République Algérienne Démocratique et Populaire

Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

UNIVERSITÉ MOHAMED KHIDER, BISKRA

FACULTÉ des SCIENCES EXACTES et des SCIENCES de la NATURE et de la VIE

DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES

Mémoire présenté en vue de l'obtention du Diplôme **:**

MASTER en Mathématiques

Option : **Probabilité**

Par

SOUALHI Kahina

Titre :

L'existence de contrôle optimal relaxé pour les EDSRs

Membres du Comité d'Examen :

Dr.	ZEGHDOUDI Kadem	UMKB	Président
Dr.	**GATT Rafika**	UMKB	Encadreur
Dr.	CHALA Adel	UMKB	Examinateur

Juin 2018

Dédicace

Du profond de mon coeur, je dédie ce travail à tous ceux qui me sont chèrs,

A MA CHERE MERE

Aucune dédicace ne serait exprimée mon respect, mon amour éternel et ma considération pour les sacrifices que vous avez consenti pour mon instruction et mon bien être.

Je vous remercie pour tout le soutien et l'amour que vous me portez depuis mon enfance et j'espère que votre bénédiction m'accompagne toujours.

Que ce modeste travail soit l'exaucement de vos voeux tant formulés, le fruit de vos innombrables sacrifices.Puisse Dieu, le très Haut, vous accorde santé, bonheur et longue vie.

A MA CHERE FAMILLE

Ce travail est dédié à mes frères : Khaled et Bilal et mes soeurs : Hanane, Amal, Siham, Wassila, qui m'avons toujours poussée et motivée dans mes études.

Sans oublier Asma et Mouhamed et mes nièces : Ciline Lilyane et mon neveu : Nayar.

Je vous aime de tout mon coeur.

REMERCIEMENTS

Avant de commencer la présentation de ce mémoire, je profite l'occasion pour remercier du fond du coeur toute personne qui a contribué de près ou de loin à la réalisation de ce travail.

Je tiens à exprimer ma profonde reconnaissance à Mme Rafika GATT l'encadreur pour son soutien et pour son aide et de m'avoir encouragée moralement toute la durée de recherche.

Mes remerciments à toute personne qui m'a guidée.

Je souhaite remercier tout particulièrement ma famille pour son soutien moral et de m'avoir permise de faire de longues études loin de chez moi et de m'avoir soutenu pendant ces années.

Table des matières

Introduction

Dans ce mémoire nous intéessons à l'existence du contrôle optimal relaxé pour les équations différentielles stochastiques rétrogrades.

Nous allons présenter dans ce qui suit la discription des chapitres de ce mémoire :

Le premier chapitre est consacré à la théorie du calcul stochastique, en donnant des définitions et les théorèmes des processus continus ainsi qui leur résultats principaux qui nous permettre de définir le processus d'Itô qui sont : la filtration, adaptation, intégrale d'Itô, représentation des martingales browniennes, formule d'Itô,...etc.

Le deuxième chapitre nous avons présenté le résultat d'existence et d'unicité de la solution d'équation différentielle stochastique rétrograde (EDSR) dont les coefficients sont globalement lipschitziens. Ce résultat a été obtenu par Pardoux et Peng avec le générateur non linéaire et une donné terminale de carré intégrable.

Dans le troisième chapitre nous démonstrons l'éxistence de contrôle optimal pour les équations différentielles stochastiques progréssives rétrogrades (EDSPRs) dans le quel nous avons basé sur la méthode de démonstration sur des arguments de tension des lois associées aux processus en question et une version du théorème de représentation de Skorokhod.

Chapitre 1

Rappel sur le calcul stochastique

Ce chapitre ayant pour but de mettre en relief les outils de notre étude. L'objet mathématique fondamental est le mouvement brownien.

1.1 Mouvement brownien

Dans ce résumé, on supposera donné un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{F}, P)$.

Définition 1.1.1 ***(Filtration)*** *Une filtration $\{\mathcal{F}_t; 0 \leq t < +\infty\}$ est une famille croissante de sous-tribus de $\mathcal{F}$: pour tout $0 \leq s \leq t < +\infty, \mathcal{F}_s \subseteq \mathcal{F}_t$.*

Définition 1.1.2 ***(Processus adapté)*** *Un processus est dit adapté à la filtration $\{\mathcal{F}_t; 0 \leq t < +\infty\}$ si pour tout t, la variable aléatoire X_t est $\mathcal{F}_t$-mesurable.*

Définition 1.1.3 ***(Processus progressivement)*** *Un processus progressivement mesurable par rapport à la filtration $\{\mathcal{F}_t; 0 \leq t < +\infty\}$, si pour tout $t \geq 0$:*

$$([0,t] \times \Omega, B([0,t]) \otimes \mathcal{F}) \to \left(\mathbb{R}^d, B\left(\mathbb{R}^d\right)\right).$$

$$(s,w) \to X_s(w)$$

est mesueable.

Définition 1.1.4 ***(Mouvement brownien (M.B))*** *Un processus stochastique* $\{W_t, t \geq 0\}$ *est apelé un mouvement brownien sur* $\mathbb{R}^d$ *s'il satisfait les conditions suivantes :*

1. $W_0 = 0$*, P-p.s.*

2. Pour tout $0 \leq s < t$*, l'accroissement* $W_t - W_s$ *est indépendant de* $\mathcal{F}_s$*.*

3. Pour tout $0 \leq s < t$*, l'accroissement* $W_t - W_s$ *suite une loi normale centré, de covariance* $\sqrt{t-s}\ Id_d$*,* Id_d *la matrice identité de dimention d.*

1.2 Intégrale stochastique

On suppose donné un mouvement brownien W avec sa filtration $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$. On définit deux classes de processus :

$$\mathbb{H}^2 = \left\{ H = (H_t)_{t\geq 0}\,,\ \text{processus adapté, tel que } \forall t;\ E\int_0^t H_s^2 ds \prec +\infty \right\},$$

et $\mathcal{M}_c^2$ l'ensemble des martingales (par rapport à la filtration du Brownien), de carré intégrable, continues et nulles à l'instant 0.

Théorème 1.2.1 ***(Intégrale d'Itô)*** *Il existe une unique application linéaire, notée* I*, de* H^2 *dans* M_c^2 *telle que pour tout* $H \in H^2$ *et tout* t

$$E\left(I\left(H_t\right)^2\right) = E\left(\int_0^t H_s^2 ds\right).$$

On note :

$$I\left(H_t\right) = \int_0^t H_s ds.$$

Théorème 1.2.2 ***(Représentation des martingales browniennes)*** *Soient* $\{W_t, \mathcal{F}_t; 0 \leq t < +\infty\}$ *un mouvement brownien et* $M = \{M_t; 0 \leq t < +\infty\}$ *une martingale brownienne de carré intégrable et telle que* $M_0 = 0$*. Alors il existe un processus* $H \in \mathbb{H}^2$ *tel que pour tout* $t \geq 0$ *:*

$$M_t = M_0 + \int_0^t H_s dW_s.$$

1.3 Formule d'Itô

La formule d'Itô est un outil particulièrement important dans l'étude des processus stochastiques.

Définition 1.3.1 ***(Processus d'Itô ou semi-martingales)*** *Un processus X, à valeurs dans $\mathbb{R}^k$, est appelé processus d'Itô s'il de la forme suivante*
pour tout t presque sûrement :

$$X_t = X_0 + \int_0^t K_s ds + \int_0^t H_s dW_s,$$

avec X_0 et K à valeur dans $\mathbb{R}^k$, H à valeur dans $\mathbb{R}^{k\times d}$, $H \in \mathbf{H}^2$ et

$$\int_0^t \mid K_s \mid ds < +\infty \qquad \forall t.$$

Cette décomposition est unique.

