République Algérienne Démocratique et Populaire

Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

UNIVERSITÉ MOHAMED KHIDER, BISKRA

FACULTÉ des SCIENCES EXACTES et des SCIENCES de la NATURE et de la VIE

DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES

Mémoire présenté en vue de l'obtention du Diplôme **:**

MASTER en Mathématiques

Option : **ANALYSE**

Par

MAAZ NOUR EL-HOUDA

Titre :

Théorème du point fixe de Krasnoselskii

Membres du Comité d'Examen :

Dr.	DAKHIA GHANIA	UMKB	Président
Dr.	BERBICHE MOHAMED	UMKB	Encadreur
Dr.	HAMDI SOUMIA	UMKB	Examinateur

Juin 2018

Dédicace

Je dédie ce modeste travail :

A mon père **AHMAD**, qui trouvera ici le résultat de longues années de sacrifices, merci pour les valeurs nobles, l'éducation et le soutient permanent venu de lui.

A ma mère **DJAMILA**, qui a œuvré pour ma réussite, de par son amour, son soutien, et ses

précieux conseils.

A mes frères **YOUCEF** et **BACHIR**, et ma soeur **NABILA** qui n'ont cessé d'être pour moi des exemples de persévérance,Sans oublier **ZIANE** qui considérait mon grand frère et les Petits émeutiers **LOULOU** et **MOUADE**.

A mes grand mères **Aicha** et **Chikha**.

Aux âmes des grands-parents rachetés **BACHIR** ET **MAAMER**, et toute la famille **MAAZ**.

Aux les Cousins **M**OHAMED et **K**HADIDJA et Sa belle petite fille **R**IME,Pour leur soutien et leurs conseils

A mon encadreur **Dr. BERBICHE Mohamed** qui m'a guidé durant toute ma recherche.

A mes chères amies : **Hayet** et **Nardjes**.

Pour leur sincère amitié et confiance,

A toutes mes amies que j'aime tant : **M**ANEL.C, **D**ALILA.T, **H**ADJER.B , **F**ATIHA.T, **L**INDA .A , **F**OUZIA.M , **A**MINA.M , **H**ADDA .B,**N**OUR.B,**I**BTISSEM.B,**A**SMA.N.,**A**SMA.Y,**S**ABRINE.S,**M**ERIEM.B,**A**NOUAARE.S, **R**OMAISSA.K,**A**SMA.G,**K**HAOULA.,**F**ATTOME.M , **N**ACIRA.K

A mes collègues de département Mathématique d'université **BISKRA**, qui m'ont apporté leur support moral et intellectuel tout au long de ma démarche.

MAAZ NOUR.

REMERCIEMENTS

Je tiens à exprimer ma plus profonde reconnaissance à :

D'abord, je tiens à remercier **Allah**, le tout Puissant, de m'avoir donné la santé, la volonté et la patience pour mener à terme ma formation de Master.

Je voudrais exprimer ma gratitude au directeur de ces mémoires, Dr. BERBICHE Mohamed, pour sa patience, sa disponibilité et surtout sa sagesse.

Conseils, qui ont aidé à alimenter ma réflexion.

Je tiens également à remercier les membres de jury pour l'honneur qu'ils nous ont fait en acceptant de siéger à notre soutenance et d'examiner notre travail.

Je remercie mes très chers parents AHMAD et DJAMILA, qui ont toujours été là pour moi.

Je remercie mes frères Youcef , Bachir, et ma soeur Nabila pour leur encouragements.

J'adresse mes sincères remerciements aux professeurs, intervenants et toute personne qui par leurs paroles, leurs écrits, leurs conseils et leurs critiques ont illuminé mes réflexions et ont accepté de me rencontrer et de répondre à mes questions durant mes recherches.

Table des matières

Introduction

Dans ce mémoire, on étudiera quelques théorèmes du point fixe de Krasnoselskii et leurs applications sur les equations integrales de Volterra type telles aue l'étude de l'existence et la stabilité des solutions periodiques.

Etant donné un ensemble M et une application $T : M \to M$, on s'intéresse à donner des conditions suffisantes sur T et M pour que T admet un point fixe. Ces résultats théoriques nous permettent de résoudre certains problèmes comme par exemple trouver les zéros d'un polynômes, ou prouver que certaines équations différentielles admettent des solutions sans les déterminer explicitement

Le théorème de l'application contractante prouvé par Banach en 1922 dit qu'une contraction d'un espace métrique complet dans lui-même admet un point fixe unique.

De plus, il fournit un algorithme d'approximation du point fixe comme limite d'une suite itérée. Mais d'une part, montrer que la fonction et contractante peut entraîne de laborieux calculs, d'autre part, les conditions sur la fonction et l'espaces étudiés restreignent le nombre de cas aux quels on peut appliquer le théorème.

Le théorème du point fixe de Brouwer est un résultat de topologie algèbrique, sous sa forme la plus simple, ce théorème exige uniquement la continuité de l'application d'un intervalle fermée borné dans lui-même. Et de façon plus générale, l'application continue doit être définie dans un convexe compact d'un espace euclidien dans lui-même.

Le théorème du point fixe de Schauder établi en 1930, est une généralisation du théorème du point fixe de Brouwer et affirme qu'une application continue sur un convexe compact admet un point fixe, qui n'est pas nécessairement unique. Il n'est donc pas nécessaire établir des stimées sur la fonction, mais simplement sa continuité.

Ceci nous donne la possibilité de traiter plus de cas qu'avec le théorème de Banach (par exemple, l'identité).

En 1955, et pour la première fois, Kranoselskii a élaboré son théorème du point fixe qui affirme que dans un convexe compact, toute application qui se met sous la forme d'une somme de deux opérateurs dont l'un est contractant et l'autre compact admet un point fixe. Ce théorème est très éfficace dans la résolution des équations différentielles non linéaires, il apporte des réponses aux problèmes d'existence et d'unicité.

L'étudie de comportement qualitatif des équations différentielles ordinaires ou fonctionnelles, conduit à inverser normalement ceux-ci en équations intégrales. L'équation intégrale résultante est fréquemment une équation de type Volterra

$$x(t) = f(t, x(t)) + \int_{t-h}^{t} D(t,s)g(s, x(s))ds. \tag{1}$$

Nous étudions l'existence de solutions périodiques continues de 1 sous des hypothèses appropriées sur les fonctions f, g et D.

Généralement, le théorème de point fixe est utilisé pour étudier l'existence de solutions périodiques à ce type d'équation. On utilise le théorème du point fixe de Banach,(également connu comme le principe de contraction), un théorème du point fixe de Krasnosel'skii, et un théorème point fixe qui est une combinaison du théorème de Krasnosel'skii et théorème du point fixe de Schaefer. Ce théorème a été obtenu par Burton et Kirk [15]. Des énoncés de ces théorèmes sont fournis à la fin de cette section.

Dans le processus d'obtention des solutions périodiques de 1, on compare ces théorèmes en termes d'hypothèses et de résultats. Comme nous le savons, le théorème du point fixe de Banach donne l'unicité de la solution, mais il restreint la taille des fonctions impliquées dans l'équation. En particulier, on a observé que pour l'équation 1, le théorème point fixe de Banach exige que les fonctions D et g soient petites pour un f donné.

De même, on a trouvé que le théorème de Krasnosel'skii place des restrictions de taille ou de croissance sur les fonctions D et g. D'autre part, le Théorème de Krasnosel'skii-Schaefer ne place aucune restriction de taille ou de croissance sur ces fonctions. Cependant, en raison du théorème du point fixe de Schaefer, le théorème de Krasnosel'skii-Schaefer exige une borne a priori sur toutes les solutions. Suivant une technique similaire à celle de Burton et Kirk [15], on a utilisé méthode directe de Liapunov pour obtenir un tel a priori lié à toutes les solutions périodiques de 1.

On a utilisé une fonction de Liapunov dans l'analyse et trouvé que les fonctions D et g besoin de satisfaire certaines conditions de signe. On pourrait être en mesure d'obtenir une estimation à priori sans ces conditions de signe, en employant une méthode différente, ou structurer une différente fonction de Liapunov du ça. Notre analyse, par conséquent, indique que l'utilisation de Théorème Krasnosel'skii-Schaefer pour étudier des solutions périodiques des équations comme 1 a le potentiel de donner de meilleurs résultats que l'utilisation de théorème Krasnosel'skii tout seul.

On remarque que dans ce mémoire on a utilisé la méthode de Liapunov pour l'équation intégrale 1. Bien que la méthode directe de Liapunov a été largement utilisée pour les équations différentielles fonctionnelles, son utilisation sur les équations intégrales est relativement nouvelle et un peu limité. Les lecteurs intéressés par la méthode de Liapunov pour les équations intégrales trouveront [12] une ressource très utile.

