République Algérienne Démocratique et Populaire

Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

UNIVERSITÉ MOHAMED KHIDER, BISKRA

FACULTÉ des SCIENCES EXACTES et des SCIENCES de la NATURE et de la VIE

DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES

Mémoire présenté en vue de l'obtention du Diplôme **:**

MASTER en Mathématiques

Option : **Probabilités**

Par

BOUHADJAR El Mountasar Billah

Titre :

Conditions nécessaires d'optimalité cas convexe

Membres du Comité d'Examen :

Dr.	**YAKHLEF Samia**	UMKB	Président
Pr.	**HAFAYED Mokhtar**	UMKB	Encadreur
Dr.	**AOUN Salima**	UMKB	Examinateur

Juin 2018

Dédicace

À ma chère mère qui m'a soutenu pendant mes études.

À mon Cher frère.

À ma Chère sœur et grand-mère.

À mes oncles et cousins.

À tous mes amis.

REMERCIEMENTS

Toutes les louanges à Allah

Qu'Allah tout-puissant m'accorde les bénédictions qui sont innombrables grâce à sa grâce et sa miséricorde, et par son commandement, facilite cette recherche scientifique. Je ne peux m'exprimer en quelques mots sur sa grâce. Enfin La première et dernière louange d'Allah.

Je tiens à remercier mon encadreur, le Pr. HAFAYED Mokhtar pour sa confiance et les encouragements pour continuer mes études, je n'oublierai pas, le Pr. MEZERDI Brahim pour son aide.

Enfin, nous remercions tous les enseignants pour leurs efforts, particulièrement les professeurs de probabilités.

Table des matières

Introduction

La théorie du contrôle optimal a commencé dans les années 50 avec la formulation du principe du maximum de Pontryagin qui est connue aussi sous le nom "conditions nécessaires d'optimalité" elle est basée sur la minimisation de la fonction de coût sur un certain ensemble. Il est dit que n'importe quel contrôle optimal avec la trajectoire associe doit résoudre le soi-disant système hamiltonien.

Ce travail est divisé en trois chapitres, dans le premier on présente quelques généralité sur calcul stochastique (mouvement Brownien, intégrale stochastique, formule d'Itô,.....).

Le deuxième chapitre on va étudier le contrôle optimal dans les deux cas déterministe et stochastique et ce dernier se divise en deux formulations "forte" et "faible" et cette étude est fait pour connaitre la différence entre les problèmes déterministes et stochastiques.

Le dernier chapitre, intitulé "Principe du maximum : Cas convexe" ce que nous allons étudier le principe du maximum stochastique dans le cas convexe selon la méthode de Bensoussan [2].

On considère le problème de contrôle optimal qui consiste à minimiser une fonction de coût donnée par :

$$J(u\,(.)) = \mathbb{E}\left[\int_0^T \ell(t, X(t), u(t))dt + h(X\,(T))\right]$$

tel que $X(t)$ est une solution de l'équation différentielle stochastique suivante :

$$\begin{aligned} &dX(t) = b(t, X(t), u(t))dt + \sigma(t, X(t), u(t))dB\,(t) \\ &X(0) = X_0 \qquad\qquad \text{où } \; (X_0 \in \mathbb{R}^n) \end{aligned}$$

Pour établir les conditions nécessaires d'optimalité on suppose que la fonction de coût est différentiable et admet un minimum qu' on la note $\bar{u}$ vérifiant $J(\bar{u}\,(.)) \leq J(u\,(.))$ pour tout $u \in \mathcal{U}_{ad}$, puis on perturbe le contrôle $\bar{u}$, de la manière suivante

$$u_\theta\,(t) = \bar{u}\,(t) + \theta\,(u\,(t) - \bar{u}\,(t))$$

où u_θ est contrôle admissible

L'obtention des ces conditions nécessaires d'optimalité est basée sur la dérivation de $J(u_\theta\,(.))$ au point $\theta = 0$.

Chapitre 1

Bases de calcul stochastique

Ce chapitre est l'entrée des deux chapitres suivants et dans lequel on va rappeler premièrement les notions essentielles en théorie des calculs stochastiques, ensuite nous rappelons l'intégrale stochastique et formule d'Itô, ces derniers sont des bases essentiels dans les études des équations différentielles stochastiques, enfin on va rappeler le théorème d'existence et unicité.

1.1 Processus stochastique

Définition 1.1.1 (Filtration) *Une filtration* $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ *de* $(\Omega, \mathcal{F})$*est une famille de sous-tribus de* $\mathcal{F}$*qui est croissante* ($i.e.$: $\forall s \leq t \ \ \mathcal{F}_s \subset \mathcal{F}_t \subset \mathcal{F}$)

Remarque 1.1.1 $\left(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}, \mathbb{P}\right)$ *est un espace de probabilité filtré.*

Remarque 1.1.2 *On dit que la filtration* $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ *est standard ou vérifier les conditions usuelles si pour tout* $t \in \mathbb{R}_+$, $\mathcal{F}_t$ *continue à droite* ($i.e.$: $\mathcal{F}_t = \bigcap\limits_{s>t} \mathcal{F}_s$) *et* $\mathcal{F}_0$ *contient les tous ensemble* P*-négligable* ($i.e.$: $\forall A \in \mathcal{F} : \mathbb{P}(A) = 0 \Longrightarrow A \in \mathcal{F}_0$).

Définition 1.1.2 (Processus)

Soient $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé, (E, ξ) un espace mesurable, Π ensemble des temps muni de la tribu $\mathcal{L}$

On appelle processus stochastique (ou simplement processus) défini sur Ω, *admettant* Π *comme ensemble des temps et* E *comme espace d'états, toute famille* $(X(t))_{t\in\Pi}$*indexée par* Π *de variables aléatoires à valeurs dans* E *.*

$$\begin{cases} X & : & (\Pi \times \Omega, \mathcal{L} \otimes \mathcal{F}) & \longrightarrow & (E, \xi) \\ & & (t, \omega) & \longrightarrow & X(t, \omega) \end{cases}$$

(souvent $(\Pi, \mathcal{L}) = (\mathbb{R}_+, B(\mathbb{R}_+))$ ou $(\Pi, \mathcal{L}) = (\mathbb{N}\ , \mathcal{P}(\mathbb{N}))$)
Pour tout $\omega \in \Omega$, l'application $t \longrightarrow X(t, \omega)$ de Π dans E est appelée la trajectoire associée à ω.
Pour tout $t \in \Pi$, l'application $\omega \longrightarrow X(t, \omega)$ de Ω dans E est une variable aléatoire sur l'espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$.

Nous allons utiliser à partir de maintenant $(\Pi, \mathcal{L}) = (\mathbb{R}_+, B(\mathbb{R}_+))$ et nous utilisons la filtration standard.

Remarque 1.1.3 *On note* $\left(\mathcal{F}_t^X\right)_{t\geq 0}$*la tribu engendré par la famille* $(X(t))_{t\geq 0}$ *autrement dit pour tout* $t \in \mathbb{R}_+$, $\mathcal{F}_t^X = \sigma(X(s), s \leq t)$*est appellés la filtration naturelle de* $(X(t))_{t\geq 0}$.

Définition 1.1.3 (Processus mesurable) *Un processus* $(X(t))_{t\geq 0}$ *est dit mesurable si l'application* $(t, \omega) \longrightarrow X(t, \omega)$ *de* $\mathbb{R}_+ \times \Omega$ *dans* (E, ξ) *est mesurable par rapport à* $B(\mathbb{R}_+) \otimes \mathcal{F}$ *.*

Définition 1.1.4 (Processus adapté) *Un processus* $(X(t))_{t\geq 0}$ *est dit adapté a la filtration* $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$*si* $X(t)$ *est* $\mathcal{F}_t$*-mesurable pour tout* $t \in \mathbb{R}_+$.

Définition 1.1.5 (Processus progressivement mesurable) *Un processus* $(X(t))_{t\geq 0}$*est dit progressivement mesurable si l'application* $X : (s, \omega) \in [0, t] \times \Omega \longrightarrow (E, \xi)$ *est mesurable par rapport à la tribu* $B([0, t]) \otimes \mathcal{F}_t$.

Lemme 1.1.1 *Si le processus* $(X(t))_{t\geq 0}$ *adapté à* $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ *et à des trajectoires continues à droite (ou à gauche) alors* $(X(t))_{t\geq 0}$ *est progressivement mesurable.*

Remarque 1.1.4 *On dit que le processus* $(X(t))_{t\geq 0}$ *est càdlàg si il est continu à droite et pourvu de limites à gauche finies.*

Définition 1.1.6 (Processus équivalents) *Soient* $(X(t))_{t\geq 0}$ *et* $(X'(t))_{t\geq 0}$ *deux processus stochastiques ayant même espace d'états* (E,ξ) *basés sur* $(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P})$ *et* $(\Omega',\mathcal{F}',\mathbb{P}')$ *respectivement, Alors on dit que* $(X(t))_{t\geq 0}$ *et* $(X'(t))_{t\geq 0}$ *sont équivalents si pour tout subdivision de* $[0,T]$ *(i.e.* $\forall n\in\mathbb{N} : 0\leq t_1\leq t_2\leq .... \leq t_n = T$*) et pour tout* $A_1, A_2, ...A_n \in \xi$ *on a :*

$$\mathbb{P}\left(X_{t_1}\in A_1, X_{t_2}\in A_2, ..., X_{t_n}\in A_n\right) = \mathbb{P}\left(X'_{t_1}\in A_1, X'_{t_2}\in A_2, ..., X'_{t_n}\in A_n\right)$$

Définition 1.1.7 (Modification d'un ptocessus, Indistinguabilité) *Soient* $(X(t))_{t\geq 0}$ *et* $(X'(t))_{t\geq 0}$ *deux processus stochastiques basés sur le même espace probabilité* $(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P})$ *à valeurs dans le même espace d'états.*

On dit que $(X'(t))_{t\geq 0}$est une modification de $(X(t))_{t\geq 0}$si pout tout $t\in\mathbb{R}_+$, $X(t) = X'(t)$ $\mathbb{P}$ p.s , autrement dit $\forall t\in\mathbb{R}_+$ $\exists N_t\in\mathcal{F}$ où $\mathbb{P}(N_t) = 0$ telle que $\forall\omega\in N_t^C$ $\mathbb{P}(X(t,\omega) = X'(t,\omega)) = 1$.

On dit que $(X(t))_{t\geq 0}$et $(X'(t))_{t\geq 0}$ sont deux processus indistinguables si l'on a pour presque tout $\omega\in\Omega$ $X(t,\omega) = X'(t,\omega)$ pour tout $t\in\mathbb{R}_+$, autrement dit $\exists N\in\mathcal{F}$ où $\mathbb{P}(N) = 0$ telle que $\forall\omega\in N^C$ $\forall t\in\mathbb{R}_+$ $X(t,\omega) = X'(t,\omega)$.