Théorème 1.3.1 ***(Formule d'Itô)*** *Soit f une fonction définie sur $[0, +\infty[\times \mathbb{R}^k$, à valeurs réelles, une fois continument dérivable en temps et deux fois en espace. Soit X une semi-martingale à valeurs dans $\mathbb{R}^k$ donnée par :*

$$X_t^i = X_0^i + \int_0^t K_s^i ds + \sum_{j=1}^d \int_0^t H_s^{i,j} dW_s, \qquad t \geq 0, 1 \leq i \leq k, 1 \leq j \leq d.$$

Alors $\{f(t, X_t); 0 \leq t < +\infty\}$ est aussi une semi-martingale et admet la décomposition suivante :

$$f(t, X_t) = f(0, X_t) + \int_0^t \frac{\partial f}{\partial t}(s, X_s)\, ds + \sum_{i=1}^n \int_0^t \frac{\partial f}{\partial x_i}\left(s, X_s dX_s^i\right) + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n \int_0^t \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(s, X_s)\, d\langle X^i, X^j\rangle_s.$$

Si X et Y sont deux semi-martingales,

$$X_t = X_0 + \int_0^t K_s ds + \int_0^t H_s dW_s,$$

$$Y_t = Y_0 + \int_0^t K_s^{'} ds + \int_0^t H_s^{'} dW_s,$$

$$\int_0^t X_s dY_s = X_t Y_t - X_0 Y_0 - \int_0^t Y_s dX_s - \int_0^t H_s H_s^{'} ds.$$

Définition 1.3.2 ***(Inégalité de Doob)*** *Soit $(X_t)_{t \geq 0}$ une sous-martingale positive .Alors pour tout $p > 1$ et $T > 0$ on a :*

$$E\left[\sup_{0 \leq t \leq T} X_t\right]^p \leq \left(\frac{p}{p-1}\right)^p E\left[(X_T)^p\right].$$

Lemme 1.3.1 ***(lemme de Gronwall)*** *Soit $\phi \in L^1[a,b]$ une fonction qui satistait :*

$$\phi(t) \leq f(t) + \beta \int_a^b \phi(s) ds, \qquad \forall t \in [a,b],$$

où $f \in L^1[a,b]$ et β une constante positive. Alors on :

$$\phi(t) \leq f(t) + \beta \int_a^b f(s) e^{\beta(t-s)} ds.$$

En particulier, si la fonction f est une constante égale à α on :

$$\phi(t) \leq \alpha e^{\beta(t-s)}, \qquad \forall t \in [a,b].$$

Lemme 1.3.2 ***(lemme de Fatou)*** *Soit $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite. Alors :*

$$\int_X \left(\liminf_{n \longrightarrow \infty} f_n\right) d\mu \leq \liminf_{n \longrightarrow \infty} \int_X f_n d\mu.$$

Théorème 1.3.2 ***(Inégalité de Burkholder-Davis-Gundy)*** *Pour tout $p > 0$, il existe*

C_p tele que pour tout temps d'arrêt τ on a :

$$E\left[\sup_{t\leq\tau} \mid \int_0^t f(s)dB_s \mid\right]^p \leq C_p E\left[\left(\mid \int_0^t f(s) \mid^2 ds\right)^{\frac{p}{2}}\right].$$

En particulier pour $p=2$ et $\tau=T$ on a :

$$E\left[\sup_{0\leq t\leq T} \mid \int_0^t f(s)dB_s \mid\right]^2 \leq CE\left[\left(\mid \int_0^t f(s) \mid^2 ds\right)\right]$$

Chapitre 2

Equations différentielles stochastiques rétrogrades

L'objectif de ce chapitre est de présenter le résultat classique d'éxistence et d'unicité d'équations différentielles stochastiques rétrogrades (**EDSR**) dont les coefficients sont globalement Lipschitiziens.Ce résultat à été obtenu par Pardoux et Peng avec le générateur non linéaire et une donné terminale de carré intégrable.

2.1 Notation

2.1.1 Justification de la stucture des EDSRs

Donnons nous un mouvement Brownien W, défini sur un espace probabilisé complet $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ dont la filtration naturelle augmentée est notée $\{\mathcal{F}_t\}_{t\geq 0}$. Imaginons à présent que l'on souhaite résoudre l'équation différentielle suivante :

$$\frac{-dY_t}{dt} = f(Y_t), \qquad t \in [0, T], \qquad \text{avec , } Y_T = \xi,$$

où ξ est une variable aléatoire $\mathcal{F}_T$ mesurable, c'est-à-dire une variable aléatoire connue à l'instant T. Supposons pour simplifier que $f \equiv 0$. Le problème devient alors

$$dY_t = 0, \quad t \in [0, T], \qquad \text{avec }, Y_T = \xi,$$

un candidat solution à ce problème est alors $Y_t = \xi$, Cependant, si nous demandons à la solution de ne pas dépendre du future, c'est-à-dire d'être adapté à la filtration générée par le mouvement brownien $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$, alors la solution proposée ne convient pas. Un moyen naturel de rendre adapté ξ sans changer sa valeur terminale est de considérer son espérance conditionnelle par rapport à la filtration du mouvement brownien. Un nouveau candidat solution est alors $Y_t = E(\xi \mid \mathcal{F}_t)$. Comme ce terme n'est a priori pas différentiable en temps au sens usuel, nous utilisons le théorème de représentation des martingales browniennes pour faire apparaître une intégrale stochastique. Y_t étant une martingale brownienne, il existe un processus Z adapté et de carré intégrable tel que, pour tout $t \in [0, T]$:

$$Y_t = E(\xi \mid \mathcal{F}_t) = E[\xi] + \int_0^t Z_s dW_s.$$

En differenciant la relation précédente il apparaît que $Y_t = E(\xi \mid \mathcal{F}_t)$ résout l'équation suivante :

$$Y_t = \xi - \int_t^T Z_s dW_s, \qquad i.e. \qquad - dY_t = -Z_t dW_t, \qquad \text{avec }, \quad Y_T = \xi.$$

Manifestement, la structure de l'équation initiale a été modifiée, faisant apparaître un nouveau terme $Z_t dW_t$ qui permet de rendre adaptée la solution. Revenons à présent au problème initial, comme nous introduisons un terme supplémentaire Z dans l'équation, il est naturel d'autoriser la fonction f à dépendre de Z, ce qui nous conduit au problème :

$$-dY_t = f(t, Y_t, Z_t)\, dt - Z_t dW_t, \qquad \text{avec }, \qquad Y_T = \xi.$$

2.1.2 Notation.

Soient l'espace de probabilité complet $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ et W un Mouvement Brownien d-dimensionnel sur cet espace.

On notera $\{\mathcal{F}_t\}_{t\geq 0}$la filtration naturelle du MB W. On travaillera avec deux espaces de processus :

Soit $S^2\left(\mathbb{R}^k\right)$ l'espace vectoriel formé des processus Y, progressisvement mesurable, à valeur dans $\mathbb{R}^k$, tels que :

$$\| Y \|_{S^2}^2 := E\left[\sup_{0\leq t\leq T} \mid Y_t \mid^2\right] < \infty,$$

et $S_c^2\left(\mathbb{R}^k\right)$ le sous -espace formé par les processus continus.

et $M^2\left(\mathbb{R}^{k\times d}\right)$ l'espace des processus Z, progressivement mesurable, à valeurs dans $\mathbb{R}^{k\times d}$, tels que :

$$\| Z \|_{M^2}^2 := E\left[\int_0^T \| Z_t \|^2 \, dt\right] < \infty,$$

où si $z \in \mathbb{R}^{k\times d}, \| z \|^2 = trace\,(zz^*)\,.M^2\left(\mathbb{R}^{k\times d}\right)$ désigne l'esemble des classes d'équivalence de $M^2\left(\mathbb{R}^{k\times d}\right)$.

Les espaces S^2, S_c^2 et M^2 sont des espaces de Banach pour les normes définies précédemment. Nous désignerons B^2 l'espace de Banach $S_c^2\left(\mathbb{R}^k\right) \times M^2\left(\mathbb{R}^{k\times d}\right)$.

Nous nous indiquons une application aléatoire f définie sur $[0, T] \times \Omega \times \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^{k\times d}$ à valeurs dans $\mathbb{R}^k$ telle que, pour tout $(y, z) \in \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^{k\times d}$, le processus $\{f\,(t, y, z)\}_{0\leq t\leq T}$ soit progressivement mésurable.

Alors, on voudrait bien résoudre l'équation différentielle stochastique rétrograde (**EDSR**) suivante :

$$-dY_t = f\,(t, Y_t, Z_t)\,dt - Z_t dW_t, \qquad 0 \leq t \leq T, \qquad Y_T = \xi,$$

ou, d'autre manière, sous forme intégrale,

$$Y_t = \xi + \int_t^T f(r, Y_r, Z_r)\, dr - \int_t^T Z_r dW_r, \qquad 0 \leq t \leq T. \tag{2.1}$$

La fonction f s'appelle le générateur de l'**EDSR**, ξ la codition terminale Alors sans plus tarder, précisions ce que l'on entend par solution de l' **EDSR 2.1.**

Définition 2.1.1 *Une solution de l'**EDSR 2.1** est un couple de processus* $\{(Y_t, Z_t)\}_{0 \leq tT}$ *vérifiant*

1. Y *et* Z *sont progressivement mesurables à valeurs respectivement dans* $\mathbb{R}^k$ *et* $\mathbb{R}^{k\times d}$ *;*

2. P-p.s. $\int_0^T \{| f(r, Y_r, Z_r) | + \| Z_r \|^2\} dr < \infty$;

3. P-p.s. on a

$$Y_t = \xi + \int_t^T f(r, Y_r, Z_r)\, dr - \int_t^T Z_r dW_r, \qquad 0 \leq t \leq T.$$

Remarque 2.1.1 *Retenir les deux points suivants est trés important :*

1) Les intégrales de l'équation 2.1 étant bien définies.

