République Algérienne Démocratique et Populaire

Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

UNIVERSITÉ MOHAMED KHIDER, BISKRA

FACULTÉ des SCIENCES EXACTES et des SCIENCES de la NATURE et de la VIE

DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES

Mémoire présenté en vue de l'obtention du Diplôme **:**

MASTER en Mathématiques

Option : **Analyse**

Par

BOUDISSA Salima

Titre :

Introduction á la théorie spectrale

Membres du Comité d'Examen :

Dr.	**HOUAS Amrane**	UMKB	Président
Dr.	**MOKHTARI Zouhir**	UMKB	Encadreur
Dr.	**KABOUL Hanane**	UMKB	Examinateur

Juin 2018

Dédicace

Je dédie ce humble travail :

A mes chers parents

A mes soeurs

A mes frères

A mes amis, collégues sans exeption

A toux ceux qui m'ont encouragée à poursuivre mes études

A toutes les personnes qui m'ont soutenu à accomplir ce travail

REMERCIEMENTS

En premier lieu, je remercie Dieu qui m'a donné le courage et la patience durant les longues années d'étude, et pour réaliser ce travail.

je remercie mon encadreur Dr "**MOKHTARI Zouhir**", d'avoir accepté de diriger ce projet et pour ses conseils et son encouragement durant la période de rédaction de ce travail. Je remercie égalemnt les membres de Jury de ce mémoire.

Mes remerciements vont aussi au chefs du département de mathématiques Mr. "**HFAYED Moukhtar**" et Mr. "**YAHIA Djabrane**".

Je tiens à remercier, tous ceux qui mon enseigné durant toutes mes années d'études.

Je tiens aussi à remercier, tous les personnes qui m'ont encouragé pendant la réalisation de ce travail : ma famille, mes collègues cette promotion 2018, amis, sans exception.

Table des matières

Introduction

La théorie spectrale joue un rôle très important en analyse fonctionnel et dans l'étude du spectre d'un opérateur compact auto-adjoint ou normal dans un espace de Hilbert, ou pour un opérateur compact général (pas nécessairement auto-adjoint ou normal) dans un espace de Banach.

Ce mémoire est consacré à donner une introduction générale sur la théorie spectrale et ces différentes applications. Nous parcourons la surface de la théorie spectrale pour un opérateur général (pas nécessairement compact) sur un espace de Banach, avant une version du théorème spectral pour un opérateur auto-adjoint borné dans un espace de Hilbert.
Ce travail est organisé en trois chapitres comme suit :

Le premier chapitre étant une Introduction générale sur l'espace de Hilbert, dont nous rappelons quelques définitions et propriétés de base.

Le deuxième chapitre consiste à l'étude des opérateurs compactes et leurs spectres, les définitions et les résultats sur le spectre.

Le dernier chapitre sera consacré au cadre générale du mémoire qui la théorie spectrale. Les définitions et les résultats principaux sur le spectre d'un opérateur et résolvante sont bien détaillées et illustrer d'une façon montrant l'importance du sujet étudier.

Chapitre 1

Généralités

1.1 Les espaces vectoriels et leurs topologies

Définitions de base

On considère un espace vectoriel E sur $\mathbb{k} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Définition 1.1.1 *On appelle norme sur un espace vectoriel E toute application N de E dans $\mathbb{R}^+$ qui vérifie :*

1) $\forall x \in E,\ N(x) = 0 \Longrightarrow x = 0_E$,*(séparation).*

2) $\forall x \in E,\ N(\lambda x) = |\lambda|\, N(x)$, *(homogénéité).*

3)$\forall (x, y) \in E^2,\ N(x + y) \leq N(x) + N(y)$, *(inégalité triangulaire).*

Un espace vectoriel normé est un espace vectoriel muni d'une norme.

Définition 1.1.2 *Un semi-norme sur un espace vectoriel E sur $\mathbb{k}$ est une fonction f : $E \to \mathbb{R}$ tel que les propriétes suivantes se tient :*

1) $N(x) \geq 0$, *pour tout* $x \in X$.

2) $N(\alpha x) = |\alpha|\, N(x),\ \forall x \in E,\ \forall \alpha \in \mathbb{k}$.

3) $N(x + y) \leq N(x) + N(y),\ \forall (x, y) \in E^2$.

Définition 1.1.3 *Soit l'application $f : E \times E \to \mathbb{R}$, on dit que f est un produit scalaire si :*

1) $\forall (u, u', v, v') \in E^4$, $\forall (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$,

$$f(\alpha u + \beta u', v) = \alpha f(u, v) + \beta f(u', v),$$
$$f(u, \alpha v + \beta v') = \alpha f(u, v) + \beta f(u, v').$$

2) $\forall (u, v) \in E^2,\ f(u, v) = f(v, u)$.

3) $\forall u \in E,\ f(u, u) \in \mathbb{R}^+$.

4) $\forall u \in E,\ f(u, u) = 0 \Longleftrightarrow u = \overrightarrow{0}$.

L'identité de polarisation exprime la norme d'un espace muni de produit scalaire en termes de produit scalaire.

Pour les espaces réels munis de produit scalaire il est :

$$(x, y) = \frac{1}{4}\left(\|x + y\|^2 - \|x - y\|^2\right).$$

Pour les espaces complexes il est :

$$(x, y) = \frac{1}{4}\left(\|x + y\|^2 + i\,\|x + y\|^2 - \|x - y\|^2 - i\,\|x - y\|^2\right).$$

Dans l'espace muni de produit scalaire nous ont également la loi de parallélogramme :

$$\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2\left(\|x\|^2 + \|y\|^2\right).$$

Définition 1.1.4 *Un espace de Hilbert est un espace vectoriel réel ou complexe muni d'un produit scalaire et complet pour la norme associée.*

Définition 1.1.5 *Un espace de Banach est un espace vectoriel normé complet.*

Les espaces vectoriels topologiques :

Est un espace vectoriel doté d'une topologie de Hausdorff tel que les opérations algébriques sont continues.

1.1.1 Sous espace et espace quotient

Si X est un espace vectoriel et S un sous espace, nous peut définir l'espace vectoriel X/S. Si X est normé, nous pouvons définir :

$$\|u\|_{X/S} = \inf_{x \in u} \|x\|_X ,$$

ou d'une manière équivalente

$$\|\overline{x}\|_{X/S} = \inf_{s \in S} \|x - s\|_X .$$

C'est un semi norme, et c'est une norme si et seulement si S est fermé.

Théorème 1.1.1 *Si X un espace de Banach et S un sous espace fermé alors S est un espace de Banach et X/S est un espace de Banach.*

Preuve. On suppose une suite d'éléments de X pour lesquelles les cosets $\overline{x}_n$ sont de Cauchy. Nous pouvons prendre une sous suite avec $\|\overline{x}_n - \overline{x}_{n+1}\|_{X/S} \leq 2^{-n-1}$, n=1,2,... Prenons $s_1 = 0$, on défini $s_2 \in S$ tel que $\|x_1 - (x_2 + s_2)\|_X \leq \frac{1}{2}$, on défini $s_3 \in S$ tel que $\|(x_2 + s_2) - (x_3 + s_3)\| \leq \frac{1}{4}$...Alors $\{x_n + s_n\}$ est de Cauchy dans X... ■

Remarque 1.1.1 *L'inverse est vraie.*

Théorème 1.1.2 *Si X est un espace linéaire normé et S un sous espace fermé tel que S est un espace de Banach et X/S est un espace de Banach, alors X est un espace de Banach. Des sous espaces de dimension finis sont toujours fermés (ils sont complets). Plus généralement :*

Théorème 1.1.3 *Si S un sous espace fermé d'un espace de Banach et V un sous espace de dimension fini, alors $S + V$ est fermé.*

Remarque 1.1.2 *La somme de sous espaces fermées d'un espace de Banach n'est pas nécessairement un fermée.*

1.1.2 Propriétés de base d'un espace de Hilbert.

Théorème de projection :

Soit X un espace de Hilbert, K un sous espace fermé convexe, et $x \in X$. Alors il existe une unique $\overline{x} \in K$ tel que

$$\|x - \overline{x}\| = \inf_{y \in K} \|x - y\|$$

nous pouvons assumer que $x = 0$, et ainsi nous devons prouver qu'il ya un élément unique de la norme minimale de K. Soit d $= \inf\limits_{y \in K} \|y\|$ et on choisi $x_n \in K$ avec $\|x_n\| \to d$. De la loi de parallélogramme :

$$\|x_n + x_m\|^2 + \|x_n - x_m\|^2 = 2(\|x_n\|^2 + \|x_m\|^2),$$

donc la loi de parallélogramme nous donne

$$\left\|\frac{x_n - x_m}{2}\right\|^2 \leq \frac{1}{2}\|x_n\|^2 + \frac{1}{2}\|x_m\|^2 - \frac{1}{2}d^2,$$

où nous avons utilisé la convexité pour déduire que $(x_n + x_m)/2 \in K$. Donc x_n est une suite de Cauchy et ainsi a une limite $\overline{x}$, ce qui doit appartenir á K, puisque K est fermé. En effet la norme est continue, $\|\overline{x}\| = \lim_n \|x_n\| = d$. Pour l'unicité, on note si $\|\overline{x}\| = \|\widetilde{x}\| = d$, alors $\|(\overline{x} + \widetilde{x})/2\| = d$, et la loi de parallélogramme donne

$$\|\overline{x} - \widetilde{x}\|^2 = 2\|\overline{x}\|^2 + 2\|\widetilde{x}\|^2 - \|\overline{x} + \widetilde{x}\|^2 = 2d^2 + 2d^2 - 4d^2 = 0.$$

L'élément unique le plus proche à x dans K est dénoté $P_K x$, et désigné sous le nom du projection de x sur K, il satisfait $P_K \circ P_K = P_K$, la définition de projection, elle est particulièrement employée quand K est un sous espace linéaire fermé de X, dans ce cas P_K est un opérateur de projection linéaire.

Projection et orthogonalité :

Si S est n'importe quel sous ensemble d'un espace de Hilbert X, soit

$$S^{\perp} = \{x \in X : \langle x, s \rangle = 0 \text{ pour tout } s \in S\}.$$

Alors $S^{\perp}$ est un sous espace fermé de X. Nous avons évidemment $S \cap S^{\perp} = \{0\}$ et $S \subset S^{\perp\perp}$.