Remarque 1.1.5 *Si* $(X(t))_{t\geq 0}$ *et* $(X'(t))_{t\geq 0}$ *sont indistinguables, alors chacun de ces processus est une modification de l'autre.*

Remarque 1.1.6 *Prenons* $(E,\xi) = (\mathbb{R}, B(\mathbb{R}))$ *. Si* $(X(t))_{t\geq 0}$ *et* $(X'(t))_{t\geq 0}$ *sont des trajectoires continus à droite et si* $(X'(t))_{t\geq 0}$ *est une modification de* $(X(t))_{t\geq 0}$*, alors* $(X(t))_{t\geq 0}$ *et* $(X'(t))_{t\geq 0}$ *sont indistinguables.*

1.2 Mouvement Brownien

A partir de maintenant nous étudierons l'espace de probabilité filtré $\left(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}, \mathbb{P}\right)$.

Définition 1.2.1 *Un processus* $(B(t))_{t\geq 0}$ *à valeur réelles est appelé mouvement Brownien issu de 0 ou mouvement Brownien standard si :*

i) $B_0 = 0$.
ii) l'application $t \longrightarrow B(t, \omega)$ est continue pour $t \in \mathbb{R}_+$ et pour tout $\omega \in \Omega$.
iii) Pour tout $t, h \geq 0, B(t+h) - B(t)$ est indépendante de $\{B(u) : 0 \leq u \leq t\}$ et sont de loi normale centrée et de variance h .

Remarque 1.2.1 *les condition **ii**) et **iii**) essentielle dans la difinition par contre à la* 1^{er} *condition car on a le processus* $(W(t))_{t\geq 0} = (\varepsilon + B(t))_{t\geq 0}$ *est un mouvement Brownien pour tout* $\varepsilon > 0$ *mais* $W(0) = \varepsilon$.

Proposition 1.2.1 *Soit* $(B(t))_{t\geq 0}$ *un processus continue issu de 0 à valeur réelles on a les conditions suivantes sont équivalentes*

1. $(B(t))_{t\geq 0}$est un mouvement Brownien.
2. $(B(t))_{t\geq 0}$ est un processus gaussien centré et de fonction de covariance $\mathbb{E}[B(t)B(s)] = s \wedge t$ pour tout $t, s \in \mathbb{R}_+$.
3. $(B(t))_{t\geq 0}$est un processus à accroissements indépendants et stationnaires tel que $B(t) \sim \mathcal{N}(0, t)$ pour tout $t \in \mathbb{R}_+$.

Exemple 1.2.1 (Mouvement Brownien) *Soit* $(B(t))_{t\geq 0}$ *un mouvement Brownien issu de 0 à valeur réelles on a :*

1. le processus $(-B(t))_{t\geq 0}$ est un mouvement Brownien.
2. pout tout $\varepsilon \geq 0$, le processus $(W(t))_{t\geq 0} = (B(t+\varepsilon) - B(t))_{t\geq 0}$ est un mouvement Brownien.

3. pout tout $a > 0$, le processus $\left(aB\left(\frac{t}{a^2}\right)\right)_{t\geq 0}$ est un mouvement Brownien.

Théorème 1.2.1 *Presque sûrement, les trajectoires du mouvement Brownien ne sont différentiables en aucun point .*

Remarque 1.2.2 *Soit* $(B(t))_{t\geq 0}$ *un un mouvement Brownien issu de 0 on a* $B(t) = \sqrt{t}Z$ *en loi où* $Z \sim \mathcal{N}(0,1)$ *, mais* $(X(t))_{t\geq 0} = (\sqrt{t}Z)_{t\geq 0}$ *n'est pas mouvement Brownien car* $\mathbb{E}[X(t)X(s)] = s.t \neq s \wedge t$ *pour tout* $s \neq t$ *où* $s, t \in \mathbb{R}_+$.

1.2.1 Mouvement Brownien multidimensionnel

Définition 1.2.2 *On dit que le processus* $(B(t))_{t\geq 0}$ *à valeurs dans* $\mathbb{R}^m$ *est un mouvement Brownien standard m-dimensionnel si :*

i) $B(0) = 0$.

ii) $\forall 0 \leq s \leq t$, le vecteur aléatoire $B(t) - B(s)$est indépendante de $\{B(u) : 0 \leq u \leq s\}$ et de loi normale avec zéro moyen et matrice de covariance égale à $(t-s) I_m$, où I_m est la matriceidentité de $\mathbb{R}^{m\times m}$.

iii) l'application $t \longrightarrow B(t,\omega)$ est continue.

Remarque 1.2.3 *Les processus* $(B^i(t))_{t\geq 0}$ *sont des mouvement Browniens standards indépendants pour tout* $i = 1, ..., m$ *où* $B^i(t)$ *sont les coordonner de* $B(t)$ *.*

1.3 Variation totale et Variation quadratique

Définition 1.3.1 *On appelle variation infinitésimale d'ordre* p *d'un processus* $(X(t))_{t\in[0,T]}$ *associée a un subdivision* $\pi_n = (t_1^n, t_2^n, ...t_t^n)$ *de* $[0,T]$ *la quantité*

$$V_T^P(\pi_n) = \sum_{i=1}^{n} |X(t_i^n) - X\left(t_{i-1}^n\right)|^p$$

Si $V_T^P(\pi_n)$ admet une limite de certains sens(Proba,$\mathbb{L}^q, ...$) lorsque $\|\pi_n\| \to 0$ la limite ne dépond pas de de la subdivision et on l'appelle variation d'ordre p sur $[0, T]$ où

$\|\pi_n\| = \max\limits_{0 \leq i \leq n} |t_i^n - t_{i-1}^n|$

_ Si p=1 la limite s'appelle variation totale de $(X(t))_{t \in [0,T]}$.

_ Si p=2 la limite s'appelle variation quadratique de $(X(t))_{t \in [0,T]}$ et on la note par $< X, X >_T$.

Proposition 1.3.1 *la variation quadratique d'un mouvement Brownien sur $[0, T]$ existe dans $\mathbb{L}^2(\Omega)$et vaut T, autrement dit $(B(t))_{t \in [0,T]}$ MB alors*

$$\lim_{n \to +\infty} \mathbb{E}\left[\left(\sum_{i=1}^{n} |B(t_i^n) - B\left(t_{i-1}^n\right)|^2 - T\right)^2\right] = 0 \ .$$

Remarque 1.3.1 *Si la subdivision (π_n) vérifie $\sum\limits_{n \geq 1} \|\pi_n\| < +\infty$ alors $< B, B >_T = T$ presque sûrement et en $\mathbb{L}^2$.*

Proposition 1.3.2 *la variation totale du mouvement Brownien sur toute intervalle est infini.*

Proposition 1.3.3 *Si $(X(t))_{t \in [0,T]}$ est un processua à trajectoire continue et à variation bornée, alors sa variation quadratique est nulle.*

Remarque 1.3.2 *Si $(B(t))_{t \geq 0}$ est un mouvement Brownien standard m-dimensionnel alors $< B^i, B^j >_T = T\delta_{ij}$ où $\delta_{ij} = \begin{cases} 0 & si \;\; i \neq j \\ 1 & si \;\; i = j \end{cases}$.*

1.4 Intégrale stochastique par rapport un M-B

Soit $(B(t))_{t \geq 0}$un mouvement Brownien défini sur $\left(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}, \mathbb{P}\right)$ dans $(\mathbb{R}, B(\mathbb{R}))$.

On cherche de définir l'intégrale suivante

$$I(\theta) = \int_0^T \theta(t) \, dB(t) \tag{1.1}$$

telle que $(\theta(t))_{t\in[0,T]}$ certain processus.

Mais on a la fontion $t \longrightarrow B(t)$ n'est pas dérivable donc le problème est dans l'élément $dB(t)$. Malheureusement le mouvement Brownien n'est pas à variation bornée donc on peut pas défini l'intégrale (1.1) comme intégrale de Stieltjes .

Cependant, puisque le variation quadratique de $B(t)$ est fini sur $[0,T]$ (*i.e.* : $< B, B >_T = T$ dans $\mathbb{L}^2(\Omega)$) alors on défini l'intégrale comme limite dans $\mathbb{L}^2$ où le processus $(\theta(t))_{t\in[0,T]}$ appartient $\mathbb{L}^2$.

1.4.1 Intégrale stochastique de processus élémentaire

Définition 1.4.1 *Un processus* $(\theta^n(t))_{t\in[0,T]}$ *est dit élémentaire s'il existe une subdivision de l'intervalle* $[0,T]$ *(i.e. :* $0 = t_0 < t_1 < ... < t_n = T$*) et des variables aléatoire discrètes appartiennent à* $\mathbb{L}^2$ *tel que,* $\forall t \in [0,T]$ $\forall \omega \in \Omega$ *on à* $\theta^n(t,\omega) = \sum_{i=0}^{n-1} \theta_i^n(\omega)\, \mathbf{1}_{[t_i,t_{i+1}[}(t)$*, et pour tout* $i \in \{0,1,...,n-1\}$*,* θ_i^n *est* $\mathcal{F}_{t_i}$ *mesurable .*

On note $\mathcal{E}^2$ l'ensemble de tous les processus élémentaire sur $[0,T]$ de carée intégrable.

Définition 1.4.2 *Pour chaque processus élémentaire appartenant à* $\mathcal{E}^2$*, nous pouvons définir l'intégrale stochastique comme suit :*

$$I(\theta^n) = \sum_{i=0}^{n-1} \theta_i^n (B\left(t_{i+1}^n\right) - B\left(t_i^n\right))$$

Remarque 1.4.1 *Comme* θ_i^n *est* $\mathcal{F}_{t_i}$ *mesurable, Alors* θ_i^n *est indépendent de* $B\left(t_{i+1}^n\right) - B\left(t_i^n\right)$ *car* $B(t_{i+1}) - B(t_i) \amalg \mathcal{F}_{t_i}$.

Propriété 1.4.1 *Pout tous* $\theta^n \in \mathcal{E}^2$ *on a :*

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\left[I(\theta^n)\right] &= 0 \\ \mathbb{E}\left[(I(\theta^n))^2\right] &= \mathbb{E}\left[\int_0^T (\theta^n(t))^2\, dt\right] \end{aligned}$$

Preuve.

