

République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

UNIVERSITÉ MOHAMED KHIDER, BISKRA

FACULTÉ des SCIENCES EXACTES et des SCIENCES de la NATURE et de la VIE

DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES



Mémoire présenté en vue de l'obtention du Diplôme :

MASTER en Mathématiques

Option : **Analyse**

Par

Alloui Ilyes

Titre :

Résolution analytique de quelques problèmes d'écoulement à surface libre

Membres du Comité d'Examen :

Dr. Tidjani Menacer	UMKB	Président
Dr. Laiadi Abdelkader	UMKB	Encadreur
Dr. Remili Nacira	UMKB	Examineur

Juin 2018

REMERCIEMENTS

Avant toute considération, je remercie le Grand Dieu le tout puissant qui, m'a aidé pour achever ce travail.

J'exprime mes profonds remerciements à Monsieur **Laiadi Abdelkader**, encadreur de ce mémoire, pour son aide précieuse, sa confiance, ses encouragements, sa patience et son soutien favorable pour l'aboutissement de ce travail.

Je remercie vivement les membres du jury, Monsieur **Tidjani Menacer** et Madame **Remili Nacira**

Merci à toute personne ayant participé de près ou de loin à la réalisation de ce travail.

Table des matières

Remerciements	i
Table des matières	ii
Liste des figures	iii
Introduction	1
1 Notions fondamentales sur la mécanique des fluides	3
1.1 Description et Classification de mouvement des fluides	3
1.1.1 Description Lagrangienne	4
1.1.2 Description eulérienne	5
1.1.3 Compatibilité de deux descriptions	6
1.2 Fluides	6
1.2.1 Masse volumique	7
1.2.2 Densité	7
1.3 Ecoulement des fluides	8
1.3.1 Ecoulement uniforme	8
1.3.2 Ecoulement stationnaire	8
1.3.3 Ecoulement incompressible	9
1.3.4 Ecoulement irrotationnel	9
1.3.5 Potentiel de vitesse	9

1.4	Quelque équations en MDF	10
1.4.1	Equation de continuité	10
1.4.2	Lignes de courant	10
1.4.3	Equation d'Euler	11
1.4.4	Equation de Navier-Stokes	12
1.4.5	Equation de Bernoulli	12
1.5	Fonction analytique(holomorphe)	13
1.6	Etude dans le plan complexe	15
1.6.1	Exemples	15
2	Représentations et transformations conformes	17
2.1	Généralités sur les transformations conformes	17
2.1.1	Propriétés des transformations conformes	19
2.1.2	Quelques transformations classiques	20
2.1.3	Exemples élémentaires d'application	21
2.2	Quelques types des transformations conformes	21
2.2.1	Transformation de Schwarz-Christoffel	21
2.2.2	Méthode des lignes de courant libres (<i>Kirchoff</i>)	23
3	Résolution d'un probleme d'écoulement par la transformation conforme	25
3.1	Position du problème	25
3.2	Solution Analytique	28
	Conclusion	36
	Annexe B : Abréviations et Notations	39

Table des figures

1.1	Classification des mouvements des fluides	4
1.2	Description eulérienne et lagrangienne	6
1.3	Représentation de la vitesse dans un écoulement uniforme.	8
1.4	Ligne de courant passant par tel point à un instant donné	10
1.5	Tube de courant	13
2.1	Transformation de plan $[z]$ vers le plan $[Z]$ et l'inverse	18
2.2	Conservation d'angle α de plan $[z]$ vers le plan $[Z]$	19
2.3	Transformation entre plan Z et plan z	21
3.1	Plan z	27
3.2	Plan f	27
3.3	Plan Ω	28
3.4	Plan λ	29
3.5	Forme de deux surfaces libres BC et $B'C'$	35

Introduction

De nombreux phénomènes physiques intéressant le domaine de l'environnement sont concernés par les écoulements de fluides à surface libre, qui désigne un écoulement avec une interface libre entre l'air et l'eau, comme dans une rivière, par opposition à un écoulement en charge, où cette interface est absente dans une conduite sous pression par exemple.

Dans ce travail, on se propose d'étudier un problème d'écoulement à surface libre au dessus d'un obstacle. L'écoulement est supposé potentiel, bidimensionnel et irrotationnel sans effets de la gravité et de la tension de surface, le plan des variables $(x; y)$ de l'écoulement est identifié au plan de la variable complexe $z = x + iy$.

La résolution du problème est effectuée à l'aide des transformations conformes, en particulier la transformation de *Schwarz-Christoffel* et d'hodographe, qui possèdent de simplifier le problème dans un plan plus pratique.

Ce mémoire comporte trois chapitres :

Dans le **premier chapitre**, on donne des notions sur les deux modes de description : la description lagrangienne et la description eulérienne et quelques définitions préliminaires sur la théorie des écoulements potentiels et les équations générales du mouvement des fluides.

Dans le **deuxième chapitre**, on présente les transformations conformes en générale, en citant quelques cas particuliers, tels que la transformation de *Schwarz-Christoffel*.

Dans le **dernier chapitre**, on traite le problème d'un écoulement à surface libre bidimensionnel et irrotationnel d'un fluide incompressible et non visqueux dans le cas où la

tension de surface et la gravité sont nulles. Dans ce cas, la solution exacte peut être calculée explicitement en utilisant la transformation de *Schwarz-Christoffel* et la méthode *d’Kirchoff*.

Chapitre 1

Notions fondamentales sur la mécanique des fluides

L'MDF se base sur deux domaines : **Mécanique des milieux continus** et **Thermodynamique**

Dans ce chapitre , on va voir des concepts fondamentaux concernant la mécanique des fluides : définitions et propriétés des fluides, ainsi que les équations fondamentales du mouvement des fluides pour un écoulement potentiel, bidimensionnel et irrotationnel d'un fluide incompressible et non visqueux.

1.1 Description et Classification de mouvement des fluides

On peut décrire le mouvement de fluide de deux façons : on suit donc une particule fluide dans son mouvement et on regarde sa position à un instant t (Description lagrangienne) , ou on peut observer ce qui rentre et ce qui sort à chaque instant pour une instant donnée (Description eulérienne).

La figure suivante donne une classification possible :

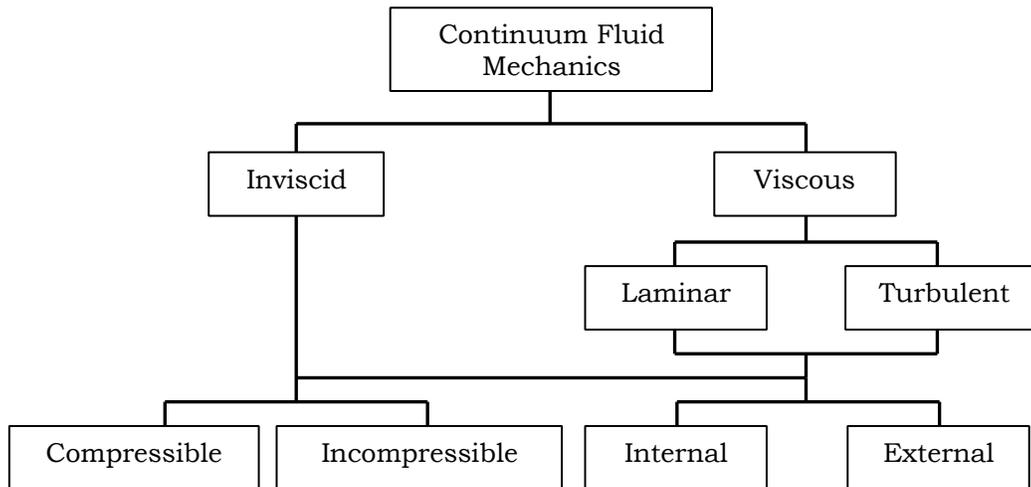


FIG. 1.1 – Classification des mouvements des fluides

1.1.1 Description Lagrangienne

On peut définir le mouvement d'un fluide (ou écoulement) par le mouvement de chacun de ses points $M(t)$, on suit donc une particule fluide dans son mouvement et on regarde sa position à un instant t , La particule est identifiée par sa position initiale située au point M_0 à l'instant $t = 0$. r_0 est le vecteur position initiale, il ne dépend pas du temps

$$\vec{r}_0 = \overrightarrow{OM_0} = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix}$$

On cherche à définir toutes les positions de toutes les particules à chaque instant t matérialisées par le point M . les inconnues de Lagrange sont les coordonnées, à l'instant t de la position

$$\vec{r}(\vec{r}_0, t) = \overrightarrow{OM} = \begin{pmatrix} x(\vec{r}_0, t) \\ y(\vec{r}_0, t) \\ z(\vec{r}_0, t) \end{pmatrix}$$

Plus simplement notée

$$\vec{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

Les coordonnées de Lagrange sont le vecteur position initiale \vec{r}_0 et le temps t : la seule variable est donc le temps, les dérivées partielles ou totales sont ainsi identiques (les dérivées partielles n'ont pas vraiment de sens).