Si S est un sous espace fermé de X, $x \in X$, et $P_S x$ la projection de x sur S, alors $x - P_S x \in S^{\perp}$. En effet, si $s \in S$ est arbitraire et $t \in \mathbb{R}$, alors

$$\|x - P_S x\|^2 \leq \|x - P_S x - ts\|^2 = \|x - P_S x\|^2 - 2t(x - P_S x, s) + t^2 \|s\|^2,$$

donc le polynôme quadratique du côté droite a un minimum à $t = 0$, on dérivons pour 0, donc on obtient :

$$(x - P_S x, s) = 0,$$

car :

$$0 \leq \|x - P_S x\|^2 \leq \|x - P_S x + ts\|^2 = \|x - P_S x\|^2 + 2t(x - P_S x, s) + t^2 \|s\|^2$$
$$0 = \|x - P_S x\|^2 - \|x - P_S x\|^2 \leq 2t(x - P_S x, s) + t^2 \|s\|^2$$
$$0 \leq 2t(x - P_S x, s) + t^2 \|s\|^2$$
$$0 \leq 2(x - P_S x, s) + t \|s\|^2$$

pour $t = 0$:

$$0 \leq 2(x - P_S x, s)$$

donc :

$$0 \leq (x - P_S x, s) \tag{1}$$

et on a :

$$2t(x - P_S x, s) - t^2 \|s\|^2 \leq 0$$

$$2(x - P_S x, s) - t\|s\|^2 \leq 0, \text{ donc pour } t = 0 :$$

$$2(x - P_S x, s) \leq 0$$

alors :

$$(x - P_S x, s) \leq 0 \tag{2}$$

de (1) et (2) on déduit que :

$$(x - P_S x, s) = 0.$$

Ainsi on peut écrire $x \in X$ comme $s + s^\perp$ avec $s \in S$ et $s^\perp \in S^\perp$ (à savoir $s = P_S x$, $s^\perp = x - P_S x$). Une telle décomposition est certainement unique. Nous avons clairement $\|x\|^2 = \|s\|^2 + \|s^\perp\|^2$. Un corollaire immédiat est celui $S^{\perp\perp} = S$ pour S un sous espace fermé, puisque si $x \in S^{\perp\perp}$ nous pouvons l'écrire comme $s+s^\perp$ avec d'où $s^\perp \in S^\perp \cap S^{\perp\perp} = 0$, c.-à-d., $x \in S$. Nous voyons donc que la décomposition

$$x = (I - P_S)x + P_S x,$$

est la décomposition (unique) de x sur les éléments de $S^\perp$ et $S^{\perp\perp}$. Donc $P_{S^\perp} = I - P_S$. Pour tout sous ensemble S de X, $S^{\perp\perp}$ est le plus petit sous espace fermé contenant S ($S \subset S^{\perp\perp}$) car :

si $u \in S$ donc $\langle u, v\rangle = 0, \forall v \in S^\perp \iff \langle v, u\rangle = 0, \forall v \in S^\perp$

donc $u \in (S^\perp)^\perp$.

1.2 Opérateurs linéaires et fonctionnels

Définition 1.2.1 *Soint X et Y deux espaces linéaires normés. On appelle opérateur linéaire de X dans Y une application*

$$T : X \to Y$$

$$x \mapsto y = Tx,\ x \in X,\ y \in Y,$$

qui vérifie :

$$T(\alpha x_1 + \beta x_2) = \alpha T x_1 + \beta T x_2.$$

Définition 1.2.2 *Un opérateur T définit sur un espace linéaire normé $T : X \to Y$ est dit borné s'il existe un nombre $c > 0$ tel que : $\|Tx\| \leq c\,\|x\|\,, \forall x \in X$.*
$B(X,Y) =$ opérateurs linéaires bornés entre les espaces linéaires normé X et Y. Un opérateur linéaire est borné si et seulement s'il est borné sur chaque boule.

Théorème 1.2.1 *Si X un espace linéaire normé et Y un espace de Banach, alors $B(X,Y)$ est un espace de Banach avec la norme*

$$\|T\|_{B(X,Y)} = \sup_{0 \neq x \in X} \frac{\|Tx\|_Y}{\|x\|_X}.$$

Si $T \in B(X,Y)$ et $U \in B(Y,Z)$, alors $UT = U \circ T \in B(X,Z)$ et $\|UT\|_{B(X,Z)} \leq \|U\|_{B(Y,Z)} \|T\|_{B(X,Y)}$. En particulier $B(X) := B(X,X)$.
L'espace dual est $X^* := B(X,\mathbb{R})$ (ou $B(X,\mathbb{C})$ pour les espaces vectoriels complexes).

1.2.1 Théorème de Hahn-Banach.

Un théorème principal pour traiter les espaces dual des espaces linéaires normés est le Théorème de Hahn-Banach. Il nous assure que l'espace dual d'un non trivial espace linéaire normé est lui même non trivial.

Hahn-Banach. Si f est une fonction linéaire borné sur un sous espace d'un espace linéaire normé, alors f se prolonge à tout l'espace avec la conservation de la norme.

On note qu'il n'ya pratiquement aucune hypothèse au-delà la linéarité et d'existence d'une norme. En fait pour certains purposes une version plus faible est utile. Pour X un espace vectoriel on dit que $p : X \to \mathbb{R}$ est sous-linéaire si $p(x+y) \leq p(x)+p(y)$ et $p(\alpha x) = \alpha p(x)$ pour $x, y \in X, \alpha \geq 0$.

Hahn-Banach généralisé. Soit X un espace vectoriel, $p : X \to \mathbb{R}$ une fonction sous linéaire, S un sous espace de X, et $f : S \to \mathbb{R}$ une fonction linéaire satisfaisant $f(x) \leq p(x)$ pour tout $x \in S$, alors f peut être prolonger à X de sorte que la même inégalité se tienne pour tout $x \in X$.

Preuve. Il suffit pour prolonger f à l'espace enjambé par S et un élément $x_0 \in X \backslash S$, préservation de l'inégalité, puisque si nous pouvons faire ça nous pouvons accomplir la preuve avec lemme de Zorn.

Nous devons définir $f(x_0)$ tel que $f(tx_0 + s) \leq p(tx_0 + s)$ pour tout $t \in \mathbb{R}$, $s \in S$. Le cas $t = 0$ est connu et c'est facile á utiliser à restreindre au $t = \pm 1$. Donc nous devons trouver un valeur $f(x_0) \in \mathbb{R}$ tel que :

$$f(s) - p(-x_0 + s) \leq f(x_0) \leq p(x_0 + s) - f(s), \text{pour tout } s \in S.$$

Maintenant il est facile d'examiner que pour tout s_1, $s_2 \in S$,

$$f(s_1) - p(-x_0 + s_1) \leq p(x_0 + s_2) - f(s_2),$$

et donc $f(x_0)$ existe. $\blacksquare$

Corollaire 1.2.1 *Si X un espace linéaire normé et $x \in X$, alors il existe $f \in X^*$ de norme 1 tel que $f(x) = \|x\|$.*

Corollaire 1.2.2 *Si X est un espace linéaire normé, S un sous espace fermé, et $x \in X$,* *alors il existe $f \in X^*$ de la norme 1 tel que $f(x) = \|\overline{x}\|_{X/S}$.*

1.2.2 Dualité

Si X et Y des espaces linéaires normés et $T : X \to Y$, alors nous obtenons une application $T^* : Y^* \to X^*$ par $T^*f(x) = f(Tx)$ pour tout $f \in Y^*, x \in X$. En particulier, si $T \in B(X,Y)$, alors $T^* \in B(Y^*, X^*)$. En fait $\|T^*\|_{B(Y^*,X^*)} = \|T\|_{B(X,Y)}$. Pour prouver, on note que $|T^*f(x)| = |f(Tx)| \leq \|f\| \|T\| \|x\|$, par conséquent $\|T^*f\| \leq \|f\| \|T\|$, alors T^* est borné avec $\|T^*\| \leq \|T\|$. Aussi, pour tout $y \in Y$, on peut trouver $g \in Y^*$ tel que $|g(y)| = \|y\| , \|g\| = 1$. On applique ça avec $y = Tx$ ($x \in X$ arbitraire), on a : $\|Tx\| = |g(Tx)| = |T^*gx| \leq \|T^*\| \|g\| \|x\| = \|T^*\| \|x\|$. Ce qui montre que $\|T\| \leq \|T^*\|$. Alors $\|T^*\|_{B(Y^*,X^*)} = \|T\|_{B(X,Y)}$. On note que si $T \in B(X,Y)$, $U \in B(Y,Z)$, alors $(UT)^* = T^*U^*$.

Notations :

• On notera $\mathcal{N}(T)$ le noyau de l'opérateur T, c-.à-d :

$$\mathcal{N}(T) = \{x \in X,\ Tx = 0\}$$

et aussi noté parfois $ker(T)$

• On notera $\mathcal{R}(T)$ l'image de X par T, c.-à-d :

$$\mathcal{R}(T) = \{Tx,\ x \in X\}$$

est aussi noté parfois $Im(T)$.

• Si X un espace de Banach et S un sous ensemble, soit

$$S^a = \{f \in X^* | f(s) = 0, \forall s \in S\}$$

dénoté l'annihilateur de S. Si V un sous ensemble de X^*, nous avons pareillement placé

$$^aV = \{x \in X | f(x) = 0, \forall f \in V\}.$$

On note la distinction entre S^a, qui est un sous ensemble de X^{**} et ^aV, qui est un sous ensemble de X. Tout les annihilateurs sont des sous espaces fermés. Il est facile de voir que $S \subset T \subset X$ implique que $T^a \subset S^a$ (car $\forall\ s \in S$, $s \in T$, $f(s) = 0$, $\forall\ f \in T^a$, et $f \in S^a$), et $V \subset W \subset X^*$ implique que $^aW \subset {}^aV$ (car $\forall\ x \in {}^aW$, $g(x) = 0$, $\forall g \in W$. Donc $g \in V \implies g \in W$ $(V \subset W) \implies g(x) = 0$, $\forall x \in {}^aW \implies x \in {}^aV$). Evidemment $S \subset {}^a(S^a)$ si $S \subset X$, (puisque S un sous ensemble de X et $^a(S^a) = \{x \in X | f(x) = 0$, $\forall f \in S^a\}$), et $V \subset ({}^aV)^a$ si $V \subset X^*$ (puisque V est un sous ensemble de X^* et $({}^aV)^a = \{f \in X^* | f(s) = 0, \forall s \in {}^aV\}$). Le théorème de Hahn-Banach implique que $S = {}^a(S^a)$ dans le cas où S un sous espace fermé de X (mais il peut se produire que $V \subsetneq ({}^aV)^a$ pour V un sous espace fermé de X^*). Pour $S \subset X$ arbitraire, $^a(S^a)$ est le plus petit sous espace fermé de X contenant le sous ensemble S.

Maintenant, supposons que $T : X \to Y$ est un opérateur linéaire borné entre espaces de Banach. Soit $g \in Y^*$. Alors $g(Tx) = 0$, $\forall x \in X \iff T^*g(x) = 0$, $\forall x \in X \iff T^*g = 0$ c.-à-d.

$$\mathcal{R}(T)^a = \mathcal{N}(T^*).$$

De même, pour $x \in X$, $Tx = 0 \iff f(Tx) = 0$, $\forall f \in Y^* \iff T^*f(x) = 0\ \forall f \in Y^*$, ou

$$^a\mathcal{R}(T^*) = \mathcal{N}(T).$$

Prise des annihilateurs donne deux résultats supplémentaires :

$$\overline{\mathcal{R}(T)} = {}^a\mathcal{N}(T^*).$$

$$\mathcal{R}(T^*) \subset \mathcal{N}(T)^a.$$

En particulier nous voyons que : T^* est injective si et seulement si T a une image dense, et T est injective si et seulement si T^* a une image dense.

Preuve. • T^* est injective $\Longleftrightarrow T$ a un image dense.