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left[I(\theta^n)\right] &= \sum_{i=0}^{n-1}\mathbb{E}\left[\theta_i^n(B(t_{i+1})-B(t_i))\right]\\ &= \sum_{i=0}^{n-1}\mathbb{E}\left[\theta_i^n\right]\underbrace{\mathbb{E}\left[(B(t_{i+1})-B(t_i))\right]}_{0}\\ &= 0\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&\mathbb{E}\left[(I(\theta^n))^2\right]\\ &= \sum_{i=0}^{n-1}\mathbb{E}\left[(\theta_i^n)^2(B(t_{i+1})-B(t_i))^2\right]+\sum_{i=0}^{n-1}\sum_{\substack{j=0\\ j\neq i}}^{n-1}\mathbb{E}\left[(\theta_i^n)(B(t_{i+1})-B(t_i))\left(\theta_j^n\right)(B(t_{j+1})-B(t_j))\right]\\ &= \sum_{i=0}^{n-1}\mathbb{E}\left(\theta_i^n\right)^2\mathbb{E}\left[(B(t_{i+1})-B(t_i))^2\right]+\sum_{i=0}^{n-1}\sum_{\substack{j=0\\ j\neq i}}^{n-1}\underbrace{\mathbb{E}\left[(\theta_i^n)(B(t_{i+1})-B(t_i))\left(\theta_j^n\right)(B(t_{j+1})-B(t_j))\right]}_{0}\\ &= \sum_{i=0}^{n-1}\mathbb{E}\left[(\theta_i^n)^2\right](t_{i+1}-t_i)\\ &= \mathbb{E}\left[\int_0^T\theta^2(t)\,dt\right]\end{aligned}$$

pour tout $j > i$, alors $j \geq i+1$donc $\mathcal{F}_{t_i}\subset\mathcal{F}_{t_i+1}\subset\mathcal{F}_{tj}$, ceci implique

$$\begin{aligned}&\mathbb{E}\left[(\theta_i^n)(B(t_{i+1})-B(t_i))\left(\theta_j^n\right)(B(t_{j+1})-B(t_j))\right]\\ &= \mathbb{E}\left[(\theta_i^n)(B(t_{i+1})-B(t_i))\left(\theta_j^n\right)\right]\underbrace{\mathbb{E}\left[(B(t_{j+1})-B(t_j))\right]}_{0}\\ &= 0\end{aligned}$$

la même méthode pour $j < i$. ■

1.4.2 Intégrale stochastique cas général

On note $\mathbb{L}^2([0,T]\times\Omega)$ l'espace des processus $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$adapté et càglàd (*i.e.* : continus à gauche et limit à droite) tel que $\mathbb{E}\left[\int_0^T\theta^2(t)\,dt\right] < +\infty$.

autrement dit

$$\mathbb{L}^2\left([0,T]\times\Omega\right)=\left\{\begin{array}{c}\left(\theta\left(t\right)\right)_{t\in[0,T]}\text{processus stochastique }\left(\mathcal{F}_t\right)_{t\geq0}\text{ adapté}\\ \text{càglàd, telle que }\mathbb{E}\left[\int_0^T\theta^2\left(t\right)dt\right]<+\infty\end{array}\right\}.$$

Remarque 1.4.2 $\mathbb{L}^2\left([0,T]\times\Omega\right)$ *est un espace de Hilbert associe à la produit scalaire*

$$<\theta,\varphi>=\mathbb{E}\left[\int_0^T\theta\left(t\right)\varphi\left(t\right)dt\right].$$

Remarque 1.4.3 $\mathcal{E}^2$ *est un sous-espace vectoriel de* $\mathbb{L}^2\left([0,T]\times\Omega\right).$

Proposition 1.4.1 $\mathcal{E}^2$ *est dense dans* $\mathbb{L}^2\left([0,T]\times\Omega\right)$

i.e. : pout tout $\theta\in\mathbb{L}^2\left([0,T]\times\Omega\right)$ il existe $\theta^n\in\mathcal{E}^2$ telle que$\|\theta^n-\theta\|^2_{\mathbb{L}^2([0,T]\times\Omega)}\longrightarrow0$ où $\|\theta^n-\theta\|^2_{\mathbb{L}^2([0,T]\times\Omega)}=\mathbb{E}\left[\int_0^T\left(\theta^n\left(t\right)-\theta\left(t\right)\right)^2dt\right]$
Alors

$$\mathbb{E}\left[I(\theta)\right]=0 \tag{1.2}$$

$$\mathbb{E}\left[\left(I(\theta)\right)^2\right]=\mathbb{E}\left[\int_0^T\theta^2\left(t\right)dt\right] \tag{1.3}$$

pour tout $\theta\in\mathbb{L}^2\left([0,T]\times\Omega\right)$.Il est possible de définir $I\ (\theta)$ sous la condition $\int_0^T\theta^2\left(t\right)dt<+\infty\quad\mathbb{P}$ p.s.
Si on note

$$\mathbb{L}^2_{loc}\left([0,T]\times\Omega\right)=\left\{\begin{array}{c}\left(\theta\left(t\right)\right)_{t\in[0,T]}\text{processus stochastique }\left(\mathcal{F}_t\right)_{t\geq0}\text{ adapté}\\ \text{càglàd, telle que }\int_0^T\theta^2\left(t\right)dt<+\infty\end{array}\right\}$$

Donc on dit que $I\ (\theta)$ est défini si $\theta\in\mathbb{L}^2_{loc}\left([0,T]\times\Omega\right).$

Remarque 1.4.4 $\mathcal{E}^2\subset\mathbb{L}^2\left([0,T]\times\Omega\right)\subset\mathbb{L}^2_{loc}\left([0,T]\times\Omega\right).$

1.5 Processus d'Itô

Définition 1.5.1 *Soit* $(X(t))_{t\in[0,T]}$ *un processus défini sur* $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ *et adapté à la filtation* $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ *et* $(B(t))_{t\geq 0}$ *un* $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ *−mouvement Brownien.On dit que* $(X(t))_{t\in[0,T]}$ *est un processus d'Ito s'il est de la forme suivante*

$$X(t) = X_0 + \int_0^t b(s)\,ds + \int_0^t \sigma(s)\,dB(s) \quad (\forall t \in [0,T]) \tag{1.4}$$

où

1. $X_0 -\ \mathcal{F}_0$ mesurable.
2. $(b(t))_{t\in[0,T]}$ est un processus $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$adapté tel que $\int_0^T |b(s)|ds < +\infty \quad \mathbb{P}$ p.s.
3. $\sigma \in \mathbb{L}^2_{loc}([0,T] \times \Omega)$.

Définition 1.5.2 *Pour traduir l'égalité* (1.4), *on dira que le processus* $(X(t))_{t\in[0,T]}$ *admet la différentielle stochastique*

$$dX(t) = b(t)\,dt + \sigma(t)\,dB(t) \quad (\forall t \in [0,T]) \tag{1.5}$$

Le cofficient b *s'appelle la dérivé (ou le drift), et* σ *son coefficient de diffusion.*

1.5.1 Formule d'Itô

Théorème 1.5.1 *Soit* $(X(t))_{t\in[0,T]}$ *un processus d'Ito, de différentielle stochastique :*

$$dX(t) = b(t)\,dt + \sigma(t)\,dB(t) \quad (\forall t \in [0,T])$$

Soit $f : (t,x) \longrightarrow f(t,x)$,une fonction définie sur $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ par rapport à t, de classe $\mathcal{C}^2$par rapport à x et on note $f \in \mathcal{C}^{1,2}(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R})$, Alors $(f(t, X(t)))_{t\in[0,T]}$, est un processus d'Ito qui a pour différentielle stochastique :

$$df(t, X(t)) = \frac{\partial f}{\partial t}(t, X(t))dt + \frac{\partial f}{\partial x}(t, X(t))dX(t) + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(t, X(t))\sigma^2(t)\,dt \tag{1.6}$$

Prenez la forme de l'intégration comme suit :

$$\begin{aligned} f(t, X(t)) &= f(0, X_0) + \int_0^t \frac{\partial f}{\partial t}(s, X(s))ds \\ &+ \int_0^t \frac{\partial f}{\partial x}(s, X(s))dX(s) + \tfrac{1}{2}\int_0^t \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(s, X(s))\sigma^2(s)\, ds. \end{aligned} \tag{1.7}$$

où $\sigma^2(s)\, ds = d < X, X >_s$ Alors la forme générale est :

$$\begin{aligned} f(t, X(t)) &= f(0, X_0) + \int_0^t \frac{\partial f}{\partial t}(s, X(s))ds \\ &+ \int_0^t \frac{\partial f}{\partial x}(s, X(s))dX(s) + \tfrac{1}{2}\int_0^t \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(s, X(s))d < X, X >_s \end{aligned} \tag{1.8}$$

1.6 Équations différentielles stochastique

Soit $\left(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}, \mathbb{P}\right)$ un espace de probabilité filtré et $(B(t))_{t\geq 0}$ un$(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ $-$mouvement Brownien .

Définition 1.6.1 *On appelle équation différentielle stochastique (EDS) sur* $[0, T]$ *toute relation de la forme :*

$$\begin{cases} dX(t) & = b(t, X(t))dt + \sigma(t, X(t))dB(t) \\ X(0) & = X_0 \end{cases} \tag{1.9}$$

Cela signifie que $(X(t))_{t\in[0,T]}$ *satisfait l'équation :*

$$X(t) = X_0 + \int_0^t b(s, X(s))ds + \int_0^t \sigma(s, X(s))dB(s) \quad \forall t \in [0, T]. \tag{1.10}$$

où $b(t, x)$ *et* $\sigma(t, x)$ *deux fonctions mesurables définies sur* $[0, T] \times \mathbb{R}$ *dans* $\mathbb{R}$ *et* $X_0 - \mathcal{F}_0$ *mesurable.*

Définition 1.6.2 *On dit un processus* $(X(t))_{t\in[0,T]}$ *est solution de l'équation* (1.10)*si :*

1. $(X(t))_{t\in[0,T]}$ est continue et $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ $-$adapté.

2. Pour tout $t \in [0,T]$, les intégrales $\int_0^t b(s, X(s))ds$ et $\int_0^t \sigma(s, X(s))dB(s)$ ont un sens

$$\int_0^t |b(s, X(s))|ds < +\infty \text{ et } \int_0^t |\sigma(s, X(s))|^2 ds < +\infty \quad \mathbb{P}p.s.$$

3. $(X(t))_{t\in[0,T]}$ vérifie (1.10) c'est-à-dir :

$$\forall t \in [0,T] \qquad X(t) = X_0 + \int_0^t b(s, X(s))ds + \int_0^t \sigma(s, X(s))dB(s) \quad \mathbb{P}p.s.$$

Définition 1.6.3 *On dit pour l'équation* (1.10) *qu'il y a :*

_ existence faible s'il existe une solution de (1.10).

_ existence d'une solution forte si l'équation (1.10) admet une solution $(X(t))_{t\in[0,T]}$ adapté à$\left(\mathcal{F}_t^B\right)_{t\geq 0}$.

_ unicité faible si tous les solutions de (1.10) ont même loi.

_ unicité trajectorielle si, l'espace de probabilité filtré $\left(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}, \mathbb{P}\right)$ et le mouvement Brownien $(B(t))_{t\geq 0}$ étant fixé, deux solution quelconques X et X' de (1.10) sont indistinguables.

