begin{pmatrix} F_1 & F_2 & \dots & F_m \end{pmatrix}$$

Alors le systeme précédent s'écrit :

$$\frac{dX}{dt} = F(t, X), \quad X(t_0) = X_0$$

Systeme d'ordre $r \geq 2$ avec plusieurs variables d'état (autonome ou non-autonomes)

$$\begin{aligned} \frac{d^r X}{dt^r} &= F\left(t, X, \frac{dX}{dt}, \dots, \frac{d^{r-1}X}{dt^{r-1}}\right) \\ X(t_0) = X_0, \quad \frac{dX(t_0)}{dt} &= X_1, \dots, \quad \frac{d^{r-1}X(t_0)}{dt^{r-1}} = X_{r-1}. \end{aligned}$$

1.3 Systèmes dynamiques à temps discret

Une modélisation discrète du temps peut être imposée soit par la nature même du processus, soit par le besoin de "discrétiser" un modèle à temps continu pour le traiter numériquement. L'évolution du système est observée en choisissant certains moments de temps que nous allons supposer **équidistants**. Dans tous les cas le choix de l'unité de temps représente une partie importante de modélisation du système. Dans le modèle de temps sera donc noté par une variable n qui prend les valeurs entières $n = \dots -2, -1, 0, 1, 2, \dots$, Voici un exemple élémentaire d'un processus dynamique à temps discret.

Exemple 1.3.1 :

Supposons que nous avons une population de lapins qui au début de notre expérience compte $X(0)$ lapins. Nous savons qu'en une année la population augmente de 10%. Notons par $X(n)$ le nombre de lapins de la n -ème année. Nous voulons décrire l'évolution de $X(n)$. Après une année on obtient $X(1)$ lapins.

$$X(1) = X(0) + 0.1X(0) = 1.1X(0)$$

$$X(2) = X(1) + 0.1X(1) = 1.1X(1)$$

Au cours de la deuxième année la quantité de lapins augmente de la même façon en continuant on trouve pour une année quelconque :

$$X(n+1) = X(n) + 0.1X(n) = 1.1X(n)$$

Ainsi nous pouvons remarquer que pour chaque période de temps :

$$X(n+1) = p(X(n))$$

avec :

$$P(X) = 1.1X$$

Autrement dit, la dynamique de la population peut être décrite, comme dans l'exemple précédent, par **l'itération d'une fonction** $p(X)$. En connaissant cette fonction nous pouvons reconstituer l'état du système à chaque moment de temps. En connaissant cette fonction nous pouvons reconstituer l'état du système à chaque moment de temps.

1.4 Échantillonnage : passage de temps continu à temps discret

Il existe plusieurs techniques de discrétisation (échantillonnage) des systèmes. Voici un exemple simple souvent utilisé : la méthode d'Euler. Soit une équation différentielle d'ordre 1 :

$$\dot{X} = F(X)$$

Nous voulons étudier la trajectoire de cette équation seulement à des instants choisis, équidistants $t_n = t_0 + n \cdot \Delta t$. Si la période d'échantillonnage Δt est choisie assez petite, on peut approcher la dérivée $X(t)$ par la différence :

$$\dot{X} \approx \frac{X(t_n) - X(t_{n+1})}{\Delta t}$$

Alors, le système dynamique à temps continu peut être approché par le système dynamique à temps discret suivant :

$$X(n+1) = X(n) + \Delta t \cdot F(X(n))$$

Définition 1.4.1 : *Dans le cas général un système dynamique discret est décrit par un système d'équation aux différences finies, autrement dit, par une **réurrence**.*

1.5 Systèmes dynamiques non linéaire

Le système dynamique non linéaire était à l'origine une branche de la physique. La dynamique non linéaire s'est d'abord manifestée dans les équations du mouvement de **Newton** ; elle fournit ainsi une vision nouvelle et utile de la nature , une vision qui met l'accent sur les aspects qualitatifs géométrique du comportement dynamique des systèmes complexes, au fur et à mesure que des paramètres extérieur changent. Cette vision a contribuer à l'avancement des connaissances non seulement dans les domaines traditionnels de la physique mais aussi dans d'autre programmes de recherche scientifique, où l'approche unique de la physicien à la compréhension du monde est profitable. Il est bon de noter également que la dynamique non lineaire a souvent été considérée au début comme une entreprise quelque peu marginale par plusieurs chercheurs incertains des possibilités de financement dans un domaines de recherche en émergence. Mais dans plusieurs cas, cette désCIPLINE a générer un nouvel ensemble de modèles pour l'investigation de problèmes fondamentaux en sciences naturelles :

La dynamique non linéaire a joué dans l'étude de la stabilité du système solaire, l'étude de la mécanique céleste sous cet angle révele, par exemple pour quoi la densité des astroides varie d'une façon particulière.

1.6 Orbite

Définition 1.6.1 : Une solution du système (1.1) est une fonction dérivable $t \rightarrow X(t)$, définie d'un intervalle $I \subset \mathbb{R}$ dans Ω telle que pour tout $t \in I$ on a $X'(t) = F(X, t)$.
L'image d'une solution X est appelée orbite et notée :

$$\gamma_X = \{a \in \Omega; \exists t \in I : X(t) = a\}$$

L'orbite est tangente en chacun de ses points au champ de vecteur F .