T^* est injective $\Longleftrightarrow T^*g(x_1) = T^*g(x_2) \Longleftrightarrow g(x_1) = g(x_2)$, donc :

$T^*(g(x_1) - g(x_2)) = 0 \Longleftrightarrow T^*(0) = 0 \Longleftrightarrow \mathcal{N}(T^*) = \{0\}$, et on a : $Y = \mathcal{N}(T^*) \oplus \overline{\mathcal{R}(T)}^{\perp}$, et donc : $Y = \mathcal{N}(T^*) \oplus \overline{\mathcal{R}(T)}$, alors : $Y = \overline{\mathcal{R}(T)}$, car : si $y \in \mathcal{N}(T^*) \Longleftrightarrow \forall x \in X$, $\langle T^*y, x\rangle = 0 \Longleftrightarrow \forall x \in X$, $\langle y, Tx\rangle = 0 \Longleftrightarrow y \perp \mathcal{R}(T)$

• T injective si T^* a un image dense

T injective$\Longleftrightarrow Tx_1 = Tx_2 \Longleftrightarrow x_1 = x_2$, donc :

$Tx_1 - Tx_2 = 0 \Longleftrightarrow T(x_1 - x_2) = 0 \Longleftrightarrow T(0) = 0 \Longleftrightarrow \mathcal{N}(T) = \{0\}$, et on a $X = \mathcal{N}(T) \oplus \overline{\mathcal{R}(T^*)}^{\perp}$, et donc $X = \mathcal{N}(T) \oplus \overline{\mathcal{R}(T^*)}$, alors : $X = \overline{\mathcal{R}(T^*)}$, car si $x \in \mathcal{N}(T) \Longleftrightarrow \forall y \in Y$, $\langle Tx, y\rangle = 0 \Longleftrightarrow \forall y \in Y$, $\langle x, T^*y\rangle = 0 \Longleftrightarrow x \perp \mathcal{R}(T^*)$ ■

Le dual d'un sous espace. Un important cas est où T est la carte d'inclusion $i : S \to X$, où S est un sous espace fermé de X. Donc $r = i^* : X^* \to S^*$ est la carte de restriction. Evidemment $\mathcal{N}(r) = S^a$ ($f(s) = 0$ dans les deux extrêmes de l'égalité). Donc nous avons un isomorphisme canonique $\overline{r} : X^*/S^a \to S^*$. En fait, le théorème de Hahn-Banach montre qu'il est isométrie. Par cette isométrie on identifie souvent X^*/S^a avec S^*.

Le dual d'un espace quotient. Après, on considère la carte de projection $\pi : X \to X/S$ où S est un sous espace fermé. Nous avons alors $\pi^* : (X/S)^* \to X^*$. Puisque π est surjective, cette carte est injective. Il est facile de voir que l'image est contenue dans S^a. En fait nous montrons maintenant que π^* trace $(X/S)^*$ sur S^a, par conséquent fournit un isomorphisme canonique de S^a avec $(X/S)^*$.

Dual d'un espace de Hilbert. L'identification des espaces duals peut être difficile. Le cas des espaces de Hilbert est facile.

Théorème de représentation de Riesz. Si X un espace réel de Hilbert, on définit $j : X \to X^*$ par $j_y(x) = \langle x, y\rangle$. Cette carte est une isométrie linéaire de X sur X^*. Pour un espace de Hilbert complexe il est un isomérie linéaire conjugué (il satisfait $j_{\alpha y} = \overline{\alpha} j_y$).

Preuve. Il est facile de voir que j est un isométrie de X sur X^* et le problème majeur est de montrer que n'importe quel $f \in X^*$ peut être écrit comme j_y pour un quelque y. Nous pouvons supposer que $f \neq 0$, donc $\mathcal{N}(f)$ est un sous espace fermé approprié de X. Soit $y_0 \in [\mathcal{N}(f)]^{\perp}$ de norme 1 et on pose $y = (fy_0)y_0$. Pour tout $x \in X$, on a clairement $(fy_0)x - (fx)y_0 \in \mathcal{N}(f)$, alors

$$j_y(x) = \langle x, (fy_0)y_0 \rangle = \langle (fy_0)x, y_0 \rangle = \langle (fx)y_0, y_0 \rangle = fx.$$

Par la carte j on peut définir un produit scalaire sur X^*, alors c'est encore un espace de Hilbert. On note que si S un sous espace fermé de X, alors $x \in S^{\perp} \Longleftrightarrow j_s \in S^a$, (puisque si $x \in S^{\perp}$ donc $\langle x, y \rangle = 0 \ \forall y \in S$,et $S^a = \{f \in X^*/f(s) = 0, \forall s \in S\}$, et $j_y = fx$). La carte j de Riesz est parfois employé pour identifier X et X^*. Sous cette identification il n'ya aucune distinction entre $S^{\perp}$et S^a. ■

Le dual de $\mathbf{C(\Omega)}$.

Remarque 1.2.1 *Il ya deux théorèmes distincts désignés sous le nom du théorème de représentation de Riesz. La procédure est la facile. Le difficile identifie le dual de $C(\Omega)$ où Ω est un sous ensemble compact de $\mathbb{R}^n$ (ça peut être généralisé considérablement). Il dit qu'il ya une isométrie entre $C(\Omega)^*$ et l'espace des mesures signées finies sur Ω. (Une mesure signée finie est une fonction de la forme $\mu = \mu_1 - \mu_2$ où μ_i est une mesure finie, et nous voyons comme une fonction sur $C(X)$ par : $f \longmapsto \int\limits_{\Omega} f \ d\mu_1 - \int\limits_{\Omega} f \ d\mu_2$. C'est le cas à valeurs réelles, dans le cas à valeurs complexes l'isométrie est avec des mesures complexes $\mu + i\lambda$ où μ et λ sont des mesures signées.*

Le dual de $\mathbf{C}^1$. Il est facile de déduire une représentation pour un élément arbitraire du dual, par exemple C^1 $([0,1])$. La carte $f \mapsto (f, \ f')$ est un isométrie de C^1 sur un sous espace fermé de $C \times C$. Par le théorème de Hahn-Banach, chaque élément de $(C^1)^*$ se prolonge á une fonction sur $C \times C$, qui est facilement vu pour être de la forme

$$(f, g) = \int f \ d\mu + \int g \ dv$$

où μ et υ sont des mesures signées ($(X \times Y)^* = X^* \times Y^*$ avec les identifications évidentes). Donc toute fonction linéaire continue sur C^1 peut être écrite

$$f \mapsto \int f \ d\mu + \int f' \ d\upsilon.$$

Dans cette représentation les mesures μ et λ ne sont pas uniques.

Le dual de $\mathbf{L}^P$. L'inégalité de Hôlder dit que si $1 \leq p \leq \infty$, $q = p/(p-1)$, donc $\int fg \leq \|f\|_{L^p} \|g\|_{L^q}$, pour tout $f \in L^p, g \in L^q$, le dual de L^p est L^q pour p finie. Le dual de L^∞ est un espace très grand, plus grand que L^1 est rarement utilisé.

1.3 Théorèmes fondamentaux

Théorème de Catégorie de Baire. Un espace métrique complet ne peut pas être écrit comme une union comptable des ensembles denses.

Preuve. Si la déclaration était fausse, nous pourrions écrire $M = \underset{n \in \mathbb{N}}{\cup} F_n$ avec F_n un sous ensemble qui ne contient pas aucun ensemble ouvert. En particulier, F_0 est un ensemble fermé approprié, donc il existe $x_0 \in M$, $\epsilon_0 \in (0,1)$ tel que $E(x_0, \epsilon_0) \subset M \backslash F_0$. Puisqu'aucune boule contenue dans F_1, il existe $x_1 \in E(x_0, \epsilon_0/2)$ et $\epsilon_1 \in (0, \epsilon_0/2)$ tel que $E(x_1, \epsilon_1) \subset M \backslash F_1$. De cette façon nous obtenons une suite imbriquée des boules tel que le $n^{ème}$ boule a un rayon au plus 2^{-n} est disjoint de F_n et leurs centres forment une suite de Cauchy et sa limite, qui doit exister par la complétude, ne peut pas appartenir à aucun F_n. $\blacksquare$

1.3.1 Théorème de l'application Ouvert

Le théorème de l'application ouvert suit du Théorème de Catégorie de Baire et le lemme suivant.

Lemme 1.3.1 *Soit $T : X \to Y$ un opérateur linéaire borné entre espaces de Banach. Si $E(0_Y, r) \subset \overline{T(E(0_X, 1))}$ pour certains $r > 0$, alors $E(0_Y, r) \subset T(B(0_X, 2))$.*

Preuve. Soit $U = T(E(0_X, 1))$. Soit $y \in Y$, $\|y\| < r$, il existe $y_0 \in U$ avec $\|y - y_0\| \leq r/2$. Il existe $y_1 \in \frac{1}{2}U$ tel que $\|y - y_0 - y_1\| \leq \frac{r}{4}$, $y_2 \in \frac{1}{4}U$ tel que $\|y - y_0 - y_1 - y_2\| \leq \frac{r}{8}$...etc. On prend $x_n \in \frac{1}{2^n}U$ tel que $Tx_n = y_n$, et soit $x = \sum\limits_n x_n \in X$. Donc $\|x\| \leq 2$ et $Tx = \sum y_n = y$.

Théorème de l'application Ouvert. Une surjection linéaire bornée entre les espaces de Banach est ouvert. ■

Preuve. Il suffit pour prouver que l'image sous T d'une boule environ 0 contient une certaine boule environ 0. Les ensembles $T(E(0, n))$ couvrir y, alors la fermeture de l'un entre eux doit contenir un boule ouvert. Par le résultat précédent, passer de la fermeture. Le théorème suit facilement en utilisant la linéarité de T. ■

Théorème de l'application Inverse ou Théorème de Banach. L'inverse d'un opérateur inversible linéaire borné entre espaces de Banach est continue.

Preuve. L'application est ouverte, alors son inverse est continue. ■

Théorème du Graphe Fermé. Un opérateur linéaire entre espaces de Banach est continue si et seulement si son graphe est fermé.

Théorème 1.3.1 *Soit $T : X \to Y$ une carte linéaire borné entre espaces de Banach. Alors T est injective et a une image fermé si et seulement s'il existe un nombre positif c tel que*

$$\|x\| \leq c \|Tx\|, \forall x \in X.$$

Preuve. Si l'inégalité se tient, alors T est injective : $\|x\| \leq c \|Tx\|, \forall x \in X \implies \|x - y\| \leq c \|T(x - y)\|, \forall x, y \in X \implies \|x - y\| \leq c \|T(x) - T(y)\| = 0, \forall x, y \in X \implies x = y \implies T$ est injective. Et si Tx_n est une suite de Cauchy dans $\mathcal{R}(T)$, donc x_n est de Cauchy, et par conséquent x_n converge vers quelque x, alors Tx_n converge vers Tx. Donc l'inégalité implique que $\mathcal{R}(T)$ est fermé. Pour l'autre direction, supposons que T injective avec un image fermé et on considère la carte $T^{-1} : \mathcal{R}(T) \to X$.