1.1.2 Description eulérienne

Plus pratique, cette approche est très utilisée en mécanique des fluides, ainsi qu'en mécanique des milieux continus pour de grandes déformations. Pour une position donnée, on observe ce qui rentre et ce qui sort à chaque instant, les inconnues d'Euler sont les vitesses des particules pour l'ensemble des points M :

$$\vec{v} = \vec{v}(\vec{r}, t) = \begin{pmatrix} v_x(\vec{r}, t) \\ v_y(\vec{r}, t) \\ v_z(\vec{r}, t) \end{pmatrix}$$

Par la suite, on pourra utiliser la notation suivante (variables implicites) : $\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt}$
 en posant : $dx = v_x dt$, $dy = v_y dt$, $dz = v_z dt$

1.1.3 Compatibilité de deux descriptions

- En description lagrangienne, le vecteur vitesse \vec{v} d'un point M du fluide est le vecteur de la particule fluide qui l'entoure.
- En description eulérienne, le vecteur vitesse \vec{v} d'un point M du fluide à un instant t est le vecteur vitesse de la particule fluide qui se trouve en M à cet instant t .

A chaque instant, les lignes de champ des vitesses dans les deux descriptions coïncident.

Une même vitesse peut être analysée de deux façons différentes

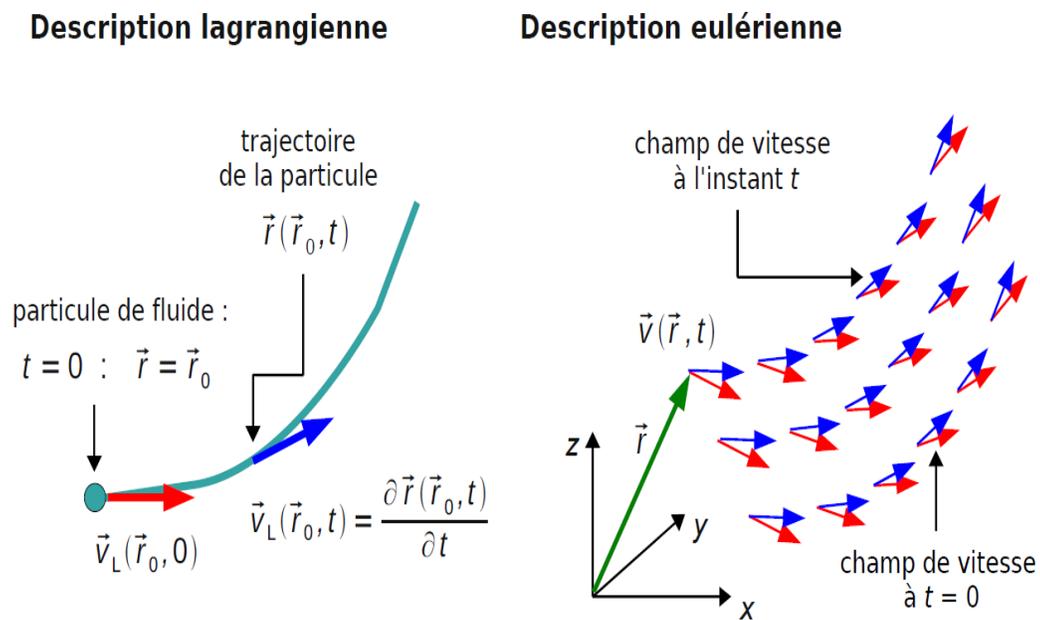


FIG. 1.2 – Description eulérienne et lagrangienne

1.2 Fluides

Un fluide est un milieu matériel continu déformable, sans rigidité qui peut s'écouler c'est-à-dire subir de grandes variations de forme sous l'action de forces plus faibles, plus les variations de forme se déroulent lentement.

La notion de fluide s'oppose à celle de solide, cependant on considère les fluides et les

solides comme des ensemble de particules materielles innement petit.

- Solidement lié entre elles dans le cas des solides.

-Libres de se déplacer les unes par rapport aux dant le cas des fluides.

Les différentes cas de la matière :

Les trois états de la matière :

1. **Etat Solide** :Caracterise par une grande cohesion des molecules il a une forme et un volume propres.

2. **Etat Liquide** : Peut lié des liquides très déformable il n'a pas de forme propre et il a un volume propre incompressible.

3. **Etat gazeux** :Un fluide est un milieu materiel parfaitement deformable on groupe sous cette application les plasmas, les gaz qui sont l'exemple des fluides compressible et les liquides qui sont des fluides peut incompressible.

1.2.1 Masse volumique

La masse volumique d'une substance est la masse d'unité de volume de cette substance

On calcule par la relation suivante :

$$\mu = \rho = \frac{\text{masse}}{\text{volume}} = \frac{m}{v}$$

1.2.2 Densité

$$d = \frac{\text{masse volumique du fluide}}{\text{masse volumique d'un fluide de référence}} = \frac{\rho}{\rho_{ref}}$$

Dans le cas des liquides en prendra l'eau comme fluide de référence, dans le cas des gaz on prendra l'air comme fluide de référence.

1.3 Écoulement des fluides

Dans la vie quotidienne, dans la nature et dans le domaine industriel, les écoulements présents la circulation de l'oxygène dans notre organisme est l'un des exemples de l'importance de l'écoulement dans la vie humaine, les tsunamis les cyclones ou les coulées de lave sont aussi des exemples de l'écoulement mais qui conduisent quelque fois à la grand dégâts pour l'humanité

1.3.1 Écoulement uniforme

Une écoulement bidimensionnel a surface libre est dit uniforme si l'écoulement est de vitesse constante

$$A_1 = A_2$$

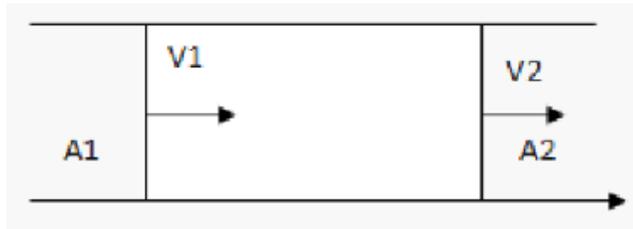


FIG. 1.3 – Représentation de la vitesse dans un écoulement uniforme.

1.3.2 Écoulement stationnaire

On dit aussi permanent, si ses composantes de vitesse sont indépendantes de la variable temps

$$\frac{\partial v}{\partial t} = 0$$

1.3.3 Écoulement incompressible

Un fluide est dit incompressible si sa masse volumique est constante au cours du mouvement ce qui se traduit par une dérivée particulaire du champ scalaire de masse volumique nulle (description eulérienne)

$$\operatorname{div} \rho = 0$$

1.3.4 Écoulement irrotationnel

On dit que l'écoulement est irrotationnel si :

$$\operatorname{rot} \vec{v} = 0$$

D'où v est la vitesse d'écoulement.

1.3.5 Potentiel de vitesse

Si un champ de vitesse \vec{V} est irrotationnel, on peut définir une fonction φ scalaire telle que

$$\vec{V} = \overrightarrow{\operatorname{grad}}\varphi = \vec{\nabla}\varphi$$

Le symbole φ représente le potentiel de vitesse. Dans le repère cartésien, en considérant un écoulement plan ($\vec{V} = (u, v)$) on peut donc écrire que :

$$\begin{cases} u = \frac{\partial\varphi}{\partial x} \\ v = \frac{\partial\varphi}{\partial y} \end{cases}$$

Si de plus le fluide est incompressible :

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \Rightarrow \frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} = 0 \Rightarrow \Delta\varphi = 0$$

où φ vérifie l'équation de Laplace.