Définition 1.6.2 : *Etant donné le point initiale X_0 , on appelle orbite ou une trajectoire du système dynamique discret d'ordre 1 défini par l'itération d'une fonction $F(X)$:*

$$X(0) = X_0, X(n+1) = F(X(n)), n \geq 0,$$

La suite

$$O(X_0) = \{X(0) = X_0, X(1) = F(X(0)), \dots, X(n+1) = F(X(n))\}.$$

Exemple 1.6.1 : *Soit un système dynamique discret en dimension 1 défini par la fonction :*

$F(X) = X^2$ sur l'intervalle $[0, +\infty)$. Prenons pour condition initial $X_0 = 1/2$, L'orbite correspondante est :

$$X(0) = X_0 = 1/2, X(1) = F(X(0)) = 1/4, X(2) = F(X(1)) = 1/16.$$

Remarquons que $X(n) = F(X(n-1)) = F^n(X(0)) = (1/2)^{2^n} \rightarrow 0$ quand $n \rightarrow \infty$

Prenons un autre point initial, $X_0 = 2$, Alors :

$$X(0) = 2., X(1) = F(X(0)) = 4, X(2) = F(X(1)) = 16.$$

Dans ce cas, quand $n \rightarrow \infty$ on a :

$$X(n) = F(X(n-1)) = F^n(X(0)) = 2^{2^n} \rightarrow \infty$$

Et enfin, si l'on choisit pour point initial, $X_0 = 1$, on voit que :

$$O(X_0) = \{1, 1, X(n) = 1^{2^n} = 1, ..\}$$

On observe donc ici trois comportements différents du même système en fonction d'un point initiale choisi. Ainsi nous pouvons parler des propriétés d'un système, en décrivant toutes ses orbites possibles.

1.7 Flot

On suppose que les solutions du système (1.1) sont définies pour tout $t \in \mathbb{R}$, le flot du système (1.1) est la famille avec un paramètre d'applications $\{\phi(t)\}_{t \in \mathbb{R}}$ de Ω dans lui même définies par $\phi_t(a) = X(t, a)$, pour tout $a \in \Omega$, $X(t, a)$ est l'unique solution du problème de Cauchy :

$$\begin{cases} \frac{dX}{dt} = F(X, t) \\ X(0) = a \end{cases}$$

Remarque 1.7.1 :

* ϕ_t est différentiable sur Ω .

* $\phi_0 = Id$, $\phi_{t_1} \circ \phi_{t_2} = \phi_{t_1+t_2}$ pour tout $t_1, t_2 \in \mathbb{R}$, ϕ_t est une bijection de Ω et $(\phi_t)^{-1} = \phi_{-t}$

Alors l'ensemble $G = (\phi_t)_{t \in \mathbb{R}}$ est un groupe à un paramètre de difféomorphisme .

* $\left. \frac{d\phi_t(a)}{dt} \right|_{t=0} = F(a, 0)$ cette formule montre que la donnée du flot ϕ_t définit le système (1.1).

1.8 Système conservatifs et systèmes dissipatifs

En physique, un système conservatif est un système qui conserve l'énergie totale, et possède une intégrale première (ou constante) du mouvement, par contre un système dissipatif est un système qui dissipe de l'énergie, et possède au moins un terme dépendant de la vitesse. Les systèmes considérés sont des systèmes déterministes, et pour préciser cette définition, on dit qu'un système déterministe est conservatif, si est seulement si la dynamique du

système associée à chaque condition initiale X_0 a un et un seul état final $X(t)$.

$$\begin{cases} \phi_t(X) = \phi(X, t) \\ \phi_t(X_0) = X_0 \end{cases}$$

Exemple 1.8.1 :

– cas continue (L'oscillateur de Duffing)

$$\begin{cases} \frac{dX}{dt} = y \\ \frac{dy}{dt} = x - x^3 - \delta y + \gamma \cos \omega t \end{cases}$$

Où δ, ω, γ sont des paramètre physique réels (variables statistiques). L'espace des phases est : \mathbb{R} , l'espace des paramètre est \mathbb{R}^3 . Ce système est non linéaire, non autonome, il peut être dissipatif ou conservatif (suivants le mouvement avec ou sans frottement) .

– cas discret (l'application de Hénon) :

$$\begin{cases} X_{k+1} = y_k + 1 - aX_k^2 \\ y_{k+1} = bX_k \end{cases}$$

Où a, b sont des paramètre réels, l'espace des phases est : \mathbb{R}^2 , l'espace des paramètres est : \mathbb{R}^2 .

1.9 Points d'équilibre

Une première approche pour l'étude de ces systèmes consiste à rechercher les points d'équilibre (les points où $X'(t) = 0$), c'est-à-dire les solutions stationnaires ne présentant pas d'évolution temporelle. On dit qu'un équilibre est stable si une petite perturbation de cet équilibre évolue dans le temps en restant petite et en convergeant vers zéro. Le système revient alors dans sa position d'équilibre.

On dit que a est un point d'équilibre de système (1.1), s'il satisfait $F(a) = 0$ (ou pour tout $t \in \mathbb{R} : \phi_t(a) = a$) sinon a , est dit point ordinaire.

1.10 Stabilité

La question de la stabilité d'une solution ou des positions d'équilibre est une des questions fondamentales de la théorie qualitative des systèmes dynamiques, la réponse de cette question a été étudiée en détail par l'éminent mathématicien russe A. Lyapunov (1857-1918).

Un point d'équilibre du système continu correspond à ce que l'on appelle aussi un régime stationnaire. La question de la stabilité expose alors des termes très simples : si l'on écarte le système de l'équilibre, y reviendra-t-il ? Ou encore : une petite perturbation, qui éloigne légèrement le système de son régime stationnaire, peut-elle avoir des conséquences importantes et être amplifiée au cours du temps.

Stabilités au sens de Lagrange : la solution $X(t)$ est stable au sens de Lagrange si elle est bornée :

$$\exists L_s > 0 \text{ tel que } \forall t, \|X(t)\| \leq L_s$$

Stabilité au sens de Poincaré : la solution $X(t)$ de condition initiale X_0 à $t = t_0$ est stable au sens de Poincaré si la trajectoire du flot initiée avec $X_0 + \delta X_0$ à $t = t_0$ reste dans un tube de rayons ε_s , autour de la trajectoire de $X(t)$.

Stabilité au sens de Lyapunov : la solution $X(t)$ est stable au sens de Lyapunov si pour tout $\varepsilon_s > 0$, il existe $\delta(\varepsilon_s) > 0$ tel que toute solution $Y(t)$ vérifiant $\|Y(t_0) - X(t_0)\| < \delta$ implique que $\forall t \geq t_0, \|Y(t) - X(t)\| < \varepsilon_s$.