Il est l'inverse d'un isomorphisme borné, alors est soi-même borné. L'inégalité suit immédiatement (avec c la norme de T^{-1}). ■

1.3.2 Théorème de l'image fermé

Théorème 1.3.2 *Soit $T : X \to Y$ un opérateur linéaire borné entre les espaces de Banach. Alors T est inversible si et seulement si T^* est inversible.*

Preuve. Si $S = T^{-1} : Y \to X$ existe, alors $ST = I_X$ et $TS = I_Y$, alors $T^*S^* = I_{X^*}$ et $S^*T^* = I_{Y^*}$, ce qui montre que T^* est inversible.

Réciproquement, si T^* est inversible, donc il est ouvert, alors il ya un nombre $c > 0$ tels que $T^*B_{Y^*}(0,1)$ contient $B_{X^*}(0,c)$. Alors pour $x \in X$

$$\|Tx\| = \sup_{f \in B_Y*(0,1)} |f(Tx)| = \sup_{f \in B_Y*(0,1)} |(T^*f)x| \geq \sup_{g \in B_X*(0,c)} |g(x)| = c\,\|x\|\,.$$

L'existence de $c > 0$ tel que $\|Tx\| \geq c\,\|x\|\ \forall x \in X$ est équivalent à la déclaration cela : T est injective avec une image fermé. ■

Lemme 1.3.2 *Soit $T : X \to Y$ une carte linéaire entre les espaces de Banach tel que T^* est un injection avec une image fermé. Alors T est une surjection.*

Preuve. Soit E un boule d'unité fermé de X et $F = \overline{TE}$. Il suffit de montrer que F contient un boule autour l'origine. Puisque donc, par le lemme utilisé pour prouver le théorème du l'application ouverte, T est surjective.

Il existe $c > 0$ tel que $\|T^*f\| \geq c\,\|f\|$ pour tout $f \in Y^*$. Nous allons prouver que F contient la boule de rayon c autour l'origine dans Y. Autrement dit il existe $y \in Y$, $\|y\| \leq c$, $y \notin F$. Puisque F est un ensemble fermé on peut trouver une fonction $f \in Y^*$ tel que $|f(Tx)| \leq \alpha$ pour tout $x \in E$ et $f(y) > \alpha$. Alors $\|f\| > \frac{\alpha}{c}$, mais

$$\|T^*f\| = \sup_{x \in E} |T^*f(x)| = \sup_{x \in E} |f(Tx)| \leq \alpha.$$

C'est une contradiction. ■

Théorème de l'image fermé. Soit $T : X \to Y$ un opérateur linéaire borné entre espaces de Banach. Alors T a une image fermé si et seulement si T^* est fermé.

Preuve. 1)$\mathcal{R}(T)$ fermé $\Rightarrow \mathcal{R}(T^*)$ fermé.

Soit $Z = \mathcal{R}(T)$. Alors $\overline{T} : X/\mathcal{N}(T) \to Z$ est une isomorphisme (Théorème de l'application Inverse). Le diagramme de la factorisation canonique est :

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "T"] \arrow[d, "\pi"'] & Y \arrow[d, "u"] \\ X/\mathcal{N}(T) \arrow[r, "\cong", "\overline{T}"'] & Z \end{tikzcd}$$

prenant des adjoints,

$$\begin{tikzcd} X^* \arrow[r, "T^*"] \arrow[d, "u"'] & Y^* \arrow[d, "\pi"] \\ \mathcal{N}(T)^a \arrow[r, "\cong", "\overline{T}"'] & Y^*/Z^a \end{tikzcd}$$

donc $\mathcal{R}(T^*) = \mathcal{N}(T)^a$, ce qui montre que $\mathcal{R}(\mathcal{T}^*)$ est fermé (car l'annihilateur est un sous espace fermé).

2)$\mathcal{R}(T^*)$ fermé $\Rightarrow \mathcal{R}(T)$ fermé.

Soit $Z = \overline{\mathcal{R}(T)}$ (alors $Z^a = \mathcal{N}(T^*)$ puisque $\overline{\mathcal{R}(T)} = {}^a\mathcal{N}(T^*)$) et soit S la restriction de l'image de T, $S : X \to Z$. L'adjoint est $S^* : Y^*/Z^a \to X^*$, $(Z^a = \mathcal{N}(T^*))$.

Maintenant $\mathcal{R}(S^*) = \mathcal{R}(T^*)$, est fermé puisque $\mathcal{R}(T^*)$ est fermé, et S^* est une injection ($U : \mathcal{N}(\mathcal{T})^a \to X^*$ est une injection et $\mathcal{R}(\mathcal{T}^*) = \mathcal{N}(\mathcal{T})^a = \mathcal{R}(S^*)$). Donc le théorème suit du lemme précédent. Puisque S^* est injective, S a une image dense $\overline{\mathcal{R}(T)} = Z = \mathcal{R}(T)$ (S est la restriction de l'image de T), donc $\mathcal{R}(T)$ est fermé. $\blacksquare$

Chapitre 2

Opérateurs compacts et leurs spectres

2.1 Opérateurs Compacts et leurs Spectres

2.1.1 Opérateurs de Hilbert-Schmidt

Lemme 2.1.1 *On suppose que $\{e_i\}$ et $\{\widetilde{e}_i\}$ soient deux bases orthonormales pour un espace de Hilbert et $T \in B(X)$. Alors*

$$\sum_{i,j} |\langle Te_i, e_j\rangle|^2 = \sum_{i,j} |\langle T\widetilde{e}_i, \widetilde{e}_j\rangle|^2 .$$

Preuve. Pour tout $w \in X$, $\sum\limits_j |\langle w, e_j\rangle|^2 = \|w\|^2$, alors

$$\sum_{i,j} |\langle Te_i, e_j\rangle|^2 = \sum_{i,j} |\langle e_i, T^*e_j\rangle|^2 = \sum_{i,j} |\langle T^*e_j, e_i\rangle|^2 , \text{ donc}$$

$$\sum_i \|Te_i\|^2 = \sum_j \|T^*e_j\|^2 , \text{mais}$$

$$\sum_i \|T^*e_i\|^2 = \sum_{i,j} |\langle T^*e_i, \widetilde{e}_j\rangle|^2 = \sum_{i,j} |\langle e_i, T\widetilde{e}_j\rangle|^2 = \sum_{i,j} |\langle T\widetilde{e}_j, e_i\rangle|^2 = \sum_j \|T\widetilde{e}_j\|^2 .$$

■

Définition 2.1.1 *Si $T \in B(X)$ on défini $\|T\|_2$ par*

$$\|T\|_2^2 = \sum_{i,j} |\langle Te_i, e_j \rangle|^2 = \sum_i \|Te_i\|^2$$

où $\{e_i\}$ est une base orthonormale pour X. T est appelé opérateur de Hilbert-Schmidt si $\|T\|_2 < \infty$, et $\|T\|_2$ est appelé la norme de Hilbert-Schmidt de T.

Proposition 2.1.1 $\|T\| \leq \|T\|_2$.

Preuve. Soit $x = \sum c_i e_i$ un élément arbitraire de X. Donc

$$\|Tx\|^2 = \sum_i \left| \sum_j c_j \langle Te_j, e_i \rangle \right|^2.$$

Par Cauchy-Schwartz

$$\left| \sum_j c_j \langle Te_j, e_i \rangle \right|^2 \leq \sum_j c_j^2 \sum_j |\langle Te_j, e_i \rangle|^2 = \|x\|^2 \sum_j |\langle Te_j, e_i \rangle|^2.$$

Une somme sur i nous donne le résultat

$$\sum_i \left| \sum_j c_j \langle Te_j, e_i \rangle \right|^2 \leq \|x\|^2 \sum_i \sum_j |\langle Te_j, e_i \rangle|^2 = \|x\|^2 \|T\|_2^2$$

alors $\|T\| \leq \|T\|_2$. ■

Proposition 2.1.2 *Soit Ω un sous ensemble ouvert de $\mathbb{R}^n$ et $K \in L^2(\Omega \times \Omega)$, on définit $T_K u(x) = \int_\Omega K(x,y)u(y)dy$, pour tout $x \in \Omega$. Donc T_K défini un opérateur de Hilbert-Schmidt dans $L^2(\Omega)$ et $\|T_K\|_2 = \|K\|_2$.*

Preuve. Pour $x \in \Omega$, l'ensemble $K_x(y) = K(x,y)$. On a $K_x \in L^2(\Omega)$ pour presque tout $x \in \Omega$, et

$$\begin{aligned}\|K\|_{L^2}^2 &= \int\int K(x,y)dxdy = \int\int K(x,y)dydx, \text{ (par Fubini)},\\ &= \int \|K_x\|^2 dx.\end{aligned}$$

Maintenant, $T_K u(x) = \langle K_x, u\rangle = \int\limits_{\Omega} K(x,y)u(y)dy$, donc si $\{e_i\}$ est une base orthonormale, alors

$$\begin{aligned}\|T_K\|_2^2 &= \sum_i \|T_K e_i\|^2 = \sum_i \int |(T_K e_i)(x)|^2 dx\\ &= \sum_i \int |K(x,y)e_i|^2 dx = \sum_i \int |\langle K_x, e_i\rangle|^2 dx\\ &= \int \sum_i |\langle K_x, e_i\rangle|^2 dx = \int \|K_x\|^2 dx = \|K\|_{L^2}^2 .\end{aligned}$$

■

2.1.2 Opérateurs compacts

Définition 2.1.2 *Soient X et Y deux espaces de Banach, un opérateur T est dit compact, si $T(\overline{B}_X)$, l'image de la boule unité fermée $\overline{B}_X$ par T, est relativement compact.*

Définition 2.1.3 *Un sous ensemble C de X est dit relativement compact si $\overline{C}$ est compact.*

Proposition 2.1.3 *Soit M un espace métrique. Donc les propriétés suivantes sont équivalentes :*

(1) *M est précompact.*

(2) *Pour tout $\epsilon > 0$ il existe un nombre fini d'ensembles de diamètre ϵ au plus qui couvrent M.*

(3) *Chaque suite contient une sous suite de Cauchy.*

Théorème 2.1.1 *Soit X et Y des espaces de Banach et $B_c(X,Y)$ l'espace des opérateurs linéaires compactes de X vers Y. Alors $B_c(X,Y)$ est un sous espace fermé de $B(X,Y)$.*

Preuve. On suppose que $T_n \in B_c(X,Y)$, $T \in B(X,Y)$, $\|T_n - T\| \to 0$. Nous devons montre que T est compact. Donc, nous devons montrer que $T(E)$ est précompact dans Y, où E est la boule d'unité dans X. Donc, il suffit de montrer que pour tout $\epsilon > 0$ il ya un finement beaucoup de boules U_i de rayon ϵ dans Y tel que

$$T(E) \subset \cup\, U_i.$$

On choisis n assez grand que $\|T - T_n\| \leq \frac{\epsilon}{2}$, et soit $V_1, V_2 ... V_n$ être finement beaucoup de boules de rayon $\frac{\epsilon}{2}$ qui couvre $T_n E$. Pour tout i soit U_i être la boule de rayon ϵ avec le même centre de V_i. ■

Théorème 2.1.2 *Soit X et Y des espaces de Banach et $T \in B_c(X,Y)$. Si Z un autre espace de Banach et $S \in B(Y,Z)$ donc ST est compact. Si $S \in B(Z,X)$, donc TS est compact. Si $X = Y$.*

Théorème 2.1.3 *Soit X et Y des espaces de Banach et $T \in B(X,\ Y)$. Donc T est compact si et seulement si T^* est compact.*

Preuve. Soit E la boule d'unité dans X et F la boule d'unité dans Y^*. On suppose que T est compact. Soit $\epsilon > 0$ nous devons exposer des ensembles finis de diamètre au plus ϵ qui couvrent T^*F. D'abord on choisit m ensembles de diamètre au plus $\frac{\epsilon}{3}$ qui couvrent TE, et soit Tx_i appartenir à la $i^{ème}$ ensemble. Ainsi, soit $I_1, ..., I_n$ n intervalles de longueur $\frac{\epsilon}{3}$ qui couvrent l'intervalle $[-\|T\|, \|T\|]$. Pour tout $(j_1, ..., j_m)$ d'entiers avec $1 \leq j_i \leq n$ on défini l'ensemble $\{f \in F \mid f(Tx_i) \in Ij_i, i = 1, ..., m\}$.