Dans un article parallèle [13], l'auteur a étudié les solutions périodiques d'une équation intégrale avec l'hérédité infinie employant les mêmes théorèmes de point fixe utilisés dans ce travail.

Chapitre 1

Notions préliminaires

Dans ce chapitre nous rappellons quelques définitions et résultats préliminaires nous utiliserons dans la suite du mémoire.

1.1 Espaces métriques

Définition 1.1.1 *Une distance (métrique) sur un ensemble* $E \neq \emptyset$ *est une application* $d : E \times E \to \mathbb{R}^+$ *vérifiant :*

1. $d(x, y) = 0 \iff x = y, \qquad \forall x, y \in E$
2. $d(x, y) = d(y, x), \qquad \forall x, y \in E$
3. $d(x, y, z) \leq d(x, y) + d(y, z), \qquad \forall x, y, z \in E$

Définition 1.1.2 *Un espace métrique est un couple* (E, d) *où* E *est un ensemble et* d *est une distance.*

1.2 éspaces vectoriels normé

1.2.1 Norme

Définition 1.2.1 *On appelle norme sur E une application $\|.\|$*

$$\|.\| : E \to \mathbb{R}^+$$

$$x \to \|x\|$$

vérifient les axiomes suivants :

1. $\|x\| = 0 \iff x = 0.$ *(séparation).*
2. $\forall \lambda \in \mathbb{R}, \forall x \in E : \|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|.$ *(homogenété).*
3. $\forall x, y \in E : \|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|.$ *(inégalité triangulaire).*

Pour $u \in E$ donné , le nombre réel positif $\|u\|$ est appellé norme de u.

Définition 1.2.2 *un espace vectoriel normé (e.v.n) est un couple $(E, \|.\|)$ où E est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ où $\mathbb{C}$ et $\|.\|$ est une norme sur E.*

1.3 Espaces de Banach

1.3.1 Convergence

Définition 1.3.1 *On dit qu'une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dans E converge vers $l \in E$ si :*

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N} : \forall n > n_0, \|u_n - l\| < \varepsilon.$$

1.3.2 Suites de cauchy

Définition 1.3.2 *Une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est dite suite de Cauchy dans E si :*

$$\forall\varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N} : \forall n > n_0, \forall m > n_0, \|u_n - u_m\| < \varepsilon.$$

Définition 1.3.3 *Un espace normé $(E, \|.\|)$ est dit complet si et seulement si toute suite de Cauchy d'éléments de E converge dans E*

Définition 1.3.4 *On appelle espace de Banach tout espace vectoriel normé complet.*

1.4 Continuité dans les espaces normés

Définition 1.4.1 *Soient $(E, \|.\|)$ et $(E', \|.\|')$ deux espaces normé, et $f : E \to E'$ une application. f est continue en $x_0 \in E$ si et seulement si :*

$$\forall\varepsilon > 0, \exists\delta > 0, \forall x \in E : \|x - x_0\| < \delta \implies \|f(x) - f(x_0)\| < \varepsilon.$$

C-à-d :

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0).$$

Elle est dit continue sur E si elle est continue en tout point de E.

Définition 1.4.2 *On dit que f est uniformément continue sur E si*

$$\forall\varepsilon > 0, \exists\delta > 0, \forall x, y \in E : \|x - y\| < \delta \implies \|f(x) - f(y)\| < \varepsilon.$$

1.5 Compacité

Définition 1.5.1 *Soient E un ensemble quelconque et A une partie de E. Une recouvrement de A est une famille $(B_i)_{i\in I}$ des parties de E vérifiant :*

$$A \subset \bigcup_{i\in I} Bi$$

Définition 1.5.2 *Soit $(E, \|.\|)$ un espace normé.*

On dit que E est relativement compact si pour tout $\varepsilon > 0$,il existe un recouvrement fini de E par des parties de E dans le diamêtre est inférieure à ε.

1.6 Convexité

Définition 1.6.1 *On dit que $\mathbb{C} \subset E$ est un ensemble convexe si :*

$$\forall t \in [0,1], \forall (a,b) \in \mathbb{C}^2, \quad ta + (1-t)b \in \mathbb{C}$$

1.6.1 Operateur compact

Définition 1.6.2 *Soit A applique un ensemble M dans un espace topologique X. Si AM est contenu dans un sous-ensemble compact de X, on dit que A est compact.*

1.7 Espace de Lebesgue $L^p(\Omega)$

Définition 1.7.1 *Soit $p \in \mathbb{R}, 1 \leq p \leq \infty$.On appelle espace de Lebesgue $L^p(\Omega)$ l'espace*

$$L^p(\Omega) = \left\{ f : \Omega \to \mathbb{R}, f \quad \textit{mesurable et} \quad |f|^p \in L^1(\Omega) \right\}.$$

Pour toute fonction $f \in L^p(\Omega)$*,on pose*

$$\|f\|_{L^p} = \left(\int_{\Omega} |f(x)|^p \, d\mu(x) \right)^{\frac{1}{p}}$$

1.8 Espace de Hilbert

Définition 1.8.1 *On appelle* ***produit scalaire*** *sur* E *toute forme bilinèaire,symétrique non dégénérie, définie positive autrement dit, toute application* φ*'de* $E \times E$ *dans* $\mathbb{R}$ *vérifiant :*

1. 1.$\forall x \in E, \varphi_x : y \to \varphi(x,y)$ *est linéaire ;*
2. $\forall x \in E^2, \varphi(x,y) = \varphi(y,x)$;
3. $\forall x \in E \backslash \{0\}, \varphi(x,x) > 0$.

1.9 Application contractante

– Une application f d'un espace métrique (E,d) dans lui-même est dite k-contractante si $0 \leq k < 1$ et si, pour tout couple de points x et y de E,

$$d(f(x), f(y)) \leq kd(x,y).$$

Elle est dite contractante si elle est k-contractante pour une certaine constante k.

– Un endomorphisme d'espace vectoriel normé dont la norme est strictement inférieure à 1 (ou une application affine associée à un tel endomorphisme) est une application contractante. L'exemple le plus simple est celui d'une homothétie de rapport λ avec $|\lambda| < 1$.

– Plus généralement,l'inégalité des accroissements finis permet de montrer qu'une fonction dérivable de dérivée bornée en norme par $k < 1$ est contractante.

1.10 Théoreme d'Ascoli (d'Arzelà-Ascoli)

Soient K un espace compact et (E, d) un espace métrique. L'espace $C(K, E)$ des fonctions continues de K dans E, muni de la distance uniforme, est un espace métrique.

Une partie A de $C(K, E)$ est relativement compacte (c'est-à-dire incluse dans un compact) si et seulement si, pour tout point x de K :

– A est équicontinue en x, c'est-à-dire que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un voisinage V de x tel que

$$\forall f \in A \ \ \forall y \in V \ \ d(f(x), f(y)) < \varepsilon;$$

– l'ensemble $A(x) = \{f(x) | f \in A\}$ est relativement comp

1.11 Quelques inegalités algébriques

Pour conclure ce chapitre on va donner quelques outils utiles qu'on va les utiliser dans le chapitre 2 et 3.

a) *Inégalité de Cauchy-Schwarz* : Soient $x, y \in E$ $((E, \|.\|)$ est un espace préhilbertien) alors :

$$|(x, y)| \leq \|x\| \,.\, \|y\|\,,$$

où $(.,.)$ est le produit scalaire dans E.

b) *Inégalité de Hölder* : Soit $1 \leq p \leq \infty$, p' l'exposant conjugué de p i.e. $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$.

Soit $f \in L^p$ et $g \in L^p$ alors $f.g \in L^1$ et

$$\int |fg| \leq \|f\|_p \, \|g\|_{p'}$$

c) *Inégalité de Young* : Soit $1 < p < \infty$ alors $ab \leq \frac{1}{p}a^p + \frac{1}{p'}b^{p'}, \forall\, a \geq 0, \forall\, b \geq 0$.

Chapitre 2

Théorème du point fixe de type Krasnoselskii-Schaefer

Dans ce chapitre, on va concentrer sur trois théorèmes de points fixes et une équation intégrale.

Le théorème du point fixe de Schaefer donnera une solution T-périodique de

$$x(t) = a(t) + \int_{t-h}^{t} D(t,s)g(s,x(s))ds. \tag{2.1}$$

Si D et g vérifient certaines conditions de signe indépendantes de leur grandeur. Une combinaison du théorème de l'application contractante et le théorème de Schauder (connu sous le nom de Krasnoselskii théorème) donnera une solution T-periodique de

$$x(t) = f(t,x(t)) + \int_{t-h}^{t} D(t,s)g(s,x(s))ds. \tag{2.2}$$

Si f définit une contraction et si D et g sont assez petits. On prouve un théorème de point fixe qui est une combinaison du théorème de l'application contractante et théorème de Schaefer qui donne une solution T-periodique de 2.2 lorsque f définit une contraction, tandis que D et g satisfont aux conditions de signe précitées.