2) Y *est une semi-martingale continue ; ensuite, le processus* Y *est adapté parce qu'il est progressivement mesurable, et donc en particulier* Y_0 *est une quantité déterministe.*

Avant de donner le théorème principal du Pardoux et Peng d'existence et d'unicité, nous allons prouver que sous une hypothèse faible sur le générateur f le processus Y appartient à S^2.

Proposition 2.1.1 *supposons qu'il existe un processus* $\{f_t\}_{0 \leq t \leq T}$, *positif, appartenant à* $M^2\left(\mathbb{R}^{k\times d}\right)$ *et une constante positive tels que :*

$\forall (t, y, z) \in [0, T] \times \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^{k\times d}$, $\qquad | f(t, y, z) | \leq f_t + \lambda (| y | + \| z \|)$.

Si $\{(Y_t, Z_t)\}_{0 \leq t \leq T}$ *est une solution de l'EDSR 2.1 telle que* $Z \in M^2$ *alors* Y *appartient à* S_c^2.

Preuve. Le résultat se déduit principalement du lemme de Gronwall et du fait que Y_0

est déterministe. En effet, on a, pour tout $t \in [0, T]$:

$$Y_t = Y_0 - \int_0^t f(r, Y_r, Z_r)\, dr + \int_0^t Z_r dW_r,$$

et par suite, utilisant l'hpothèse sur f,

$$| Y_t | \leq | Y_0 | + \int_0^T (f_r + \lambda \| Z_r \|)\, dr + \sup_{0 \leq t \leq T} | \int_0^t Z_r dW_r | + \lambda \int_0^t | Y_r |\, dr.$$

Posons

$$\xi = | Y_0 | + \int_0^T (f_r + \lambda \| Z_r \|)\, dr + \sup_{0 \leq t \leq T} | \int_0^t Z_r dW_r | .$$

Par hypothèse, Z appartient à M^2 et donc, via l'inégalité de Doob, le troisième terme est de carré intégrable ; il en est de même pour $\{f_t\}_{0 \leq t \leq T}$, et Y_0, est déterministe donc de carré intégrable ; il s'en suit que ξ est une variable aléatoire de carré intégrable.
Comme Y est un processus continu-cf. Remarque précédente, le lemme de Gronwall fournit l'inégalité $\sup_{0 \leq t \leq T} | Y_t | \leq \xi e^{\lambda T}$ qui montre que Y appartient à S^2. ■

Remarque 2.1.2 *: Le résultat est encore valable lorsque $\| f \|_1$ est une variable aléatoire de carré intégrable.*

Finissons par un résultat d'intégrabilité qui nous servira à plusieurs reprise.

Lemme 2.1.1 *Soient $Y \in S^2(\mathbb{R}^k)$ et $Z \in M^2(\mathbb{R}^{k \times d})$. Alors $\left\{ \int_0^t Y_s . Z_s dW_s, t \in [0, T] \right\}$ est une martingale uniformément intégrable.*

Preuve. Les inégalités **BDG** donnent

$$\begin{aligned} E\left[\sup_{0 \leq t \leq T} | \int_0^t Y_r Z_r dW_r | \right] &\leq CE\left[\left(\int_0^T | Y_r |^2 \| Z_r \|^2\, dr \right)^{\frac{1}{2}} \right] \\ &\leq CE\left[\sup_{0 \leq t \leq T} | Y_t | \left(\int_0^T \| Z_r \|^2\, dr \right)^{\frac{1}{2}} \right], \end{aligned}$$

et par suite, comme $ab \leq a^2/2 + b^2/2$,

$$E\left[\sup_{0\leq t\leq T} \mid \int_0^t Y_r.Z_r dW_r \mid\right] \leq C'\left(E\left[\sup_{0\leq t\leq T} \mid Y_t \mid^2\right] + E\left[\int_0^T \parallel Z_r \parallel^2 dr\right]\right).$$

Or cette dernière quantité est finie par hypothèse ; d'où le résultat. ■

2.2 Le cas Lipschitz

2.2.1 le résultat de Pardoux-Peng

Dans ce paragraphe, nous allons montrer un premier résultat d'existence et d'unicité qui sera généralisé au chapitre suivant. Ce résultat est dû à E. PARDOUX et S. PENG [6]. C'est le premier résultat d'existence et d'unicité pour les **EDSR**s dans le cas où le générateur est non-linéaire.

Rappelons pour la dernière fois que f est définie sur $[0,T]\times\Omega\times\mathbb{R}^k\times\mathbb{R}^{k\times d}$ à valeurs dans $\mathbb{R}^k$, telle que, pour tout $(y,z)\in\mathbb{R}^k\times\mathbb{R}^{k\times d}$, le processus $\{f(t,y,z)\}_{0\leq t\leq T}$ soit progressivement mesurable. On considère également ξ une variable aléatoire, $\mathcal{F}_T$-mesurable, à valeurs dans $\mathbb{R}^k$.

Voici les hypothèses sous lesquelles nous allons travailler.

(L) Il existe une constante λ telle que P-p.s,

1. condition de Lipschitz en (y,z) : pour tout t, y, y', z, z',

$$\mid f(t,y,z) - f(t,y',z') \mid \leq \lambda\left(\mid y-y' \mid + \parallel z-z' \parallel\right);$$

2. condition d'intégrabilité :

$$E\left[\mid \xi \mid^2 + \int_0^T \mid f(r,0,0) \mid^2 dr\right] < \infty.$$

Nous commençons par un cas trés simple, celui où f ne dépend ni de y ni de z *i.e.* On se donne ξ de carré intégrable et un processus $\{F_t\}_{0\leq t\leq T}$dans $M^2\left(\mathbb{R}^{k\times d}\right)$ et on veut trouver une solution de l'**EDSR**

$$Y_t = \xi + \int_0^T F_r dr - \int_t^T Z_r dW_r, \qquad 0 \leq t \leq T. \tag{2.2}$$

Lemme 2.2.1 *Soient $\xi \in L^2(\mathcal{F}_T)$ et $\{F_t\}_{0\leq t\leq T} \in M^2\left(\mathbb{R}^k\right)$. L'**EDSR** 2.2 possède une unique solution (Y,Z) telle que $Z \in M^2$.*

Preuve. Supposons dans un premier temps que (Y,Z) soit une solution vérifiant $Z \in M^2$. Si on prend l'espérance conditionnelle sachant $\mathcal{F}_t$, on a nécessairement,

$$Y_t = E\left(\xi + \int_t^T F_r dr \mid \mathcal{F}_t\right).$$

On définit donc Y à l'aide de la formule précédente et il reste à trouver Z. Remarquons que, d'aprés le théorème de Fubini, comme F est progressivement mesurable, $\int_0^t F_r dr$ est un processus adapté à la filtration $\{\mathcal{F}_t\}_{t\in[0,T]}$; en fait dans S_c^2 puisque F est de carré intégrable. On a alors, pour tout $t \in [0,T]$,

$$Y_t = E\left(\xi + \int_0^T F_r dr \mid \mathcal{F}_t\right) - \int_0^t F_r dr := M_t - \int_0^t F_r dr.$$

M est une martingale brownienne ; via le théorème de représentation des martingales brownienne on construit un processus Z appartenant à M^2 tel que :

$$Y_t = M_t - \int_0^t F_r dr = M_0 + \int_0^t Z_r dW_r - \int_0^t F_r dr.$$

On vérifie facilement que (Y,Z) ainsi construit est une solution de l'**EDSR** étudiée puisque comme $Y_T = \xi$,

$$\begin{aligned}Y_t - \xi &= M_0 + \int_0^t Z_r dW_r - \int_0^t F_r dr - \left(M_0 + \int_0^T Z_r dW_r - \int_0^T F_r dr \right) \\ &= \int_t^T F_r dr - \int_t^T Z_r dW_r.\end{aligned}$$

L'unicité est évidente pour les solutions vérifiant $Z \in M^2$. ■

Nous montrons à présent le théorème de Pardoux et Peng.

Théorème 2.2.1 *PARDOUX-PENG 90. Sous l'hypothèse* (L), *l'**EDSR 2.1** possède une unique solution* (Y, Z) *telle que* $Z \in M^2$.

Preuve. Nous utilisons un argument du point fixe dans l'espace de Banach B^2 en construisant une application Ψ de B^2 dans lui-même de sorte que $(Y, Z) \in B^2$ est solution de l'**EDSR 2.1** si et seulement si c'est un point fixe de Ψ.

Pour (U, V) élément de B^2, on définit $(Y, Z) = \Psi(U, V)$ comme étant la solution de l'**EDSR :**

$$Y_t = \xi + \int_t^T f(r, U_r, V_r)\, dr - \int_t^T Z_r dW_r, \qquad 0 \leq t \leq T.$$

On remarque que cette dernière **EDSR** possède une unique solution qui est dans B^2. En effet, posons $F_r = f(r, U_r, V_r)$. Ce processus appartient à M^2 puisque, f étant Lipschitz,

$$| F_r | \leq | f(r, 0, 0) | + \lambda | U_r | + \lambda \| V_r \|,$$

et ces trois derniers processus sont de carré intégrable. Par suite, nous pouvons appliquer le Lemme 2.2.1 pour obtenir une unique solution (Y, Z) telle que $Z \in M^2$. (Y, Z) appartient à B^2 : l'intégralité de Z est obtenue par construction et, d'aprés la proposition 2.1.1, Y appartient à S_c^2.