Il est clair que ces ensembles couvrent F, donc il ya des images sous T^* couvrent T^*F, donc il suffit de montrer que les images sont de diamètre au plus ϵ. En effet, si f et

g appartiennent à l'ensemble ci-dessus, et x est tout élément de E, prenons i tel que $\|Tx - Tx_i\| \leq \frac{\epsilon}{3}$. On sait que $\|f(Tx_i) - g(Tx_i)\| \leq \frac{\epsilon}{3}$. Donc

$$|(T^*f - T^*g)(x)| = |(f-g)(Tx)| \leq |f(Tx) - f(Tx_i)| + |g(Tx) - g(Tx_i)| + |(f-g)(Tx_i)| \leq \epsilon.$$

Ce qui montre que T compact $\Longrightarrow$ T^*est compact. Inversement, supposons que $T^* : Y^* \to X^*$ est compact. Donc T^{**} transforme la boule d'unité de X^{**} en un sous ensemble précompact dans Y^{**}. Mais la boule d'unité de X peut être considéré comme un sous ensemble de la boule d'unité de son bidual, et la restriction de T^{**} à la boule d'unité de X coïncide avec T là. Donc T transforme la boule d'unité de X à un ensemble précompact.

■

Théorème 2.1.4 *Si T est un opérateur compact d'un espace de Banach à lui même, alors $\mathcal{N}(\mathbf{1} - T)$ est de dimension finie et $\mathcal{R}(\mathbf{1} - T)$ est fermée.*

Preuve. T est un opérateur compact qui restreint à l'identité sur $\mathcal{N}(\mathbf{1}-T)$. D'où la boule d'unité fermée dans $\mathcal{N}(\mathbf{1} - T)$ est compacte, alors la dimension de $\mathcal{N}(\mathbf{1} - T)$ est finie. Maintenant, tout sous espace de dimension finie est complet (voir ci-dessous), il existe donc un sous espace fermé M de X tel que $\mathcal{N}(\mathbf{1} - T) + M = X$ et $\mathcal{N}(\mathbf{1} - T) \cap M = 0$. Soit $S = (\mathbf{1} - T)|_M$, alors S est injective et $\mathcal{R}(S) = \mathcal{R}(\mathbf{1} - T)$. Nous allons montrer que pour certains $c > 0$, $\|S_x\| \geq c\,\|x\|$ pour tout $x \in M$, ce qui implique que $\mathcal{R}(S)$ est fermée. Si l'inégalité ne tient pas pour $c > 0$, nous pouvons choisir $x_n \in M$ de norme 1 avec $Sx_n \to 0$. Après passage à une sous suite, nous pouvons organiser aussi que Tx_n converge vers certains $x_0 \in X$. Il s'ensuite que $x_n \to x_0$, alors $x_0 \in M$ et $Sx_0 = 0$. Donc $x_0 = 0$ qui est impossible (puisque $\|x_n\| = 1$) ■

Dans la preuve, nous avons utilisé la première partie du lemme suivant. Nous disons qu'un sous espace fermé N est complet dans un espace de Banach X s'il existe un autre sous espace fermé tel que $M \oplus N = X$.

Lemme 2.1.2 *Un sous espace fermé de dimension finie ou codimension fini d'un espace de Banach est complet.*

Théorème 2.1.5 *Si T un opérateur compact d'un espace de Banach à lui même, λ un nombre complexe non nul, et n un entier positif, alors $\mathcal{N}[(\lambda \mathbf{1} - T)^n]$ est de dimension fini et $\mathcal{R}[(\lambda \mathbf{1} - T)^n]$ est fermé.*

Théorème 2.1.6 *Un opérateur de Hilbert-Schmidt sur un espace de Hilbert séparable est compact.*

Preuve. Soit $\{e_i\}$ une base orthonormale. Soit T un opérateur de Hilbert-Schmidt donné (donc $\sum_i \|Te_i\|^2 < \infty$), on définit T par $T_n e_i = \begin{cases} Te_i & \text{si } i \leq n \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$

Donc

$$\|T - T_n\| \leq \|T - T_n\|_2 = \|T\|_2 = \sum_{i,j} |\langle Te_i, e_j \rangle|^2 = \sum_i \|Te_i\|^2 \to 0.$$

■

2.1.3 Théorème Spectrale pour les opérateurs compacts auto-adjoints

Définition 2.1.4 *Soit X un espace de Hilbert complexe, si $T : X \to X$ est un opérateur linéaire borné, T^* est appelé l'adjoint de T qui vérifie la relation suivant $\langle T^* x, y \rangle = \langle x, Ty \rangle$.*

Théorème spectrale pour les opérateurs compacts auto-adjoints dans un espace de Hilbert. Soit T un opérateur compact auto-adjoint dans un espace de Hilbert X. Alors il existe une base orthonormale constitué de vecteurs propres de T.

Avant de procéder à la preuve, nous prouvons un lemme.

Lemme 2.1.3 *Si T est un opérateur auto-adjoint dans un espace de Hilbert, alors*

$$\|T\| = \sup_{\|x\| \leq 1} |\langle Tx, x \rangle|$$

Preuve. Soit $\alpha = \sup\limits_{\|x\|\leq 1} |\langle Tx, x\rangle|$. Il suffit de prouver que $|\langle Tx, x\rangle| \leq \alpha \|x\| \|y\|$, pour tout x et y.

Nous pouvons supposer évidemment que x et y sont non nuls, et supposons que $\langle Tx, y\rangle \geq 0$. On a :

$$\langle T(x+y), x+y\rangle - \langle T(x-y), x-y\rangle = 4\,\mathrm{Re}\,\langle Tx, y\rangle = 4\,|\langle Tx, y\rangle| \,.$$

Alors

$$|\langle Tx, y\rangle| \leq \frac{\alpha}{4}(\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2) = \frac{\alpha}{2}(\|x\|^2 + \|y\|^2).$$

On applique maintenant ce résultat avec x remplacé par $\sqrt{\|y\| / \|x\|}x$ et y remplacé par $\sqrt{\|x\| / \|y\|}y$. ■

Preuve. Démonstration du théorème spectral pour les opérateurs compacts auto-adjoints. D'abord nous avons montré que T a un vecteur propre non nul si $T = 0$, c'est évident, donc nous supposons que $T \neq 0$. On choisi une suite $x_n \in X$ avec $\|x_n\| = 1$ de sorte que $|\langle Tx_n, x_n\rangle| \to \|T\|$ (car par Cauchy Schwartz $\langle Tx_n, x_n\rangle \leq \|T\| \|x_n\|^2$). Puisque T est auto-adjoint, $\langle Tx_n, x_n\rangle \in \mathbb{R}$, donc nous pouvons passer à une sous suite (encore dénotée x_n), pour laquelle $\langle Tx_n, x_n\rangle \to \lambda = \pm \|T\|$. Puisque T est compact, nous pouvons passer à une autre sous suite et supposons que $Tx_n \to y \in X$. On note que $\|y\| \geq |\lambda| > 0$. En utilisant le fait que T est auto-adjoint et λ est réel, nous obtenons

$$\begin{aligned}\|Tx_n - \lambda x_n\|^2 &= \|Tx_n\|^2 - 2\lambda \langle Tx_n, x_n\rangle + \lambda^2 \|x_n\|^2 \\ &\leq 2\|T\|^2 - 2\lambda \langle Tx_n, x_n\rangle \to 2\|T\|^2 - 2\lambda^2 = 0.\end{aligned}$$

Puisque $Tx_n \to y$ on déduit que $\lambda x_n \to y$ aussi, ou $x_n \to y/\lambda \neq 0$. On applique T nous avons $Ty/\lambda = y$, alors $Ty = \lambda y$, donc λ est une valeur propre non nul. Pour compléter la preuve, on considère l'ensemble de tous les sous ensembles orthonormales de X consistant en vecteurs propres de T. Par le lemme de Zorn, il a un élément maximal S. Soit W la fermeture de l'étendue de S. Il est clair $TW \subset W$, et il suit directement que $TW^{\perp} \subset W^{\perp}$ (puisque T est auto-adjoint). Par conséquent T se limite à un opérateur auto-adjoint sur

$W^{\perp}$ et donc, sauf si $W^{\perp} = 0$, T a un vecteur propre en $W^{\perp}$. Mais ça contredit clairement la maximalité de S (puisque nous pouvons joindre cet élément à S pour obtenir une plus grande ensemble orthonormale de vecteurs propres). Donc $W^{\perp} = 0$, et S est une base orthonormale. ■

Théorème 2.1.7 *Si T est un opérateur compact auto-adjoint sur un espace de Hilbert, alors l'ensemble des valeurs propres non nulles de T sont un ensemble fini ou une suite approchant 0 et les espaces propres correspondants sont tous de dimension fini.*

Remarque 2.1.1 0 *peut ou ne peut pas être une valeur propre, et son espace peut ou ne peut pas être fini.*

Preuve. Soit e_i une base orthonormale de vecteurs propres, avec $Te_i = \lambda_i e_i$. Ici i se range sur un ensemble d'indice I. Il suffit de montrer que $S = \{i \in I | \ |\lambda_i| \geq \epsilon\}$ est fini pour tout $\epsilon > 0$. Donc si $i, j \in I$

$$\|Te_i - Te_j\|^2 = \|\lambda_i e_j - \lambda_j e_j\|^2 = |\lambda_i|^2 + |\lambda_j|^2 ,$$

donc si $i, j \in S$, alors $\|Te_i - Te_j\|^2 \geq 2\epsilon^2$. Si S étaient infinies, nous pourrions alors choisir une suite d'éléments unitaires en X d'ont l'image sous T n'a pas de sous suite convergente, qui viole la compacité de T. ■

Théorème 2.1.8 *Si T et S des opérateurs compacts auto-adjoints dans un espace de Hilbert H et $TS = ST$, donc il existe une base orthonormale de X dont les éléments sont vecteurs propres pour les deux S et T.*