Stabilité asymptotique : la solution $X(t)$ est asymptotiquement stable au sens de Lyapunov si de plus on a : $\lim_{t \rightarrow \infty} \|Y(t) - X(t)\| = 0$

La différence entre la stabilité asymptotique et la stabilité au sens de Lyapunov réside dans le fait qu'une petite perturbation sur l'état initial d'un système autour d'un point fixe

stable peut engendrer des petites oscillations entretenues, alors que ces dernières s'amortissent au cours du temps.

1.11 Attracteurs

La région de l'espace de phases vers laquelle convergent les trajectoires d'un système dynamique dissipatif s'appelle "attracteur". Les attracteurs sont des formes géométriques qui caractérisent l'évolution à long terme des systèmes dynamiques. Il en existe deux types d'attracteurs :

1.11.1 Attracteurs régulières

1. Un attracteur réduit à un point est appelé point fixe, les points fixes sont des points singuliers du système dynamique.
2. Un attracteur formant une courbe fermée est appelé cycle limite.
3. L'attracteur "tore" représente les mouvements résultant de deux ou plusieurs oscillations indépendantes que l'on appelle par fois "mouvements quasi périodique".

1.11.2 Attracteurs étranges

Les attracteurs étranges sont bien plus complexes que les autres, ils seront définis ultérieurement, on parle d'attracteur étrange lorsque la dimension fractale n'est pas entière.

1.12 Théorie des bifurcations

La théorie des bifurcations est un aspect fondamental de l'étude des systèmes dynamiques, ses origines se situent dans les travaux de H.Poincaré sur l'effet de la variation d'un paramètre sur la solution d'un système dynamique. Le nombre de paramètres qui sont

nécessaires de varier pour retrouver une situation structurellement stable partant d'une situation structurellement instable est appelée la codimension du problème. Dans un système se ramènent à quatre types de bifurcations générique que nous allons présenter sur quatre cas simples monodimensionnels :

1.12.1 Bifurcation noeud-col

C'est la bifurcation la plus simple lorsque c franchit 0, un point d'équilibre stable (noeud) et un point d'équilibre instable (col) apparaissent simultanément, elle est souvent représenté par l'équation :

$$\frac{dX}{dt} = c - X^2 \quad (1.5)$$

Qui s'appelle équation générique de bifurcation noeud-col, On a alors $F(X, c) = c - X^2$

* Si $c < 0$, l'équation $F(X, c) = 0$ n'admet pas de solution alors on n'a pas de points fixes.

* Si $c > 0$, on a :

$$c - X^2 = 0 \iff X^2 = c$$

$$\iff \begin{cases} X = \sqrt{c} \\ \text{ou} \\ X = -\sqrt{c} \end{cases}$$

Par conséquent (1.5) admet deux point fixes.

$\frac{dF(X, c)}{dX} = -2X$ alors $\frac{dF(X, c)}{dX} \Big|_{X=\sqrt{c}} = -2\sqrt{c} < 0$ et $\frac{dF(X, c)}{dX} \Big|_{X=-\sqrt{c}} = 2\sqrt{c} > 0$ par suite :

Le point fixe $X = -\sqrt{c}$ est stable, mais $X = \sqrt{c}$ est instable.

* Si $c = 0$ le seul point fixe est $X = 0$, par intégration de (1.5) on obtient :

$$X(t) = \frac{1}{t + \frac{1}{X_0}}$$

D'où le point $X = 0$ est semi-stable. (stable si $X_0 \succ 0$ est instable si $X_0 \prec 0$)

1.12.2 Bifurcation transcritique

Elle est caractérisée par un échange de stabilité entre des points fixes (les points stables deviennent instable et vice versa) lorsque c franchit 0. Elle est souvent représentée par l'équation :

$$X(t) = \frac{1}{t + \frac{1}{X_0}}$$

D'où le point $X = 0$ est semi-stable. (stable si $X_0 \succ 0$ est instable si $X_0 \prec 0$)

1.12.3 Bifurcation transcritique

Elle est caractérisée par un échange de stabilité entre des points fixes (les points stables deviennent instable et vice versa) lorsque c franchit 0. Elle est souvent représentée par l'équation :

$$\frac{dX}{dt} = cX - X^2 \tag{1.6}$$

Qui s'appelle équation générique de la bifurcation transcritique. On a alors

$$cX - X^2 = 0 \iff X(c - X) = 0$$
$$\iff \begin{cases} X = 0 \\ \text{ou} \\ X = c \end{cases}$$

Par conséquent on a deux points fixes

$\frac{dF(X, c)}{dX} = c - 2X$ donc $\left. \frac{dF(X, c)}{dX} \right|_{X=0} = c$ et $\left. \frac{dF(X, c)}{dX} \right|_{X=c} = -c$ par suite :

- Si $c \prec 0$, le point fixe $X = 0$ est stable, mais $X = c$ est instable.

- Si $c \succ 0$, le point fixe $X = 0$ est instable, mais $X = c$ est stable.

On remarque un échange de stabilité en $c = 0$.

– Si $c = 0$, le seul point fixe est $X = 0$, par intégration de (1.6) on obtient :

$$X(t) = \frac{1}{t + \frac{1}{X_0}}$$

D’où le point $X = 0$ est semi-stable. (Stable si $X_0 > 0$ et instable si $X_0 < 0$)

1.12.4 Bifurcation fourche (Pitchfork)

Au point de bifurcation fourche la stabilité d’un point fixe change au profit de la naissance d’une paire de point fixes.

$$\frac{dX}{dt} = cX - X^3$$

Et pour sous -critique :

$$\frac{dX}{dt} = cX + X^3$$

Dans le cas d’une bifurcation fourche sur-critique, on a $F(X, c) = cX - X^3$

$$cX - X^3 = 0 \iff X(c - X^2) = 0$$

$$\iff \left\{ \begin{array}{l} X = 0 \\ \text{ou} \\ c - X^2 = 0 \iff X^2 = c \end{array} \right.$$

Alors si $c < 0$ on a un seul point fixe $X = 0$.