L'application Ψ de B^2 dans lui-même est donc bien définie.

Soient (U,V) et (U',V') deux éléments de B^2 et $(Y,Z)=\Psi(U,V),(Y',Z')=\Psi(U',V')$. Notons $y=Y-Y'$ et $z=Z-Z'$. On a $y_T=0$ et

$$dy_t=-\left\{f\left(t,U_t,V_t\right)-f\left(t,U'_t,V'_t\right)\right\}dt-z_t dW_t.$$

On applique la formule d'Itô à $e^{\alpha t}\mid y_t\mid^2$ pour obtenir :

$$d\left(e^{\alpha t}\mid y_t\mid^2\right)=\alpha e^{\alpha t}\mid y_t\mid^2 dt-2e^{\alpha t}y_t.\left\{f\left(t,U_t,V_t\right)-f\left(t,U'_t,V'_t\right)\right\}dt+2e^{\alpha t}y_t.z_t dW_t+e^{\alpha t}\parallel z_t\parallel^2 dt.$$

Par conséquent, intégrant entre t et T, on obtient :

$$\begin{aligned} e^{\alpha t}\mid y_t\mid^2+\textstyle\int_t^T e^{\alpha r}\parallel z_r\parallel^2 dr &= \textstyle\int_t^T e^{\alpha r}\left(-\alpha\mid y_r\mid^2+2y_r.\left\{f\left(r,U_r,V_r\right)-f\left(r,U'_r,V'_r\right)\right\}\right)dr \\ &\quad -\textstyle\int_t^T 2e^{\alpha r}y_r.z_r dW_r, \end{aligned}$$

et, comme f est Lipschitz, il vient, notant u et v pour $U-U'$ et $V-V'$ respectivement,

$$\begin{aligned} e^{\alpha t}\mid y_t\mid^2+\textstyle\int_t^T e^{\alpha r}\parallel z_r\parallel^2 dr &\leq \textstyle\int_t^T e^{\alpha r}(-\alpha\mid y_r\mid^2+2\lambda\mid y_r\mid\mid u_r\mid+2\lambda\mid y_r\mid\parallel v_r\parallel)dr \\ &\quad -\textstyle\int_t^T 2e^{\alpha r}y_r.z_r dW_r. \end{aligned}$$

Pour tout $\varepsilon>0$, on a $2ab\leq a^2/\varepsilon+\varepsilon b^2$, et donc, l'inégalité précédente donne

$$\begin{aligned} e^{\alpha t}\mid y_t\mid^2+\textstyle\int_t^T e^{\alpha r}\parallel z_r\parallel^2 dr &\leq \textstyle\int_t^T e^{\alpha r}(-\alpha 2\lambda^2/\varepsilon)\mid y_r\mid^2 dr-\int_t^T 2e^{\alpha r}y_r.z_r dW_r \\ &\quad +\varepsilon\textstyle\int_t^T e^{\alpha r}\left(\mid u_r\mid^2+\parallel v_r\parallel^2\right)dr, \end{aligned}$$

et prenant $\alpha=2\lambda^2/\varepsilon$, on a, notant $R_\varepsilon=\varepsilon\int_t^T e^{\alpha r}\left(\mid u_r\mid^2+\parallel v_r\parallel^2\right)dr$,

$$\forall t\in[0,T],\qquad e^{\alpha t}\mid y_t\mid^2+\int_t^T e^{\alpha r}\parallel z_r\parallel^2 dr\leq R_\varepsilon-2\int_t^T e^{\alpha r}y_r.z_r dW_r. \tag{2.3}$$

D'aprés le Lemme 2.1.1, la martingale locale $\left\{\int_t^T e^{\alpha r}y_r.z_r dW_r.\right\}_{t\in[0,T]}$ en réalité est une martingale nulle en 0 puisque Y,Y' appartiennent à M^2.

En particulier, prenant l'espérance - ce qui fait partir l'intégrale stochastique via la remarque précédente -, on obtient facilement, pour $t = 0$,

$$E\left[\int_0^T e^{\alpha r} \parallel z_r \parallel^2 dr\right] \leq E\left[R_\varepsilon\right]. \tag{2.4}$$

Revenant à l'inégalité 2.3, les inégalités **BDG** fournissent - avec C universelle -,

$$E\left[\sup_{0\leq t\leq T} e^{\alpha t} \mid y_t \mid^2\right] \leq E\left[R_\varepsilon\right] + CE\left[\left(\int_0^T e^{2\alpha r} \mid y_r \mid^2 \parallel z_r \parallel^2 dr\right)^{\frac{1}{2}}\right],$$

puis, comme $ab \leq a^2/2 + b^2/2$,

$$E\left[\sup_{0\leq t\leq T} e^{\alpha t} \mid y_t \mid^2\right] \leq E\left[R_\varepsilon\right] + \frac{1}{2}E\left[\sup_{0\leq t\leq T} e^{\alpha t} \mid y_t \mid^2\right] + \frac{C^2}{2}E\left[\int_0^T e^{\alpha r} \parallel z_r \parallel^2 dr\right].$$

Prenant en considération l'inégalité 2.4, on obtient finalement

$$E\left[\sup_{0\leq t\leq T} e^{\alpha t} \mid y_t \mid^2 + \int_0^T e^{\alpha r} \parallel z_r \parallel^2 dr\right] \leq \left(3 + C^2\right) E\left[R_\varepsilon\right],$$

et par suite, revenant à la définition de R_ε,

$$E\left[\sup_{0\leq t\leq T} e^{\alpha t} \mid y_t \mid^2 + \int_0^T e^{\alpha r} \parallel z_r \parallel^2 dr\right] \leq \varepsilon \left(3 + C^2\right) (1 \vee T)\, E\left[\sup_{0\leq t\leq T} e^{\alpha t} \mid u_t \mid^2 + \int_0^T e^{\alpha r} \parallel v_r \parallel^2 dr\right].$$

Prenons ε tel que $\varepsilon\left(3 + C^2\right)(1 \vee T) = 1/2$, de sorte que l'application Ψ est alors une contraction stricte de B^2 dans lui-même si on le munit de la norme

$$\parallel (U, V) \parallel_\alpha = E\left[\sup_{0\leq t\leq T} e^{\alpha t} \mid U_t \mid^2 + \int_0^T e^{\alpha r} \parallel V_r \parallel^2 dr\right]^{\frac{1}{2}},$$

qui en fait un espace de Banach - cette dernière norme étant équivalente à la norme usuelle correspondant au cas $\alpha = 0$. Ψ possède donc un unique point fixe, ce qui assure l'existence et l'unicité d'une solution de l'**EDSR** 2.1 dans B^2.

On obtient ensuite une unique solution vérifiant $Z \in M^2$ puisque la proposition 2.1.1 implique qu'un telle solution appartient à B^2. ■

Remarque 2.2.1 *1/ A partir de maintenant et sans plus insister, l'expression ‹‹ la solution de l'**EDSR** ›› signifiera la solution de l'**EDSR** vérifiant* $Z \in M^2$.
2/ Nous allons voir que le rôle de Z*, plus précisément celui du terme* $\int_t^T Z_r dW_r$ *est de rendre le processus* Y *adapté et que lorsque ceci n'est pas nécessaire* Z *est nul.*

Chapitre 3

Existence de contrôle optimal pour les équations différentielles stochastiques progressives rétrogrades (EDSPRs)

Les résultats de ce chapitre ont été fait par K. Bahlali et al [2]

Dans ce chapitre nous allons donner la démonstration de l'existence de contrôle optimal relaxé pour les équations différentielles stochastiques progréssives rétrogrades dans le cas où les coefficients b, σ et f sont Lipschitziens et le processus de diffusion ne dépond pas de contrôle. La preuve d'existence d'un contrôle optimal relaxé est basée sur des arguments de tension des lois associées aux processus en question et une version du théorème de représentation de Skorokhod dans l'espace D (des processus càdlàg) muni par la S-topologie de Jakubowski [1]. Cette topologie est plus faible que la topologie de Skorokhod, mais les critères de tension sont plus simple à vérifiés. Ces critères de tension sont les mêmes que ceux utilisés dans la topologie de Meyer et Zheng [4].