Preuve. Pour une valeur propre λ de T, soit X_λ indique l'espace propre correspondant de T. Si $x \in X_\lambda$, donc $TSx = STx = \lambda Sx$, alors $Sx \in X_\lambda$. Donc S restreint à un opérateur auto-adjoint sur X_λ, et donc il ya une base orthonormale de S-vecteurs propres pour X_λ. Ceux-ci ainsi sont T-vecteurs propres. La prise de l'union sur toutes les valeurs propres λ de T complète la construction. ■

Soit T_1 et T_2 deux opérateurs auto-adjoint et on pose $T = T_1 + iT_2$. Donc $T_1 = (T + T^*)/2$ et $T_2 = (T - T^*)/(2i)$. Inversement, si T est un élément de $B(X)$, alors on peut définir deux opérateurs auto-adjoints à partir de ces formules et on a $T = T_1 + iT_2$. Maintenant on suppose que T est compact et aussi normal, c.-à-d que $TT^* = T^*T$. Donc T_1 et T_2 sont compacts et commuent, et donc nous avons une base orthonormale dont les éléments sont vecteurs propres pour T_1 et T_2, et donc pour T. Puisque les parties réelles et imaginaires des valeurs propres sont les valeurs propres de T_1 et T_2, nous voyons que les valeurs propres forment une suite tends vers 0 et tous ont des espaces propres de dimension finie.
Nous avons montré ainsi qu'un opérateur normal compact admet une base orthonormale de vecteurs propres. Inversement, si $\{e_i\}$ est une base orthonormale des vecteurs propres de T, donc $\langle T^* e_i, e_j \rangle = 0$, si $i \neq j$, qui implique que tout e_i est aussi un vecteur propre de T^*. Donc $T^*Te_i = TT^*e_i$ pour tout i, et il suit facilement que T est normal.
Théorème spectrale pour les opérateurs compacts normaux. Soit T un opérateur compact sur un espace de Hilbert X. Alors il existe une base orthonormale pour X consistant en vecteurs propres de T si et seulement si T est normal. Dans ce cas, l'ensemble des valeurs propres non nulles forment un ensemble fini ou une suite tendant à zéro et les espaces propres correspondant aux valeurs propres non nulles sont de dimension finie. Les valeurs propres sont toutes réelles si et seulement si l'opérateur est auto-adjoint.

2.1.4 Le spectre d'un opérateur compact général

Dans cette sous-section, nous voyons la structure du spectre d'un opérateur compact (pas nécessairement auto-adjoint ou normal) sur un espace de Banach complexe X.
Pour tout opérateur T sur un espace de Banach complexe, l'ensemble résolvant de T, $\rho(T)$ consiste de $\lambda \in \mathbb{C}$ tel que $T - \lambda\mathbf{1}$ est inversible, et le spectre $\sigma(T)$ est le complément. Si $\lambda \in \sigma(T)$, donc $T - \lambda\mathbf{1}$ ne peut pas être inversible de plusieurs façons.
(1) Il peut que $\mathcal{N}(T - \lambda\mathbf{1}) \neq 0$, c.-à-d, que λ est une valeur propre de T. Dans ce cas, on dit que λ appartient au spectre ponctuel T, noté $\sigma_p(T)$.

(2) Si $T - \lambda\mathbf{1}$ est injective, il peut que sa image soit dense mais non fermé dans X. Dans ce cas, on dit que λ appartient au spectre continu de T, $\sigma_c(T)$.
(3) Il peut être que $T - \lambda\mathbf{1}$ est injective mais que sa image n'est pas dense dans X. C'est le spectre résiduel, $\sigma_r(T)$. Il est clair que nous avons une décomposition de $\mathbb{C}$ dans les ensembles disjoints $\rho(T), \sigma_p(T), \sigma_c(T)$, et $\sigma_r(T)$. Comme un exemple du spectre continu on considère l'opérateur $Te_n = \lambda_n e_n$ où les e_n forment une base orthonormale d'un espace de Hilbert et les λ_n forment une suite positif tend vers 0. Donc $0 \in \sigma_c(T)$. Si $Te_n = \lambda_n e_{n+1}$, $0 \in \sigma_r(T)$.
Maintenant si T est compact et X est de dimension infini, alors $0 \in \sigma(T)$ (puisque si T est inversible, l'image de la boule d'unité contient un ensemble ouvert, et ainsi ne peut pas être précompact). À partir des exemples donnés, nous voyons que 0 peut appartenir au spectre ponctuel, le spectre continu, ou le spectre résiduel. Cependant, nous allons montrer que tous les autres éléments du spectre sont des valeurs propres, c'est-à- que $\sigma(T) = \sigma_p(T) \cup \{0\}$, et que comme dans le cas normal, le spectre de ponctuel se compose d'un ensemble fini ou d'une suite approchant zéro.
La structure du spectre d'un opérateur compact sera déduite de deux lemmes. Le première est purement algébrique. Pour l'énoncer, nous devons de considérer un opérateur linéaire T d'un espace vectoriel X à lui-même, et de considérer les chaînes des sous espaces

$$0 = \mathcal{N}(\mathbf{1}) \subset \mathcal{N}(T) \subset \mathcal{N}(T^2) \subset \mathcal{N}(T^3) \subset ....$$

Soit cette chaîne est strictement croissant pour toujours, ou il ya au moins $n \geq 0$ tel que $\mathcal{N}(T^n) = \mathcal{N}(T^{n+1})$, auquel cas les premiers n espaces sont distincts et tous les autres sont égaux. Dans ce dernier cas, on dit que la chaîne du noyau pour T se stabilise à n. En particulier, la chaîne du noyau se stabilise à 0 si et seulement si T est injective. De même, nous pouvons considérer la chaîne

$$X = \mathcal{R}(\mathbf{1}) \supset \mathcal{R}(T) \supset \mathcal{R}(T^2) \supset \mathcal{R}(T^3) \supset ...,$$

et définir que signifie ça pour la chaîne de l'image pour se stabiliser à $n > 0$. (Alors l'image se stabilise à 0 si et seulement si T est surjective).

Lemme 2.1.4 *Soit T un opérateur linéaire d'un espace vectoriel X à lui-même, si la chaîne du noyau stabilise à m et la chaîne de l'image se stabilise à n, donc $m = n$ et X décompose comme une somme directe de $\mathcal{N}(T^n)$ et $\mathcal{R}(T^n)$.*

Preuve. On suppose que m inférieur à n, il existe x avec $T^{n-1}x \notin \mathcal{R}(T^n)$, et donc il existe y tel que $T^{n+1}y = T^n x$. Donc $x - Ty \in \mathcal{N}(T^n)$, et puisque la chaïne de noyau se stabilise à $m < n$, $\mathcal{N}(T^{n-1}) = \mathcal{N}(T^n)$. Donc $T^{n-1}x = T^n y$, un contradiction. Donc $m \geq n$. Un argument similaire établit l'inverse inégalité. Maintenant, si $T^n x \in \mathcal{N}(T^n)$, alors $T^{2n}x = 0$, d'où $T^n x = 0$. Donc $\mathcal{N}(T^n) \cap \mathcal{R}(T^n) = 0$. Soit $T^{2n}y = T^n x$, alors x se décompose comme $T^n y \in \mathcal{R}(T^n)$ et $x - T^n y \in \mathcal{N}(T^n)$. Donc X décompose comme une somme directe de $\mathcal{N}(T^n)$ et $\mathcal{R}(T^n)$. ■

Lemme 2.1.5 *Soit $T : X \to X$ un opérateur compact sur un espace de Banach et $\lambda_1, \lambda_2, ...$ une suite de nombres complexes avec inf $|\lambda_n| > 0$. Alors ce qui suit est impossible : il existe une chaîne strictement croissante de sous espaces fermés $S_1 \subset S_2 \subset ...$ avec $(\lambda_n \mathbf{1} - T)Sn \subset S_{n-1}$ pour tout n.*

Preuve. Supposons qu'une telle chaîne existe. On note que tout $TS_n \subset S_n$ pour tout n. Puisque S_n/S_{n-1} contient un élément de norme 1, nous pouvons choisir $y_n \in S_n$ avec $\|y_n\| \leq 2$, $dist(y_n, S_{n-1}) = 1$. Si $m < n$, donc

$$z := \frac{Ty_m - (\lambda_n \mathbf{1} - T)y_n}{\lambda_n} \in S_{n-1},$$

et

$$\|Ty_m - Ty_n\| = |\lambda_n| \, \|y_n - z_n\| \geq |\lambda_n| \, .$$

Cela implique que la suite (Ty_n) n'a pas une sous suite de Cauchy, ce qui contredit la compacité de T. ■

Nous sommes maintenant prêts à prouver le résultat cité au début de la sous-section.

Théorème 2.1.9 *Soit T un opérateur compact sur un espace de Banach X. Donc, tout élément non nul du spectre de T est une valeur propre. De plus, $\sigma(T)$ est soit fini ou une suite approchant zéro.*

Preuve. On considère les sous espaces des chaînes $\mathcal{N}[(\lambda\mathbf{1}-T)^n]$ et $\mathcal{R}[(\lambda\mathbf{1}-T)^n]$ (ce sont des sous espaces fermés par un résultat précédent), alors, le lemme précédent implique que la chaîne du noyau se stabilise, par exemple à n. Maintenant $\mathcal{R}[(\lambda\mathbf{1}-T)^n] = {}^a\mathcal{N}[(\lambda\mathbf{1}-T^*)^n]$ (puisque l'image est fermé), et d'après cette dernière stabilisation, la chaîne de l'image se stabilise également. Nous avons donc $X = \mathcal{N}[(\lambda 1 - T)^n] \oplus \mathcal{R}[(\lambda 1 - T)^n]$. Donc

$$\mathcal{R}(\lambda\mathbf{1}-T) \neq X \Longrightarrow \mathcal{R}(\lambda\mathbf{1}-T)^n \neq X \Longrightarrow \mathcal{N}(\lambda\mathbf{1}-T)^n \neq 0 \Longrightarrow \mathcal{N}(\lambda\mathbf{1}-T) \neq 0.$$

En d'autres termes $\lambda \in \sigma(T) \Longrightarrow \lambda \in \sigma_p(T)$. Enfin, nous prouvons la dernière assertion. S'il était faux, on peut trouver une suite de valeurs propres λ_n avec $\inf |\lambda_n| > 0$. Soient $x_1, x_2, ...$être vecteurs propres correspondant non nuls et l'ensemble $S_n = \operatorname{span}[x_1, ..., x_n]$ ceux-ci forment une chaîne de sous espaces strictement croissant (rappelons que les vecteurs propres correspondantes à des valeurs propres distinctes sont linéairement indépendantes) et $(\lambda_n\mathbf{1} - T)S_n \subset S_{n-1}$, qui contredit le lemme. ■

Théorème 2.1.10 *Soit T un opérateur compact sur un espace de Banach X et λ un nombre complexe non nul. Alors*

(1) $\lambda 1 - T$ *est un isomorphisme, ou*

(2) *il est ni injective ni surjective.*

Preuve. Puisque la chaîne du noyau et la chaîne d'image pour $S = \lambda\mathbf{1} - T$ se stabilisent, soi ils stabilisent à 0, auquel cas S est injective et surjective, ou ne le fait pas, dans le cas où ne stabilisent. ■