2.1 Introduction

On s'intéresse à prouver que les équations de type

$$x(t) = f(t, x(t)) - \int_{t-h}^{t} D(t,s)g(s, x(s))ds \tag{2.3}$$

possédent une solution T-périodique lorsque D est essentiellement un noyau positif et f est une contraction. En particulier, D peut être grand.

Les équations de cette forme sont intéressantes en elles-mêmes. C'est une équation avec mémoire :

la valeur actuelle de x dépend de son passé historique .

Mais 2.3 peut aussi provenir d'un problème beaucoup plus familier tel que

$$x'(t) = -a(t)x(t) - g(t, x(t)) \tag{2.4}$$

où $a(t+T) = \alpha(t)$ et $g(t+T, x) = g(t, x)$ pour quelque $T > 0$. Krasnoselskii ([2] et [1, p. 31]) ont observé que dans une variété de problèmes, l'inversion d'un opérateur différentiel perturbé donne une contraction et un opérateur compact, par exemple, en 2.4 on écrit

$$\left(x \exp \int_0^t a(s)ds\right)' = -g(t,x) \exp \int_0^t a(s)ds$$

et on intégre de $t - T$ à t, on obtient

$$x(t) = x(t-T) \exp - \int_{t-T}^{t} a(s)ds - \int_{t-h}^{t} g(u, x(u)) \left[\exp - \int_{u}^{t} a(s)ds\right] du, \tag{2.5}$$

si

$$\exp - \int_{t-T}^{t} a(s)ds = Q < 1$$

et si $(\mathcal{B}, \|.\|)$ est l'espace de Banach des fonctions périodiques T- continu $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, alors 2.5 peut être exprimé comme 2.5

$$\varphi(t) = (B\varphi)(t) + (A\varphi)(t)$$

où B est une contraction et A opérateur applique des sous-ensembles bornés de $\mathcal{B}$ en sous-ensembles compacts de $\mathcal{B}$. En fait, B peut prendre une partiede l'intégrale qui pourrait ne pas bien se comporter dans un certain sens.

Les opérateurs intégrales ci-dessus transporte des ensembles bornés de fonctions T-périodiques en ensembles équicontinues, comme on peut le voir dans la dernière section de la preuve du Lemme 2.3.2.

Les applications contractantes rétrécissent les ensembles. Krasnoselskii a montré que si $B\varphi + A\psi$ se rétrécit un certain ensemble, alors il y aura un point fixe, une solution de 2.5, qui est en $\mathcal{B}$ et par conséquent, est périodique. Son résultat peut être énoncé comme suit ([3, p. 370] ou [1, p. 31]).

En particulier, M n'a pas besoin d'être borné.

Théorème 2.1.1 *Soit M un sous-ensemble non vide convexe fermé d'un espace de Banach $(\mathcal{B}, \|.\|)$. Supposons que A et B deux applications de M dans $\mathcal{B}$ tels que*

i) $x, y \in M \Longrightarrow Ax + By \in M$,

ii) *A est compact et continu,*

iii) *B est une appication contractante.*

Alors $\exists\ y \in M$ *avec* $y = Ay + By$.

Comme nous le soulignerons bientôt, les hypothèses du théorème sont vérifiées directement à partir des fonctions apparaissant dans l'équation 2.1.1 et la preuve repose sur Le second théorème du point fixe de Schauder.

Il y a un théorème de Schaefer ([4] ou [1, p. 29]) qui est en concurrence avec Schauder et qui rapporte généralement beaucoup plus, mais il exige aussi beaucoup plus.

Le théorème de Schaefer exige que nous ayons un apriori lié à des solutions totalement inconnues d'une équation d'opérateur $\varphi = \lambda A\varphi$ pour $0 < \lambda < 1$, contrairement à Schauder qui exige des conditions sur la cartographie clairement visible A.
Le théorème de Schaefer peut être énoncé comme suit. C'est la formulation de Smart, Schaefer a prouvé le résultat pour un localement convexe espace.

Théorème 2.1.2 (s) *Soit* $(\mathcal{B}, \|.\|)$ *un espace normé,* H *une application continue de* $\mathcal{B}$ *en* $\mathcal{B}$ *qui est compact sur chaque sous-ensemble borné* X *de* $\mathcal{B}$*. Alors soit :*

i) *l'équation* $x = \lambda Hx$ *a une solution pour* $\lambda = 1$*, ou*

ii) *l'ensemble de toutes ces solutions* x*, pour* $0 < \lambda < 1$*, est non borné.*

Le problème sur lequel nous nous concentrons ici est le suivant : Peut-on substituer les conditions de type Schaefer sur A pour les conditions de type Schauder de Krasnoselskii ? On montre que on peut et qu'il y a des applications intéressantes.
En particulier, pour 2.3 Krasnoselskii nécessiterait f être une contraction et Dg être petit, alors que nous permettons Dg pour être grand,à condition D et g satisfait à certaines conditions.

2.2 Un théorème de point fixe

On va commençer avec l'équation

$$x = Bx + Ax$$

où B est une contraction. Maintenant, les contractions rétrécissent les fonctions, mais on va mener à l'équation d'homotopie $x = \lambda B\left(\frac{x}{\lambda}\right) + \lambda Ax$ et on a encore besoin de $\lambda B\left(\frac{x}{\lambda}\right)$ pour rétrécir les fonctions.
Notre premier résultat montre que c'est le cas les applications en dépendent fortement.

Proposition 2.2.1 *Si* $(\mathcal{B}, \|.\|)$ *est un espace normé, si* $0 < \lambda < 1$*, et si* $B : \mathcal{B} \longrightarrow \mathcal{B}$ *est une contraction avec constante de contraction* α*, alors* $\lambda B\frac{1}{\lambda} : \mathcal{B} \longrightarrow \mathcal{B}$ *est aussi une contraction avec constante de contraction* α *, indépendante de* λ*, en particulier*

$$\left\|\lambda B\left(\frac{x}{\lambda}\right)\right\| \leq \alpha \|x\| + \|B0\|$$

Preuve. Pour voir que $\lambda B\frac{1}{\lambda}$ est une contraction,

$$x \in \mathcal{B} \Longrightarrow \frac{x}{\lambda} \in \mathcal{B} \Longrightarrow B\left(\frac{x}{\lambda}\right) \in \mathcal{B} \Longrightarrow \lambda B\left(\frac{x}{\lambda}\right) \in \mathcal{B},$$

de plus

$$x, y \in \mathcal{B} \Longrightarrow \left\|\lambda B\left(\frac{x}{\lambda}\right) - \lambda B\left(\frac{y}{\lambda}\right)\right\| = \lambda \left\|B(\frac{x}{\lambda}) - B\left(\frac{y}{\lambda}\right)\right\| \leq \lambda\alpha \left\|\left(\frac{x}{\lambda}\right) - \left(\frac{y}{\lambda}\right)\right\| = \alpha \|x - y\|.$$

Pour obtenir la borne, pour tout $x \in \mathcal{B}$ on a

$$\begin{aligned}
\left\|\lambda B\left(\frac{x}{\lambda}\right)\right\| &= \lambda \left\|B\left(\frac{x}{\lambda}\right)\right\| \\
&= \lambda \left(\left\|B\left(\frac{x}{\lambda}\right) - B0 + B0\right\|\right) \\
&\leq \lambda \left(\left\|B(\frac{x}{\lambda}) - B0\right\| + \|B0\|\right) \\
&\leq \lambda \left(\alpha \left\|(\frac{x}{\lambda}) - 0\right\| + \|B0\|\right) \\
&= \left(\frac{\lambda\alpha}{\lambda}\right) \|x\| + \|B0\|,
\end{aligned}$$

comme demandé. ■

Théorème 2.2.1 *Soit* $(\mathcal{B}, \|.\|)$ *un espace de Banach,* A *,* $B : \mathcal{B} \longrightarrow \mathcal{B}, B$ *une contraction avec une constante de contraction* $\alpha < 1$*, et* A *continue avec* A *ensembles compacts. Non plus*

i) $x = \lambda B(\frac{x}{\lambda}) + \lambda Ax$ *a une solution dans* $\mathcal{B}$ *pour* $\lambda = 1$*, ou*

ii) *l'ensemble de toutes ces solutions,* $0 < \lambda < 1$, *est non borné.*

Preuve. Par la proposition, $\lambda B\frac{1}{\lambda}$ est une contraction de $\mathcal{B}$ dans $\mathcal{B}$. Par conséquent, pour chaque $y \in \mathcal{B}$, l'application $x \rightarrow \lambda B(\frac{x}{\lambda}) + \lambda Ay$ est aussi une contraction avec unique solution $x = \lambda B(\frac{x}{\lambda}) + \lambda Ay$ dans B. Cela donne

$$\frac{x}{\lambda} = B\frac{x}{\lambda} + Ay$$

ou

$$(I - B)\frac{x}{\lambda} = Ay$$

alors

$$\frac{x}{\lambda} = (I - B)^{-1}Ay$$

et

$$x = \lambda(I - B)^{-1}Ay. \tag{2.6}$$

Maintenant $(I - B)^{-1}$ existe et est continu (voir [1, p. 32]). Puisque A est continu et compact ainsi $(I - B)^{-1}A$ (La preuve donnée [5, p. 412, 656] est valide pour les espaces métriques généraux). ■

Par le théorème de Schaefer, 2.6 a une solution avec $x = y$ pour $\lambda = 1$ (d'où, (i) a une solution pour $\lambda = 1$), ou l'ensemble de toutes ces solutions, $0 < \lambda < 1$, est non borné. Ceci complète la preuve.