Théorème 1.6.1 (Existence et unicité pour EDS) *Si bet σ deux fonctions continues et pour tout $x, y \in \mathbb{R}$ et $t \in [0,T]$ on ait*

1_ $|b(t,x) - b(t,y)| + |\sigma(t,x) - \sigma(t,y)| \leq L|x-y|$.

2_ $|b(t,x)| + |\sigma(t,x)| \leq K(1+|x|)$.

où L, K sont des constantes strictement positives. Alors l'équation (1.10) admet une unique solution forte sur l'intervalle$[0,T]$, De plus cette solution $(X(t))_{t\in[0,T]}$ vérifie

$$\mathbb{E}\left[\sup_{0\leq t\leq T} |X(t)|^2\right] < +\infty$$

Preuve. Voir J. Yong, X.Y Zhou [1] ; page 42-44 ■

Théorème 1.6.2 (Yamada-Watanabe) *S'il y a existence faible et unicité trajectorielle,alors il y a aussi unicité faible. De plus, pour tout choix de l'espace de probabilité filtré* $\left(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}, \mathbb{P}\right)$ *et* $(B(t))_{t\geq 0}$ *un* $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$*−mouvement Brownien, il exicte pour chaque* $x \in \mathbb{R}$ *une unique solution forte de l'équation* (1.10).

Lemme 1.6.1 (Gronwall) *Soit* $T > 0$ *et une fonction positive mesurable bornée telle que*

$$g(t) \leq a \ + \ b \int_0^t g(s)ds.$$

pour tout $t \in [0, T]$*, où* a *et* b *sont des constantes positives alors*

$$g(t) \leq a \exp(bt) \qquad \forall t \in [0, T] .$$

Chapitre 2

Contrôle optimal

L'objectif de cette partie est de présenter le problème de contrôle optimal de point de vue locale dans les deux cas déterministe et stochastique.

2.1 Contrôle optimal dans le cas déterministe

Soit $x_0 \in \mathbb{R}^n$, $0 < T < +\infty$ et U espace métrique être donné, la formulation générale de problème de contrôle optimal et représenter par l'équation différentielle ordinaire suivante :

$$\begin{cases} dx(t) = b(t, x(t), u(t))dt \quad où\ t \in [0, T] \\ x(0) = x_0 \end{cases} \tag{2.1}$$

tel que

1. $b : [0, T] \times \mathbb{R}^n \times U \longrightarrow \mathbb{R}^n$.
2. $u : [0, T] \longrightarrow U$.

u est appelé contrôle et x_0 est appelé état initial et aussi $x(.)$ solution de (2.1) est appelé une trajectoire d'état correspondant à $u(.)$.

Remarque 2.1.1 *Lorsque $T = +\infty$ l'intervale doit étre $[0, +\infty[$.*

On appele aussi (2.1) le système de contrôle.

La fonction de coût qui mesure la performance des contrôles est :

$$J(u(.)) = \int_0^T \ell(s, x(s), u(s))ds + h\left(x(T)\right) \tag{2.2}$$

tel que

1. $\ell : [0, T] \times \mathbb{R}^n \times U \longrightarrow \mathbb{R}$."coût de fonctionnement".
2. $h : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$."coût terminal".

On note $\mathcal{V}\left[0, T\right]$ l'ensemble des contrôles mesurables qui prennent ces valeurs dans U *i.e* :

$$\mathcal{V}\left[0, T\right] = \{u : [0, T] \longrightarrow U \quad / \, u \text{ est mesurable } \}$$

Définition 2.1.1 *On dit que le contrôle* $u(.)$ *est admissible et* $(x(.), u(.))$ *paire admissible si :*

i) $u(.) \in \mathcal{V}\left[0, T\right]$.

ii) $x(.)$ est l'unique solution de l'équation (2.1) sous $u(.)$.

iii) $t \longrightarrow \ell(t, x(t), u(t)) \in \mathbb{L}^1\left[0, T\right]$.

iv) L'état $x(.)$ vérifie sa contrainte (s'il y' a une contrainte).

On note $\mathcal{V}_{ad}\left[0, T\right]$ l'ensemble de tous les contrôles admissibles.

Le système linéaire de contrôle est un cas particulier de (2.1) et donnér comme suite :

$$\begin{cases} dx(t) = \left(A\left(t\right)x\left(t\right) + D\left(t\right)u\left(t\right)\right)dt \qquad où\ t \in [0, T] \\ x\left(0\right) = x_0 \end{cases} \tag{2.3}$$

tel que

a) $A : [0, T] \longrightarrow \mathbb{R}^{n\times n}$.

b) $D : [0, T] \longrightarrow \mathbb{R}^{n\times k}$.

où A, D deux applications mesurables ; La solution $x(.)$ du système (2.3) associée au contrôle u est donnée par

$$x(t) = M(t)x_0 + \int_0^t M(t)M(s)^{-1}D(s)u(s)ds \quad \forall t \in [0,T]$$

où $M(.) : [0,T] \longrightarrow \mathbb{R}^n$, la résolvante du système homogène $dx(t) = A(t)\,x(t)\,dt$ définie comme suivante :

$$\begin{cases} dM(t) = A(t)\,M(t)\,dt \\ M(0) = I_n \end{cases} \tag{2.4}$$

Lorsque A, D ne dépond pas de temps tel que $A \in \mathbb{R}^{n\times n}, D \in \mathbb{R}^{n\times k}$ le système appelée système autonome et $M(t) = \exp(tA)$.

Problème 2.1.1 *Le problème de contrôle dans le cas déterministe est de minimiser* (2.2) *sur* $\mathcal{V}_{ad}[0,T]$.

Le Problème 2.1.1 est dit fini si le coût a une borne inférieure finie, et aussi dit (uniquement) résoluble s'il existe un *unique* $\bar{u}(.)$ satisfaisant

$$J(\bar{u}(.)) = \inf_{u\in\mathcal{V}_{ad}[0,T]} J(u(.)). \tag{2.5}$$

Définition 2.1.2 *On dit que* $\bar{u}(.)$ *est contrôle optimal si* $\bar{u}(.) \in \mathcal{V}_{ad}[0,T]$, *et on appeles* $\bar{x}(.)$*et* $(\bar{u}(.), \bar{x}(.))$, *une trajectoire d'état optimale et une paire optimale respictivement.*

Hypothèses

(D1) (U, d) espace polonais et $T > 0$.

(D2) Les applications b, ℓ, h sont toutes continues. Il existe un constant $L > 0$, et un module de continuité $\varpi : [0, \infty] \rightarrow [0, \infty]$ tel que pour $\psi(t, x, u) = \begin{cases} b(t, x, u) \\ \ell(t, x, u) \\ h(x) \end{cases}$ on a

$$\begin{cases} |\psi(t, x, u) - \psi(t, \hat{x}, u)| \leq L|x - \hat{x}| + \varpi\left(d\left(u; \hat{u}\right)\right) \\ \forall t \in [0, T] \qquad x, \hat{x} \in \mathbb{R}^n \qquad\quad u, \hat{u} \in U \\ |\psi(t, 0, u)| \leq L \\ \forall\left(t, u\right) \in [0, T] \times U \end{cases} \tag{2.6}$$

(**D3**) Pour chaque $(t, x) \in [0, T] \times \mathbb{R}^n$ l'ensemble

$$\Lambda(t, x, U) = \{(b_i(t, x, u), \ell(t, x, u))/u \in U, \quad i = 1, ..., n\}$$

est convexe et fermé dans $\mathbb{R}^{n+1}$.

(D4) x n'est pas contrainte.

Théorème 2.1.1 *Sous l'hypothèses précédentes, si le problème 2.1.1 est fini, alors il admet un contrôle optimal.*

Preuve. Soit $u_j\left(.\right)$ une suite de minimisation $\left(i.e. :J(u_j\left(.\right)) \underset{j \rightarrow +\infty}{\longrightarrow} \inf_{u \in \mathcal{V}_{ad}[0,T]} J(u\left(.\right))\right)$ assoiées les trajectoires $x_j\left(.\right)$, par **(D2)** on a que $b(., x_j\left(.\right), u_j\left(.\right))$, $\ell(., x_j\left(.\right), u_j\left(.\right))$ et $x_j\left(.\right)$ sont uniformément bornées en j, par conséquent $x_j\left(.\right)$ est équicontinue (par l'équation d'état), alors

$$\begin{cases} x_j\left(.\right) \longrightarrow \bar{x}(.) & \text{dans } C\left([0, T], \mathbb{R}^n\right) \\ b(., x_j\left(.\right), u_j\left(.\right)) \longrightarrow \bar{b}(.) & \text{faiblement dans } \mathbb{L}^2\left([0, T]\right) \\ \ell(., x_j\left(.\right), u_j\left(.\right)) \longrightarrow \bar{\ell}(.) & \text{faiblement dans } \mathbb{L}^2\left([0, T]\right) \\ h(x_j\left(T\right)) \longrightarrow h(\bar{x}\left(T\right)) & \text{dans } \mathbb{R} \end{cases} \tag{2.7}$$

Par la première convergence et théorème de Mazur (voir K. Yosida [7] p 120 théorème 2) on a $\alpha_{ij} \geq 0$, et $\sum_{i\geq 1} \alpha_{ij} = 1$ tel que

$$\begin{cases} \sum_{i\geq 1} \alpha_{ij} b(.,\bar{x}(.),u_{i+j}(.)) \underset{j\to+\infty}{\longrightarrow} \bar{b}(.) & \text{fortement dans } \mathbb{L}^2([0,T]) \\ \sum_{i\geq 1} \alpha_{ij} \ell(.,\bar{x}(.),u_{i+j}(.)) \underset{j\to+\infty}{\longrightarrow} \bar{\ell}(.) & \text{fortement dans } \mathbb{L}^2([0,T]) \end{cases} \tag{2.8}$$

et par hypothèse **(D3)**

$$\left(\bar{b}(t), \bar{\ell}(t)\right) \in \Lambda(t, \bar{x}(t), U). \tag{2.9}$$

par conséquent, par le lemme de Filippov (voir X. Li, J. Yong [6] p 102 corollaire 2.26), il existe un $\bar{u} \in \mathcal{V}[0,T]$ tel que

$$\bar{b}(t) = b(t,\bar{x}(t),\bar{u}(t)), \qquad \bar{\ell}(t) = \ell(t,\bar{x}(t),\bar{u}(t)) \quad \forall t \in [0,T]. \tag{2.10}$$

Ainsi $(\bar{x}(.), \bar{u}(.))$ est une paire admissible ; et par le lemme de Fatou (voir K. Yosida [7] p 17), on obtient

$$\begin{aligned} J(\bar{u}(.)) &= \textstyle\int_0^t \ell(s,\bar{x}(s),\bar{u}(s))ds + h(\bar{x}(T)) \\ &\leq \underset{j\to+\infty}{\underline{\lim}} \textstyle\sum_{i\geq 1} \alpha_{ij} \{\int_0^t \ell(s,x_{i+j}(s),u_{i+j}(s))ds + h(x_{i+j}(T))\} \\ &= \underset{j\to+\infty}{\underline{\lim}} \textstyle\sum_{i\geq 1} \alpha_{ij} J(u_{i+j}(.)) = \inf_{u\in\mathcal{V}[0,T]} J(u(.)). \end{aligned} \tag{2.11}$$

Ainsi, $\bar{u}(.) \in \mathcal{V}[0,T]$ est un contrôle optimal. ■

Remarque 2.1.2 *On peut extraire une sous-suite de $x_j(.)$ qui converge vers $\bar{x}(.)$, si nécessaire*

2.2 Contrôle optimal dans le cas stochastique

Les systèmes qu'on va étudiés dans cet section sont dynamiques, qui sont évoluent au fil du temps, et sont décrite par les équations différentielles stochastiques et parfois appelés modèles de diffusions, ces derniers sont etudiés à cause de l'incertitude qui provient du bruit blanc qui représente les effets conjoints d'un grand nombre de forces aléatoire indépendantes agissant sur les système ; ces derniers (*systèmes*) représentent des problèmes de contrôle optimal pour le cas stochastique, et ces derniers sont intéressants dans la vie quotidienne, par exemple : l'assurance, la finance, la fabrication, et l'industrie...etc.