Si $c > 0$ on a trois point fixes :

$$\left\{ \begin{array}{l} X = 0 \\ X = \sqrt{c} \\ X = -\sqrt{c} \end{array} \right.$$

$$\frac{dF(X, c)}{dX} = c - 3X^2 \text{ alors } \left. \frac{dF(X, c)}{dX} \right|_{X=0} = c \text{ et } \left. \frac{dF(X, c)}{dX} \right|_{X=\mp\sqrt{c}} = -2c \text{ par suite :}$$

*Si $c \prec 0$, le seul point fixe $X = 0$ est instable.

*Si $c \succ 0$, le point fixe $X = 0$ est stable, mais $X = \sqrt{c}$ et $X = -\sqrt{c}$ sont instables.

On remarque un échange dans le nombre des points fixes est dans la stabilité en $c = 0$

1.12.5 Bifurcation Hopf

La bifurcation Hopf aura lieu lorsque la paramètre de contrôle c prend une valeur critique c_0 pour la quelle la matrice jacobienne du système possède une paire de valeurs propres complexes conjuguées qui traversent l'axe imaginaire et le type de stabilité de l'équilibre existant change avec l'apparition d'un cycle limite.

Définition 1.12.1 *Soit :*

$$\frac{dX}{dt} = F(X,t,c) \quad (1.7)$$

Un système dynamique non linéaire de dimension n et de paramètre de contrôle c . Une bifurcation est un changement qualitatif de la solution X_0 de système (1.5) lorsqu'on modifie c , d'une manière plus précise la disparition ou le changement de stabilité et l'apparition de nouvelles solutions.

Chapitre 2

Chaos

2.1 Théorie du chaos

Il n'existe pas encore de définition du chaos valable pour un système dynamique quelconque, mais on peut dire que c'est l'étude des systèmes qui ont une évolution extrêmement complexe et qui paraissent désordonnés. Cette théorie fut développée à partir des années soixante, lorsque Edward Lorenz montra le caractère chaotique de l'atmosphère terrestre. On peut donner une définition approchée du chaos comme.

Définition 2.1.1 :

Un système dynamique chaotique est un système qui est étudié à partir d'une équation différentielle comme tout autre système mais dont la représentation dans un espace orthonormé cartésien donne une courbe complètement désordonnée. Alors on peut dire un système déterministe qui possède un comportement imprévisible à long terme. Cette imprévisibilité est due à la sensibilité aux conditions initiales.

2.1.1 Détection du chaos

Il existe plusieurs méthodes qui permettent de déterminer si des systèmes non linéaires sont ou non chaotiques. Elles ne sont généralement pas très nombreuses, ni réparties sur

un temps suffisamment long à l'échelle du système étudié. On choisit de mettre en œuvre deux méthodes les plus couramment utilisées : la dimension fractale et les exposants de Lyapunov.

Les exposants de Lyapunov :

La méthode de Lyapunov permet de déterminer si la solution d'un système dynamique est stable ou non, lorsqu'on étudie le rapport de la moyenne exponentielle de divergence entre les deux orbites initiales. Ce rapport également appelé exposant de Lyapunov, est très utile, pour distinguer les différents types d'orbites, aussi bien pour les systèmes dynamiques non linéaires discrets que continus.

La formule générale de calcul des exposants est la suivante :

$$E_p = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \ln \left| \frac{\Delta X(X_0, t)}{\Delta X_0} \right| ; \text{ quand } |\Delta X_0| \rightarrow 0$$

Si $E_p < 0$, l'orbite est attractive vers un point fixe ou une orbite périodique stable. Il caractérise les systèmes dissipatifs. Les points fixes et les points périodiques super stables ont un exposant de Lyapunov qui tend vers $-\infty$.

Si $E_p = 0$, l'orbite est un point fixe neutre. Un système physique avec un tel exposant est dit conservateur. Dans cette situation, les orbites gardent une séparation constante.

Si $E_p > 0$, l'orbite est instable et chaotique. Tous les points voisins doivent être visités : ces points sont dit instables. Pour un système discret, on a un ensemble des points sans aucun rapport de liaison. Pour un système continu, l'espace de phase est un ensemble de lignes croisées.

Dimension fractale :

Le principe de cette méthode a mesure la dimension de l'attracteur du système étudié et ainsi déterminer si oui ou non il est construit de manière fractale. Si à l'issue de calcul, nous obtenons une valeur positive ou entière, cela signifie que le système possède un attracteur étrange. Plusieurs dimensions ont été proposées, on cite quelques une : il y a la dimension de Kolomogrov, dimension de corrélation et dimension de Lyapunov, il y a

une différence légère entre chaque une de ces dimension, mais elles caractérisent, toutes, l'attracteur étrange avec sa dimension fractale et satisfont les propriétés suivantes :

1. $A \subset B \Rightarrow d(A) \leq d(B)$.
2. $A = \emptyset \Rightarrow d(A) = 0$.
3. $d(A \times B) = d(A) + d(B)$.

2.1.2 Propriétés du chaos

Les phénomènes chaotiques traités par les lois déterministes, il caractérisent par des propriétés génériques fondamentales en plus de la sensibilité aux conditions initiales on peut citer les propriétés suivantes :

1. La non linéarité :

Un système linéaire admet toujours des solutions, les effets sont prévisibles et proportionnels aux causes qui les ont engendrés. On peut le décomposer en sous-ensembles ou le composer avec d'autres systèmes sans qu'il perde ses propriétés. Mais un système non linéaire, n'est en général pas soluble, plus on tente de le décomposer, plus la complexité interne se révèle.