Théorème 2.1.11 *Soit T un opérateur compact sur un espace de Banach X et λ un nombre complexe non nul. Donc*

$$dim\, \mathcal{N}(\lambda \mathbf{1} - T) = dim\, \mathcal{N}(\lambda \mathbf{1} - T^*) = codim\, \mathcal{R}(\lambda \mathbf{1} - T) = codim\, \mathcal{R}(\lambda \mathbf{1} - T^*).$$

Preuve. Soit $S = \lambda 1 - T$. Puisque $\mathcal{R}(S)$ est fermé

$$[X/\mathcal{R}(S)]^* \cong \mathcal{R}(S)^a = \mathcal{N}(S^*).$$

Donc $[X/\mathcal{R}(S)]^*$ est de dimension fini, alors $X/\mathcal{R}(S)$ est de dimension fini, et ces deux espaces sont de la même dimension. Donc codim $\mathcal{R}(S) =$ dim $\mathcal{N}(S^*)$. Pour un opérateur général S nous avons seulement $\overline{\mathcal{R}(S^*)} \subset \mathcal{N}(S)^a$, mais comme nous le montrons maintenant, quand $\mathcal{R}(S)$ est fermé, $\mathcal{R}(S^*) = \mathcal{N}(S)^a$. En effet, S induit une isomorphisme de $X/\mathcal{N}(S)$ sur $\mathcal{R}(S)$, et pour tout $f \in \mathcal{N}(S)^a$, f induit une application $X/\mathcal{N}(S)$ sur $\mathbb{R}$. Il s'ensuit que $f = g$ pour certains opérateurs linéaires bornés g sur $\mathcal{R}(S)$, qui peut être prolonger à un élément de X^* par Hahn-Banach. Mais $f = gS$ signifie simplement que $f = S^*g$, montrant que $\mathcal{N}(S)^a \subset \mathcal{R}(S^*)$ (et donc l'égalité se tient) comme réclamé.
Donc

$$\mathcal{N}(S)^* \cong X^*/\mathcal{N}(S)^a = X^*/\mathcal{R}(S^*),$$

alors

$$\text{codim } \mathcal{R}(S^*) = \text{dim } \mathcal{N}(S)^* = \text{dim } \mathcal{N}(S).$$

Nous complétons le théorème en montrant que dim $\mathcal{N}(S) \leq$ codim $\mathcal{R}(S)$ et dim $\mathcal{N}(S^*) \leq$ codim $\mathcal{R}(S^*)$. En effet, puisque $\mathcal{R}(S)$ est fermée avec une codimension finie, il est complété par un espace de dimension finie M (avec dim $M =$ codim $\mathcal{R}(S)$). Puisque $\mathcal{N}(S)$ est de dimension finie, il est complété par un espace N. Soit P la projection de X sur $\mathcal{N}(S)$, est une application bornée qui a l'identité sur $\mathcal{N}(S)$ et à zéro sur N. Maintenant si codim $\mathcal{R}(S)$ $<$ dim $\mathcal{N}(S)$, donc il ya une application linéaire de $\mathcal{N}(S)$ sur M qui n'est pas injective.

Alors $T - fP$ est un opérateur compact et $\lambda\mathbf{1} - T + fP$ est facilement visible pour être surjective. Par l'alternative.de Fredholm. Il est injective aussi bien. Ce qui implique que f est injective, une contradiction. Nous avons ainsi montré que dim $\mathcal{N}(S) \leq$ codim $\mathcal{R}(S)$. Puisque T^*est compact, le même argument montre que dim $\mathcal{N}(S^*) \leq$ codim $\mathcal{R}(S^*)$. Ceci complète la preuve. ∎

Chapitre 3

La Théorie Spectrale

3.1 Introduction à la théorie spectrale générale

Dans cette section nous parcourons la surface de la théorie spectrale pour un opérateur général (pas nécessairement compact) sur un espace de Banach.

Le spectre et résolvant dans une algèbre de Banach

Soit X une algèbre de Banach avec un élément d'identité dénoté $\mathbf{1}$. Nous supposons que la norme dans X a été normalisée de sorte que $\|\mathbf{1}\| = 1$. Les deux exemples principaux à considérer sont :

(1) $B(X)$, où X est un espace de Banach,

(2) $C(G)$ doté de la norme sup, ou G est un espace topologique compact, la multiplication est juste multiplication point par point de fonctions, et $\mathbf{1}$ est la fonction constante.

Dans cette configuration, l'ensemble résolvant et le spectre peuvent être défini comme : $\rho(x) = \{\lambda \in \mathbb{C} \mid x - \lambda\mathbf{1} \text{ est inversible}\}, \sigma(x) = \mathbb{C} \setminus \rho(x)$. Le rayon spectral est défini d'être $r(x) = sup|\sigma(x)|$. Pour $\lambda \in \rho(x)$, le résolvant est défini comme $R_x(\lambda) = (x - \lambda\mathbf{1})^{-1}$.

Lemme 3.1.1 *Si $x, y \in X$ avec x inversible et $\|x^{-1}y\| < 1$, alors $x - y$ est inversible,*

$$(x-y)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} (x^{-1}y)^n x^{-1},$$

et

$$\left\|(x-y)^{-1}\right\| \leq \left\|x^{-1}\right\| / (1 - \left\|x^{-1}y\right\|).$$

Preuve.

$$\left\|\sum (x^{-1}y)^n x^{-1}\right\| \leq \left\|x^{-1}\right\| \sum \left\|x^{-1}y\right\|^n \leq \left\|x^{-1}\right\| / (1 - \left\|x^{-1}y\right\|).$$

Alors, la somme converge absolument et la norme bornée détient. Ainsi

$$\sum_{n=0}^{\infty} (x^{-1}y)^n x^{-1}(x-y) = \sum_{n=0}^{\infty} (x^{-1}y)^n - \sum_{n=0}^{\infty} (x^{-1}y)^{n+1} = 1,$$

et de même pour le produit dans l'ordre inverse. ■

Comme un corollaire, nous voyons que si $|\lambda| > \|x\|$, alors $\lambda \mathbf{1} - x$ est inversible, c.-à-d., $\lambda \in \rho(x)$. En d'autres termes :

Proposition 3.1.1 $r(x) \leq \|x\|$. *Nous voyons également du lemme que $lim_{\lambda \to \infty} \|R_x(\lambda)\| = 0$. Un autre corollaire est que si $\lambda \in \rho(x)$ et $|\mu| < \|R_x(\lambda)\|^{-1}$, alors $\lambda - \mu \in \rho(x)$ et*

$$R_x(\lambda - \mu) = \sum_{n=0}^{\infty} R_x(\lambda)^{n+1} \mu^n.$$

Théorème 3.1.1 *Le résolvant $\rho(x)$ est toujours ouvert et contient un voisinage de ∞ dans $\mathbb{C}$ et le spectre est toujours non-vide et compact.*

Preuve. *La considération ci-dessus prouvent que le résolvant est ouvert, et ainsi le spectre est fermé. Il est aussi borné, alors il est compact. Pour voir que le spectre est non vide,* *soit $f \in X^*$ être arbitraire et on défini :*

$$\phi(\lambda) = f\left[R_x(\lambda)\right].$$

Alors ϕ trace $\rho(x)$ sur $\mathbb{C}$, et il est facile de voir qu'il est holomorphe (puisque nous avons l'expansion de série entière

$$\phi(\lambda - \mu) = f\left[\sum_{n=0}^{\infty} R_x(\lambda)^{n+1}\mu^n\right] = \sum_{n=0}^{\infty} f\left[R_x(\lambda)^{n+1}\right]\mu^n,$$

si μ est suffisamment petit). Si $\sigma(x) = \emptyset$, alors ϕ est entière, il est également borné (puisqu'il tend vers 0 à l'infini). Donc pour tout $f \in X^*$, $f[(\lambda\mathbf{1} - x)^{-1}] = 0$. Ce qui implique que $(\lambda 1 - x)^{-1} = 0$, qui est clairement impossible. ■

Corollaire (Gelfand-Mazur). Si X est une algèbre de division complexe de Banach, donc X est isométriquement isomorphe à $\mathbb{C}$.

Preuve. Pour tout $0 \neq x \in X$, soit $\lambda \in \sigma(x)$. Alors $x - \lambda\mathbf{1}$ est non inversible, et puisque X est l'algèbre de division, ce signifie que $x = \lambda\mathbf{1}$. Donc $X = \mathbb{C}\mathbf{1}$.

Maintenant nous tournons vers un peu de "calcul fonctionnel". Soit $x \in X$ et soit f une fonction complexe d'une variable complexe qui est holomorphe sur le disque fermé du rayon $\|x\|$ environ l'origine. Alors nous ont deux concepts :

(1) branchant X à l'expansion de série entière définie un élément $f(x) \in X$,

(2) la fonction complexe f trace le spectre de X dans le spectre de $f(x)$.

■

Pour prouver ces concepts, on note que par l'hypothèse, le rayon de convergence de la série entière pour f sur l'origine dépasse $\|x\|$, alors on peut développer $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ où $\sum |a_n| \|x\|^n < \infty$. Donc les séries $\sum a_n z^n$ est absolument convergente dans l'espace de Banach X, nous appelons sa limite $f(x)$.

Maintenant on suppose que $\lambda \in \sigma(x)$. Alors,

$$f(\lambda)\mathbf{1} - f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n(\lambda^n\mathbf{1}-x^n) = (\lambda\mathbf{1}-x)\sum_{n=1}^{\infty} a_n p_n = \sum_{n=1}^{\infty} a_n p_n(\lambda\mathbf{1}-x),$$

où

$$p_n = \sum_{k=0}^{n-1} \lambda^k x^{n-k-1}.$$

On note que $\|p_n\| \leq n\,\|x\|^{n-1}$, alors $\sum_{n=1}^{\infty} a_n p_n$ converge vers quelque $y \in X$. Donc

$$f(\lambda)\mathbf{1}-f(x) = (\lambda\mathbf{1}-x)y = y(\lambda\mathbf{1}-x).$$

Maintenant $f(\lambda)\mathbf{1} - f(x)$ ne peut pas être inversible aussi, parce que ces formules impliqueraient que $\lambda\mathbf{1}-x$ soit inversible aussi, mais $\lambda \in \sigma(x)$. Donc nous avons vérifiée que $f(\lambda) \in \sigma(f(x))$ pour tout $\lambda \in \sigma(x)$.

Théorème (formule de rayon spectrale). $r(x) = \lim\limits_{n\to\infty} \|x^n\|^{\frac{1}{n}} = \inf\limits_{n} \|x^n\|^{\frac{1}{n}}$.