1.4 Quelques équations en MDF

1.4.1 Equation de continuité

Le principe de conservation de masse impose que l'augmentation de masse pendant un certain temps t , du fluide contenu dans ce volume, doit être égale à la somme des masses de fluide qui y entrent, diminuée de celle qui sortent, qui donne par :

$$\frac{\partial \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial \phi}{\partial y^2} = \Delta \phi = 0$$

1.4.2 Lignes de courant

On appelle ligne de courant la courbe qui, en chacun de ses points, est tangente au vecteur vitesse local du champ de l'écoulement. Son équation différentielle s'écrit :

$$\frac{dx}{u(x, y, z, t)} = \frac{dy}{v(x, y, z, t)} = \frac{dz}{w(x, y, z, t)}$$

où t a une valeur fixée.

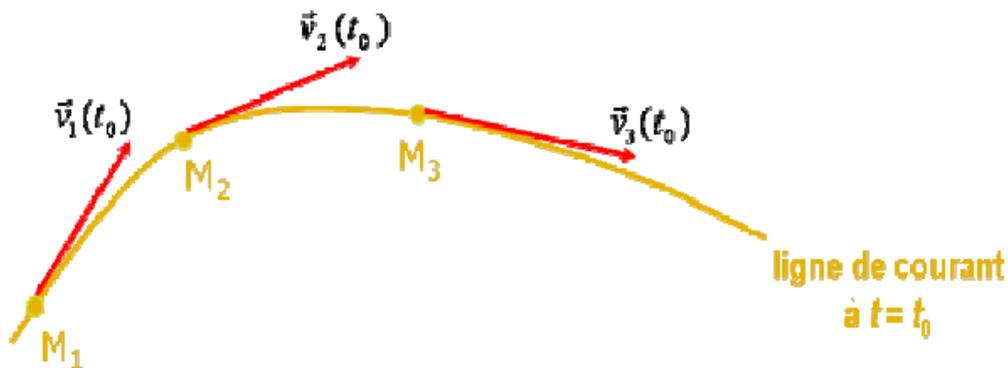


FIG. 1.4 – Ligne de courant passant par tel point à un instant donné

Fonction de courant

Si l'écoulement est dans un domaine plan alors le vecteur vitesse est vérifié pour tout point de ce domaine, à l'instant t on a

$$\operatorname{div}(\vec{v}) = 0$$

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} = 0$$

Cela implique que la forme différentielle $v_x dx + v_y dy$ est, à t fixé, la différentielle totale d'une certaine fonction $\psi : \exists \psi, d(\psi) = v_x dx + v_y dy$

$$\Rightarrow \begin{cases} v_x = \frac{\partial \psi}{\partial y} \\ v_y = -\frac{\partial \psi}{\partial x} \end{cases}$$

De plus, la propriété de l'écoulement irrotationnel pour un écoulement plan entraîne :

$$\vec{\nabla} \wedge \vec{v} = \vec{0} \Rightarrow \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \end{vmatrix} \wedge \begin{vmatrix} u_x = \frac{\partial \psi}{\partial y} \\ u_y = -\frac{\partial \psi}{\partial x} \end{vmatrix} \Rightarrow -\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = 0$$

$\Rightarrow \Delta \psi = 0$, ψ vérifie aussi l'équation de Laplace.

1.4.3 Equation d'Euler

Soit l'écoulement incompressible d'un fluide parfait, c'est-à-dire sans viscosité dans un champ de force massique \vec{f} , en première approximation, sa masse volumique constante en un point quelconque du fluide $m(x, y, z)$ et à un instant quelconque t , les champs de pression $p(x, y, z, t)$ et de vitesse $\vec{v}(x, y, z, t)$ vérifient les relations suivantes :

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{v} = 0$$

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \nabla) \vec{v} = -\frac{1}{\rho} \nabla p + \vec{f} \quad (1.1)$$

En coordonnées cartésiennes (x_1, x_2, x_3) ces relations s'écrivent :

$$\sum_{i=1}^3 \frac{\partial v_i}{\partial x_i} = 0$$

1.4.4 Equation de Navier-Stokes

L'équation de *Navier-Stokes* établie dans le champ de pesanteur pour les fluides newtoniens incompressibles ($\text{div } \vec{v} = 0$) s'écrit :

$$\frac{\partial v}{\partial t} = -(v \cdot \nabla)v + \nabla \cdot (\mu \nabla v) - \frac{1}{\rho} \nabla p + f \quad (1.2)$$

L'équation (3.1) devient :

$$\frac{\partial v}{\partial t} = -(v \cdot \nabla)v + \mu \nabla^2 v - \frac{1}{\rho} \nabla p + f \quad (1.3)$$

1.4.5 Equation de Bernoulli

Le théorème de Bernoulli est une application de la conservation de l'énergie au cas des fluides en mouvement. Un certain travail est fourni au fluide lorsqu'il passe d'un point à un autre et ce travail est égal à la variation d'énergie mécanique. Dans le cas d'un fluide laminaire visqueux et incompressible, on obtient la relation suivante :

$$p_1 + \frac{1}{2} \rho v_1^2 + \rho g Z_1 = p_2 + \frac{1}{2} \rho v_2^2 + \rho g Z_2$$

où p_i est la pression aux points A_i d'où $i = 1, 2$

Si le fluide non visqueux dans ce cas $\Delta p_i = 0$. L'équation de Bernoulli se réduit à :

$$p + \frac{1}{2}\rho v^2 + \rho gZ = const \quad (1.4)$$

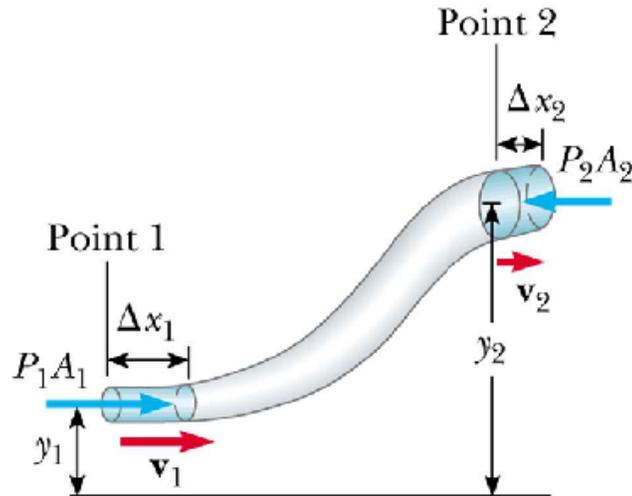


FIG. 1.5 – Tube de courant

1.5 Fonction analytique(holomorphe)

Soit $f(z)$ une fonction qui admet une dérivée, ses parties réelles et imaginaire sont différentiables et y vérifient les conditions de Cauchy définissant ainsi une fonction analytique, est holomorphe.

Une fonction holomorphe peut être considérée comme une transformation $(z) \rightarrow (\zeta)$

$$z \xrightarrow{f} \zeta = f(z) \text{ avec } \zeta = \xi + iv$$

$f(z)$, holomorphe dans D , est une transformation conforme si $f'(z) \neq 0$ dans D .

Dans ces conditions, cette transformation est localement une similitude de rapport égal à $f'(z_0)$ et d'angle de rotation $\arg(f'(z_0))$ au point considéré z_0 .

Théorème 1.5.1 (*Cauchy1*)

Soient $D \subseteq \mathbb{C}$ un domaine, $f : D \rightarrow \mathbb{C}$ une fonction holomorphe et C un chemin fermé contenue ainsi que son intérieur dans D , alors :

$$\int_{\gamma} f(z)dz = 0$$

Théorème 1.5.2 (*Cauchy2*)

Soient $D \subseteq \mathbb{C}$ un domaine, $f : D \rightarrow \mathbb{C}$ une fonction holomorphe et C un chemin fermé ainsi que son intérieur dans D , alors :

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi = 0$$

le chemin C étant parcouru dans le sens positif.