2. La structure fractale :

Le comportement d'un système chaotique se reproduit de manière auto similaire à des échelles différentes. Plus on le regarde de près, plus on découvre de nouveaux détails comparables à ceux qu'on observait aux échelles supérieures. Sa représentation géométrique ne s'intègre pas dans un espace de dimension entière, mais de dimension fractionnaire (une courbe, n'est plus tout à fait une courbe, mais elle n'est pas devenue une surface).

3 Les attracteurs étranges :

Bien qu'imprévisibles et infiniment complexes à toutes les échelles, les systèmes chaotiques ne suivent pas des trajectoires privilégiées. La courbe d'un tel système, sans jamais repasser

par les mêmes points évolue toujours dans un espace délimité dans lequel elle finit par décrire une figure géométrique particulière qui représente son attracteur, appelé étrange en raison de l'étrangeté de ce comportement.

2.1.3 Avantages du chaos

Les systèmes chaotiques sont des systèmes dynamiques qui évoluent dans une région bornée, qui possède une infinité de trajectoire non périodiques dense, ils sont très sensibles aux conditions initiales : deux conditions initiales très proches conduisent à deux trajectoires qui s'éloignent rapidement l'une de l'autre. Les propriétés nous permettent théoriquement de générer un nombre infini de signaux chaotiques non corrélés d'un même système en utilisant différents valeurs initiales. Ceci peut être employé pour générer des séries de nombres pseudo-aléatoire. Cette série est très utile dans certains crypto-système traditionnels ou dans le protocole de TCP/ IP. Une autre application de cette propriété est de produire des séquences chaotiques pour remplacer les séquences étalées conventionnelles utilisé dans les système de spectere étalé par séquence directe. En suite il est à noter qu'en raison de leur propriétés aléatoire, les signaux chaotiques ont des fonctions d'autocorrélation très étroites et des specteres de puissance à large bande proche de bruit blanc. Ainsi la corrélation croisée de signaux chaotiques à une valeur très petite. Puisque le système chaotique à une trajectoire non périodique et est sensible aux conditions et aux paramètres initiaux. Logiquement il peut aussi être employé pour crypter de message.

2.2 Transition vers le chaos

On ne sait pas à l'heure actuelle dans quelles conditions un système va devenir chaotique. Cependant il existe plusieurs types d'évolution possibles d'un système dynamique régulière vers le chaos. Supposons que la dynamique étudiée dépende d'un paramètre de contrôle. Lorsqu'on varie ce paramètre, le système peut passer d'un état stationnaire à

un état périodique, puis au-delà d'un certain seuil, suivre un scénario de transition et devenir chaotique. Il existe plusieurs scénarios qui décrivent le passage du point fixe au chaos. D'une manière générale, l'évolution du point fixe vers le chaos n'est pas progressive mais marquée par le changement discontinu appelés bifurcations. Une bifurcation marque le passage soudain d'un régime dynamique à un autre, qualitativement différent. Tous ces scénarios ont été prédits par la théorie et observés dans nombreuses expériences. En physique, c'est notamment la convection thermique Rayleigh-Bénard, dans la quelle une couche de fluide située entre deux plaques horizontales est soumise à un gradient de température verticale, qui a servi à l'origine de système modèle pour l'étude du chaos. Depuis, le chaos a été mis en évidence dans bien d'autres domaines. On peut citer trois scénarios de transition vers le chaos :

Par Intermittences :

Un mouvement périodique stable est entrecoupé par des bouffées de turbulence. Lorsqu'on augmente le paramètre de contrôle, les bouffées de turbulence deviennent de plus en plus fréquentes, et finalement, la turbulence domine.

Par doublement de période :

Le doublement de période qui est caractérisé par une succession de bifurcation de fourches. A mesure que la contrainte augmente, la période d'un système forcé est multipliée par 2, puis par 4, par 8,...,etc ; ces doublement de période sont de plus en plus rapprochés lorsque la période est infinie, le système devient chaotique. La turbulence dans les fluides peut apparaître suivant ce scénario.

Quasi-périodicité :

La quasi-périodicité qui intervient quand un deuxième système perturbe un système initialement périodique. Si le rapport des périodes des deux systèmes en présence n'est pas

rationnel, alors le système est dit quasi périodique. Ce scénario un peut compliquée est relié à la théorie des nombres, notamment aux travaux de Jean-Christophe Yoccoz, Lauréat de la Médaille Fields en 1994, pour ses travaux sur les systèmes dynamiques.

2.3 Exemples de systèmes dynamiques chaotiques

2.3.1 Modèle de Lorenz

Edward Lorenz fut un météorologue qui, le premier, mit en évidence le caractère chaotique de la météorologie. Le couplage de l'atmosphère avec l'océan est décrit par le système d'équations aux dérivées partielles couplées de Navier-Stokes de la mécanique des fluides. En 1963, Lorenz eut l'idée de chercher un modèle d'équations pour étudier l'instabilité de Rayleigh-Bénard.

Ce modèle a joué un rôle historique important puisque son évolution temporelle fait apparaître un comportement chaotique. De plus, il constitua le premier et célèbre système différentiel dissipatif permettant d'observer un attracteur étrange pour certaines valeurs des paramètres. Dans sa version exprimée en paramètres et variables réduits, le système de trois équations différentielles couplées s'écrit :

$$\begin{cases} \dot{X} = \sigma(Y - X) \\ \dot{Y} = rX - Y - XZ \\ \dot{Z} = XY - bZ \end{cases} \quad (2.1)$$

σ ou Pr désigne le nombre de Prandtl (égale à 10 dans les simulations), $b = 8/3$ et r est le nombre de Rayleigh réduit. Nous allons étudier le comportement et les différents portraits de phases obtenus pour différentes valeurs des paramètres de contrôle