3.1 Existence de contrôle optimal pour les EDSPRs

3.1.1 Formulation du problème et hypothèses

On considère le problème du contrôle stochastique optimal d'un système gouverné par l' **EDSPR** suivante :

$$\begin{cases} dX_t &= b(t, X_t, u_t)\,dt + \sigma(t, X_t)\,dW_t, \\ x_0 &= x, \\ -dY_t &= f(t, X_t, Y_t, u_t)\,dt - Z_t dW_t - dM_t, \\ y_T &= g(x_T), \langle M, W \rangle_t = 0, t \in [0T], \end{cases} \tag{3.1}$$

ou, sous la forme intègrale suivante :

$$X_t = x + \int_0^t b(s, X_s, Y_s, u_s)\,ds + \int_0^t \sigma(s, X_s)\,dW_s, \tag{3.2}$$

$$Y_t = g(X_T) + \int_t^T f(s, X_s, Y_s, u_s)\,ds + \int_t^T Z_s dW_s - (M_T - M_t). \tag{3.3}$$

où u est un processus progressivement mesurable à valeurs dans un métrique compact A, $(W_t, t \geq 0)$ est un mouvement Brownien d-dimensionnel défini dans un espace probabilité filtré $\left(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}, P\right)$ vérifiant les conditions usuelles, X, Y, Z sont des processus adaptés et de carré intégrable et M est une martingale orthogonale à W.

La fonction de coût à minimiser est donnée par :

$$J(u) = E\left(l(Y_0) + \int_0^T h(t, X_t, Y_t, u_t)\,dt\right),$$

Supposons que :

$(A1)$

$$\begin{aligned}
b &: [0,T] \times \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^k \times A \rightarrow \mathbb{R}^k, \\
\sigma &: [0,T] \times \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^{k \times d}, \\
f &: [0,T] \times \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^k \times A \rightarrow \mathbb{R}^k, \\
g &: [0,T] \times \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^k,
\end{aligned}$$

sont des fonctions mesurables et continues. De plus on suppose qu'il existe une constante $K_1 > 0$ telle que pour tout $(t,x,y,u) \in [0,T] \times \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^k \times A$,

$$\mid b\,(t,x,u) \mid + \mid \sigma\,(t,x) \mid + \mid g\,(x) \mid \leq K_1\,(1+ \mid x \mid)$$

$$\mid f\,(t,x,y,u) \mid \leq K_1\,(1+ \mid x \mid + \mid y \mid)$$

$(A2)$ Il existe une constante $K > 0$ telle que pour tout $t \in [0,T]$, tout $x, x' \in \mathbb{R}^k$ et tout $y, y' \in \mathbb{R}^k$,

$$\mid f\,(t,x,y,u) - f\,(t,x',y',u) \mid \leq K\,(\mid x - x' \mid + \mid y - y' \mid)\,,$$

$$\mid b\,(t,x,u) - b\,(t,x',u) \mid \leq K \mid x - x' \mid,$$

$$\mid \sigma\,(t,x) - \sigma\,(t,x') \mid \leq K \mid x - x' \mid.$$

$(A3)$

$$\begin{aligned}
h &: [0,T] \times \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^k \times A \rightarrow \mathbb{R}^k, \\
l &: \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R},
\end{aligned}$$

sont deux fonctions continues à croissance linéaire en (x,y) uniformement en (t,a). De plus, on suppose que $h := h\,(t,x,y,a)$ est Lipschitzienne en (x,y) uniformement en (t,a).

Dans la suite on note par :

U : l'ensemble de tous les contrôles admissibles.

$C\left([0.T],\mathbb{R}^k\right)$: l'espace des fonctions continues de $[0,T]$ dans $\mathbb{R}^k$, muni par la topologie de la convergence uniforme.

$D\left([0,T];\mathbb{R}^k\right)$: l'espace de Skorokhod des fonctions (càdlàg) définissent de $[0,T]$ dans $\mathbb{R}^k$, sont les fonctions continues à droite et a limite à gauche.

$M^2\left(t,T;\mathbb{R}^{k\times d}\right) := \left\{Z : [0,T]\times\Omega \to \mathbb{R}^{k\times d}, Z \text{ progressivement mesurable} : E\int_0^T \| Z_t \|^2 dt < \infty\right\}$.

$S^2\left(t,T,\mathbb{R}^k\right) := \left\{Y : [0,T]\times\Omega \to \mathbb{R}^d, Y \text{ progressivement mesurable} : E\left(\sup_{0\leq t\leq T} | Y_t |^2\right) < \infty\right\}$.

3.1.2 Le problème de contrôle relaxé

On sait qu'en théorie du contrôle stochastique dans le cas d'absence d'hypothèses supplimentaires de convexité sur les coefficients, le problème de contrôle ne possède pas de solution optimale. L'idée serait d'injecter la classe U des contrôles admissibles dans un espace plus large R des contrôles relaxés dans lequel le controlleur choisit à l'instant t une mesure de probabilité $q_t(da)$ au lieu d'un élément $u_t \in A$.

C'est-à-dire dans le modèl relaxé, l'ensemble A des valeurs des processus u_t est remplacé par $P(A)$ l'ensemble des valeurs du processus q_t où $P(A)$ est l'espace des mesures de probabilités sur A muni de la topologie de la convergence faible.

Ce nouvel espace des contrôles relaxés, possède de bonnes propriétés de compacité et de convexité.

Soit V l'ensemble des mesures sur $[0,T]\times A$, dont la projection sur $[0,T]$coincide avec la mesure de Lebesgue dt. Muni de la topologie de la convergence stable des mesures, V est un espace compact métrsable voir Jacod et Mémin $[3]$. La convergence stable est preconisée pour les fonctions mesures bornées $h(t,a)$ telles que pour chaque $t \in [0,T], h(t,.)$ soit continue.

Dans ce cas le système est gouverné par l'équation différentielle stochastique progressive rétrograde suivante :

$$\begin{cases} X_t = x + \int_0^t \int_A b\left(s, X_s, a\right) q_s\left(da\right) ds + \int_0^t \sigma\left(s, X_s\right) dW_s, \\ Y_t = g\left(X_T\right) + \int_t^T \int_A f\left(s, X_s, Y_s, a\right) q_s\left(da\right) ds - \int_t^T Z_s dW_s - \left(M_T - M_t\right), \end{cases} \tag{3.4}$$

où M est une martingale orthogonale à W.

La fonction coût associée au contrôle relaxé q est définie par :

$$J\left(q\right) = E\left(l\left(Y_0\right) + \int_0^T \int_A h\left(t, X_t, Y_t, a\right) q_t\left(da\right) dt\right), \tag{3.5}$$

Sous l'hypothèses $(A1)$et $(A2)$, le système 3.4 possède une unique solution

$$\left(X_t, Y_t, Z_t\right) \in \left[S^2\left(t, T; \mathbb{R}^k\right)\right]^2 \times \left[M^2\left(t, T; \mathbb{R}^{k\times d}\right)\right].$$

3.2 L'existence d'un contrôle optimal relaxé

Dans cette partie et moyenant d'un théorème de tension et le théorème de représentation de Skorokhod dans l'espace D (des porocessus càdlàg) muni par la S-topologie de Jakubowski [1], on démontrera l'existence d'un contrôle optimal relaxé minimisant le coût $J\left(q\right)$ sur l'ensemble R des contrôles relaxés.

Notre résultat dans ce chapitre donné par

Théorème 3.2.1 *Sous les hypothèses* $(A1), (A2)$ *et* $(A3)$, *il existe un contrôle relaxé* $q \in R$ *tel que :*

$$J\left(q\right) = \inf_{\mu \in R} J\left(\mu\right).$$

Pour prouver ce théorème, on a besoin de quelques résultats de tension des lois associées aux processus en question.

3.2.1 Les résultats de tension

Soit $(q^n)_{n\geq 0}$ une suite minimisante, (c'est-à-dire $\lim\limits_{n\to\infty} J(q^n) = \inf\limits_{\mu\in R} J(\mu)$). Soit (X^n, Y^n, Z^n) la solution unique de l'**EDSPR** suivante :

$$\begin{cases} X_t^n &= x + \int_0^t \int_A b\left(s, X_s^n, a\right) q_s^n\left(da\right) ds + \int_0^t \sigma\left(s, X_s^n\right) dW_s, \\ Y_t^n &= g\left(X_T^n\right) + \int_t^T \int_A f\left(s, X_s^n, Y_s^n, a\right) q_s^n\left(da\right) ds - \int_t^T Z_s^n dW_s, \end{cases} \tag{3.6}$$

Proposition 3.2.1 *Soit (X^n, Y^n, Z^n) la solution unique de l'équation 3.6.Il existe une constante positive C telle que :*

$$\sup_n E\left(\sup_{0\leq t\leq T} \mid Y_t^n \mid^2 + \int_t^T \mid Z_s^n \mid^2 ds\right) < C \tag{3.7}$$

Preuve. Soit $(q^n)_{n\geq 0}$ une suite minimisante. Utilisant l'hypothèse $(A1)$. Il est facile de trouver :

$$\sup_n \left\{E\left(\sup_{0\leq t\leq T} \mid X_t^n \mid^2\right)\right\} < \infty \tag{3.8}$$

D'aprés l'inégalité de Burkholder-Davis-Gundy et l'inégalité de Schwartz la martingale locale $\int_t^T Y_s^n Z_s^n dw_s$ est une martingale uniformément intégrable.