Théorème 1.5.3 (*des Résidus*)

Soient $D \subseteq \mathbb{C}$ un domaine, $f : D \rightarrow \mathbb{C}$ une fonction holomorphe dans D à l'exception de singularités isolées, soit C un chemin fermé contenue ainsi que son intérieur dans ne passant par aucune des singularités de f et en contenant un nombre définie z_1, z_2, \dots, z_n dans son intérieure, alors

$$\int_C f(z)dz = 2\pi i \sum_{k=1}^n \text{res}(f, z_k)$$

Le chemin C étant parcouru dans le sens positif.

Théorème 1.5.4 (*Liouville*)

Supposons que quel que soit z dans le plan complexe : **(i)** $f(z)$ est analytique, **(ii)** $f(z)$ est bornée, i.e : $|f(z)| < M$, où M désigne une constante.

Alors : $f(z)$ est constante.

1.6 Etude dans le plan complexe

Pour les écoulements plan, Les points $M(x, y)$ du plan peuvent être repérés par le complexe $z = x + iy$, Le vecteur vitesse en M représenté par le complexe $V = u + iv$, et le potentiel complexe $f(z) = \phi + i\psi$.

Pour que la fonction $f(z)$ soit **holomorphe** (dérivable par rapport à z), il faut que :

$$\begin{cases} \frac{\partial \psi}{\partial x} = -\frac{\partial \phi}{\partial y} \\ \frac{\partial \psi}{\partial y} = \frac{\partial \phi}{\partial x} \end{cases}$$

Alors :

$$\frac{df}{dz} = \frac{\partial \phi}{\partial x} - i \frac{\partial \phi}{\partial y} = u - iv = \bar{V}$$

Toute fonction holomorphe permet de définir un champ de vitesse susceptible d'être celui d'un écoulement irrotationnel à vitesse conservative. Il est souvent commode d'utiliser la forme polaire : $z = r \cdot \exp(i\theta)$

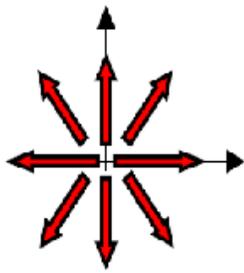
1.6.1 Exemples

$\mathbf{f}(\mathbf{z}) = \mathbf{U}_0 \cdot \mathbf{z}$ définit un écoulement uniforme de vitesse U_0

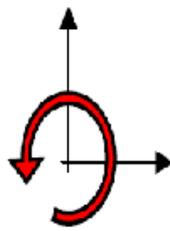
$\mathbf{f}(\mathbf{z}) = \ln \mathbf{z}$ définit une source de débit q ($m^2 s^{-1}$, débit dans le plan)

$\mathbf{f}(\mathbf{z}) = -(\mathbf{i}\Gamma/2\pi) \cdot \ln \mathbf{z}$ définit un vortex ou tourbillon de circulation Γ (irrotationnel sauf au point singulier à l'origine : concentration infinie de rotationnel)

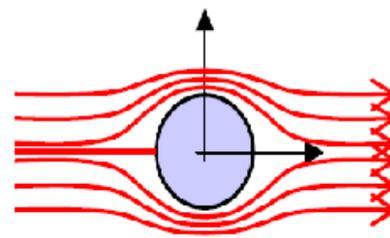
$\mathbf{f}(\mathbf{z}) = \mathbf{U}_0 \cdot (\mathbf{z} + \mathbf{a}^2/\mathbf{z})$ définit un courant de vitesse U_0 dévié par un profil circulaire de rayon a



source



tourbillon



Profil circulaire

Chapitre 2

Représentations et transformations conformes

Dans ce chapitre, on va présenter des concepts généraux concernant les transformations conformes, en particulier la transformation de Schwarz-Christoffel et leur utilisation, ainsi que des exemples.

2.1 Généralités sur les transformations conformes

Définition 2.1.1 Une transformation d'un domaine D qui conserve toutes les angles en grandeur et en sens est dite transformation conforme de D

Théorème 2.1.1 Soit $w = f(z)$ une fonction analytique dans un domaine D telle que $f'(z) \neq 0$ en tout point de D . Alors la transformation réalisée par cette fonction est une transformation conforme de D .

Définition 2.1.2 Considérons deux plans (x, y) et (X, Y) et une transformation ponc-

tuelle bijective :

$$X = X(x, y)$$

$$Y = Y(x, y)$$

qui a tout point $m(x, y)$ lui associe le point $M(x, y)$ et inversement.

Lorsque, dans le plan (x, y) , le point m décrit une courbe (c) , le point M dans le plan (X, Y) décrit une courbe (C) qui est l'image de (c) dans la transformation.

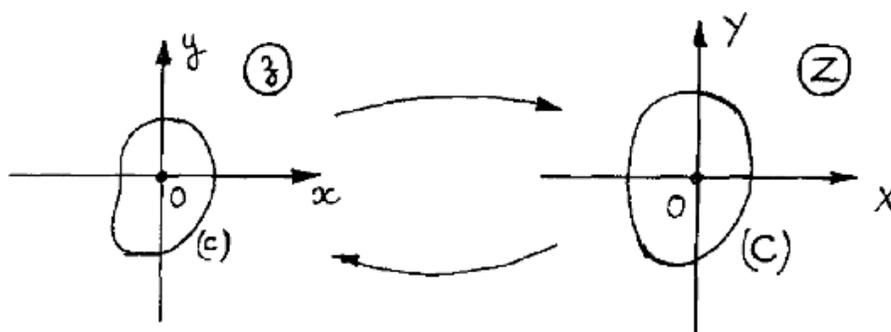


FIG. 2.1 – Transformation de plan $[z]$ vers le plan $[Z]$ et l'inverse

Parmi toutes ces transformations ponctuelles bijectives certaines vérifient, au moins dans certains domaines D du plan complexe, les relations de Cauchy :

$$\begin{cases} \frac{\partial X}{\partial x} = \frac{\partial Y}{\partial y} \\ \frac{\partial X}{\partial y} = -\frac{\partial Y}{\partial x} \end{cases}$$

La transformation est alors dite "transformation conforme" dans D , ce qui conduit au résultat suivant :

Les transformations conformes peuvent toutes s'écrire sous la forme :

$$Z = g(z) \quad , \quad z = G(Z)$$

$$\text{où : } Z = X + iY \quad , \quad z = x + iy$$

2.1.1 Propriétés des transformations conformes

Holomorphie

Il résulte de la définition même que $g(z)$ doit être dérivable dans D et uniforme : elle est donc **holomorphe dans D** , mais si on prolonge la définition de $g(z)$ à tout le plan complexe, cette fonction doit nécessairement présenter des singularités en dehors de D ou sur les frontières de D (sinon tout comme $f(z)$, ce serait une constante d'après le théorème de Liouville).

Conservation des angles et points singuliers

La fonction $g(z)$ étant holomorphe dans D , la transformation conforme conserve les angles. plus précisément, si deux courbes γ et γ' passent par un point $z_0 \in D$ et se coupent sous l'angle α , leurs transformées Γ et Γ' passent par le point transformé Z_0 et se coupent en général dans le plan $[Z]$ sous le même angle α .

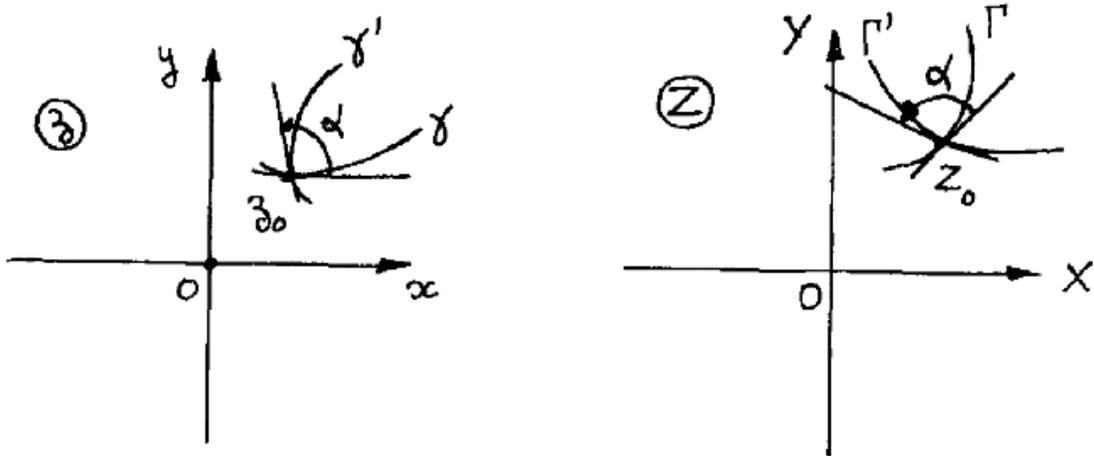


FIG. 2.2 – Conservation d'angle α de plan $[z]$ vers le plan $[Z]$

En effet, un développement au voisinage de z_0 s'écrit, sous réserve que $g(z)$ soit holomorphe en z_0 et que $g'(z_0)$ soit non nul :

$$dZ = g'(z_0)dz$$

ce qui montre que l'on passe du voisinage de z_0 au voisinage de Z_0 par une similitude définie par le nombre complexe $g'(z_0) \neq 0$.