Calcul des points d'équilibres

Les points fixes sont par définition tel que $\dot{X} = \dot{Y} = \dot{Z} = 0$. Un premier point fixes trivial est :

$$P_0 : X = Y = Z = 0, \forall r \geq 0$$

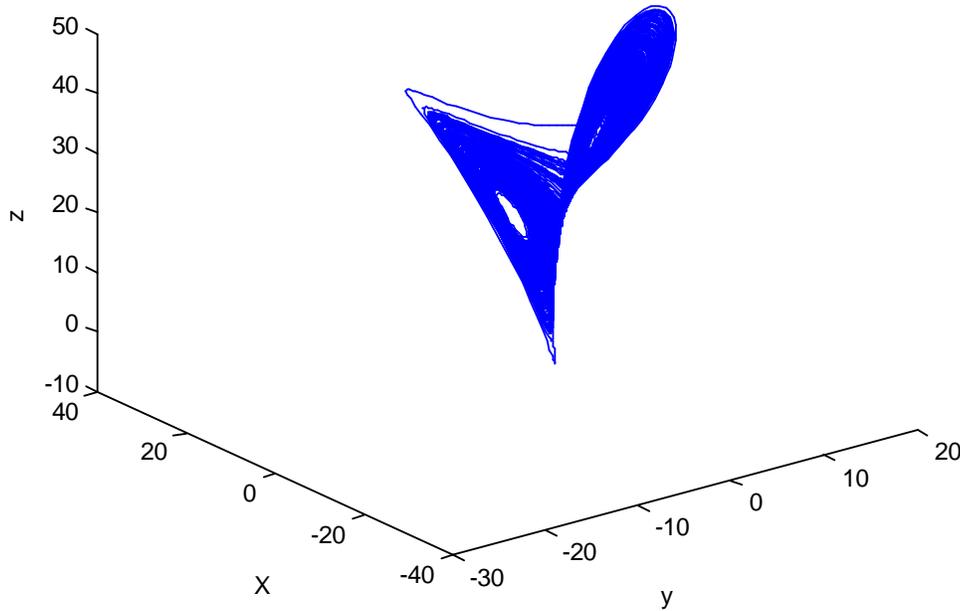


FIG. 2.1 – Attracteur de Lorenz $\sigma = 10, b = 8/3, r = 28$

(1) dans (3) donne $X^2 = bZ \Leftrightarrow X = \mp\sqrt{Z}$

(1) dans (2) donne $-XZ + rZ - Z = 0 \Leftrightarrow Z = r - 1$

Les points fixes P_1 et P_2 sont donc :

$$P_1 = (\sqrt{b(r-1)}, \sqrt{b(r-1)}, r-1) \text{ et } P_2 = (-\sqrt{b(r-1)}, -\sqrt{b(r-1)}, r-1) \quad (2.2)$$

pour $r = 1, P_0 = P_1 = P_2$ donc pour $r \in [0; 1]$, il n'y a qu'un seul point fixe P_0 et pour $r > 1$, il y a 3 points fixes P_0, P_1, P_2