Alors, en trouvant d'aprés l'hypothèse $(A1)$ et l'application de la formule d'Itô à $\mid Y_t^n \mid^2$ que

$$E\left(\mid Y_t^n \mid^2 + \int_t^T \mid Z_s^n \mid^2 ds\right) = E\left(\mid g\left(X_T^n\right) \mid^2 + 2\int_t^T \int_A \langle Y_s^n, f\left(s, X_s^n, Y_s^n, a\right)\rangle q_s^n\left(da\right) ds\right),$$

donc,

$$\begin{aligned} E\left(\mid Y_t^n \mid^2 + \int_t^T \mid Z_s^n \mid^2 ds\right) \quad &\leq E\left(\mid g\left(X_T^n\right) \mid^2\right) + E\left(\int_t^T \mid Y_s^n \mid^2 ds\right) \\ &+ E\left(\int_t^T \int_A \mid f\left(s, X_s^n, Y_s^n, a\right) \mid^2 q_s^n\left(da\right) ds\right) \end{aligned}$$

ce qui nous donne d'aprés le lemme de Gronwall que :

$$\sup_n E\left(\sup_{0\leq t\leq T} \mid Y_t^n \mid^2 + \int_t^T \mid Z_s^n \mid^2 ds\right) < \infty$$

■

Proposition 3.2.2 *Soit* (X^n, Y^n, Z^n) *la solution unique de l'équation 3.4 la suite* $\left(Y^n, \int_0^\cdot Z_s^n dW_s\right)$ *est tendue dans l'espace* $D\left([0,T];\mathbb{R}^k\right) \times D\left([0,T];\mathbb{R}^k\right)$ *muni par la* $S-$*topologie.*

Preuve. Soit

$$0 = t_0 < t_1 < ... < t_n = T$$

En définissant la variation conditionnelle par

$$CV_t\left(Y^n\right) := \sup E\left[\sum_i \mid E\left(Y_{t_{i+1}}^n - Y_{t_i}^n\right) \diagup \mathcal{F}_{t_i}^W \mid\right],$$

où en prenant le "sup" sur les partitions de l'intervalle $[0,T]$ et $\mathcal{F}_t^W$ la filtration Brownienne. D'aprés l'utilisation des mêmes techniques que ceux utilisées dans le travail de Pardoux [5] ,on peut trouver que

$$CV_t\left(Y^n\right) \leq E\left[\int_0^T \int_A f\left(s, X_s^n, Y_s^n, a\right) q_s^n\left(da\right) ds\right]$$

Donc, d'aprés 3.7 et 3.8 on obtient :

$$\sup_n \left[CV_t\left(Y^n\right) + \sup_{0\leq t\leq T} \mid Y_t^n \mid + \sup_{0\leq t\leq T} E \mid \int_0^t Z_s^n dW_s \mid\right] < \infty. \tag{3.9}$$

Ce qui nous prouve que les deux suites $\{Y^n\}$ et $\left\{\int_0^\cdot Z_s^n dW_s\right\}$ vérifiant les critères de tension de Meyer et Zheng [4] . ■

Lemme 3.2.1 *la famille des contrôles relaxés* $(q^n)_{n\geq 0}$ *est tendue dans l'espace V.*

Preuve. $[0,T] \times A$ est compact, alors d'aprés le théorème de Prokhorov, l'espace V des mesures de probabilités sur $[0,T] \times A$ est aussi compact pour la topologie de la convergence faible. D'aprés le fait que $q^n, n \geq 0$ est une variable aléatoire à valeurs dans l'ensemble compact V, alors la famille des distributions associée à $(q^n)_{n\geq 0}$est tendue. ■

Proposition 3.2.3 *Soit X_t^n la solution de l'* ***EDS*** *suivante :*

$$X_t^n = \int_0^t \int_A b\left(s, X_s^n, a\right) q_s^n\left(da\right) ds + \int_0^t \sigma\left(s, X_s^n\right) dW_s. \tag{3.10}$$

Alors, la suite des processus (X^n, W) est tendue dans l'espace $C\left([0,T], \mathbb{R}^k\right) \times C\left([0,T], \mathbb{R}^k\right)$ muni par la topologie de la convergence uniforme.

Preuve. Soit $p > 0$ et pour tout $s < t$. En utilisant des arguments habituels de calcul stochastique et le fait que les coefficients b et σ sont bornés, pour trouver que :

$$E\left(\mid X_t^n - X_s^n \mid^{2p}\right) \leq C_p \mid t - s \mid^p,$$

c'est-à-dire que la suite (X^n) vérifiant les critères de tension de Kolmogorov, alors on a la tension du $(X^n, n \geq 0)$.

Par le même argument on trouve que (W) est tendue. ■

Lemme 3.2.2 (Théorème de représentation de Skorokhod) *Soit $(\mathbb{D}, S)$ est l'éspace topologique dont il existe une famille dénombrable des fonctions S- continues séparants les points dans X. Soit $\{\nu_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite des lois uniformément tendue dans $\mathbb{D}$. Pour toute sous-suite $\{X_{n_k}\}$ on peut trouver une sous-suite $\left\{X_{n_{k_l}}\right\}$ et un processus $\{Y_l\}$ tel que :*

$$Y_l \sim X_{n_{k_l}}, l = 1, 2, ...$$

pour tout $r \in [0,T]$

$$Y_l\left(r\right) \rightarrow_S Y_0\left(r\right), \quad \textit{lorsque } l \rightarrow \infty.$$

et pour tout $\epsilon > 0$; il existe un sous-ensemble S-compact $K_\epsilon \subset D$ tel que :

$$\mathbb{P}\left(\{w \in [0,T] : Y_l(w) \in K_\epsilon,\ l = 1,2,...\}\right) > 1 - \epsilon$$

Lemme 3.2.3 *Soit (X^n, M^n) un processus de $\mathbb{D}\left([0,T], \mathbb{R}^k\right)$ qui converge vers (X, M) dans la S-topologie. Soit $\left(\mathcal{F}_t^{X^n}\right)_{t\geq 0}$ la filtration minimale complète de X^n(resp de X). On suppose que $\sup_n E\left[\sup_{0\leq t\leq T} |M_t^n|^2\right] < C_T$, M^n est une martingale et M est $\mathcal{F}^X$-adapté. Alors M est une $\mathcal{F}^X$-martingale.*

Démonstration du théorème 3.2.1. Soit $(q^n)_{n\geq 0}$ une suite minimisante et le triple (X^n, Y^n, Z^n) est la solution unique de l'**EDSPR** suivante :

$$\begin{cases} X_t^n &= x + \int_0^t \int_A b\left(s, X_s^n, a\right) q_s^n(da)\, ds + \int_0^t \sigma\left(s, X_s^n\right) dW_s. \\ Y_t^n &= g\left(X_T^n\right) + \int_t^T \int_A f\left(s, X_s^n, Y_s^n, a\right) q_s^n(da)\, ds - \left(M_T^n - M_t^n\right), \end{cases} \tag{3.11}$$

où $M_t^n := \int_0^t Z_s^n dW_s$, et

$$\lim_{n\to\infty} J(q^n) = \lim_{n\to\infty} E\left[l\left(Y_0^n\right) + \int_0^T \int_A h\left(t, X_t^n, Y_t^n, a\right) q_t^n(da)\, dt\right] = \lambda. \tag{3.12}$$

D'aprés la proposition 3.2.2, le lemme 3.2.1 et la proposition 3.2.3 nous obtenons que la suite des processus

$$\gamma^n = \left(X^n, W, q^n, Y^n, M^n\right),$$

est tendue dans l'espace

$$\Gamma = \left[C\left([0,T], \mathbb{R}^k\right)\right]^2 \times V \times \left[D\left([0,T]; \mathbb{R}^k\right)\right]^2,$$

muni par le produit de la topologie de convergence uniforme pour le premier facteur, la topologie de convergence stable des mesures pour le deuxième facteur et la $S-$topologie pour le troisième facteur.