En étendant le domaine de définition de $g(z)$ à tout le plan complexe, on obtient donc le résultat suivant :

Une transformation $g(z)$ conserve les angles en tout point du plan complexe où $g'(z)$ n'est ni nul ni infini.

Les points où $g'(z)$ est nul ou non défini sont dits **points singuliers** de la transformation conforme.

2.1.2 Quelques transformations classiques

Transformation linéaire

Une transformation linéaire $w = Az$, avec $A = ae^{i\alpha} \in \mathbb{C}$ est une double transformation : expansion/contraction liée au coefficient a et rotation d'un angle α

Transformation inverse

Une transformation linéaire $w = z^{-1}$ pour z non nul transforme les cercles en cercles/droites, les lignes en droites/cercles selon que l'objet passe ou non par l'origine.

Transformation linéaire fractionnelle

La transformation

$$w = \frac{az + b}{cz + d}$$

avec a, b, c, d des complexes, transforme les cercles en droites et réciproquement.

2.1.3 Exemples élémentaires d'application

Les champs élémentaires correspondant aux singularités des fonctions analytiques peuvent être obtenus à partir du champ uniforme à l'aide de transformations conformes convenables.

Par exemple, l'écoulement $f(z) = z^2$ se déduit de l'écoulement uniforme $F(Z) = Z$ au moyen de la transformation conforme $Z = z^2$, qui conserve les angles en tout point du plan, sauf à l'origine où la dérivée $2z$ de la transformation s'annule ; si on pose : $z = r.e^{i\theta}$; $Z = R.e^{i\lambda}$, on voit qu'autour de l'origine les angles sont divisés par deux (figure ci-dessous).

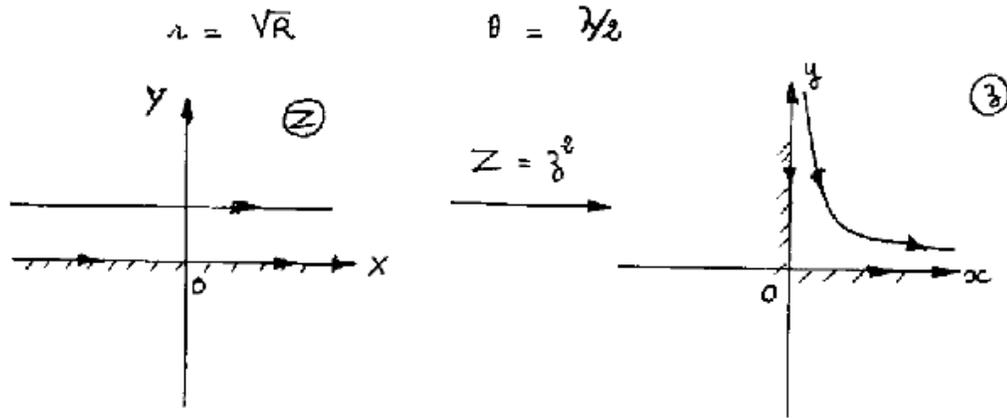
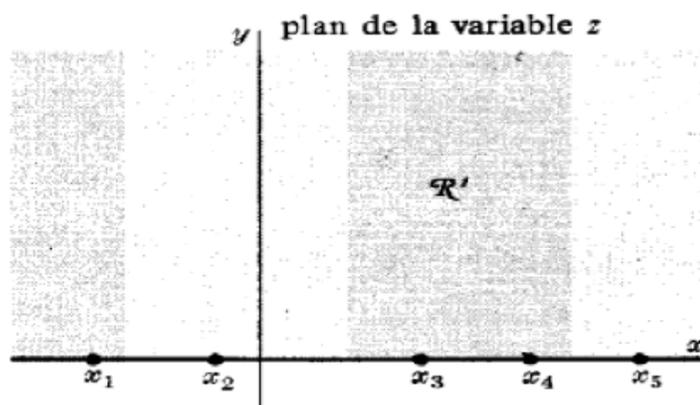
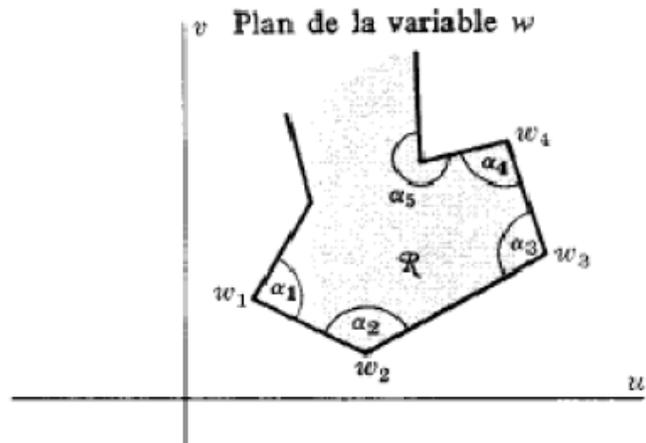


FIG. 2.3 – Transformation entre plan Z et plan z

2.2 Quelques types des transformations conformes

2.2.1 Transformation de Schwarz-Christoffel

Considérons un polygone [Fig 2.3] dans le plan des w , ayant pour sommets w_1, w_2, \dots, w_n , et pour angles intérieurs respectivement $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$. Soit w_1, w_2, \dots, w_n , les points correspondant respectivement à x_1, x_2, \dots, x_n , de l'axe réel du plan des z [Fig 2.4].



Une transformation qui représente l'intérieure \Re du polygone considéré sur le demi-plan supérieur du plan des z , et la frontière du polygone sur l'axe réel, est donné par :

$$\frac{dw}{dz} = A(z - x_1)^{\frac{\alpha_1}{\pi-1}}(z - x_2)^{\frac{\alpha_2}{\pi-1}}, \dots, (z - x_n)^{\frac{\alpha_n}{\pi-1}} \quad (2.1)$$

ou

$$w = A \int (z - x_1)^{\frac{\alpha_1}{\pi-1}}(z - x_2)^{\frac{\alpha_2}{\pi-1}}, \dots, (z - x_n)^{\frac{\alpha_n}{\pi-1}} dz + B \quad (2.2)$$

ou A et B sont des constantes complexes.

On notera que :

1. Parmi les points x_1, x_2, \dots, x_n on peut en choisir trois arbitrairement
2. Les constantes A et B déterminent la taille, l'orientation et la position du polygone.
3. Il est commode de choisir un point, par exemple x_n , à l'infini, cas dans lequel le dernier facteur de (2) et (3) n'existe pas
4. Des polygones infinis non fermés peuvent être considérés comme de polygones fermés.