2.3 Un exemple

L'équation 2.3 est liée à une grande classe de problèmes importants retour au moins à Volterra [6] qui a suggéré que la croissance des solutions de

$$x' = -\int_0^t k(t-s)g(x(s))ds$$

pourrait être contrôlé si $xg(x) > 0$ pour $x \neq 0$, $k(t) > 0, k'(t) < 0, k''(t) > 0$.
Approprié les détails ont été fournis par Levin [17] grâce à la construction de fonction de Lyapunov. Par la suite, à la fois cette équation et sa contrepartie de l'équation intégrale étaient largement étudié dans la littérature ([7, 8, 9, 10]) à la fois au moyen des fonctions de Lyapunov et par la théorie de la transformation.Nous avons étudié les équations intégrodifferentielles dans ([11, 12]) et les variantes de 2.3 dans ([13, 14, 16]) lorsque $f(t,x)$ est indépendant de x en utilisant le théorème de Schaefer ou un analogue, mais le théorème de Schaefer ne s'applique pas ici puisque $f(t,x)$ ne peut pas définir un operateur compact. Ainsi, on s'intéresse par le théorème de Krasnoselskii. Mais on veut que le noyau soit libre grandir, cela signifie que nous ne serons pas en mesure de satisfaire les conditions de Krasnoselskii. C'était la motivation de notre théorème.
Soit $(\mathcal{B}, \|.\|)$ l'espace de Banach des fonctions T-périodiques continues $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ avec la norme supremum. Considérons 2.3 et supposons qu'il y a un $T > 0$ et $\alpha \in (0,1)$ avec :

$$f(t+T,x) = f(t,x), \qquad D(t+T,s+T) = D(t,s), \quad g(t+T,x) = g(t,x), \tag{2.7}$$

$$t-h \leq s \leq t \text{ implique que } D_s(t,t-h) \geq 0, \tag{2.8}$$

$$D_{st}(t,s) \leq 0, \qquad D(t,t-h) = 0,$$

$$|f(t,x) - f(t,y)| \leq \alpha|x-y|, \qquad xg(t,x) \geq 0, \tag{2.9}$$

$$\forall k > 0 \ \exists \ P > 0 \ \exists \ \beta > 0 \text{ avec} \tag{2.10}$$

$$2\lambda[-(1-\alpha)xg(t,x) + k|g(t,x)|] \leq \lambda[P - \beta|g(t,x)|],$$

$$f, g, \quad \text{et } D_{st} \text{ sont continus.} \tag{2.11}$$

Théorème 2.3.1 (2) *Si 2.7-2.11 sont vérifiées, alors 2.3 a une solution T-périodique.*

Preuve. Définir l'application $B : \mathcal{B} \to \mathcal{B}$ par

$$(B\varphi)(t) = f(t, \varphi(t)), \quad \varphi \in \mathcal{B}. \tag{2.12}$$

■

Lemme 2.3.1 (1) *Si B est défini par 2.12, alors B est une contraction de $\mathcal{B}$ vers $\mathcal{B}$, avec une constante de contraction de 2.9.*

Preuve. Si $\varphi, \psi \in \mathcal{B}$, alors

$$\begin{aligned} \|B\varphi - B\psi\| &= \sup_{t\in[0,T]} |(B\varphi)(t) - (B\psi)(t)| \\ &= \sup_{t\in[0,T]} |f(t,\varphi(t)) - (f(t,\psi(t))| \\ &\leq \sup_{t\in[0,T]} \alpha |\varphi(t) - \psi(t)| = \alpha \|\varphi - \psi\|, \end{aligned}$$

comme demandé. ■

Définir une application $A : \mathcal{B} \to \mathcal{B}$ par $\varphi \in \mathcal{B}$

$$(A\varphi)(t) = -\int_{t-h}^{t} D(t,s)g(s,\varphi(s))ds. \tag{2.13}$$

Lemme 2.3.2 *Si A est défini par 2.13 alors $A : \mathcal{B} \to \mathcal{B}$, A continu et compact.*

Preuve. Pour être complet, voici les détails. Soit $k > 0, \varphi \in \mathcal{B}$ soit un élément arbitraire avec $\|\varphi\| \leq K$. Par la continuité de 2.4, si $0 \geq t \geq T$ et $-h \geq s \geq T$, il y a un $M > 0$ avec

$$D(t,s)| \leq M. \tag{2.14}$$

Par la continuité uniforme de 2.4 sur $[0,T]\times[-h,T]$, pour chaque $\varepsilon>0$ Il y a un $\delta_1>0$ tel que $u,\, v\in[0,T],\ s,\ t\in[-h,T]$, $|u-v|+|s-t|\leq\delta_1$ implique

$$|D(u,s)-D(v,t)|\leq\varepsilon \tag{2.15}$$

Ensuite, puisque g est continu sur $[0,T]\times[-k,k]$ et périodique dans t il y a un $L>0$ avec

$$|g(s,x)|\leq L \ \text{ pour } s\in\mathbb{R} \ \text{ et } x\in[-k,k]. \tag{2.16}$$

En fait, par la continuité uniforme de g sur cet ensemble, pour tout $\varepsilon>0$ il y a un positif $\delta_2<T$ tel que si $s,\ t\in[0,T]$ et $x,y\in[-k,k]$ avec $|s-t|+|x-y|\leq\delta_2$, alors $|g(s,x)-g(t,y)|\leq\varepsilon$ et , par la périodicité,

$$|g(s,x)-g(t,y)|\leq\varepsilon \ \text{ pour } s,t\in\mathbb{R} \ \text{ et } \ x,y\in[-k,k] \tag{2.17}$$

avec $|s-t|+|x-y|<\delta_2$. ∎

Les assertions à propos de A vont maintenant suivre. Si $\varphi\in\mathcal{B}$,un changement de variable montre que $A\varphi$ est T-périodique.

Clairement, si $\varphi\in\mathcal{B}$, alors $A\varphi$ est continu. Ainsi, $A\varphi\in\mathcal{B}$.

On va maintenant montrer que A compact. D'abord,

$$\{A\varphi:\varphi\in\mathcal{B} \ \text{ et } \ \|\varphi\|\leq K\} \tag{2.18}$$

est équicontinue.

Pour voir cela, notez que si vous $u < v$,alors

$$\begin{aligned}(A\varphi)(u) - (A\varphi)(v) = &-\int_{u-h}^{v-h} D(u,s)g(s,\varphi(s))ds \\ &-\int_{v-h}^{u} [D(u,s) - D(v,s)]g(s,\varphi(s))ds \\ &+\int_{u}^{v} D(v,s)g(s,\varphi(s))ds.\end{aligned}$$

Par 2.14-2.16, pour tous $u, v \in [0,T]$ avec $|u - v| < \delta_1$, if $\varphi \in \mathcal{B}$ et $\|\varphi\| \leq k$,alors

$$\begin{aligned}|(A\varphi)(u) - (A\varphi)(v)| &\leq ML\,|u - v| + L|u - v + h|\,\varepsilon \\ &+ ML|u - v| \\ &\leq 2ML\delta_1 + L(\delta_1 + h)\varepsilon.\end{aligned} \tag{2.19}$$

Ensuite, pour $\varphi \in \mathcal{B}$ et $\|\varphi\| \leq k$, il résulte de 2.14 et 2.16 que $|(A\varphi)(u)| \leq LMh$ pour que

$$\|A\varphi\| \leq LMh \;\text{ pour }\; \varphi \in \mathcal{B} \;\text{ et }\; \|\varphi\| \leq k. \tag{2.20}$$

Par le théorème d'Ascoli A compact.