D'aprés la version de théorème de représentation de Skorokhod, présentée par Jakubowski [1] (voir Lemme 3.2.2), il existe un espace de probabilité $\left(\hat{\Omega}, \hat{\mathcal{F}}, \hat{P}\right)$, et deux suites

$$\hat{\gamma}^n = \left(\hat{X}^n, \hat{W}^n, \hat{q}^n, \hat{Y}^n, \hat{M}^n\right) \text{ et } \hat{\gamma} = \left(\hat{X}, \hat{W}, \hat{q}, \hat{Y}, \hat{M}\right)$$

définies sur cet espace telle que :

i) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $lois\,(\gamma^n) = lois\left(\hat{\gamma}^n\right)$.

ii) Il existe une sous-suite $\left(\hat{\gamma}^{nk}\right)$ de $\left(\hat{\gamma}^n\right)$, qui on peut la notée par $\left(\hat{\gamma}^n\right)$, et qui converge vers $\hat{\gamma}, \hat{P} - p.s.$ dans l'espace Γ,

iii) La suite

$$\left(\hat{Y}_t^n, \hat{M}_t^n\right) \text{ converge vers } \left(\hat{Y}_t, \hat{M}_t\right), dt \times \hat{P} - p.s.,$$

avec

$$\left(\hat{Y}_t^n, \hat{M}_t^n\right) \text{ converge vers } \left(\hat{Y}_t, \hat{M}_t\right) \text{ lorsque } n \to \infty, \hat{P} - p.s.$$

iv) Et

$$\sup_{0 \le t \le T} \mid \hat{X}_t^n - \hat{X} \mid \to 0, \text{ lorsque } n \to \infty, \hat{P} - p.s.$$

D'aprés la propriété (i), on a :

$$\begin{cases} \hat{X}_t^n &= x + \int_0^t \int_A b\left(s, \hat{X}_s^n, a\right) \hat{q}_s^n\,(da)\,ds + \int_0^t \sigma\left(s, \hat{X}_s^n\right) d\hat{W}_s^n, t > 0, \\ \hat{Y}_t^n &= g\left(\hat{X}_T^n\right) + \int_t^T \int_A f\left(s, \hat{X}_s^n, \hat{Y}_s^n, a\right) \hat{q}_s^n\,(da)\,ds - \left(\hat{M}_T^n - \hat{M}_t^n\right), t \in [0,T], \end{cases} \tag{3.13}$$

où $\hat{M}_t^n := \int_0^t \hat{Z}_s^n d\hat{W}_s^n$, et

$$\hat{Y}_0^n = g\left(\hat{X}_T^n\right) + \int_0^T \int_A f\left(s, \hat{X}_s^n, \hat{Y}_s^n, a\right) \hat{q}_s^n\,(da)\,ds - \left(\hat{M}_T^n - \hat{M}_0^n\right).$$

Etape 1 : Passage à la limite

D'aprés les propriétés $(ii), (iii), (iv,)$ l'hypothèses $(A1), (A2)$, et par passage à la limite dans l'**EDSPR 3.14** on trouve qu'il existe un ensemble dénombrable $D \subset [0,T)$ tel que

$$\begin{cases} \hat{X}_t^n & = & x + \int_0^t \int_A b\left(s, \hat{X}_s, a\right) \hat{q}_s(da)\, ds + \int_0^t \sigma\left(s, \hat{X}_s\right) d\hat{W}_s, t > 0 \\ \hat{Y}_t^n & = & g\left(\hat{X}_T\right) + \int_t^T \int_A f\left(s, \hat{X}_s, \hat{Y}_s, a\right) \hat{q}_s(da)\, ds - \left(\hat{M}_T - \hat{M}_t\right), t \in [0,T] \setminus D, \end{cases} \tag{3.14}$$

$$\hat{Y}_0 = g\left(\hat{X}_T\right) + \int_0^T \int_A f\left(s, \hat{X}_s, \hat{Y}_s, a\right) \hat{q}_s(da)\, ds - \hat{M}_T.$$

Soit $r \in [0,T]$ donc, il existe une suite $r_n \in [0,T] \diagup D$ tel que $r_n \searrow r$,d'aprés le fait que les processus $\hat{Y}$ et $\hat{M}$ sont "càdlàg", on a :

$$\lim_{n\to\infty} \hat{Y}_{r_n} = \hat{Y}_r,$$

$$\lim_{n\to\infty} \hat{M}_{r_n} = \hat{M}_r,$$

et

$$\lim_{n\to\infty} \int_{r_n}^T \int_A f\left(s, \hat{X}_s, \hat{Y}_s, a\right) \hat{q}_s(da)\, ds = \int_r^T \int_A f\left(s, \hat{X}_s, \hat{Y}_s, a\right) \hat{q}_s(da)\, ds$$

Alors, on obtient pour tout $r \in [0,T]$

$$\hat{Y_r} = g\left(\hat{X}_T\right) + \int_r^T \int_A f\left(s, \hat{X}_s, \hat{Y}_s, a\right) \hat{q}_s(da)\, ds - \left(\hat{M}_T - \hat{M}_t\right) \tag{3.15}$$

Puisque tous les passages à la limite précédents (passage de l'équation 3.13 à l'équation 3.14) ont été prouvés par les mêmes arguments, en expliquant maintenant l'un de ces passages à la limite

$$\lim_{n\to\infty} \int_t^T \int_A f\left(s, \hat{X}_s^n, \hat{Y}_s^n, a\right) \hat{q}_s^n(da)\, ds = \int_t^T \int_A f\left(s, \hat{X}_s, \hat{Y}_s, a\right) \hat{q}_s(da)\, ds. \tag{3.16}$$

Utilisant les propriétés $(i),(ii),(iv)$, le lemme de Fatou et le lemme 3.2.1, pour prouver qu'il existe une constante positive C telle que :

$$\hat{E}\left(\int_0^T \left(\mid \hat{X}_s \mid^2 + \mid \hat{Y}_s \mid^2\right) ds\right) \leq C. \tag{3.17}$$

D'autre part, on a

$$\mid \int_t^T \int_A f\left(s, \hat{X}_s^n, \hat{Y}_s^n, a\right) \hat{q}_s^n(da)\, ds - \int_t^T \int_A f\left(s, \hat{X}_s, \hat{Y}_s, a\right) \hat{q}_s(da)\, ds \mid = I(n) + J(n).$$

où

$$I(n) := \mid \int_t^T \int_A f\left(s, \hat{X}_s^n, \hat{Y}_s^n, a\right) \hat{q}_s^n(da)\, ds - \int_t^T \int_A f\left(s, \hat{X}_s, \hat{Y}_s, a\right) \hat{q}_s(da)\, ds \mid$$

et

$$J(n) := \mid \int_t^T \int_A f\left(s, \hat{X}_s, \hat{Y}_s, a\right) \hat{q}_s^n(da)\, ds - \int_t^T \int_A f\left(s, \hat{X}_s, \hat{Y}_s, a\right) \hat{q}_s(da)\, ds \mid.$$

Prouvant que $I(n)$ converge vers 0 en probabilité. Soit $\varepsilon > 0$, en utilisant l'hypothèse $(A2)$ on obtient,

$$\hat{P}\left\{\mid \int_t^T \int_A f\left(s, \hat{X}_s^n, \hat{Y}_s^n, a\right) \hat{q}_s^n(da)\, ds - \int_t^T \int_A f\left(s, \hat{X}_s, \hat{Y}_s, a\right) \hat{q}_s^n(da)\, ds \mid > \varepsilon\right\}$$

$$\leq \frac{1}{\varepsilon}\hat{E}\int_t^T \mid f\left(s, \hat{X}_s^n, \hat{Y}_s^n, a\right) - f\left(s, \hat{X}_s, \hat{Y}_s, a\right) \mid ds$$

$$\leq \frac{K}{\varepsilon}\left\{\hat{E}\int_t^T \mid \hat{X}_s^n - \hat{X}_s \mid ds + \hat{E}\int_t^T \mid \hat{Y}_s^n - \hat{Y}_s \mid ds\right\}$$

Ensuite, les propriétés $(i),(iv)$ et lemme 3.2.1 nous permètre a prouver que

$$\hat{E}\int_t^T \mid \hat{X}_s^n - \hat{X}_s \mid ds + \hat{E}\int_t^T \mid \hat{Y}_s^n - \hat{Y}_s \mid ds \to 0$$

quand n tend vers l'infini, ce qui implique que $I(n)$ converge vers 0 en probabilité.

Prouvons maintenant que $J(n)$ converge vers 0 en probabilité.

Soit $R > 0$ et, posons

$$B := \left\{ \mid \hat{X}_s \mid + \mid \hat{Y}_s \mid \leq R \right\} \qquad \text{et} \quad \bar{B} := \Omega - B.$$

On a

$$\mid \int_t^T \int_A f\left(s, \hat{X}_s, \hat{Y}_s, a\right) \hat{q}_s^n(da)\, ds - \int_t^T \int_A f\left(s, \hat{X}_s, \hat{Y}_s, a\right) \hat{q}_s(da)\, ds \mid = I_1(n) + J_1(n)$$

où

$$I_1(n) := \mid \int_t^T \int_A f\left(s, \hat{X}_s, \hat{Y}_s, a\right) 1_B \hat{q}_s^n(da)\, ds - \int_t^T \int_A f\left(s, \hat{X}_s, \hat{Y}_s, a\right) 1_B \hat{q}_s(da)\, ds \mid .$$

$$J_1(n) := \mid \int_t^T \int_A f\left(s, \hat{X}_s, \hat{Y}_s, a\right) 1_{\bar{B}} \hat{q}_s^n(da)\, ds - \int_t^T \int_A f\left(s, \hat{X}_s, \hat{Y}_s, a\right) 1_{\bar{B}} \hat{q}_s(da)\, ds \mid .$$

Comme la fonction $(s, a) \mapsto f\left(s, \hat{X}_s, \hat{Y}_s, a\right) 1_B$ est bornée, mesurable en (s, a) et continue en a, on obtient d'aprés la propriété (ii) que $I_1(n)$ tend vers 0 en probabilité quand n tend vers ∞.