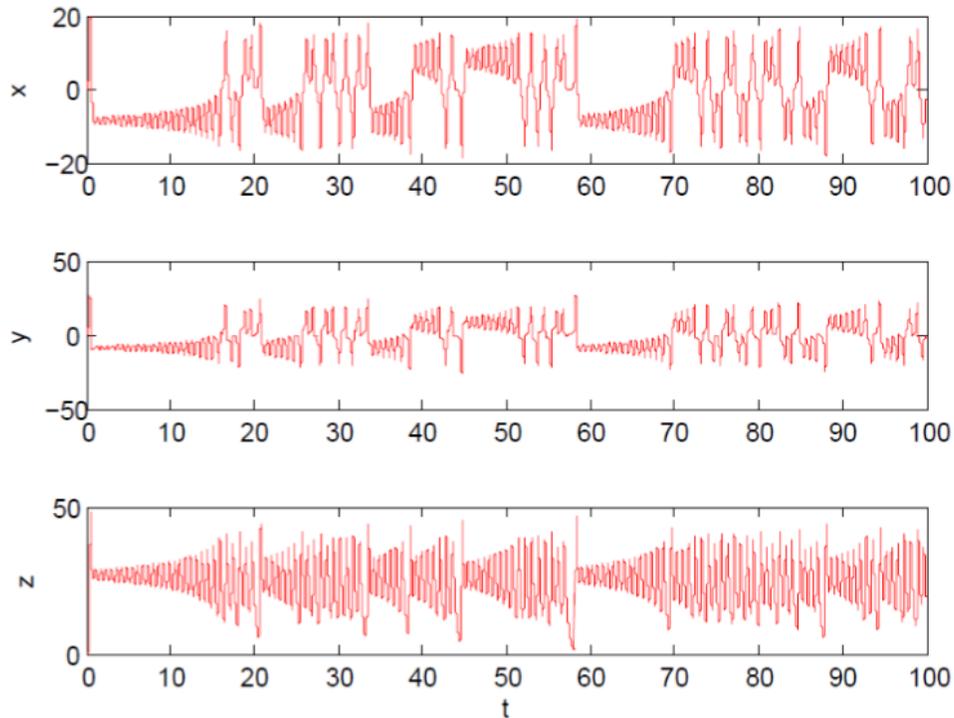


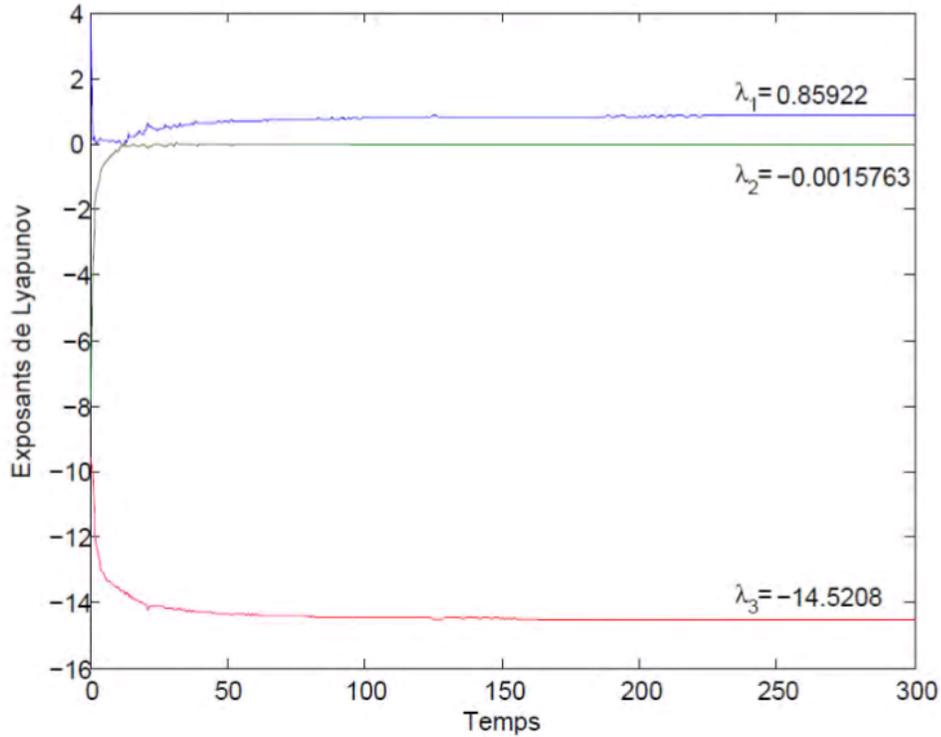
FIG. 2.2 – Séries temporelles $x(t), y(t), z(t)$, du système de Lorenz $\sigma = 10, b = 8/3, r = 28$

Stabilité des points d'équilibre

Nous allons maintenant étudier la stabilité linéaire des points fixes pour le cas $|r - 1| < 1$. La stabilité des points d'équilibre est déterminée en linéarisant le flot au voisinage de ces points et en calculant les valeurs propres, notées λ_i , de la matrice jacobienne en ces points. La matrice jacobienne s'écrit :

$$j = \begin{pmatrix} -\sigma & \sigma & 0 \\ r - Z & -1 & -X \\ Y & X & -b \end{pmatrix} \quad (2.3)$$

Pour P_0



Les exposants de Lyapunov du système de Lorenz $\sigma = 10, b = 8/3, r = 28$

L'origine est un point fixe pour toutes les valeurs de paramètre b, σ et r . La matrice jacobienne est :

$$j = \begin{pmatrix} -\sigma & \sigma & 0 \\ r & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -b \end{pmatrix} \quad (2.4)$$

et comme $\det(j - \lambda i) = 0$, nous avons l'équation caractéristique, suivante :

$$(\lambda + b) [\lambda^2 + (\sigma + 1)\lambda + \sigma(1 - r)] = 0 \quad (2.5)$$

a pour racines :

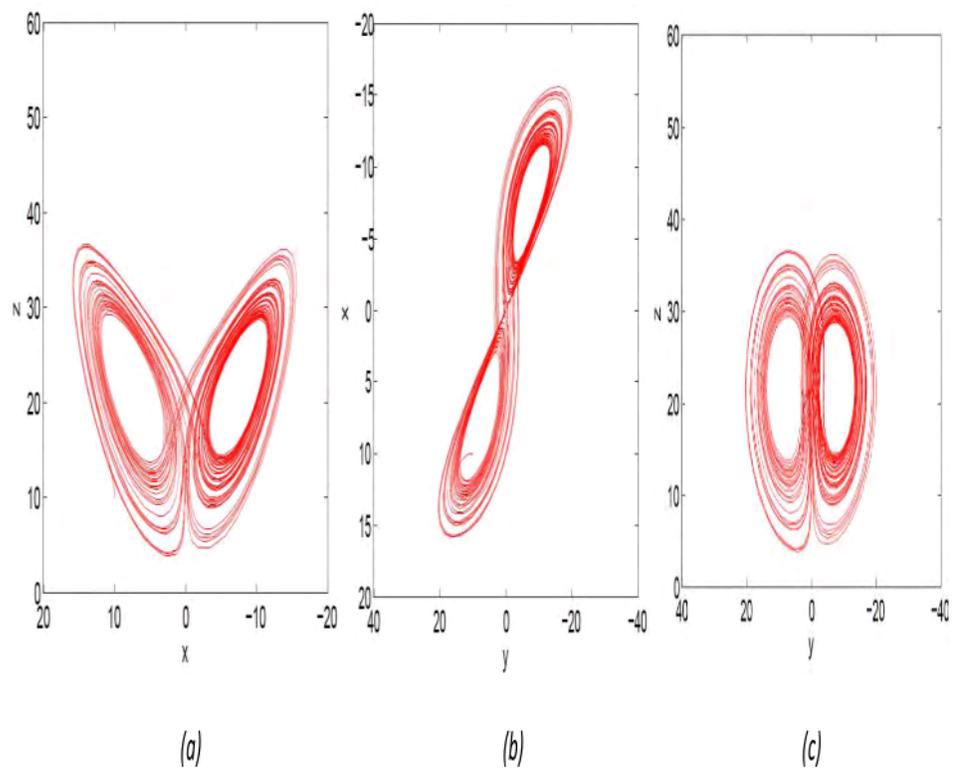


FIG. 2.3 – Attracteur de Lorenz (a) l'espace (x-z), (b) l'espace (y-x), (c) l'espace (y-z)

$$\lambda_1 = \frac{-\sigma - 1 + \sqrt{(\sigma - 1)^2 + 4r\sigma}}{2} \quad (2.6)$$

$$\lambda_2 = \frac{-\sigma - 1 - \sqrt{(\sigma - 1)^2 + 4r\sigma}}{2} \quad (2.7)$$

$$\lambda_3 = -b \quad (2.8)$$

Pour P_1 et P_2 :

La matrice jacobienne correspond à ces points s'écrit :

$$j = \begin{pmatrix} -\sigma & \sigma & 0 \\ -1 & -1 & -\sqrt{b(r-1)} \\ \sqrt{b(r-1)} & \sqrt{b(r-1)} & -b \end{pmatrix} \quad (2.9)$$

Ses valeurs propres sont les racines du polynôme caractéristique :

$$\det(j - \lambda I) = P(\lambda) = \lambda^3 + (\sigma + b + 1)\lambda^2 + b(\sigma + r)\lambda + 2b\sigma(r - 1) \quad (2.10)$$

Le polynôme est d'ordre 3, on peut le résoudre par les formules de **Cardan** et déterminer le signe de racines par les conditions de Routh-Hurwitz.