Pour voir que A est continu, soient φ et $\psi \in \mathcal{B}$ avec $\|\varphi - \psi\| < \delta_2$, $\|\varphi\| \leq k, \|\psi\| \leq k$. Alors pour $0 \leq u \leq T$ on a par 2.14 et 2.17

$$\begin{aligned}(A\varphi)(u) - (A\psi)(u) &\leq \int_{u-h}^{u} |D(u,s)|\,|g(s,\varphi(s)) - g(s,\psi(s))|\,ds \\ &\leq Mh\varepsilon.\end{aligned}$$

Ceci complète la preuve du 2.3.2.

Ensuite, on remarque que si $B : \mathcal{B} \to \mathcal{B}$ est défini par

$$(Bx)(t) = f(t, x(t)) \;\text{ alors }\; \left(\lambda B\frac{x}{\lambda}\right)(t) = \lambda f\left(t, \frac{x(t)}{\lambda}\right).$$

Lemme 2.3.3 *3 Il y a un* $K \geq 0$ *tel que si* $0 < \lambda < 1$ *et si* $x \in \mathcal{B}$ *résout*

$$x(t) = \lambda f\left(t, \frac{x}{\lambda}\right) - \lambda \int_{t-h}^{t} D(t,s)g(s,x(s))ds \tag{2.21}$$

Alors $\|x\| \leq k$.

Preuve. Soity $x \in \mathcal{B}$ résoudre 2.21 et définir

$$V(t) = \lambda^2 \int_{t-h}^{t} D_s(t,s)\left(\int_s^t g(v,x(v))dv\right)^2 ds.$$

C'est un type de fonction de Liapunov obtenu à partir de 2.21 en mettant au carré $x - \lambda f$, en intégrant par parties, et en utilisant l'inégalité de Schwarz.

Maintenant $D_{st}(t,s) \leq 0$ donc

$$\begin{aligned} V'(t) \leq & -\lambda^2 D_s(t,t-h)\left(\int_{t-h}^{t} g(v,x(v))dv\right)^2 \\ & + 2\lambda^2 g(t,x)\int_{t-h}^{t} D_s(t,s)\int_s^t g(v,x(v))dvds. \end{aligned}$$

Le premier terme sur le côté droit n'est pas positif par 2.8, si nous intégrons le dernier terme par pièces et utilisation 2.8 encore une fois nous avons

$$\begin{aligned} V'(t) &\leq 2\lambda g(t,x)\int_{t-h}^{t} \lambda D(t,s)g(s,x(s))ds \\ &= 2\lambda g(t,x)\left[\lambda f(t,\frac{x}{\lambda}) - x(t)\right] \end{aligned}$$

à partir de 2.21. Mais par le raisonnement dans la proposition,

$$\left|\lambda f(t,\frac{x}{\lambda})\right| \leq \alpha\,|x(t)| + |f(t,0)| \leq \alpha\,|x(t)| + k$$

pour quelques $k > 0$. Ainsi,

$$\begin{aligned} V'(t) &\leq 2\lambda \left\{ |g(t,x)| \left[\alpha|x| + k \right] - xg(t,x) \right\} \\ &= 2\lambda [|\alpha x g(t,x)| + k|g(t,x)| - xg(t,x)] \\ &\leq 2\lambda [-(1-\alpha) x g(t,x) + k|g(t,x)|]. \end{aligned}$$

Comme $\alpha < 1$, de 2.10 nous avons

$$V'(t) \leq \lambda \left[-\beta |g(t,x)| + P \right].$$

Ainsi, $x \in \mathcal{B}$ implique $V \in \mathcal{B}$ pour que

$$0 = V(T) - V(0) \leq \lambda \left[-\beta \int_0^T |g(t,x(t))| dt + PT \right]$$

ou

$$\int_0^T |g(t,x(t))| dt + \frac{PT}{\beta} \tag{2.22}$$

comme $\lambda > 0$. Comme $g(t,x(t)) \in \mathcal{B}$, il y a un $n > 0$ avec

$$\int_{t-h}^t |g(t,x(t))| dt \leq n. \tag{2.23}$$

Prenant $M = \max\limits_{-h \leq s \leq t \leq T} |D(t,s)|$, alors de la proposition 2.21, et 2.23 nous avons

$$\begin{aligned} |x(t)| &\leq \left| \lambda f(t, \frac{x}{\lambda}) \right| + \lambda \left| \int_{t-h}^t D(t,s) g(s,x(s)) ds \right| \\ &\leq \alpha |x(t)| + k + Mn \end{aligned}$$

ou

$$\|x\| \leq \frac{(Mn+k)}{(1-\alpha)},$$

comme demandé. L'application du 2.2.1 complète la preuve. ■

Chapitre 3

Stabilité via Théorème du point fixe de Krasnoselskii

3.1 Introduction

Cette note représente une partie d'une enquête continue de l'utilisation de la théorie des points fixes dans la stabilité. Une motivation pour notre travail vient ici du théorème de Perron [24] qui déclare cela si

$$x' = Dx + G(t,x), \tag{3.1}$$

avec D une matrice dont toutes les racines caractéristiques ont des parties réelles négatives, et $\underset{x\to 0}{lim}\frac{|G(t,x)|}{|x|} = 0$, uniformément pour $0 \leq t < \infty$, alors $x = 0$ est uniformément asymptotique stable. Coddington et Levinson [21, p. 314 et 327] ainsi que Lakshmikantham et Leela [23, p. 15] utilisent d'autres méthodes pour montrer que les solutions avec de petites conditions initiales tendent à zéro, pour vu que $G(t,x)$ tend vers zéro d'une manière uniforme pour un petit x. Ces méthodes dépendent fortement du système linéaire imperturbé $y' = Dy$ telles peuvent être bien motivées en résolvant l'équation de Bernoulli :

$$x' + 2x = \exp(-t)x^{\frac{3}{5}}. \tag{3.2}$$

et conclure facilement que les solutions tendent à zéro.

Beaucoup de bons résultats dans le même sens sont donnés par Bellman [18] pour

$$x' = Dx + E(t)x, \tag{3.3}$$

où D a toutes les racines caractéristiques avec des parties réelles négatives, alors que E est petit soit en norme, soit en intégrale.

Dans cette note,nous conjecturons qu'il existe un théorème général concernant la stabilité asymptotique de la solution zéro de

$$x' = f(t,x) + G(t,x), \tag{3.4}$$

quand f vérifie une condition de Lipschitz avec $y' = f(t,y)$ uniformément asymptotiquement stable et, par exemple, quand $|G(t,x)| \leq q(t)|x|^{\alpha}$ où $0 < \alpha < 1$ et q est petit dans un certain sens. De plus, il semble que la modification suivante du théorème du point fixed de Krasnoselskii peut êtreun véhicule approprié pour la preuve. Il peut être trouvé dans [20].

Théorème 3.1.1 *Soit M un convexe fermé, et sous-ensemble non vide d'un espace de Banach $(S, \|.\|)$. Supposons que $A : M \to S$ et $B : S \to S$ tels que*

(i) *B est une contraction avec constante $\alpha < 1$,*

(ii) *A est continu, AM réside dans un sous-ensemble compact de S,*

(iii) *$[x = Bx + Ay \ , \ y \in M] \Rightarrow x \in M$.*

Alors il y a un $y \in M$ avec $Ay + By = y$.

Ce résultat diffère de celui de Krasnoselskii en ce sens que le premier exige que $Bx + Ay$ réside toujours dans M.Nous verrons que c'est un changement crucial de l'application actuelle.

3.2 Le résultat principal

Nous commençons la construction avec une équation simple pour nous guider dans la construction de notre théorème et revenez alors à un problème semblable comme exemple. Considérez l'équation scalaire :

$$x' = -2x + G(t, x), \tag{3.5}$$

où G est continu,

$$|G(t, x)| \leq K \exp(-t) \left| x^{\frac{3}{5}} \right| \tag{3.6}$$

et K est une constante positive.Soit

$$M = \{\psi : [0, \infty) \to \mathbb{R} \ |\psi \in C \ , |\ \psi(t)| \leq \exp(-t)\}, \tag{3.7}$$

où C désigne l'ensemble des fonctions continues, et soit $(S, \|.\|)$ l'espace de Banach de fonction continue bornée sur $[0, \infty) \to \mathbb{R}$ avec la norme supremum.