2.2.2 Méthode des lignes de courant libres (*Kirchoff*)

La théorie des lignes de courant libres consiste à étudier les problèmes d'écoulements potentiels et bidimensionnels, partiellement bornée par les parois rigides et rectilignes et d'autres parties par lignes de courant libres, sur lesquelles la pression est supposée constante. Si aucune surface libre n'est présente et l'effet de la gravité n'est pas considérée l'écoulement dans le plan physique est un polygone. Si les lignes de courant libres sont présente et l'effet de la gravité et la tension de surface sont négligeables le domaine de l'écoulement dans le plan transformé par une transformation conforme appropriée est aussi un polygone, ce qui nous permet dans deux cas de trouver la solution exacte du problème. Une méthode de résolution a été introduite par *Kirchoff* (1869) dont l'idée de base est l'introduction de la variable complexe Ω définie par :

$$\Omega = \log\left(\frac{U}{df/dz}\right) = \log\left(\frac{U}{u - iv}\right) = \log\left(\frac{U}{q}\right) + i\theta \quad (2.3)$$

où $z = x + iy$, $f = \varphi + i\psi$, $\frac{df}{dz} = u - iv$ et $q = \sqrt{u^2 + v^2}$, avec (u, v) sont les composantes du vecteur vitesse, θ est l'angle que fait le vecteur vitesse avec l'horizontale.

On remarque que La fonction Ω possède de simples propriétés suivantes :

- La partie réelle de Ω est constante sur chaque ligne de courant libre, i.e $\log\left(\frac{U}{q}\right) = \text{const.}$
- La partie imaginaire de Ω est constante sur chaque paroi rigide rectiligne, i.e $\theta = \text{const}$

Chapitre 3

Résolution d'un problème d'écoulement par la transformation conforme

Dans ce chapitre, on étudie le problème d'un écoulement bidimensionnel et irrotationnel à surface libre sans effet de gravité et la tension de surface. On peut utiliser les propriétés des transformations conformes, ainsi que la transformation d'hodographe (*Kirchoff*) et de *Schwarz-Christoffel* pour abtenir la solution exacte du problème.

3.1 Position du problème

On considère un écoulement potentiel bidimensionnel d'un fluide incompressible et non visqueux, à surface libre, sur un plan horizontal passant au dessus d'un obstacle (deux plaques) de hauteur $2b$ où ($T = 0, g = 0$). On suppose l'écoulement est uniforme à l'infini et la pression est constante sur la ligne de courant libre. Nous choisissons comme repère de référence la ligne II' (la droite de symétrie) sur l'axe $x'ox$ et les surfaces libres sont BC et $B'C'$ (voir la figure 3.1). On transforme le plan de l'écoulement réel dans le plan complexe z au plan de l'écoulement f où $f(z) = \varphi(z) + i\psi(z)$ tels que les points A, B et

C dans plan complexe z se transforment aux points $A = -\infty, B = i$ et $C = +\infty$ dans le plan f (Fig3.2).

Rappelant que ces écoulements peuvent être décrites par un potentiel complexe :

$$f(z) = \varphi + i\psi \quad (3.1)$$

Où φ et ψ sont respectivement la potentiel de vitesse et fonction de courant qui vérifiant les conditions de *Cauchy-Riemann* sont données par :

$$\begin{cases} \tilde{u} = \frac{\partial \tilde{\varphi}}{\partial \tilde{x}} = \frac{\partial \tilde{\psi}}{\partial \tilde{y}} \\ \tilde{v} = \frac{\partial \tilde{\varphi}}{\partial \tilde{y}} = -\frac{\partial \tilde{\psi}}{\partial \tilde{x}} \end{cases} \quad (3.2)$$

Les composantes de vitesse sont alors donné par :

$$u - iv = \frac{df}{dz} \quad (3.3)$$

Le but du problème est déterminer la fonction potentielle ϕ qui vérifie les relations suivantes

$$\begin{cases} \Delta\phi = 0 \\ v = \frac{\partial\phi}{\partial y} = 0, x \longrightarrow \infty \\ u^2 + v^2 = 1 \end{cases}$$

les points	plan z	plan f
A	$x = -\infty, y = d$	$\phi = -\infty, \psi = 1$
B	$x = 0, y = d$	$\phi = 0, \psi = 1$
C	$x = -\infty, y = b$	$\phi = +\infty, \psi = 1$
A'	$x = -\infty, y = -d$	$\phi = -\infty, \psi = -1$
B'	$x = 0, y = -d$	$\phi = 0, \psi = -1$
C'	$x = -\infty, y = -b$	$\phi = +\infty, \psi = -1$

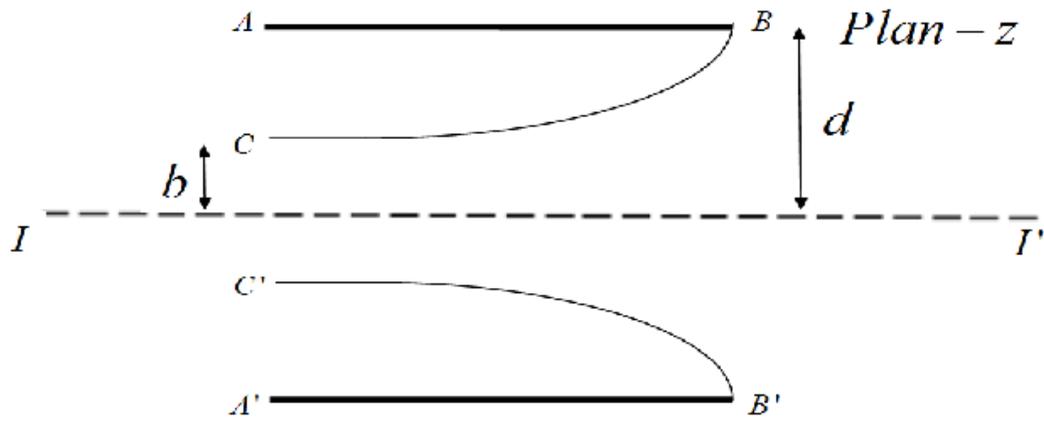


FIG. 3.1 – Plan z

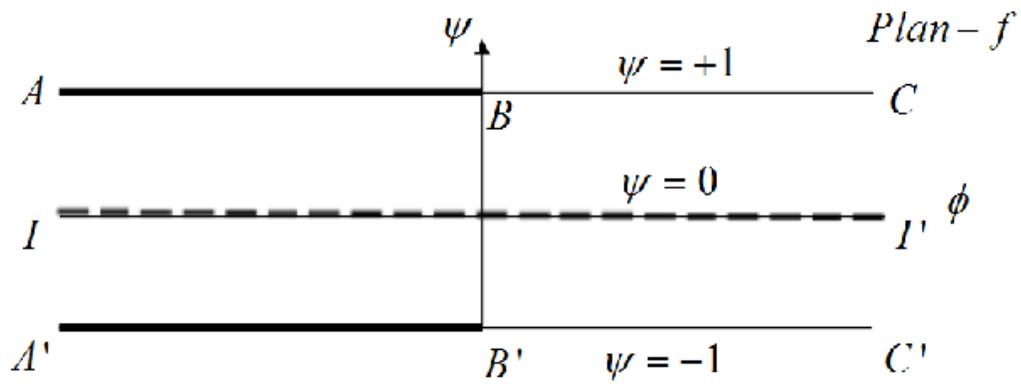


FIG. 3.2 – Plan f

3.2 Solution Analytique

Pour trouver la solution analytique du problème (forme de la surface libre BC) représentée par les valeurs de deux inconnus x et y du plan z , il faut utiliser une transformation de *Schwarz-Christoffel* pour transformer chacun des polygones à un même polygone d'un nouvel espace que l'on va appeler λ . Il reste donc à déterminer les changements de variable $\lambda(\Omega)$ et $\lambda(f)$ à effectuer.

Une fois que cela est fait, on cherche la relation qui existe entre Ω et f ; on s'attend à trouver une équation différentielle que l'on va résoudre.

1. Transformation de $\lambda(\Omega)$

la transformation Ω définit en (2.3) transforme le plan physique z de l'écoulement en une bande semi-infinie (Fig.3.3).

On a $Im\Omega = cte$ sur les parois rigides AB et $A'B'$ et $Re\Omega = cts$ sur les surfaces libres BC et $B'C'$.

La transformation conforme d'une bande semi-infinie dans le plan f sur le demi-plan supérieur λ est donnée par la transformation de *Schwarz-Cristoffel*.