Et les valeurs du paramètre r , ce polynôme peut avoir trois racines réelles négatives ou bien une racine réelle et deux racines complexes conjuguées.

On peut simplifier ce calcul en utilisant le fait qu'il existe une valeur propre $\lambda_1 = 0$ si $r = 1$ donc on peut supposer que $|\lambda_1| < 1$ si $|r - 1| < 1$ on peut négliger λ_1^2 et λ_1^3 de l'équation

$$\lambda_1 \cong -\frac{2\sigma(r-1)}{br} < 0 \quad \text{pour } r > 1 \quad (2.11)$$

Les autres valeurs propres λ_2, λ_3 ne dépendent pas de r .

$$-\lambda^2 - \lambda(\sigma + 1 + b) - (\sigma b + b) = 0 \quad (2.12)$$

On résout donc :

$$\Delta = (\sigma + 1 + b)^2 - 4b(\sigma + 1)$$

Les valeurs propres sont donc :

$$\lambda_1 = -\frac{(\sigma + 1 + b) - \sqrt{(\sigma + 1 + b)^2 + 16b^2(\sigma + 1)}}{2} < 0 \quad (2.13)$$

$$\lambda_2 = -\frac{(\sigma + 1 + b) + \sqrt{(\sigma + 1 + b)^2 + 16b^2(\sigma + 1)}}{2} < 0 \quad (2.14)$$

On fait de même avec P_2 et on trouve le même résultat $\lambda_3 < \lambda_2 < \lambda_1 < 0$ (noeud stable)

Donc pour les points P_1, P_2 sont stable pour $|r - 1| \ll 1$.

A $r = 1$, on a donc une bifurcation fourche supercritique.

On va maintenant montrer que les points fixes issus de la première bifurcation de stabilisent à leur tour pour une valeurs r_c par une bifurcation de hopf. Cette deuxième bifurcation est caractérisée par une paire de valeurs propres complexes conjuguées pour lesquelles la partie réelle change de signe a la bifurcation. On sait donc qu'il existe des solutions purement imaginaires $\lambda_{1,2} = iw$ quand r assume sa valeur critique r_c . En prenant les parties réelles et imaginaires de l'équation caractéristique on trouvera deux équations

indépendantes permettant de déterminer w et la valeur de r_c . Reprenons l'équation

$$\begin{aligned}
 P(\lambda) &= \lambda^3 + (\sigma + b + 1)\lambda^2 + b(\sigma + r)\lambda + 2b\sigma(r - 1) \\
 &\Leftrightarrow (iw)^3 + (\sigma + b + 1)(iw)^2 + b(\sigma + r_c)(iw) + 2b\sigma(r_c - 1) \\
 &\Leftrightarrow \begin{cases} w^2(\sigma + 1 + b) + 2\sigma b(1 - r_c) = 0 \\ w^3 - w(\sigma b + br_c) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} w^2 = \frac{2\sigma b(r_c - 1)}{\sigma + 1 + b} \\ w^2 = \sigma b + br_c \end{cases} \\
 &\Leftrightarrow \begin{cases} r_c = \frac{\sigma b + \frac{2\sigma b}{\sigma + 1 + b}}{\frac{2\sigma b}{\sigma + 1 + b} - b} \\ w = \pm((\sigma b + b)r_c) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} r_c = \frac{\sigma(\sigma + b + 3)}{\sigma - b - 1} \\ w = \pm((\sigma b + b)r_c) \end{cases}
 \end{aligned}$$

Conclusion

Un système est chaotique s'il est régi par des lois déterministes (équations bien connues) mais que son évolution échappe à toutes prévisions à long terme. L'origine de ce phénomène est la dépendance aux conditions initiales. Les systèmes chaotiques ont un comportement infiniment complexe, et ils sont irrésistiblement attirés par une figure géométrique de structure également infiniment complexe.

Bibliographie

- [1] Abd Elouahab Mohamed Salah (02/03/2009). les systèmes chaotiques à dérivées fractionnaires. Magistère En mathématiques université Mentouri-Constantine.
- [2] Anna Désilles (24/09/2003). Introduction à la théorie des systèmes dynamiques à temps discret.
- [3] Eric Goncalvès da Silva. Introduction aux systèmes dynamiques et chaos. Engineering school. Institut Polytechnique de Grenoble, 2004, pp.23. <cel-00556972>
- [4] Frédéric Faure. Cours de Systèmes dynamiques, chaos et applications. Université Grenoble Alpes, France frederic.faure@univ-grenoble-alpes.fr Master de Physique M1(version : 9 octobre 2017)
- [5] Hamdi Hamiche (2011). Inversion à gauche des systèmes dynamiques hybrides chaotiques (Application à la transmission sécurisée de données). Thèse de doctorat université de Tizi Ouzou
- [6] <http://bu.umc.edu.dz/math/ZER4458.Pdf> Z ELHADJ-2006
- [7] Ibtissem Talbi (29/06/2010). Système dynamiques non linéaires et phénomènes de chaos (Application à la cryptographie). Mémoire de magistère en mathématique université Mentouri de constantine.
- [8] Mammerie Mohammed (16/06/2011). Sur la stabilité structuruelle des difféomorphismes quadratique en dimension 2. Magistère en mathématique université Kasdi Merbttah-Ourgla

- [9] Ruelle, D et Takence, F. On the nature of turbulence. Commun Math Phys 1971, 20, 167-192.
- [10] Tayeb Hamaizia (25/04/2013). Systèmes dynamiques et chaos "Application à l'optimisation à l'aide d'algorithme chaotique ". thèse Mathématique université de Constantine -1-