Lemme 3.2.1 (1) *si* $|x_0| + (\frac{5}{2})K < 1,$ *et si* $x(t) = x(t, 0, x_0)$ *est la solution de*

$$x' = -2x + G(t, \psi(t) \ , \ \psi \in M, \tag{3.8}$$

Alors $x \in M.$

Preuve. on a

$$\begin{aligned}
|x(t)| &\leq |x_0| \exp(-2t) + \int_0^t \exp(-2(t-s))K \exp(-s) \exp\left(-\left(\frac{3}{5}\right) s\right) ds \\
&\leq |x_0| \exp(-2t) + K \exp(-2t) \int_0^t \exp\left(\left(\frac{2}{5}\right) s\right) ds \\
&\leq |x_0| \exp(-2t) + \left(\frac{5}{2}\right) K \exp(-t) < \exp(-t).
\end{aligned}$$

■

Par conséquent ,$x \in M$.

Lemme 3.2.2 *Si pour* $\psi \in M$ *nous définissons*

$$(A\psi)(t) = \int_0^t G(s, \psi(s))ds \ , \quad t \geq 0, \tag{3.9}$$

alors AM *réside dans un sous-ensemble compact de* S.

Preuve. Il est clair que les intégrales existent et nous vérifions facilement que AM est un ensemble équicontinue. De plus, AM est limité. ■

Si nous avons une suite $\{A\psi_n\}$, alors, par le théorème d'Ascoli et un processus de diagonalisation, il y a une sous-suite, disons $\{A\psi_n\}$,convergent uniformément sur des sous-ensembles compacts de $[0, \infty)$. Nous montrerons maintenant que $\{A\psi_n\}$ est une suite de Cauchy sur $[0, \infty)$.

Donné $\varepsilon > 0$, réparer $T > 0$ de sorte que $\int_T^\infty 2K \exp(-s)ds < \frac{\varepsilon}{2}$ .Alors trouvez N tel que n , $m > N$ implique que

$$\underset{0 \leq p \leq T}{sup} \left| \int_0^p \left[G(s, \psi_n(s) - G(s, \psi_m(s)) \right] ds \right| < \frac{\varepsilon}{2}$$

Ainsi si $n, m < N$ alors

$$\begin{aligned} &\sup_{0 \leq t < \infty} \left| \int_0^t \left[G(s, \psi_n(s)) - G(s, \psi_m(s)) \right] ds \right| \\ &\leq \sup_{0 \leq p \leq T} \left| \int_0^p \left[G(s, \psi_n(s)) - G(s, \psi_m(s)) \right] ds \right| \\ &+ \int_T^\infty \left[|G(s, \psi_n(s)| + |G(s, \psi_m(s))| \right] ds < \varepsilon. \end{aligned}$$

Comme AM est contenu dans S et S est complet , AM est contenue dans un sous-ensemble compact de S.

Le résultat suivant est connu, mais nous fournissons les détails pour référence.

Lemme 3.2.3 (3) *soit* $b : \mathbb{R}^{d+1} \to \mathbb{R}^d$ *est continu et suppose qu'il y a un* $L > 0$ *pour* *que* $|b(t,x) - b(t,y)| \leq L|x-y|$. *Avec la norme*

$$|\phi|_L = \underset{0 \leq s < \infty}{sup} \{|\exp(-2Ls)\phi(s)|\},$$

sur l'espace de Banach U *des fonctions continues bornées* $\phi : [0,\infty) \to \mathbb{R}^d$ *alors l'opérateur* H *défini par*

$$(Hx)(t) = x_0 + \int_0^t b(s,x(s))ds \ , \quad t \geq 0,$$

est une contraction avec une constante de contraction $\frac{1}{2}$.

Preuve. On a

$$\begin{aligned}
|Hx_1 - Hx_2|_L &= \sup_{0 \leq s < \infty} \left| \exp(-2Ls) \int_0^s b(u,x_1(u)) - b(u,x_2(u))du \right| \\
&\leq \sup_{0 \leq s < \infty} \int_0^s \exp(-2Ls) L \left| x_1(u) - x_2(u) \right| du \\
&= \sup_{0 \leq s < \infty} \int_0^s \exp(-2Ls) L \left| x_1(u) - x_2(u) \right| \exp(-2Lu) \exp(2Lu) du \\
&\leq |x_1 - x_2|_L \sup_{0 \preceq s \prec \infty} \int_0^s \exp(-2Ls) L \exp(2Lu) du \\
&\leq \left(\frac{1}{2}\right) |x_1 - x_2|_L ,
\end{aligned}$$

une contraction. ■

Dans la preuve du 3.2.2, la norme $|.|_L$ fonctionne aussi bien que la norme supremum.

Avec cet exemple en tête, nous considérons maintenant un théorème général.

Soit $a, b : [0,\infty) \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ être continu et considérer

$$x' = b(t,x) + a(t,x), \ \ x(0) = x_0, \tag{3.10}$$

où

$$|b(t,x) - b(t,y)| \leq L|x-y| \ \text{ on } [0,\infty) \times \mathbb{R}^d. \tag{3.11}$$

Ainsi, 3.10 a une solution.

Soit $(U, \|.\|)$ désigne un espace de Banach de fonctions continues bornées $\phi : [0, \infty) \to \mathbb{R}^d$ et M désigne un sous-ensemble convexe non vide de U.

Soit l'opérateur $A : M \to U$ défini par $\psi \in M$ implique que

$$(A\psi)(t) = \int_0^t a(s, \psi(s))ds \ , \quad t \geq 0, \tag{3.12}$$

être continu et définir l'opérateur B par

$$(B\phi)(t) = x_0 + \int_0^t b(s, \phi(s))ds \ , \quad t \geq 0, \tag{3.13}$$

pour chaque $\phi \in U$.

Théorème 3.2.1 *soit B est une contraction avec $\alpha < 1$ sur l'espace $(U, \|.\|)$ et suppose que AM réside dans un sous-ensemble compact de cet espace.*

Supposons que pour chaque $\psi \in M$ la solution unique ϕ de

$$\phi'(t) = b(t, \phi(t)) + a(t, \psi(t)) \ , \quad \phi(0) = x_0, \tag{3.14}$$

est dans M. Alors une solution de 3.10 est dans M.

Preuve. Remarquez d'abord que si $\phi \in M$ est un point fixe de P , où P est défini par

$$(P\phi)(t) = x_0 + \int_0^t b(s, \phi(s))ds + \int_0^t a(s, \phi(s))ds, \qquad t \geq 0, \tag{3.15}$$

alors ϕ est une solution de 3.10 Maintenant, pour fixe $\psi \in M$ et tout $\phi \in U$, definir Q par

$$(Q\phi)(t) = x_0 + \int_0^t b(s, \phi(s))ds + \int_0^t a(s, \psi(s))ds, \qquad t \geq 0. \tag{3.16}$$

si $Q\phi = \phi$ pour un certain $\phi \in U$, Alors ϕ est la solution unique de

$$\phi' = b(t, \phi) + a(t, \psi(t)), \qquad \phi(0) = x_0. \tag{3.17}$$

■

Par hypothèse, cette solution unique de 3.17 est dans M. D'après la révision du théorème de Krasnoselskii, P a lui-même un point fixe ϕ dans M.

Corollaire 3.2.1 *Si, en plus des hypothèses du 3.2.1, toutes les fonctions de M tend vers 0 quand $t \to \infty$, alors une solution de 3.10 tend vers zero quand $t \to \infty$.*

L'exemple suivant est parallèle dans le contenu, mais différent dans la technique, aux résultats dans [21, p. 314,327] et [23, p. 115].
Dans la section 3, nous donnons un exemple non linéaire.

Exemple 3.2.1 *soit D une matrice constante $d \times d$,dont toutes les racines caractéristiques ont parties réelles négatives, donc, il existe $\alpha > 0$ et $k > 0$ avec*

$$|\exp(Dt)| \leq k \exp(-\alpha t), \qquad t \geq 0. \tag{3.18}$$

Ensuite, soit $G : [0, \infty) \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ et continu et supposons qu'il y ait une constante $\gamma > 0$, une fonction continue $q : [0, \infty) \to [0, \infty)$ avec $q(t) \to 0$ quand $t \to \infty$ et $q \in L^1[0, \infty)$ pour que

$$|G(t, x)| \leq Kq(t)|x|^\gamma. \tag{3.19}$$

Nous montrerons que les conditions du 3.2.1 sont satisfaites pour :

$$x' = Dx + G(t, x),$$

quand K est suffisamment petit.

A cette fin, si nous laissons

$$r(t) = \int_0^t \exp(-\alpha(t-s))q(s)ds, \tag{3.20}$$

alors $r(t) \to 0$ comme $t \to \infty$ et $r \in L^1[0,\infty)$ puisque r est la convolution des fonctions appropriées.

Définir

$$h(t) = max[r(t), \exp(-\alpha t)] \tag{3.21}$$

et notez que $h(t) \leq |r(t)| + \exp(-\alpha t) \in L^1[0,\infty)$, de plus $h(t) \to 0$ comme $t \to \infty$.