Il y à deux formultions mathématiques (*forte* et *faible*) qui représentent les deux problèmes de contrôle optimaux stochastiques.

2.2.1 Formulation forte

Soit $\left(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}, \mathbb{P}\right)$ est un espace probabilité filtré satisfaisant les conditions usuelles et $(B(t))_{t\geq 0}$ mouvement Brownien $m-$dimensionnel.
Considérons le système de contrôle pour les équations différentielles stochastiques suivant :

$$\begin{cases} dX(t) = b(t, X(t), u(t))dt + \sigma(t, X(t), u(t))dB(t) \\ X(0) = X_0 \qquad\qquad \text{où } (X_0 \in \mathbb{R}^n) \end{cases} \tag{2.12}$$

tel que :

1. $b : [0, T] \times \mathbb{R}^n \times U \longrightarrow \mathbb{R}^n$.
2. $\sigma : [0, T] \times \mathbb{R}^n \times U \longrightarrow \mathbb{R}^{n\times m}$.
3. U espace métrique séparable donné, et $T > 0$ fixé.

Remarque 2.2.1 *"$\mathcal{F}_t$" représente les informations en cet temps "t", mais pas capable de prédire qu'arrivera-t-il ensuite cause de l'incertitude.*

Le contrôle u est pris de la ensemble suivante

$$\mathcal{U}\left[0,T\right]=\left\{u:\left[0,T\right]\times\Omega\longrightarrow U\ /u \text{ est } \left(\mathcal{F}_t\right)_{t\geq 0}-\text{adapté}\right\}$$

Tout $u\in\mathcal{U}\left[0,T\right]$ est appelé un contrôle faisable.

Nous présentons le coût fonctionnel comme suit :

$$J(u\left(.\right))=\mathbb{E}\left[\int_0^T \ell(t,X(t),u(t))dt+h(X\left(T\right))\right] \tag{2.13}$$

Définition 2.2.1 *Soit*$\left(\Omega,\mathcal{F},\left(\mathcal{F}_t\right)_{t\geq 0},\mathbb{P}\right)$ *est un espace probabilité filtré satisfaisant les conditions usuelles et* $\left(B\left(t\right)\right)_{t\geq 0}$ *mouvement Brownien* $m-$*dimensionnel, On dit que le contrôle* u *est* F*-admissible et* (X,u) *une pair* F*-admissible si*

i) $u\in\mathcal{U}\left[0,T\right].$

ii) X est l'unique solution de (2.12).

iii) L'état vérifie sa contrainte (si elle est contrainte).

iv) $\ell\in L^1\left(\left[0,T\right]\times\Omega\right)$ et $h(X\left(T\right))\in L^1_{\mathcal{F}_T}\left(\Omega\right).$

On note $\mathcal{U}_{ad}^F\left[0,T\right]$ l'ensemble de toutes les contrôles F-admissibles.

Problème 2.2.1 *La formule forte qui represente, le problème du contrôle optimal stochastique est*

$$J(\bar{u}\left(.\right))=\inf_{u\in\mathcal{U}_{ad}^F\left[0,T\right]}J(u\left(.\right)). \tag{2.14}$$

Pour tout $\bar{u}\in\mathcal{U}_{ad}^F\left[0,T\right]$ vérifie (2.14) appelé contrôle F-admissible et le processus corréspondant $\left(\bar{X}\left(t\right)\right)_{t\geq 0}$ appelée processus d'état F-optimal.

2.2.2 Formulation faible

On à dans la formulations forte l'espace de probabilité filtré et le mouvement Brownien $\left(B\left(t\right)\right)_{t\geq 0}$sont fixé, Cependant dans certaines situations il est nécessaire varient l'espace filtré $\left(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}, \mathbb{P}\right)$ ainsi que $(B(t))_{t\geq 0}$ et de les considerer comme des parties de contrôle.

Définition 2.2.2 *On dit que* $\pi = \left(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}, \mathbb{P}, (B(t))_{t\geq 0}, u\right)$ *est contrôle* f*-admissible et* (X, u) *est pair* f*-admissible si*

i) $\left(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}, \mathbb{P}\right)$ espace probabilité filtré satisfaisant les conditions usuelles .

ii) $(B(t))_{t\geq 0}$ mouvement Brownien $m-$dimensionnel défini sur $\left(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}, \mathbb{P}\right)$.

iii) u est un un processus $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$-adapté sur $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ prenant des valeurs dans U.

iv) X est l'unique solution de (2.12) .

v) L'état vérifie sa contrainte (si elle est contrainte).

vi) $\ell \in L^1([0, T] \times \Omega)$ et $h(X(T)) \in L^1_{\mathcal{F}_T}(\Omega)$.

On note $\mathcal{U}^f_{ad}[0, T]$ l'ensemble de toutes les contrôles f-admissibles.

Problème 2.2.2 *Le problème est de minimiser* (2.13) *sur* $\mathcal{U}^f_{ad}[0, T]$ *; autrement dit cherche* $\bar{\pi} \in \mathcal{U}^f_{ad}[0, T]$ *tel que*

$$J(\bar{\pi}) = \inf_{\pi \in \mathcal{U}^f_{ad}[0,T]} J(\pi). \tag{2.15}$$

Nous soulignons ici que la formulation forte est celle qui provient du monde pratique, tandis que la formulation faible sert parfois de modèle mathématique auxiliaire mais efficace visant à résoudre finalement des problèmes avec la formulation forte. Une raison principale pourquoi ceci pourrait fonctionner est que l'objectif d'un problème stochastique de contrôle est de réduire au minimum l'attente mathématique d'une certaine variable aléatoire qui dépend seulement de la distribution des processus impliqués. Par conséquent, si les solutions de (2.12) dans différents espaces de probabilité ont la même distribution de probabilité, puis un a plus de liberté en choisissant un espace de probabilité commode pour travailler avec. Un bon exemple est quand on essaye d'utiliser le principe de programmation dynamique pour résoudre le problème. Cependant la formulation faible échoue si les coefficients indiqués l'uns des b, σ, ℓ, et h sont également aléatoires (ils dépendent de ω), parce que dans ce cas l'espace de probabilité doit être spécifié et fixé a priori.

2.2.3 Existence sous la formulation forte

Soit $\left(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}, \mathbb{P}\right)$ satisfaisant les conditions usuelles et $(B(t))_{t\geq 0}$ mouvement Brownien undimensionnel ; Considérez le système linéaire autonomes dans le cas stochastique

$$\begin{cases} dX(t) & = [AX(t) + Bu(t)]\, dt \; + [CX(t) + Du(t)]\, dB(t) \\ X(0) & = X_0 \qquad\qquad\qquad \forall t \in [0, T] \end{cases} \tag{2.16}$$

a) A, B, C, D sont des matrices de tailles appropriées.

b) X prend valeurs dans $\mathbb{R}^n$.

c) Le contrôle u appartien l'ensemble suivante

$$\mathcal{U}^L[0,T] = \{u \in L^2([0,T] \times \Omega) \;\; / \; u(t) \in U\}. \tag{2.17}$$

Si U est borné alors le coût fonctionnel est :

$$J(u(.)) = \mathbb{E}\left[\int_0^T \ell(X(t), u(t))dt + h(X(T))\right] \tag{2.18}$$

où $\ell : \mathbb{R}^n \times U \longrightarrow \mathbb{R}$ et $h : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$.

Problème 2.2.3 *Le problème du contrôle optimal est de minimiser* (2.18) *sous réserve* (2.16) *sur* $\mathcal{U}^L[0,T]$.

Hypothèses

(FL1) L'ensemble U est convexe et fermé, et les fonctions ℓ et h sont convexes, et il éxiste $\delta, K > 0$ tel que :

$$\begin{gathered} \ell(x,u) \geq \delta |u|^2 - K, \qquad h(x) \geq -K. \\ \forall (x,u) \in \mathbb{R}^n \times U \end{gathered} \tag{2.19}$$

(FL2) L'ensemble U est convexe et compact, et les fonctions ℓ et h sont convexes.

Théorème 2.2.1 *Si le problème 2.2.1 est fini et **(FL1)** ou **(FL2)** est vérifier alors le problème admet un contrôle optimal .*

Preuve. On va démontrer seulment lorsque **(FL1)** véifier, Soit $(X_j(.), u_j(.))$ un suite de minmisation, on a par (2.19)

$$\mathbb{E}\int_0^T |u_j(t)|^2 dt \leq k \quad \forall j \geq 1 \tag{2.20}$$

Ainsi, il y a une sous-suite de $u_j(.)$, qui converge faiblement dans l'espace de Hilbert mais on note la sous-suite par $u_j(.)$ *i.e.*

$$u_j(.) \underset{j\to+\infty}{\longrightarrow} \bar{u}(.) \qquad \text{faiblement dans } \mathbb{L}^2([0,T]\times\Omega). \tag{2.21}$$

Par le théorème de Mazur, nous avons une suite de combinaisons convexes
$\tilde{u}_j(.) = \sum_{i\geq 1} \alpha_{ij} u_{i+j}(.)$ et $\alpha_{ij} \geq 0$, $\sum_{i\geq 1} \alpha_{ij} = 1$
tel que

$$\tilde{u}_j(.) \underset{j\to+\infty}{\longrightarrow} \bar{u}(.) \qquad \text{fortement dans } \mathbb{L}^2([0,T]\times\Omega). \tag{2.22}$$

Comme l'ensemble U est convexe et fermé, alors $\bar{u}(.) \in \mathcal{U}^L[0,T]$.
et d'autre part, si $\tilde{X}(.)$ est l'état sous le contrôle $\tilde{u}_j(.)$, Alors on a

$$\tilde{X}_j(.) \underset{j\to+\infty}{\longrightarrow} \bar{X}(.) \qquad \text{fortement dans } C([0,T]). \tag{2.23}$$

Clairement, $(\bar{X}(.), \bar{u}(.))$ est admissible, et la convexité de ℓ et h implique

$$\begin{aligned} J(\bar{u}(.)) &= \lim_{j\to+\infty} J(\tilde{u}_j(.)) \\ &\leq \lim_{j\to+\infty} \textstyle\sum_{i\geq 1} \alpha_{ij} J(u_{i+j}(.)) \\ &= \inf_{u(.)\in\mathcal{U}^L[0,T]} J(u(.)). \end{aligned} \tag{2.24}$$

Par conséquent, $(\bar{X}(.), \bar{u}(.))$ est optimal. ■

2.2.4 Existence sous la formulation faible

Hypothèses

(f1) (U, d) espace métrique compacte et $T > 0$.