Il nous reste à prouver que $J_1(n)$ tend vers 0 en probabilité quand n tend vers ∞. On a

$$\begin{aligned}
\hat{E}\left[J_1(n)\right] &= \hat{E}\left(\mid \int_t^T \int_A f\left(s, \hat{X}_s, \hat{Y}_s, a\right) 1_{\bar{B}} \hat{q}_s^n(da)\, ds - f\left(s, \hat{X}_s, \hat{Y}_s, a\right) 1_{\bar{B}} \hat{q}_s(da)\, ds \mid\right) \\
&\leq \hat{E} \int_t^T \mid f\left(s, \hat{X}_s, \hat{Y}_s, a\right) \mid 1_{\bar{B}} ds + \hat{E} \int_t^T \mid f\left(s, \hat{X}_s, \hat{Y}_s, a\right) \mid 1_{\bar{B}} ds \\
&\leq \frac{K'}{R^2} \hat{E} \int_t^T \left(\mid \hat{X}_s \mid^2 + \mid \hat{Y}_s \mid^2 \right) ds
\end{aligned}$$

on passe successivement à la limite en n et R, pour trouver que $\lim\limits_{n\to\infty} J_1(n) = 0$ en probabilité, ce qui prouve 3.16.

Etape 2 : Identification de la limite

Propriété du martingale pour la limite

On note par $\hat{\mathcal{F}}_s = \mathcal{F}_s^{\hat{X},\hat{Y},\hat{q}}$ la filtration minimale admissible et complète engendrée par $\left(\hat{X}_r, \hat{Y}_r, \hat{q}_r, r \leq s\right)$.

On combine entre l'estimation uniforme, Lemme 3.2.3, on trouve que $\hat{M}$ est $\hat{\mathcal{F}}_s-$martingale.

Alors, d'aprés le théorème de décomposition des martingales, il existe un processusn $\left(\hat{Z}_t\right)_t \in M^2\left(t, T; \mathbb{R}^{k\times d}\right)$ tel que

$$\hat{M}_t = \int_0^t \hat{Z}_s d\hat{W}_s + \hat{N}_t, \quad \text{avec} \quad \langle \hat{N}, \hat{W}\rangle_t = 0,$$

donc

$$\hat{M}_T - \hat{M}_t = \int_t^T \hat{Z}_s d\hat{W}_s + \left(\hat{N}_T - \hat{N}_t\right).$$

ce qui implique

$$\hat{Y}_t = g\left(\hat{X}_T\right) + \int_t^T \int_A f\left(s, \hat{X}_s, \hat{Y}_s, a\right) \hat{q}_s(da)\, ds - \int_t^T \hat{Z}_s d\hat{W}_s - \left(\hat{M}_T - \hat{M}_t\right),$$

où $\hat{N}$ est une martingale orthogonale à $\hat{W}$.

Etape 3 : $\hat{q}$ est un contrôle optimal

On a d'aprés les propriétés $(i), (iv)$ et l'hypothèse $(A3)$ que

$$\begin{aligned} J(q^n) &= E\left[l(Y_0^n) + \int_0^T \int_A h(t, X_t^n, Y_t^n, a)\, q_s^n(da)\, dt\right], \\ &= \hat{E}\left[l\left(\hat{Y}_0^n\right) + \int_0^T \int_A h\left(t, \hat{X}_t^n, \hat{Y}_t^n, a\right) \hat{q}_t^n(da)\, dt\right], \end{aligned}$$

où $\hat{E}$ est l'espérance relativement à $\hat{P}$.

Donc

$$\begin{aligned}\inf_{q\in R} J(q) &= \lim_{n\to\infty} J(q^n) \\ &= \lim_{n\to\infty} E\left[l\left(Y_0^n\right) + \int_0^T \int_A h\left(t, X_t^n, Y_t^n, a\right) q_s^n(da)\, dt\right] = \lambda,\end{aligned}$$

alors

$$\lim_{n\to\infty} \hat{E}\left[l\left(\hat{Y}_0^n\right) + \int_0^T \int_A h\left(t, \hat{X}_t^n, \hat{Y}_t^n, a\right) \hat{q}_t^n(da)\, dt\right] = \lambda \tag{3.18}$$

D'autre part, d'aprés les propriétés $(ii), (iii), (iv)$, le fait que l est continue et h est uniformément Lipschitzienne en (x, y), par passage à la limite et par la même méthode utilisée dans 3.16 on peut trouver que

$$\lim_{n\to\infty} \hat{E}\left[l\left(\hat{Y}_0^n\right) + \int_0^T \int_A h\left(t, \hat{X}_t^n, \hat{Y}_t^n, a\right) \hat{q}_t^n(da)\, dt\right]$$

$$= \hat{E}\left[l\left(\hat{Y}_0\right) + \int_0^T \int_A h\left(t, \hat{X}_t, \hat{Y}_t, a\right) \hat{q}_t(da)\, dt\right],$$

et d'aprés l'unicité de la limite et l'égalité 3.17 on obtient

$$\hat{E}\left[l\left(\hat{Y}_0\right) + \int_0^T \int_A h\left(t, \hat{X}_t, \hat{Y}_t, a\right) \hat{q}_t(da)\, dt\right] = \lambda,$$

ce qui implique

$$J\left(\hat{q}\right) = \inf_{q\in R} J(q) = \lambda. \tag{3.19}$$

Alors, $\hat{q}$ est un cotrôle optimal relaxé. ■

Conclusion

Dans ce mémoire nous avons considérées le problème d'éxistence de contrôle optimal relaxé pour les équations différentielles stochastiques rétrogrades (EDSRs). Nous avons étudiés le problème de contrôle relaxé pour lesquels des contrôles admissibles sont des mesures de probabilités est regi par des équations différentielles stochastiques rétrogrades. la méthode de démonstration est basée sur des arguments de tension des lois associées à la suite de processus (X^n, Y^n, W, q) et le théorème de représentation de Skorokhod.

Il était intéressant de voir comment généraliser ce résultat d'éxistence de contrôle optimal relaxé pour les équations différentielles stochastiques progressives rétrogrades (EDSPRs).

Bibliographie

[1] A. Jackubowski, A non-Skorokhod topology on the Skorokhod space. Electron. J. Probab. 2, 1997, paper no 4, pp 1-21.

[2] K. Bahlali, B. Gherbal, B. Mezerdi, Existence of optimal controls for systems driven by FBSDEs , Systems and Control Letters 2010.

[3] J. Jacod, J. Mémin, sur un type de convergence intermédiaire entre la convergence en loi et la convergence en probabilité.Sem. Proba. XV, Lect. Notes in Math. 851, Springer Verlag 1980.

[4] P. A. Meyer and W A. Zheng, Tightness criteria for laws of semi martingales. Ann. Inst. H. Poincaré Probab. Statist. 20 1984,4 , 217-248.

[5] E. Pardoux, BSDEs weak convergence and homogenization of semilinear PDEs in F. H Clarke and R. J. Stern (eds) , Nonlinear Analysis, Differential Equations and Control, 1999 , 503-549. Kluwer Academic Publishers.

[6] E. Pardoux and S. Peng, Adapted solution of a backward stochastic differential equation,Syst.Control Lett 1990 , 14, No.1, 55-61.

Annexe B : Abréviations et Notations

Les différentes abréVariations et notations utilisées tout au long de ce mémoire sont expliquées ci-dessous.

U	:	l'ensemble de tous les contrôles admissibles.
$C\left([0.T],\mathbb{R}^d\right)$	:	l'espace des fonctions continues de $[0,T]$ dans $\mathbb{R}^d$, muni par la topologie de la convergence uniforme.
$D\left([0,T];\mathbb{R}^k\right)$	:	l'espace de Skorokhod des fonctions (càdlàg) définissent de $[0,T]$ dans $\mathbb{R}^k$, sont les fonctions continues à droite et a limite à gauche.
$M^2\left(t,T;\mathbb{R}^{d\times k}\right)$	:=	$\left\{Y:[0,T]\times\Omega\to\mathbb{R}^{d\times k}, Y \text{ progressivement mesurable} : E\int_0^T \mid Y_t\mid^2 dt<\infty\right\}$
$S^2\left(t,T,\mathbb{R}^d\right)$	:=	$\left\{Z:[0,T]\times\Omega\to\mathbb{R}^d,\ Z \text{ progressivement mesurable} : E\left(\sup\limits_{0\leq t\leq T}\mid Z_t\mid^2\right)<\infty\right\}.$