En redéfinissant q et K on peut supposer sans perte de généralité que :

$$h(t) \leq 1\ , \qquad t \geq 0. \tag{3.22}$$

Définir

$$M = \{\psi : [0,\infty) \to \mathbb{R}^n | \psi \in C, \quad |\psi(t)| \leq h(t)\}. \tag{3.23}$$

Ainsi, M est fermé et convexe.

Pour arbitraire $\psi \in M$, considérez :

$$x' = Dx + G(t, \psi(t)), \qquad x(0) = x_0. \tag{3.24}$$

alors

$$\begin{aligned} |x(t)| &\leq |x_0|\, k \exp(-\alpha t) + \int_0^t kK \exp(-\alpha(t-s)q(s)|\psi(s)|^\gamma ds \\ &\leq |x_0| kh(t) + kKr(t) \end{aligned}$$

$$\leq [|x_0|k + kK]h(t) \leq h(t), \tag{3.25}$$

à condition que

$$[|x_0| + K]k \leq 1.$$

Par conséquent, $x(t) \in M$.

Exactement comme dans la preuve du 3.2.2 , si A est défini par 3.9 alors n'importe quelle séquence $\{A\psi_n\}$,avec $\psi_n \in M$ est équicontinueet on obtient ainsi une sous-suite convergeant uniformément sur des ensembles compacts. La norme $|.|_L$ fonctionne exactement comme la norme supremum dans la convergence preuve.

3.3 Une équation perturbée de Linard

Considérons l'équation scalaire

$$x'' + f(x)x' + g(x) = Kh(t, x, x'), \tag{3.26}$$

que nous écrivons comme le système

$$x' = y,$$

$$y' = -f(x)y - g(x) + Kh(t, x, y) \tag{3.27}$$

ou sous forme de vecteur comme

$$X' = b(X) + a(t, X), \tag{3.28}$$

où

$$a(t, X) = (0, Kh(t, x, y))^T.$$

Nous supposons que pour tout $\alpha > 0$ et pour tout $J > 0$, si $\psi : [0, \infty) \to \mathbb{R}^2$ et $|\psi(t)| \leq J \exp(-\alpha t)$ alors

$$a(t, \psi(t)) \in L^1[0, \infty), \tag{3.29}$$

que $\forall\ J > 0\ \forall\ \alpha > 0\ \ \exists\ D > 0$ tel que $|\psi(t)| \leq J \exp(-\alpha t)$ implique que

$$\left|\int_{t_1}^{\infty} a(s, \psi(s))ds - \int_{t_2}^{\infty} a(s, \psi(s))ds\right| = \left|\int_{t_1}^{t_2} a(s, \psi(s))ds\right| \leq D|t_1 - t_2|, \tag{3.30}$$

et qu'il y a L_1, L_2, L_3, L_4 des positifs , donc si $X_i \in \mathbb{R}^2$ alors $|b(X_1) - b(X_2)| \leq L_1|X_1 - X_2|$,

$$L_4 \geq f(x) \geq L_2\ , \quad \text{and} \quad g(x)\int_0^x f(s)ds \geq L_3 x^2. \tag{3.31}$$

Maintenant pour J , α à déterminer, soit

$$M = \{\psi : [0, \infty) \to \mathbb{R}^2\ |\psi \in C\ \ , \quad |\psi(t)|\ \leq J\exp(-\alpha t)\}$$

et pour chaque $\psi \in M$ considérer le système :

$$x' = y,$$

$$y' = -f(x)y - g(x) + e(t), \tag{3.32}$$

où $e(t) = Kh(t, \psi(t))$.

Lemme 3.3.1 *Si 3.28-3.31 tiennent et si nous définissons :*

$$V(x, y) = \left(\frac{1}{2}\right) y^2 + 2\int_0^x g(s)ds + \left(\frac{1}{2}\right)\left(y + \int_0^x f(s)ds\right)^2, \tag{3.33}$$

alors il y a un $\eta > 0$ *de sorte que la dérivée de* V *le long d'une solution de* 3.32 *satisfait*

$$V'(x(t), y(t)) \leq -\eta V(x, y) + 2\sqrt{V(x, y)}|e(t)| \tag{3.34}$$

et il y a un $k_1 > 0$ *avec*

$$k_1(x^2 + y^2) \leq V(x, y). \tag{3.35}$$

Preuve. On a

$$\begin{aligned} V'(x, y) &= 2g(x)y - f(x)y^2 - yg(x) + ye(t) + \left(y + \int_0^x f(s)ds\right)(f(x)y \\ &- f(x)y - g(x) + e(t)) \\ &= -f(x)y^2 + ye(t) - g(x)\int_0^x f(s)ds + \left(y + \int_0^x f(s)ds\right)e(t) \\ &\leq -f(x)y^2 - g(x)\int_0^x f(s)ds + |y||e(t)| + \left|y + \int_0^x f(s)ds\right||e(t)| \\ &\leq -L_2y^2 - L_3x^2 + \left[\sqrt{2}\left(\frac{|y|}{\sqrt{2}}\right) + \sqrt{2}\frac{\left(|y + \int_0^x f(s)ds|\right)}{\sqrt{2}}\right]|e(t)| \\ &\leq -L_2y^2 - L_3x^2 + 2|e(t)|\sqrt{V(x, y)}. \end{aligned}$$

■

Mais si nous utilisons 3.31, en particulier g est Lipschitz, alors on a

$$\begin{aligned} V(x, y) &\leq \left(\frac{1}{2}\right)y^2 + (L_1)x^2 + y^2 + \left(\int_0^x f(s)ds\right)^2 \\ &\leq \left(\frac{3}{2}\right)y^2 + (L_1)x^2 + L_4^2x^2 \end{aligned}$$

et donc il y a un $\eta > 0$ avec

$$V\prime(x, y) \leq -\eta V(x, y) + 2|e(t)|\sqrt{V(x, y)}.$$

Pour trouver k_1, on a

$$L_3 x^2 \leq g(x) \int_0^x f(s)ds \leq |g(x)| L_4 |x|$$

ou

$$|g(x)| \geq \frac{L_3 |x|}{L_4}$$

et donc

$$\int_0^x g(s)ds \geq \frac{L_3 x^2}{(2L_4)}.$$

De ceux-ci nous pouvons trouver k_1.

Théorème 3.3.1 (2) *Supposez qu'il y a* $\alpha, \beta, J,$ *et* S *avec* $0 < \alpha \leq \beta < \frac{\eta}{2}$ *pour que*

$$|\psi(t)| \leq J \exp(-\alpha t) \Rightarrow |h(t, \psi(t))| \leq S \exp(-\beta t) \quad , \quad t \geq 0 \tag{3.36}$$

et

$$J((\frac{\eta}{2}) - \beta)\sqrt{k_1} > SK.$$

si

$$M = \{\psi : [0; \infty) \to \mathbb{R}^2 | \in C \quad , \quad |\psi(t)| \leq J \exp(-\alpha t)\}$$

et si $|(x_0, y_0)|$ *est petite, alors la solution de 3.32 à* (x_0, y_0) *pour tout* $t_0 \geq 0$ *est dans* M*.*

Preuve. Sélectionnez $\psi \in M$ et (x_0, y_0, t_0) de sorte que $(x(t), y(t))$ soit fixe, et par conséquent, $V(t) = V(x(t), y(t))$ est déterminé en 3.33. ■

Dans

$$V'(t) \leq -\eta V(t) + 2|e(t)|\sqrt{V(t)},$$

nous obtenons d'abord

$$V(t) \leq V(0) \exp(-\eta t) + 2 \int_0^t \exp(-\eta(t-s)|e(s)|\sqrt{V(s)}ds,$$

ou

$$\exp(\eta t)V(t) \leq V(0) + 2\int_0^t \exp((\frac{1}{2})\eta s)\,|e(s)|\,\sqrt{\exp(\eta s)V(s)}ds,$$

que nous écrivons

$$u(t) \leq u(0) + 2\int_0^t \exp((\frac{1}{2})\eta s)|e(s)|\sqrt{u(s)}ds.$$

Par l'inégalité de Bihari ([19] et [22, p. 29]) on a $u(t) \leq w(t)$ où $w(t)$ est le solution maximale de

$$w(t) = u(0) + 2\int_0^t \exp\left((\frac{1}{2})\eta s\right)|e(s)|\sqrt{w(s)}ds.$$