(f2) b, σ, ℓ, h sont toutes continues.

(f3) Il existe un constant $L > 0$, tel que pour $\psi(t, x, u) = \begin{cases} b(t, x, u) \\ \sigma(t, x, u) \\ \ell(t, x, u) \\ h(x) \end{cases}$ on a

$$\begin{cases} |\psi(t, x, u) - \psi(t, \hat{x}, u)| \leq L|x - \hat{x}| \\ \qquad\qquad \forall t \in [0, T] \quad x, \hat{x} \in \mathbb{R}^n \qquad u \in U \\ |\psi(t, 0, u)| \leq L \qquad\qquad \forall\, (t, u) \in [0, T] \times U \end{cases} \tag{2.25}$$

(f4) Pour chaque $(t, X) \in [0, T] \times \mathbb{R}^n$ l'ensemble

$$\{(b_i(t, X, U), \left(\sigma\sigma^\top\right)^{ij}(t, X, U), \ell(t, X, U))/u \in U, \quad i = 1, ..., n, \qquad j = 1, ..., m\ \}$$

est convexe dans $\mathbb{R}^{n+nm+1}$.

(f5) X n'est pas contrainte.

Théorème 2.2.2 *Sous l'hypothèses précédentes, si le problème 2.2.2 est fini, alors il admet un contrôle optimal.*

Preuve. Voir J. Yong, X.Y Zhou [1] ; page 71-75 ∎

Chapitre 3

Principe du maximum : Cas convexe

Dans ce chapitre on va étudier le principe du maximum stochastique dans le cas convexe cette étude a pour but la condition nécessaire d'optimalité, cependant pour obtenir cette condition on perturbe le contrôle optimal premièrement.

L'intérêt de la perturbation de contrôle optimal $\bar{u}$ est d'introduire un contrôle u_θ sur lequel nous pouvons dériver la fonction $J(u_\theta(.))$.

3.1 Définitions et Notions

Soit $b(t,x,u)$, $\sigma(t,x,u)$ deux applications telle que

$$b:[0,T]\times\mathbb{R}^n\times U\longrightarrow\mathbb{R}^n.\text{et continuement différentiables en } x \text{ et } u \tag{3.1}$$

$$\sigma:[0,T]\times\mathbb{R}^n\times U\longrightarrow\mathbb{R}^{n\times n}.\text{et continuement différentiables en } x \text{ et } u \tag{3.2}$$

$$b_x,b_u,\sigma_x,\sigma_u \text{ sont bornés} \tag{3.3}$$

$$|b(t,x,u)|\leq K_1\left(1+|x|+|u|\right) \tag{3.4}$$

$$|\sigma(t,x,u)|\leq K_1\left(1+|x|+|u|\right) \tag{3.5}$$

Remarque 3.1.1 *Les dérivées b_x,b_u appartenant à $\mathbb{R}^{n\times n}$ et $\sigma_x=\left(\sigma_x^1,....,\sigma_x^n\right)$,*

$\sigma_u = (\sigma_u^1, ..., \sigma_u^n)$ telle que pour tout $i = \overline{1,n}$; $\sigma_u^i, \sigma_x^i \in \mathbb{R}^{n\times n}$.où $\sigma = (\sigma^1, ..., \sigma^n)$ et $\sigma^i = \begin{pmatrix} \sigma_{1i} \\ . \\ . \\ . \\ \sigma_{ni} \end{pmatrix}$

Soit $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}, \mathbb{P})$ est un espace probabilité filtré satisfaisant les conditions usuelles et $(B(t))_{t\geq 0}$ mouvement Brownien $n-$dimensionnel, et soit $\mathcal{U}$ un sous ensemble de $\mathbb{R}^n$ non vide.

Définition 3.1.1 *On appelle contrôle admissible tout processus* $(u(t))_{t\in[0,T]}$ *appartient à* $\mathbb{L}^2([0,T]\times\Omega)$ *a valeur dans* $\mathcal{U}$.

Notation 3.1.1 *On note* $\mathcal{U}_{ad}$ *l'ensemble de tous les contrôles admissibles*

$$\mathcal{U}_{ad} = \left\{u : [0,T]\times\Omega \longrightarrow \mathcal{U} \quad / \quad u \in \mathbb{L}^2([0,T]\times\Omega)\right\}$$

et $\mathcal{U}_{ad}$ est un sous-ensemble convexe, fermé de $\mathbb{L}^2([0,T]\times\Omega)$.

Pour tout contrôle admissible.($i.e.$ $\forall u \in \mathcal{U}_{ad}$) on définit l'EDS comme suit :

$$\begin{cases} dX(t) = b(t, X(t), u(t))dt + \sigma(t, X(t), u(t))dB(t) \\ X(0) = X_0 \qquad \text{où } (X_0 \in \mathbb{R}^n) \end{cases} \tag{3.6}$$

Où X_0 est déterministe

On a le coût définit comme suit :

$$J(u(.)) = \mathbb{E}\left[\int_0^T \ell(t, X(t), u(t))dt + h(X(T))\right] \tag{3.7}$$

mais avec des propriétés précises

$$\ell \text{ est continuement différentiables en } x \text{ et } u \tag{3.8}$$

$$|\ell_x(t,x,u)| \leq C_1 \left(1+|x|+|u|\right) \tag{3.9}$$

$$|\ell_u(t,x,u)| \leq C_2 \left(1+|x|+|u|\right) \tag{3.10}$$

$$\ell(t,0,0) \in \mathbb{L}^{\infty}\left([0,T]\right) \tag{3.11}$$

$$\begin{gathered} \text{La dérivé de } h \text{ est continue et} \\ |h_x\left(x\right)| \leq C_3\left(1+|x|\right) \end{gathered} \tag{3.12}$$

On perturbe le contrôle $\bar{u}$ de la manière suivant :

$$\begin{aligned} u_\theta\left(t\right) &= \bar{u}\left(t\right)+\theta\left(u\left(t\right)-\bar{u}\left(t\right)\right) \\ &= \theta u\left(t\right)+\left(1-\theta\right)\bar{u}\left(t\right) \end{aligned}$$

où

1. $\bar{u}$ est contrôle optimal
2. θ est plus petit.

Remarque 3.1.2 u_θ *est un contrôle admissible.*

Les EDSs associées à $\bar{u}, u_\theta$ respictivement sont :

$$\begin{cases} d\bar{X}(t) = b(t,\bar{X}\left(t\right),\bar{u}\left(t\right))dt+\sigma(t,\bar{X}\left(t\right),\bar{u}\left(t\right))dB\left(t\right) \\ \bar{X}(0) = X_0 \end{cases} \tag{3.13}$$

$$\begin{cases} dX_\theta(t) = b(t,X_\theta(t),u_\theta(t))dt+\sigma(t,X_\theta(t),u_\theta(t))dB\left(t\right) \\ X_\theta(0) = X_0 \end{cases} \tag{3.14}$$

où X_θ est l'état acossie à u_θ.

Notation 3.1.2 *Pour tout* $\Psi = b, \sigma, \ell$ *on note* $\bar{\Psi}(t) \equiv \Psi(t, \bar{X}(t), \bar{u}(t))$; $\overset{\theta}{\Psi}(t) \equiv \Psi(t, X_\theta(t), u_\theta(t))$.

3.2 Lemmes

Lemme 3.2.1 *Pour tout* $t \in [0\ T]$ *on a* X_θ *converge en* $\mathbb{L}^2$ *a* $\bar{X}$ *autrement dit :*

$$\mathbb{E}|X_\theta(t) - \bar{X}(t)|^2 \underset{\theta \longrightarrow 0}{\longrightarrow} 0 \tag{3.15}$$

Preuve. $|X_\theta(t) - \bar{X}(t)| \leq \int_0^t |\overset{\theta}{b}(s) - \bar{b}(s)|ds + |\int_0^t \overset{\theta}{\sigma}(s) - \bar{\sigma}(s)\, dB(s)|$
on a $(x+y)^2 \leq 2(x^2+y^2)$ donc
$|X_\theta(t) - \bar{X}(t)|^2 \leq 2\left(\int_0^t |\overset{\theta}{b}(s) - \bar{b}(s)|ds\right)^2 + 2|\int_0^t \overset{\theta}{\sigma}(s) - \bar{\sigma}(s)\, dB(s)|^2$
d'aprés (1.3) chapitre 1 et l'inégalité de Cauchy-Schwarz on trouve que
$\mathbb{E}|X_\theta(t) - \bar{X}(t)|^2 \leq 2\mathbb{E}\left[\int_0^t |\overset{\theta}{b}(s) - \bar{b}(s)|^2 ds + \int_0^t |\overset{\theta}{\sigma}(s) - \bar{\sigma}(s)|^2 ds\right]$
comme b, σ sont lipschitziennes alors

$$\begin{aligned} 0 \leq \mathbb{E}|X_\theta(t) - \bar{X}(t)|^2 &\leq 2k\mathbb{E}\left[\int_0^t |u_\theta(s) - \bar{u}(s)|^2 ds\right] = \\ & 2k\theta^2\mathbb{E}\left[\int_0^t |u(s) - \bar{u}(s)|^2 ds\right] \underset{\theta \longrightarrow 0}{\longrightarrow} 0 \end{aligned}$$

d'où (3.15) ■

On définit $Z(t)$ de la manière suivante

$$\begin{cases} dZ(t) &= \left(\bar{b}_x(t) Z(t) + \bar{b}_u(t)(u(t) - \bar{u}(t))\right) dt \\ & \quad + \left(\bar{\sigma}_x(t) Z(t) + \bar{\sigma}_u(t)(u(t) - \bar{u}(t))\right) dB(t) \\ Z(0) &= 0 \end{cases} \tag{3.16}$$

Comme $b_x, b_u, \sigma_x, \sigma_u$ sont bornés et continues alors $Z \in \mathbb{L}^2([0,T] \times \Omega)$.