Preuve. Si $\lambda \in \sigma(x)$, alors $\lambda^n \in \sigma(x^n)$, donc $|\lambda^n| \leq \|x^n\|$. Ce prouve que $r(x) \leq \inf\limits_{n} \|x^n\|^{\frac{1}{n}}$. Maintenant on prend $f \in X^*$, et considèrons :$\phi(\lambda) = f\left[(\lambda\mathbf{1}-x)^{-1}\right] = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^{-n-1} f(x^n)$.Alors ϕ est clairement holomorphe pour $\lambda > \|x\|$, mais on sait qu'il se prolonge holomorphiquement à $\lambda > r(x)$ et tend vers 0 quand λ tend à l'infini. Soit $\psi(\lambda) = \phi(1/\lambda)$. Donc ψ se prolonge analytiquement à zéro avec la valeur zéro et définit une fonction analytique sur la boule ouverte de rayon $1/r(x)$ environ zéro, donc

$$\psi(\lambda)/\lambda = \sum_{n=0}^{\infty} f(\lambda^n x^n).$$

Ceci montre que pour tout $|\lambda| < 1/r(x)$ et tout $f \in X^*$, $f(\lambda^n x^n)$ est borné. Donc, l'ensemble d'éléments $\lambda^n x^n$ sont borné dans X par K. Donc $\|x^n\|^{\frac{1}{n}} \leq K^{\frac{1}{n}}/\,|\lambda| \to 1/\,|\lambda|$, qui est vrai pout tout $|\lambda| < 1/r(x)$, donc lim sup $\|x^n\|^{\frac{1}{n}} \leq r(x)$. ■

Corollaire 3.1.1 *Si H est un espace de Hilbert et $T \in B(H)$ un opérateur normal, alors*

$r(T) = \|T\|$.

Preuve. On a

$$\|T\|^2 = \sup_{\|x\| \leq 1} \langle Tx, Tx \rangle = \sup_{\|x\| \leq 1} \langle T^*Tx, x \rangle = \|T^*T\|,$$

puisque T^*T est auto-adjoint. En utilisant la normalité de T nous obtenons également

$$\|T^*T\|^2 = \sup_{\|x\| \leq 1} \langle T^*Tx, T^*Tx \rangle = \sup_{\|x\| \leq 1} \left\langle T^*T^2x, Tx \right\rangle = \sup_{\|x\| \leq 1} \left\langle T^2x, T^2x \right\rangle = \left\|T^2\right\|^2.$$

Donc $\|T\|^4 = \|T^2\|^2 \Longrightarrow \|T\|^2 = \|T^2\|$. Le remplacement de T avec T^2 donne, $\|T\|^4 = \|T^4\|$, et pareillement pour toutes les puissances de 2. Le résultat suit donc de la formule de rayon spectrale. $(r(x) = \lim\limits_{n \to \infty} \|x^n\|^{\frac{1}{n}} = \inf\limits_{n} \|x^n\|^{\frac{1}{n}})$. ■

Nous pouvons maintenant prouver que p trace $\sigma(x)$ sur $\sigma(p(x))$ si p est un polynôme.

Théorème 3.1.2 *Soit X une algèbre complexe de Banach avec l'identité, $x \in X$, et soit p un polynôme en une variable avec des coefficients complexes. Alors $p(\sigma(x)) = \sigma(p(x))$.*

Preuve. Nous avons déjà montré que $p(\sigma(x)) \subset \sigma(p(x))$. Maintenant on suppose que $\lambda \in \sigma(p(x))$. Par le théorème fondamental de l'algèbre on peut factoriser $p - \lambda$, alors

$$p(x) - \lambda \mathbf{1} = a \prod_{i=1}^{n} (x - \lambda_i 1),$$

pour certain $a \in \mathbb{C}$ non nul et quelques racines $\lambda_i \in \mathbb{C}$. Puisque $p(x) - \lambda \mathbf{1}$ est non inversible, il suit que $x - \lambda_i \mathbf{1}$ est non inversible pour au moins un i. En d'autres termes, $\lambda_i \in \sigma(x)$, alors $\lambda = p(\lambda_i) \in p(\sigma(x))$. ■

3.1.1 Théorème spectral pour les opérateurs auto-adjoint bornés dans un espace de Hilbert

Nous restreignons maintenant aux l'opérateurs auto-adjoints dans un espace de Hilbert et fermons avec une version du théorème spectral pour cette classe d'opérateur. D'abord on note que les opérateurs auto-adjoints ont des spectres réels (pas seulement des valeurs propres réelles).

Proposition 3.1.2 *Si H est un espace de Hilbert et $T \in B(H)$ est auto-adjoint, alors $\sigma(T) \subset \mathbb{R}$.*

Preuve. On a

$$|\langle(\lambda\mathbf{1} - T)x, x\rangle| \geq |\mathrm{Im}\,\langle(\lambda\mathbf{1} - T)x, x\rangle| = |\mathrm{Im}\ \lambda|\,\|x\|^2,$$

donc si Im $\lambda \neq 0$, $\lambda 1 - T$ est injective avec une image fermée. Le même raisonnement montre que $(\lambda\mathbf{1} - T)^* = \overline{\lambda}\mathbf{1} - T$ est injective, alors $\mathcal{R}(\lambda\mathbf{1} - T)$ est dense (On a vu que T^* est injective si et seulement si T a une image dense). Donc $\lambda \in \rho(T)$. ■

Théorème spectral pour les opérateurs auto-adjoint dans un espace de Hilbert. Si H est un espace de Hilbert complexe et $T \in B(H)$ est auto-adjoint, alors il existe un espace de mesure Ω avec la mesure μ, une fonction mesurable bornée $\phi : \Omega \to \mathbb{R}$, et un isomorphisme isométrique $U : L^2 \to H$ tel que

$$U^{-1}TU = M_\phi$$

où $M_\phi : L^2 \to L^2$ est un opération de multiplication par ϕ. (Ici L^2 signifie $L^2(\Omega, \mu, \mathbb{C})$, l'espace des fonctions à valeurs complexes sur Ω qui sont carrés intégrables par rapport la mesure μ).

Conclusion

Dans ce mémoire, on a étudié la théorie spectrale. Cette étude a été consacrée essentiellement sur l'étude du spectre d'un opérateur compact auto-adjoint ou normal, aussi pour un opérateur compact général dans un espace de Banach, nous sommes parcourus la surface de la théorie spectrale pour un opérateur général (pas nécessairement compact) sur un espace de Banach, avant une version du théorème spectral pour un opérateur auto-adjoint borné dans un espace de Hilbert.

Bibliographie

[1] Ahiezer, N.I and Glazman, I.M. (**1961**) .Theory of Linear Operators in Hilbert Space. Ungur. New york.

[2] Aubrun, G. Théorie des opérateurs. M1 Mathématiques. Université de la Réunion.

[3] Banach, S. (**1955**) . Theory des opérations lineaires Chelsea Publ. Co. New York.

[4] Brown, A. (**1974**). A version of multiplicity theory. Topics in Operator Theory. Math.Surveys A.M.S., Vol. $13, 129 - 160$.

[5] Conway, J.B. (**1978**). Functions of One Complex Variable. Springer-Verlag. New York.

[6] Conway, J.B. (**1990**). A Course in Functional Analysis. 2nd Edition. Springer Verlag.

[7] Dunford, N and Schwartz, J.(**1963**) . Linear Operators. I. Interscience. New york.

[8] Dunford, N and Schwartz, J.(**1963**) . Linear Operators. II. Interscience. New york.

[9] Helson, H. (**1986**) . The Spectral Theorem. Lecture Notes in Mathematics, vol.1227. Heidelberg. Springer Verlag.

[10] Hille, E and Philips, R.S. (**1957**) . Functional Analysis and Semi-Groups. Amer. Math. Soc. Colloq. publ 31. New York.

[11] Kadison, R.V and Ringrose, J.R. (**1983**, **1986**) . Fundamentals of the Theory of Operator Algebras, $I - II$. Academic Press. New York.

[12] Lebesgue, H. (**1973**) . Oeuvres Scientifiques, $I - V$. L'enseignement Mathématique. Genéve.

[13] Lévy. P.(**1922**) . Lecons d'analyse fonctionelle. Gauthier-Villars. Paris.

[14] Pedersen, G. (**1989**) . Analysis Now. Springer Verlag.

[15] Riesz, F and Sz-Nagy, B.(**1972**) . Leçons d'analyse fonctionelle. 6th edition.Gauthier-Villars. Paris.

[16] Rudin, W. (**1966**) . Functional Analysis. McGraw-Hill. New York.

[17] Rudin, W. (**1991**). Essential Results of Functional Analysis. University of Chicago press.

[18] Takesaki, M. (**1979**) . Theory of Operator Algebras,I. Springer-Verlag. Heidelberg.

[19] Yosida, K. (**1968**) . Functional Analysis. Springer Verlag. New York.

[20] Zimmer, R. (**1990**). Statistique Mathématique. Ellipses Édition Marketing.S.A.

Annexe : Notations et Abréviations

Les différentes Notations et Abréviations utilisées tout au long de ce mémoire sont expliquées ci-dessous :

$P_K x$	projection de x sur K.
$B(X,Y)$	opérateurs linéaires bornés entre les espaces linéaires normé X.et Y.
X^*	opérateurs linéaires bornés entre un espace linéaire normé X et $\mathbb{R}$ pour les espaces vectoriels réels ou $\mathbb{C}$ pour les espaces vectoriels complexes.
$\Vert . \Vert$	la norme.
$(.,\ .)$	produit scalaire.
T	opérateur linéaire.
T^*	opérateur adjoint de l'opérateur T.
S^a	l'annihilateur de S tel que S est un sous ensemble d'un espace de Banach X.
${}^aV$	l'annihilateur de V tel que V est un sous ensemble de X^*.
$\overline{B}_X$	la boule unitée fermé dans X.
$B_c(X,Y)$	l'espace des opérateurs linéaires compactes de X vers Y.
$B(X)$	l'espace des opérateurs linéaires borné sur X.
$\sigma(T)$	le spectre de T.
$\sigma_p(T)$	le spectre ponctuel de T.
$\sigma_c(T)$	le spectre continu de T.
$\sigma_r(T)$	le spectre résiduel de T.
$r(x)$	le rayon spectrale de T.

ملخــــــص

نقدم في هذه المذكرة لمحة حول النظرية الطيفية، حيث تلعب هذه النظرية دورًا مهمًا للغاية في التحليل الوظيفي وفي دراسة طيف المشغل المدمج ذاتيًا أو العادي، أو المشغل المدمج العام في فضاء بناخ .

في هذا العمل نغطي سطح النظرية الطيفية لمشغل عام (ليس بالضرورة سميك) في فضاء باناخ، قبل إصدار نظرية طيفية لمشغل نائب ذاتي محدود في فضاء هيلبارت.

Résumé

Nous présentons dans ce mémoire un aperçu sur la théorie spectrale, cette théorie joue un rôle très important en analyse fonctionnel et dans l'étude du spectre d'un opérateur compact auto-adjoint ou normal dans un espace de Hilbert, ou pour un opérateur compact général dans un espace de Banach.

Dans ce travail, nous sommes parcourus la surface de la théorie spectrale pour un opérateur général (pas nécessairement compact) sur un espace de Banach, avant une version du théorème spectral pour un opérateur auto-adjoint borné dans un espace de Hilbert.

Abstract

We present in this memory a preview about the spectral theory, this theory plays a very important role in functional analysis and in the study of the spectrum of a compact operator self-adjoint or normal, or for a general compact operator in a Banach space.

In this work we skim the surface of the spectral theory for a general operator on a Banach space, before a version of the spectral theorem for a bounded self-adjoint operator in a Hilbert space.