Ainsi, en laissant $v(t) = \sqrt{w(t)\exp(-\eta t)}$ on obtient $2v'(t)+\eta v(t) = 2|e(t)|$ ou $v'+\frac{\eta}{2}v = |e(t)|$. on a alors

$$\begin{aligned}
v(t) &= v_0 \exp\left(-(\frac{\eta}{2})t\right) + \int_0^t \exp\left(-\left(\frac{\eta}{2}\right)(t-s)\right)|e(s)|ds \\
&\leq v_0 \exp\left(-(\frac{\eta}{2})t\right) + \int_0^t SK\exp\left(-\left(\frac{\eta}{2}\right)(t-s) - \beta s\right)ds \\
&= v_0 \exp\left(-(\frac{\eta}{2})t\right) + SK\exp\left(-(\frac{\eta}{2})t\right)\left[(\frac{\eta}{2}) - \beta\right]^{-1}\exp\left[\left(\frac{\eta}{2}\right) - \beta\right]s|_0^t \\
&\leq \left(v_0 + \left[(\frac{\eta}{2}) - \beta\right]^{-1} SK\right]\exp(-\beta t).
\end{aligned}$$

Par conséquent,

$$\sqrt{k_1(x^2(t)+y^2(t))} \leq \sqrt{V(t)}$$

$$\leq \left[\sqrt{V(x_0,y_0)} + \left[(\frac{\eta}{2}) - \beta\right]^{-1} SK\right]e(-\beta t). \tag{3.37}$$

Ainsi, $(x(t), y(t))$ est dans M à condition que

$$J_0 = \sqrt{\frac{V(x_0,y_0)}{k_1}} + \left[((\frac{\eta}{2}) - \beta)\sqrt{k_1}\right]^{-1} SK < J, \tag{3.38}$$

comme demandé.

Remarque 3.3.1 *Notez que* (35) *est une relation intéressante. Par exemple, soit* $h(t,x,y) = Kp(t)x^n$.

Ainsi, si $|\psi(t)| < J\exp(-\alpha t)$,alors

$$|h(t,\psi(t))| \leq KJp(t)\exp(-\alpha nt) < S\exp(-\alpha t),$$

à condition que

$$p(t) < \left(\frac{S}{KJ}\right)\exp(-\alpha(1-n)t) :$$

(i) Si $n = 1, p(t)$ doit être borné.

(ii) Si $n > 1$, alors $p(t)$ peut être exponentiellement non borné.

(iii) Si $n < 1$, alors $p(t)$ doit tendre vers 0 exponentiellement.

Maintenant, pour un résultat local, nous regardons 3.37 et 3.38. Soit D l'ensemble de (x_0, y_0) pour lequel 3.38 détient. Pour tout tel (x_0, y_0) et tout $t_0 \geq 0$,la solution $(x(t), y(t))$ reste dans un ensemble

$$\Omega(J_0) = \{(x,y)|x^2 + y^2 \leq J_0^2\}.$$

Théorème 3.3.2 (3) *Si 3.31 contient* $\Omega(J_0)$ *et si* (x_0, y_0) *satisfait 3.38 alors la solution de 3.32 à* (x_0, y_0) *pour* $t_0 \geq 0$ *est dans* M *et la solution correspondante de 3.27 est en* M.

Preuve. Notez que $\Omega(J_0)$ est convexe. Ecrire 3.39 comme

$$x' = F(X) + E(t), \tag{3.39}$$

avec $E(t) = (0, Kh(t,(t)))^T$ et définir un nouveau système :

$$X' = G(X) + E(t), \tag{3.40}$$

par $G(X) = F(X)$ pour $X \in \Omega(J_0)$ et si X est dans le complément de $\Omega(J_0)$ alors la droite de $(0,0)$ à X intersecte la frontière de $\Omega(J_0)$ à point unique X^*. Dans ce dernier cas, définir $G(X) = F(X^*)$. Alors G est continu et globalement Lipschitz. Toute solution de 3.40 avec des valeurs initiales dans $\Omega(J_0)$ réside dans le théorème de M. Krasnoselskii va maintenant dire que 3.28 a une solution dans M. $\blacksquare$

Conclusion

La théorie du point fixe est d'une importance capitale dans l'étude de l'existence de solution pour les équations différentielles non linèaires.

De nombreux théorèmes d'existence sont obtenus à partir des théorèmes de Banach et Schauder, en transformant le problème d'existence en un problème de point fixe. Mais celui de Brouwer est particulièrement célèbre.

Le théorème de Banach ne s'appuie pas sur les propriétés topologiques du domaine de définition mais sur le fait que la fonction étudiée soit contractante.

Le résultat de Brouwer est l'un des théorèmes-clef caractèrisant la topologie d'un espace euclidien. Il intervient pour établir des résultats finis sur les équations différentielles , il est présent dans la géométrie différentielle. Il apparait dans diverses branches, comme la théorie des jeux.

Ce théorème est généralisé en 1930 aux espaces de Banach. Cette généralisation est due à Schauder. Ce théorème affirme qu'une application continue sur un convexe compact admet un point fixe, qui n'est pas nécessairement unique, mais qui nous permet de résoudre plusieurs problèmes.

Mais en 1955, Krasnoselskii a joint les deux résultats de Banach et Schauder afin d'entirer son théorème qui affirme sous certaines conditions sur l'espace de Banach, l'application de la forme : $Ux + Cx$ Où U est contractante et C compact admet un point fixe.

De cette théorie découlent plusieurs applications qui constituent un domaine trés actif de la recherche.

Bibliographie

[1] D.R. SMART, Fixed Point Theorems, Cambridge University Press, Cambridge, 1980

[2] J. SCHAUDER, Über den Zusammenhang zwishen der Eindeutigkeit and L¨osbarkeit partieller Differentialgleichungen zweiter Ordnung vom elliptischen Typus, Math. Ann. 106 (1932) 661–721

[3] M.A. KRASNOSELSKII, in Amer. Math. Soc. Trans. (2) 10 (1958) 345–409

[4] H. SCHAEFER, Über die Methode der a priori-Schranken, Math. Ann. 129 (1955) 415–416

[5] ERWIN KREYSZIG, Introductory Functional Analysis with Applications, Wiley, New York, 1978

[6] V. VOLTERRA, Lecons sur la th´eorie math´ematique de la lutte pour la vie, Gauthier-Villars, Paris, 1931

[7] C. CORDUNEANU, Integral Equations and Applications, Cambridge University Press, Cambridge, 1991

[8] G. GRIPENBERG, S.O. LONDEN, and O. STAFFANS, Volterra Integral and Functional Equations, Cambridge University Press, Cambridge, 1990

[9] J.J. LEVIN, On a nonlinear Volterra equation, J. Math. Anal. Appl. 39 (1972) 458–476

[10] J.J. LEVIN and J. NOHEL, On a nonlinear delay equation, J. Math. Anal. Appl. 8 (1964) 31–44

[11] T.A. BURTON, P.W. ELOE, and M.N. ISLAM, Periodic solutions of linear integro-differential equations, Math. Nachr. 147 (1990) 175–184

[12] T.A. BURTON, P.W. ELOE, and M.N. ISLAM, Nonlinear integrodifferential equations and a priori bounds on periodic solutions, Ann. Mat. pura appl. CLXI (1992) 271–283

[13] T.A. BURTON, Liapunov functionals and periodicity in integral equations, Tohoku Math. J.46 (1994) 207–220

[14] T.A. BURTON, Boundedness and periodicity in integral and integro-differential equations, Differential Equations and Dynamical Systems 1 (1993) 161–172

[15] TA Burton, C Kirk, A Fixed Point Theorem of Krasnoselskii-Schaefer Type. Mathematische Nachrichten, 1998

[16] T.A. BURTON and TETSUO FURUMOCHI, Periodic solutions of Volterra equations and attractivity, Dynamic Systems and Applications 3 (1994) 583–598

[17] J.J. LEVIN, The asymptotic behavior of a Volterra equation, Proc. Amer. Math. Soc. 14 (1963) 534–541

[18] R. Bellman, Stability Theory of DiFerential Equations, McGraw-Hill, New York, 1953.

[19] I. Bihari, A generalization of a lemma of Bellman andits application to uniqueness problems of diFerential equations, Acta. Math. Sci. Hungar. 7 (1956) 71–94.

[20] T. Burton, A xed-point theorem of Krasnoselskii, Appl. Math. Lett. 11 (1998) 85–88.

[21] E.A. Coddington, N. Levinson, Theory of Ordinary DiFerential Equations, McGraw-Hill, New York,1955.

[22] P. Hartman, Ordinary DiFerential Equations, Wiley, New York, 1964.

[23] V. Lakshmikantham, S. Leela, DiFerential andIntegral Inequalities, Vol. I, Academic Press, New York,1969.

[24] O. Perron, Uber Stabilitat undasymptotisches verhalten der Integrale von DiFerentialgleichungssystemen,Math. Z. 29 (1929) 129–160.