Lemme 3.2.2 *Pour tout* $t \in [0\ T]$ *on a la convergence suivante*

$$\mathbb{E}\left|\frac{X_\theta(t) - \bar{X}(t)}{\theta} - Z(t)\right|^2 \underset{\theta \longrightarrow 0}{\longrightarrow} 0 \tag{3.17}$$

Preuve. On note $\tilde{X}_\theta(t) = \dfrac{X_\theta(t) - \bar{X}(t)}{\theta} - Z(t)$ et $v(t) = u(t) - \bar{u}(t)$.

$$\begin{aligned}
d\tilde{X}_\theta(t) &= \tfrac{1}{\theta}\left[b\left(t, \bar{X}(t) + \theta(Z(t) + \tilde{X}_\theta(t)), u_\theta(t)\right) - \bar{b}(t) - \theta\bar{b}_x(t) Z(t) - \theta\bar{b}_u(t) v(t)\right] dt \\
&\quad + \tfrac{1}{\theta}\left[\sigma\left(t, \bar{X}(t) + \theta(Z(t) + \tilde{X}_\theta(t)), u_\theta(t)\right) - \bar{\sigma}(t) - \theta\bar{\sigma}_x(t) Z(t) - \theta\bar{\sigma}_u(t) v(t)\right] dB(t) \\
\tilde{X}_\theta(0) &= 0
\end{aligned}$$

Alors

$$\begin{aligned}
d\tilde{X}_\theta(t) &= \left(\int_0^1 \left[b_x\left(t, \bar{X}(t) + \lambda\theta(Z(t) + \tilde{X}_\theta(t)), \bar{u}(t) + \lambda\theta v(t)\right)\left(Z(t) + \tilde{X}_\theta(t)\right)\right.\right. \\
&\quad \left.\left. + b_u\left(t, \bar{X}(t) + \lambda\theta(Z(t) + \tilde{X}_\theta(t)), \bar{u}(t) + \lambda\theta v(t)\right) v(t)\right] d\lambda\right) dt \\
&\quad - \left(\int_0^1 \left[\bar{b}_x(t) Z(t) + \bar{b}_u(t) v(t)\right] d\lambda\right) dt \\
&\quad + \left(\int_0^1 \left[\sigma_x\left(t, \bar{X}(t) + \lambda\theta(Z(t) + \tilde{X}_\theta(t)), \bar{u}(t) + \lambda\theta v(t)\right)(Z(t) + \tilde{X}_\theta(t))\right.\right. \\
&\quad \left.\left. + \sigma_u\left(t, \bar{X}(t) + \lambda\theta(Z(t) + \tilde{X}_\theta(t)), \bar{u}(t) + \lambda\theta v(t)\right) v(t)\right] d\lambda\right) dB(t) \\
&\quad - \left(\int_0^1 \left[\bar{\sigma}_x(t) Z(t) + \bar{\sigma}_u(t) v(t)\right] d\lambda\right) dB(t) \\
&= \left(\int_0^1 \left[b_x\left(t, \bar{X}(t) + \lambda\theta(Z(t) + \tilde{X}_\theta(t)), \bar{u}(t) + \lambda\theta v(t)\right) \tilde{X}_\theta(t)\right] d\lambda\right) dt \\
&\quad + \left(\int_0^1 \left[\sigma_x\left(t, \bar{X}(t) + \lambda\theta(Z(t) + \tilde{X}_\theta(t)), \bar{u}(t) + \lambda\theta v(t)\right) \tilde{X}_\theta(t)\right] d\lambda\right) dB(t) \\
&\quad + \left(\int_0^1 \left[b_x\left(t, \bar{X}(t) + \lambda\theta(Z(t) + \tilde{X}_\theta(t)), \bar{u}(t) + \lambda\theta v(t)\right) - \bar{b}_x(t)\right] Z(t)\, d\lambda\right) dt \\
&\quad + \left(\int_0^1 \left[\sigma_x\left(t, \bar{X}(t) + \lambda\theta(Z(t) + \tilde{X}_\theta(t)), \bar{u}(t) + \lambda\theta v(t)\right) - \bar{\sigma}_x(t)\right] Z(t)\, d\lambda\right) dB(t) \\
&\quad + \left(\int_0^1 \left[b_u\left(t, \bar{X}(t) + \lambda\theta(Z(t) + \tilde{X}_\theta(t)), \bar{u}(t) + \lambda\theta v(t)\right) - \bar{b}_u(t)\right] v(t)\, d\lambda\right) dt \\
&\quad + \left(\int_0^1 \left[\sigma_u\left(t, \bar{X}(t) + \lambda\theta(Z(t) + \tilde{X}_\theta(t)), \bar{u}(t) + \lambda\theta v(t)\right) - \bar{\sigma}_u(t)\right] v(t)\, d\lambda\right) dB(t)
\end{aligned}$$

d'aprés (3.3) et (1.3) et l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on trouve que

$\mathbb{E}|\tilde{X}_\theta(t)|^2 \leq c\mathbb{E}[\int_0^t |\tilde{X}_\theta(s)|^2 ds] + \rho_\theta$

où

$$\begin{aligned}
\rho_\theta &= c_1\mathbb{E}\left(\int_0^t |Z(s)| \int_0^1 \left(b_x\left(s, \bar{X}(s) + \lambda\theta(Z(s) + \tilde{X}_\theta(s)), \bar{u}(s) + \lambda\theta v(s)\right) - \bar{b}_x(s)\right) d\lambda ds\right)^2 \\
&\quad + c_2\mathbb{E}\left(\int_0^t |v(s)| \int_0^1 \left(b_u\left(s, \bar{X}(s) + \lambda\theta(Z(s) + \tilde{X}_\theta(s)), \bar{u}(s) + \lambda\theta v(s)\right) - \bar{b}_u(s)\right) d\lambda ds\right)^2 \\
&\quad + c_3\mathbb{E}\int_0^t |Z(s)|^2 \int_0^1 |\sigma_x\left(s, \bar{X}(s) + \lambda\theta(Z(s) + \tilde{X}_\theta(s)), \bar{u}(s) + \lambda\theta v(s)\right) - \bar{\sigma}_x(s)|^2 d\lambda ds \\
&\quad + c_4\mathbb{E}\int_0^t |v(s)|^2 \int_0^1 |\sigma_u\left(s, \bar{X}(s) + \lambda\theta(Z(s) + \tilde{X}_\theta(s)), \bar{u}(s) + \lambda\theta v(s)\right) - \bar{\sigma}_u(s)|^2 d\lambda ds
\end{aligned}$$

comme $b_x, b_u, \sigma_x, \sigma_u$ sont continue, Alors $\rho_\theta \underset{\theta \longrightarrow 0}{\longrightarrow} 0.$

et on trouve aussi d'aprés le lemme 1.6.1

$0 \leq \mathbb{E}|\tilde{X}_\theta(t)|^2 \leq \rho_\theta \exp(ct) \underset{\theta \longrightarrow 0}{\longrightarrow} 0.$

d'où (3.17) . ■

On défini aussi $\zeta(t)$ par

$$\begin{cases} \dfrac{d\zeta(t)}{dt} & = & \bar{\ell}_x(t) . Z(t) + \bar{\ell}_u(t) . v(t) \\ \zeta(0) & = & 0 \end{cases} \tag{3.18}$$

où $v(t) = u(t) - \bar{u}(t)$

Lemme 3.2.3 *La fonction J est différentiable au sens de Gâteaux au $\bar{u}$ qui donner par la formule suivante :*

$$\left.\frac{d}{d\theta} J(u_\theta(.))\right|_{\theta=0} = \mathbb{E}[h_x(\bar{X}(T)).Z(T) + \zeta(T)] \tag{3.19}$$

Preuve. On a

$\left.\dfrac{d}{d\theta} J(u_\theta(.))\right|_{\theta=0} = \lim\limits_{\theta \to 0} \dfrac{J(u_\theta(.)) - J(\bar{u}(.))}{\theta}.$

Ainsi

$$\begin{aligned} &\frac{J(u_\theta(.)) - J(\bar{u}(.))}{\theta} \\ &= \mathbb{E}\left[\int_0^T \frac{\ell(t, X_\theta(t), u_\theta(t)) - \ell\left(t, \bar{X}(t), \bar{u}(t)\right)}{\theta} dt\right] + \mathbb{E}\left[\frac{h(X_\theta(T)) - h(\bar{X}(T))}{\theta}\right] \\ &= \mathbb{I}_1 + \mathbb{I}_2 \end{aligned}$$

où

$$\begin{aligned} \mathbb{I}_1 &= \mathbb{E}\left[\int_0^T \frac{\ell(t, X_\theta(t), u_\theta(t)) - \ell(t, \bar{X}(t), \bar{u}(t))}{\theta} dt\right] \\ &= \mathbb{E}\int_0^T \int_0^1 \Big[\ell_x\left(t, \bar{X}(t) + \lambda(X_\theta(t) - \bar{X}(t)), \bar{u}(t) + \lambda\theta v(t)\right) . \left(Z(t) + \tilde{X}_\theta(t)\right) \\ &+ \ell_u\left(t, \bar{X}(t) + \lambda(X_\theta(t) - \bar{X}(t)), \bar{u}(t) + \lambda\theta v(t)\right) . v(t)\Big] \, d\lambda dt \end{aligned}$$

et

$$
\begin{aligned}
\mathbb{I}_2 &= \mathbb{E}\left[\frac{h(X_\theta(T)) - h(\bar{X}(T))}{\theta}\right] \\
&= \mathbb{E}\int_0^1 h_x\left(\bar{X}(T) + \lambda(X_\theta(T)) - \bar{X}(T))\right).\left(\tilde{X}_\theta(T) + Z(T)\right) d\lambda
\end{aligned}
$$

Alors

$\mathbb{I}_1 \underset{\theta \longrightarrow 0}{\longrightarrow} \mathbb{E}[\zeta(T)]$ et $\mathbb{I}_2 \underset{\theta \longrightarrow 0}{\longrightarrow} \mathbb{E}[h_x(\bar{X}(T)).Z(T)]$ à cause de la continuité de ℓ_x, h_x et (3.15),(3.17)

d'où (3.19). ■

3.3 Principe du maximum

Le principe du maximum vise à trouver une condition nécessaire d'optimalité.