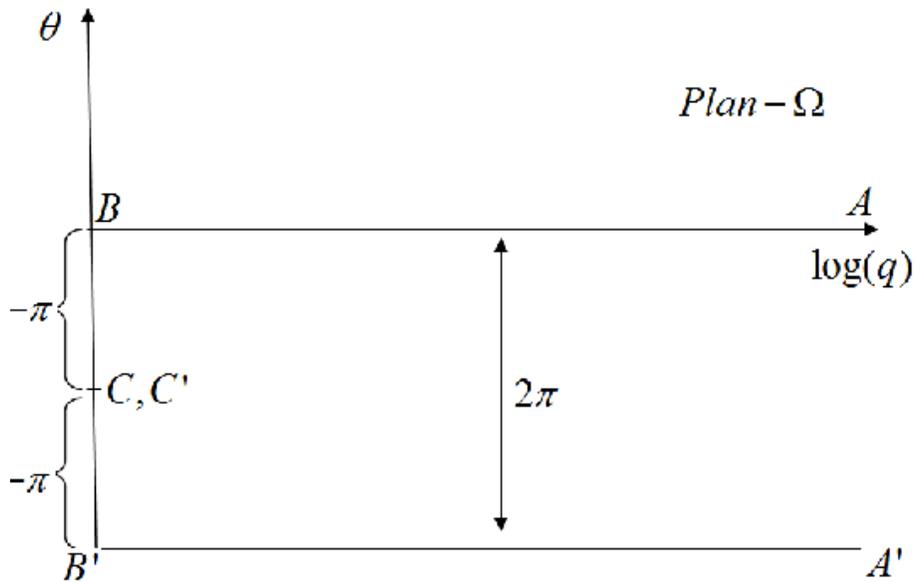


FIG. 3.3 – Plan Ω

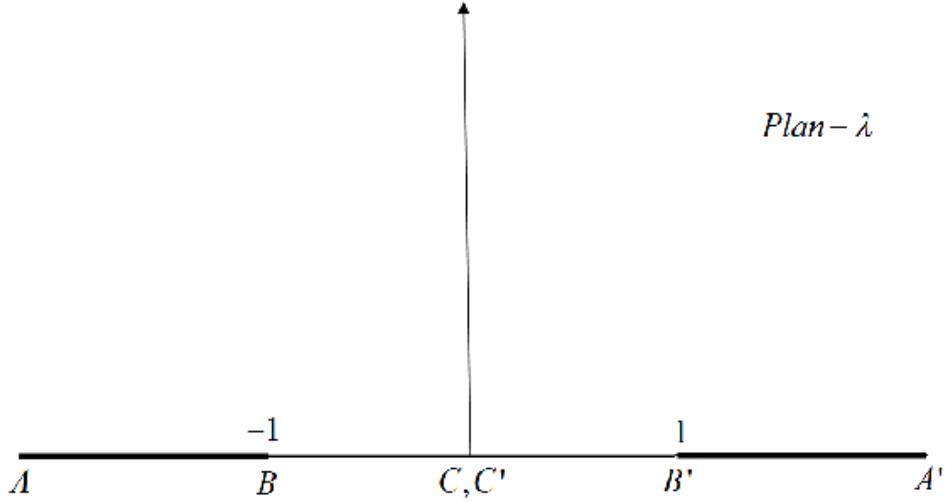


FIG. 3.4 – Plan λ

les points	plan f	plan Ω	plan λ
A	$\phi = -\infty, \psi = 1$	$\log(q) = \infty, \theta = 0$	$\zeta = -\infty, \eta = 0$
B	$\phi = 0, \psi = 1$	$\log(q) = 0, \theta = 0$	$\zeta = -1, \eta = 0$
C	$\phi = +\infty, \psi = 1$	$\log(q) = 0, \theta = i\pi$	$\zeta = 0, \eta = 0$
A'	$\phi = -\infty, \psi = -1$	$\log(q) = \infty, \theta = i2\pi$	$\zeta = +\infty, \eta = 0$
B'	$\phi = 0, \psi = -1$	$\log(q) = 0, \theta = i2\pi$	$\zeta = 1, \eta = 0$
C'	$\phi = +\infty, \psi = -1$	$\log(q) = 0, \theta = i\pi$	$\zeta = 0, \eta = 0$

Telle que $q = \sqrt{u^2 + v^2}$ est le module de vitesse.

En respectant le sens et l'orientation de l'écoulement, on choisit $C' = C = 0, B = -1, B' = 1$ sur le plan λ (Fig 3.4), nous aurons :

$$\begin{aligned}
 \frac{d\Omega}{d\lambda} &= M(\lambda - 1)^{\frac{\pi}{2}-1} (\lambda + 1)^{\frac{\pi}{2}-1} \\
 &= M(\lambda - 1)^{-\frac{1}{2}}(\lambda + 1)^{-\frac{1}{2}} \\
 &= M \frac{1}{\sqrt{\lambda^2 - 1}}
 \end{aligned}$$

Alors

$$\Omega = M \int \frac{d\lambda}{\sqrt{\lambda^2 - 1}} + N \quad (3.4)$$

On calcule l'intégral (3.4)

$$\Omega = Mi \int \frac{d\lambda}{\sqrt{i^2(\lambda^2 - 1)}}$$

$$\Rightarrow \Omega = Mi \int \frac{d\lambda}{\sqrt{1 - \lambda^2}}$$

$$\Rightarrow \Omega = Mi \arcsin(\lambda) + N$$

En particulier, cette transformation mappe les points $B = 0$ et $B' = 2\pi i$ dans le plan Ω vers les points $B = -1$ et $B' = 1$, respectivement, dans le plan λ .

$$\begin{cases} 0 = Mi \arcsin(-1) + N \\ 2\pi i = Mi \arcsin(1) + N \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 0 = Mi\left(-\frac{\pi}{2}\right) + N \\ 2\pi i = Mi\frac{\pi}{2} + N \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} M = 2 \\ N = i\pi \end{cases}$$

Alors, on obtient

$$\Omega = 2i \arcsin(\lambda) + i\pi \quad (3.5)$$

$$\Rightarrow \arcsin(\lambda) = \frac{\Omega - i\pi}{2i}$$

$$\Rightarrow \lambda = \sin \frac{\Omega - i\pi}{2i}, \quad -1 \leq \lambda \leq 1 \quad (3.6)$$

2. Transformation de $\lambda(f)$

On transforme la bande infinie dans le plan f vers la moitié supérieure du plan λ . La transformation de *Schwarz Cristoffel* donne :

$$\begin{aligned} \frac{df}{d\lambda} &= K(\lambda - 1)^{\frac{\pi}{\pi}-1}(\lambda + 1)^{\frac{\pi}{\pi}-1}(\lambda - 0)^{\frac{0}{\pi}-1} \\ &= K(\lambda)^{-1} \end{aligned}$$

Alors

$$f = K \int \lambda^{-1} d\lambda$$

Ce qui donne

$$f = K \log \lambda + L \quad (3.7)$$

Et pour trouver K et L , il doit remplacer les points $B = i$ et $B' = -i$ dans le plan f et les points $B = -1$ et $B' = 1$ respectivement dans le plan λ dans l'équation (3.7)

$$\begin{aligned} &\begin{cases} i = K \log(-1) + L \\ -i = K \log(1) + L \end{cases} \\ \Rightarrow &\begin{cases} i = 2K \log(i^2) + L \\ -i = L \end{cases} \end{aligned}$$

Donc

$$\begin{cases} K = \frac{2}{\pi} \\ L = -i \end{cases}$$

Alors l'équation (3.7) devient

$$f = \frac{2}{\pi} \log \lambda - i \quad (3.8)$$

3. Relation entre $\Omega(f)$ et $f(z)$

On utilise la relation

$$\begin{aligned} \frac{dz}{d\lambda} &= \frac{dz}{df} \frac{df}{d\lambda} \\ &= e^{\Omega} \frac{df}{d\lambda} \end{aligned}$$

Donc

$$z = \int e^{\Omega} \frac{df}{d\lambda} + z_0 \quad (3.1)$$

Remplaçons les expressions des fonction Ω et $\frac{df}{d\lambda}$ dans (3.1), on obtient

$$\begin{aligned} z &= \int \frac{2}{\pi} \frac{1}{\lambda} e^{2i \arcsin \lambda + i\pi} d\lambda \\ &= \frac{2}{\pi} e^{i\pi} \int \frac{1}{\lambda} e^{2i \arcsin \lambda} d\lambda \end{aligned} \quad (3.2)$$