Définition 3.3.1 *Soit $\bar{u}(t)$ un contôle optimal et $\bar{X}(t)$ la trajectoire optimale correspondante, L'équation adjointe est donnée par :*

$$
\begin{cases}
-dp(t) &= [(\bar{b}_x(t))^\top p(t) + \bar{\ell}_x(t)]dt - \sum_{i=1}^{n} (\bar{\sigma}_x^i(t))^\top q_i(t)dt \\
& \quad + q(t)\,dB(t) \\
p(T) &= h_x(\bar{X}(T))
\end{cases}
\tag{3.20}
$$

$p(t)$ s'appelle processus adjoint.

où

$$
q = (q_1, ..., q_n) \in \mathbb{R}^{n\times n}; q_i = \begin{pmatrix} q_{1i} \\ . \\ . \\ . \\ q_{ni} \end{pmatrix}.
$$

On définissons l'Hamiltonien $H : [0,T] \times \mathbb{R}^n \times \mathcal{U}_{ad} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{n\times n} \longrightarrow \mathbb{R}$ comme suit :

$$H\left(t,X\left(t\right),u\left(t\right),p\left(t\right),q\left(t\right)\right)=b(t,X\left(t\right),u\left(t\right)).p\left(t\right)+\ell(t,X\left(t\right),u\left(t\right))-tr\left(q^{\top}\left(t\right)\sigma\left(t,X\left(t\right),u\left(t\right)\right)\right)$$

Remarque 3.3.1 $\dfrac{\partial tr\left(q^{\top}\left(t\right)\bar{\sigma}(t)\right)}{\partial x}=\sum\limits_{i=1}^{n}\left(\bar{\sigma}_{x}^{i}(t)\right)^{\top}q_{i}(t).$

Remarque 3.3.2 *Nous pouvons écrire l'équation* (3.20) *comme suit :*

$$\begin{cases} -dp(t) &= H_{x}\left(t,\bar{X}\left(t\right),\bar{u}\left(t\right),p\left(t\right),q\left(t\right)\right)dt+q\left(t\right)dB\left(t\right) \\ p(T) &= h_{x}(\bar{X}(T)) \end{cases}$$

Théorème 3.3.1 *Soit* $\left(\bar{u}(t),\bar{X}(t)\right)$ *une paire optimale, Alors il existe un processus adjoint* $p\left(t\right)$ *vérifie l'équation* (3.20) *telle que pour tout* $u\left(t\right)\in\mathcal{U}_{ad}$ *on a*

$$\mathbb{E}\int_{0}^{T}H_{u}\left(t,\bar{X}\left(t\right),\bar{u}\left(t\right),p\left(t\right),q\left(t\right)\right).\left(u\left(t\right)-\bar{u}\left(t\right)\right)dt\geq0 \tag{3.21}$$

Preuve. On a $J(\bar{u}\left(.\right))=\inf_{u\in\mathcal{U}_{ad}}J(u\left(.\right))$

donc $J(u_{\theta}\left(.\right))\geq J(\bar{u}\left(.\right))$ ceci implique que

$$\left.\frac{d}{d\theta}J(u_{\theta}\left(.\right))\right|_{\theta=0}=\mathbb{E}[h_{x}(\bar{X}(T)).Z\left(T\right)+\zeta\left(T\right)]\geq0$$

Il reste de montrer que

$$\mathbb{E}\int_{0}^{T}H_{u}\left(t,\bar{X}\left(t\right),\bar{u}\left(t\right),p\left(t\right),q\left(t\right)\right).\left(u\left(t\right)-\bar{u}\left(t\right)\right)dt=\mathbb{E}[h_{x}(\bar{X}(T)).Z\left(T\right)+\zeta\left(T\right)]$$

premièrement en va calculer par la formule d'Itô $\mathbb{E}[p\left(t\right).Z\left(t\right)]$

$$\begin{aligned} p\left(t\right).Z\left(t\right) &= p(0).Z\left(0\right)+\int_{0}^{t}p\left(s\right).dZ\left(s\right)+\int_{0}^{t}Z\left(s\right).dp\left(s\right)+\int_{0}^{t}d<p,Z>_{s} \\ &= \int_{0}^{t}p\left(s\right).dZ\left(s\right)+\int_{0}^{t}Z\left(s\right).dp\left(s\right)+\int_{0}^{t}d<p,Z>_{s} \end{aligned}$$

on a

$$\begin{aligned} d<p,Z>_{s} &= -tr\left(q^{\top}\left(s\right)\left(\bar{\sigma}_{x}\left(s\right)Z\left(s\right)+\bar{\sigma}_{u}\left(s\right)\left(u\left(s\right)-\bar{u}\left(s\right)\right)\right)\right)ds \\ &= -tr\left(q^{\top}\left(s\right)\bar{\sigma}_{x}\left(s\right)Z\left(s\right)\right)ds-tr\left(q^{\top}\left(s\right)\bar{\sigma}_{u}\left(s\right)\left(u\left(s\right)-\bar{u}\left(s\right)\right)\right)ds \end{aligned}$$

par calcule simple on trouve

$$\begin{cases} tr\left(q^{\top}(t)\,\bar{\sigma}_x(t)\,Z(t)\right) & = \dfrac{\partial tr\left(q^{\top}(t)\,\bar{\sigma}(t)\right)}{\partial x}.Z(t) \\ & = \sum\limits_{i=1}^{n}\left(\bar{\sigma}_x^i(t)\right)^{\top} q_i(t).Z(t) \\ tr\left(q^{\top}(t)\,\bar{\sigma}_u(t)\,(u(t)-\bar{u}(t))\right) & = \dfrac{\partial tr\left(q^{\top}(t)\,\bar{\sigma}(t)\right)}{\partial u}.(u(t)-\bar{u}(t)) \\ & = \sum\limits_{i=1}^{n}\left(\bar{\sigma}_u^i(t)\right)^{\top} q_i(t).(u(t)-\bar{u}(t)) \end{cases}$$

d'aprés (1.2) on a

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}\left[p(t).Z(t)\right] \\
&= \mathbb{E}\Bigg[\int_0^t p(s).\left(\bar{b}_x(s)\,Z(s)+\bar{b}_u(s)\,(u(s)-\bar{u}(s))\right)ds-\int_0^t\left(Z(s).\left(\bar{b}_x(s)\right)^{\top}p(s)+\bar{\ell}_x(s)\right)ds \\
&+\int_0^t Z(s).\sum_{i=1}^{n}\left(\bar{\sigma}_x^i(s)\right)^{\top}q_i(s)ds-\int_0^t\frac{\partial tr\left(q^{\top}(s)\,\bar{\sigma}(s)\right)}{\partial x}.Z(s)\,ds \\
&-\int_0^t\frac{\partial tr\left(q^{\top}(s)\,\bar{\sigma}(s)\right)}{\partial u}.(u(s)-\bar{u}(s))ds\Bigg] \\
&= \mathbb{E}\left[\int_0^t(\bar{b}_u(s)\,p(s)-\frac{\partial tr\left(q^{\top}(s)\,\bar{\sigma}(s)\right)}{\partial u}).\,(u(s)-\bar{u}(s))\,ds-\int_0^t Z(s).\bar{\ell}_x(s)ds\right]
\end{aligned}$$

on a la condition $p(T)=h_x(\bar{X}(T))$, alors

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}\left[p(T).Z(T)+\zeta(T)\right] \\
&= \mathbb{E}\Bigg[\int_0^T p(s).\bar{b}_u(s)\,(u(s)-\bar{u}(s))\,ds-\int_0^T Z(s).\bar{\ell}_x(s)ds \\
&-\int_0^T\frac{\partial tr\left(q^{\top}(s)\,\bar{\sigma}(s)\right)}{\partial u}.\,(u(s)-\bar{u}(s))\,ds+\int_0^T\bar{\ell}_x(s).Z(s)\,ds+\int_0^T\bar{\ell}_u(s).\,(u(s)-\bar{u}(s))\,ds\Bigg] \\
&= \mathbb{E}\left[\int_0^T(\bar{b}_u(s)\,p(s)+\bar{\ell}_u(s)-\frac{\partial tr\left(q^{\top}(s)\,\bar{\sigma}(s)\right)}{\partial u}).\,(u(s)-\bar{u}(s))\,ds\right] \\
&= \mathbb{E}\left[\int_0^T H_u\left(s,\bar{X}(s),\bar{u}(s),p(s),q(s)\right).\,(u(s)-\bar{u}(s))\,ds\right]
\end{aligned}$$

d'où (3.21) ■

Conclusion

Dans ce travail, nous nous sommes intéressés aux problème de contrôle pour obtenir des conditions nécessaires d'optimalité, mais tout d'aborde on a parler sur l'existence de contrôle optimal, l'importance de cette recherche est mentionnée dans ces points

- L'existence de contrôle optimal dans le cas déterministe.
- Discussion d'existence de contrôle optimal dans le cas stochastique par les deux formules.
- Des relations publique résultant de la perturbation du contrôle optimal.
- Le principe du maximum.

Perspectives

- Approfondir dedans les équations différentielles rétrogrades et le mouvement Brownien fractionnel.
- Continuez la recherche dans le domaine de la théorie du contrôle.

Bibliographie

[1] J. Yong, X.Y Zhou. (1999). Stochastic Controls : Hamiltonian Systems and HJB Equations, Springer-Verlag, New York.

[2] A. Bensousan. (1982). Lecture on stochastic control, Lecture Note in Mathematics, 972, 1-62.

[3] C. Dellacherie, P.A. Meyer. (1975). Probabilités et potentiels, Chapitre I à IV, Hermann, Paris.

[4] I. Karatzas, S.E. Shreve. (1988). Brownian Motion and Stochastic Calculus, Springer-Verlag, New York.

[5] M. Jeanblanc, T. Simon. (2005). Elements de Calcul Stochastique, **IRBID**.

[6] X. Li, J. Yong. (1995). Optimal Control Theory for Infinite Dimensional Systems, Birkhäuser, Boston.

[7] K. Yosida. (1980). Functional Analysis, Springer-Verlag, Berlin.

Annexe : Abréviations et Notations

Les différentes abréVariations et notations utilisées tout au long de ce mémoire sont expliquées ci-dessous.

$(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$	Espace de probabilité.
$\left(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}, \mathbb{P}\right)$	Espace de probabilité filltré.
T	Le temps terminal.
B	Mouvement Brownien.
EDO	Équation différentielle ordinaire
$EDSs$	Équations différentielles stochastiques.
$< X, X >_T$	Variation quadratique de X sur $[0, T]$.
$\exp$	Exponentiel.
$\underline{\lim}$	Limite inférieur
b	Drift.
σ	Cofficient de diffusion.
$\min$	Minimum.
$\mathbb{P}$ p.s	Presque sûrment pour la mesure de probabilité $\mathbb{P}$.
$s \wedge t$	$\min(s, t)$.
I_n	Matrice identité $n \times n$.
$A^\top$	Transposée de la matrice A.
$\bar{u}$	Contrôle optimal.
$\bar{X}$	Trajectoire associé à $\bar{u}$.

u_θ	Contrôle perturbé.
X_θ	Trajectoire associé à u_θ.
$p\left(t\right)$	Processus adjoint.
$H(t, X, u, p, q)$	Hamiltonian.