On pose

$$I = \int \frac{1}{\lambda} e^{2i \arcsin \lambda} d\lambda \quad (3.3)$$

On a

$$\begin{aligned} e^{2i \arcsin \lambda} &= (e^{i \arcsin \lambda})^2 \\ &= (\cos(\arcsin \lambda) + i \sin(\arcsin \lambda))^2 \end{aligned}$$

On sait que

$$\cos(\arcsin(\lambda)) = \sqrt{1 - \lambda^2} \quad , \quad -1 < \lambda < 1$$

Donc

$$e^{2i \arcsin \lambda} = (\sqrt{1 - \lambda^2} + i\lambda)^2 \quad (3.4)$$

L'équation (3.12) devient

$$\begin{aligned} e^{2i \arcsin \lambda} &= 1 - \lambda^2 - \lambda^2 + 2i\lambda\sqrt{1 - \lambda^2}, \quad -1 < \lambda < 1 \\ &= 1 - 2\lambda^2 + 2i\lambda\sqrt{1 - \lambda^2}, \quad -1 < \lambda < 1 \end{aligned} \quad (3.5)$$

Alors

$$\frac{e^{2i \arcsin \lambda}}{\lambda} = \frac{1}{\lambda} - 2\lambda + 2i\sqrt{1 - \lambda^2} \quad (3.6)$$

Donc (3.11) devient

$$I = \ln \lambda - \lambda^2 + 2i \int \sqrt{1 - \lambda^2} d\lambda$$

$$I_1 = \int \sqrt{1 - \lambda^2} d\lambda \quad (3.7)$$

Pour calculer l'intégral (3.15), on utilise le changement de variable : $\lambda = \sin(u) \rightarrow u = \arcsin(\lambda)$, $d\lambda = \cos(u)du$

on trouve

$$I_1 = \frac{\arcsin(\lambda) + \lambda\sqrt{1-\lambda^2}}{2} + c$$

Alors

$$I = \ln \lambda - \lambda^2 + i(\arcsin \lambda + \lambda\sqrt{1-\lambda^2})$$

Donc, on a

$$\begin{aligned} z &= \frac{2}{\pi} e^{i\pi} ((\ln \lambda - \lambda^2 + i(\arcsin \lambda + \lambda\sqrt{1-\lambda^2}))) & (3.8) \\ &= -\frac{2}{\pi} ((\ln \lambda - \lambda^2 + i(\arcsin \lambda + \lambda\sqrt{1-\lambda^2}))) \\ &= -\frac{2}{\pi} (\ln \lambda - \lambda^2) + i\left(-\frac{2}{\pi} (\arcsin \lambda + \lambda\sqrt{1-\lambda^2})\right) \end{aligned}$$

Alors, on obtient l'équation paramétrique de la surface libre $B'C'$

$$\begin{cases} x = -\frac{2}{\pi} (\ln \lambda - \lambda^2) \\ y = -\frac{2}{\pi} (\arcsin \lambda + \lambda\sqrt{1-\lambda^2}) \end{cases}$$

Où $-1 < \lambda < 1$.

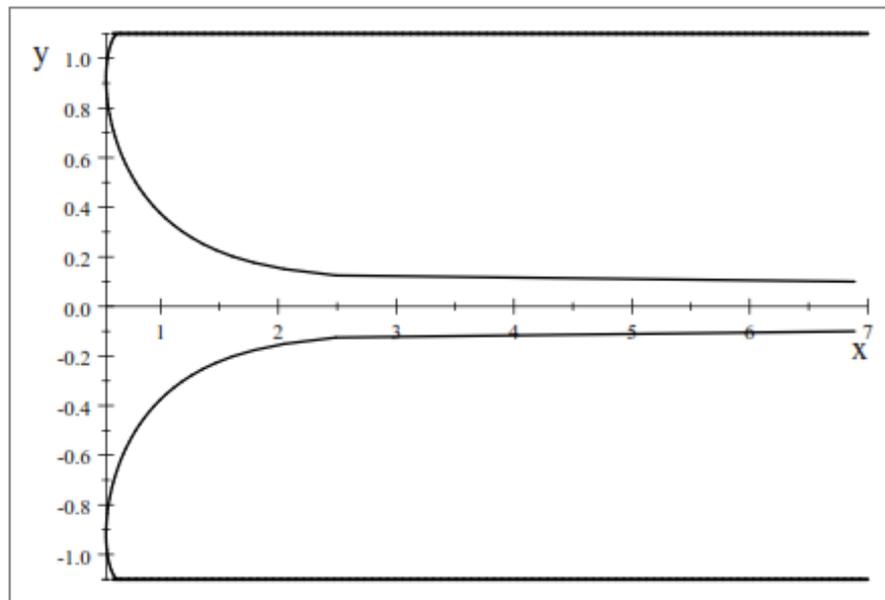


FIG. 3.5 – Forme de deux surfaces libres BC et $B'C'$

Conclusion

Dans ce mémoire, on a étudié le problème d'un écoulement bidimensionnel et irrotationnel d'un fluide incompressible et non visqueux à surface libre. Lorsque les effets de la force de la tension de surface et de la gravité sont négligés. La solution du problème est obtenue explicitement et la forme de la surface libre est déterminée paramétriquement en utilisant la théorie des lignes de courant libres et des transformations conformes. Dans le cas l'effet de la tension de la surface est prise en compte ou la force de gravité est non nulle, le problème ne peut être résolu que par une approche numérique à cause du terme non linéaire figurant dans la condition au bord de la surface libre.

Bibliographie

- [1] G.Birkhoff et E.H. Zarantonello Jets, Wakes, And Cavities, New-York,1957.
- [2] G.K Batchelor An introduction To fluid dynamics, Université de Campridge, 1967.
- [3] Brahim, Bouderah, Wahiba delloume et Abdelkader Gasmi A Free Surface Flow over a polygonal obstacle, international Mathematical Forum, 2, 2007 no.66, 3279-3284.
- [4] Christophe Ancey. Mécanique des fluides, Ecole polytechnique fédérale de Lausanne Ecublens, 26 juin 2010.
- [5] Darrozes, J. S. et François. C. Mécaniques des fluides incompressibles. Springer-Verlag, 1982.
- [6] Abdelkader Gasmi, H.Mekias A Jet from Container and Flow past a Vertical Flat Plate in a Channel With the Surface Tension Effects, Applied Math Sciences, vol.1, 2007, no.54, 2687-2698.
- [7] F.Guechi, H.Mekias et A.Merzougui Free surface Flow with surface Tension and gravity, Applied Math Sciences,vol.1, 2007, no.49, 2399-2408.
- [8] Grandperrin. G. Lignes de courant de fluides incompressibles. École Polytechnique Fédérale de Lausanne, 2007.
- [9] A.Merzougui, H.Mekias et F.Guechi Surface tension effect on a two dimensional channel flow against an inclined wall, Algerian Journal of applied Fluid Mech , Vol.2, 2007, 1718-5130.
- [10] Murray R. Spiegel Variables complexes cours et problèmes (série schaum), 1973.

- [11] Jean-Marc Vanden-Broeck The influence of surface tension on cavitating flow past a curved obstacle, *J. Fluid Mech.* (1983), Vol.133, p. 255-264.
- [12] J.Roussel Cours de Mécanique des fluides, C.P.I.2-Chem.I.St2 : 2005-2006.
- [13] Stéphane Ravier et Mattieu Rigaut. Mécanique des fluides, Ecole Normale Supérieure de LYON, janvier 2000.
- [14] Walker, M. The Schwarz-Christoffel transformation and its applications : a simple exposition. Dover Publications Inc, 1964.

Annexe B : Abréviations et Notations

Les différentes abréviations et notations utilisées tout au long de ce mémoire sont expliquées ci-dessous.

∇v	Le gradient de vecteur \vec{v}
Δv	Les dérivées partielles d'un vecteur \vec{v} de deuxième ordre par rapport à x^2 et y^2
$\text{div } v$	La dévergence d'un champ de vecteurs
$\rho(\vec{x}, t)$	la masse volumique du fluide au point repéré par le vecteur \vec{x} à l'instant t
$V(\vec{x}, t)$	fonction de répartition empirique
$\text{rot } \vec{v}$	La rotation d'un vecteur \vec{v}