

République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

UNIVERSITÉ MOHAMED KHIDER, BISKRA

FACULTÉ des SCIENCES EXACTES et des SCIENCES de la NATURE et de la VIE

DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES



Mémoire présenté en vue de l'obtention du Diplôme :

MASTER en Mathématiques

Option : **Probabilité**

Par

Boussiouda Khawla

Titre :

Techniques de simulation : discrétisation des équations différentielles stochastiques

Membres du Comité d'Examen :

Dr. Khelfallah Nabil	UMKB	Président
Dr. Chighoub Farid	UMKB	Encadreur
Dr. Tamer Lazhar	UMKB	Examineur

Juin 2018

DÉDICACE

Je dédie ce humble travail à ma *F*amille

mes *A*mis

et mes *C*ollègues.

REMERCIEMENTS

Je tiens à exprimer toute ma reconnaissance à mon Directeur de mémoire Monsieur “**CHIGHOUB Farid**”. Si j’ai choisi le domaine de probabilité, je le dois avant tout à la personnalité de mon encadreur, il me donner un goût aux probabilité, je le remercie de m’avoir encadré, orienté, aidé, conseillé, et il a consacré à m’apporter les outils méthodologiques à la conduite de ce travail.

Je remercie en particulier
tous les professeurs qui ont accepté à me rencontrer et répondre à mes questions.

Je remercie mes chers
parents, mes frères **Elyes** et **Abdo**, et ma sœur **Sara** pour leur encouragement.

Je remercie très spécialement ma tante
Djamila, ma grande mère, et mon grand père qui ont toujours été là pour moi.

Je tiens à remercie **Sara**, **Nawel**, **Kahina**, **Malika**, et **Hafedh**, pour
leurs amitié et confiance, pour leurs soutien inconditionnel et leurs encaregement.

Enfin, je remercie tous nous aide de prés ou de loin.

Merci à tous

Table des matières

Remerciements	ii
Table des matières	ii
Liste des figures	v
Introduction	1
1 Rappels sur le calcul stochastique	3
1.1 Mouvement Brownien et Martingales	5
1.2 Existence et Unicité de solution des équations différentielles stochastiques .	8
1.2.1 Définitions et notations	9
2 Discrétisation des équations différentielles stochastiques	12
2.1 Approximations stochastiques	13
2.1.1 Développement stochastique de Taylor	13
2.1.2 Méthodes explicites de Taylor au sens de la convergence forte	14
2.1.3 Méthode d'Euler Maruyama	14
2.1.4 Convergence forte du schéma d'Euler	16
2.1.5 Convergence faible du schéma d'Euler	19
2.1.6 Schéma de Milstein	23
2.2 Convergence forte du schéma de Milstein	27

2.3	Convergence faible du schéma de Milshtein	27
3	Simulation numérique de l'équation différentielle stochastique	28
3.1	Simulation de trajectoire Brownienne	28
3.2	Simulation avec la méthode d'Euler Maruyama	31
3.3	La convergence forte et faible de la méthode d'Euler	33
3.3.1	L'examin de la convergence faible	37
3.4	Simulation avec la méthode de Milshtein	39
	Conclusion	42
	Bibliographie	42
	Annexe A :LesprogrammeMATLAB	44
	Annexe B : Abréviations et Notations	47

Table des figures

3.1	Simulation d'une trajectoire de mouvement Brownien sur $[0,1]$	29
3.2	Simulation d'une trajectoire Brownienne : vectorisée.	30
3.3	La fonction $u(B(t))$ en moyenne sur 1000 trajectoires discrétisés et les 5 trajectoires individuelles.	31
3.4	La solution approchée par la méthode d'Euler-Maruyama et la solution exacte.	32
3.5	La convergence forte d'Euler-Maruyama.	35
3.6	La convergence faible d'Euler-Maruyama.	38
3.7	Le résultat de l'erreur faible pour la méthode d'Euler-Maruyama.	39
3.8	La solution approchée par la méthode de Milshtein et la solution exacte.	41

Introduction

Depuis les observations de le botaniste anglais *Robert Brown*, en 1828, sur le déplacement des grains de pollen en suspension dans l'eau qui a proposé une description de ce phénomène et a expliqué et a illustré ce qu'est un processus stochastique et le modélisé mathématiquement par un mouvement Brownien ou processus de *Wiener*, alors l'existence d'un modèle mathématique permettra de pouvoir quantifier numériquement certains phénomènes et de pouvoir certains comportements.

Au delà de cette histoire, la plupart du temps, ne connaissant pas de solution analytique simple au problème étudié, la présente étude a pour objectif essentiel d'analyser et de construire des approximations numériques, en étudiant leurs propriétés de convergence.

On Considère l'équation différentielle stochastique suivante

$$\begin{cases} dX_t = b(t, X_t)dt + \sigma(t, X_t)dB_t, \\ X_0 = Z \in \mathbb{R}^n. \end{cases} \quad (1)$$

On va démontrer dans ce mémoire que si b et σ sont des fonctions continues en (t, x) et lipschitziennes en x , l'équation 1 possède une unique solution forte (X_t) . Cependant, il est parfois difficile d'obtenir une expression analytique pour cette solution. Il est donc important de développer des méthodes numériques afin de simuler des approximations de la solution de telles équations.

Notre travail est structuré en trois chapitres.

. Dans le **premier** chapitre, nous rappelons des notions très importantes en théorie de

probabilité, nous commençons par quelques rappels sur le calcul stochastique concernant le mouvement Brownien, il s'agit d'une présentation élémentaire, qui s'appuie sur la simulation numérique, et permet de rappeler quelques propriétés classiques et aussi il est consacré à un rappels sur les équation différentielle stochastique, cité quelques unes de leurs propriétés et on propose les théorèmes d'existence et d'unicité des solutions. Nous abordons ensuite la notion d'intégrale stochastique.

- . Ensuite, dans le **deuxième** chapitre on va donner les méthodes de discrétisation, en commencent par le schéma d'*Euler* on va étudier en détail ce schéma et nous donnons des résultats de convergence L^p et $p.s$ du schéma et en en précisant l'ordre de convergence. Nous étudions ensuite le schéma de *Milshstein* qui permet, dans certains cas, d'améliorer la vitesse de convergence du schéma d'*Euler* et nous donnons des résultats sur les vitesses de convergence L^p et $p.s$.
- . Puis nous abordons au chapitre **trois** une application sur la simulation de mouvement Brownien, en utilisant les différents schémas étudiés dans le deuxième chapitre.

Chapitre 1

Rappels sur le calcul stochastique

Dans ce chapitre on va présenter brièvement les notions basiques et les résultats de calcul stochastique dont nous aurons besoin dans la suite de ce mémoire. D'abord on considère un espace de probabilisé complet (Ω, \mathcal{F}, P) .

Définition 1.0.1 (Processus stochastique) *Un processus aléatoire (ou fonction aléatoire) $X = (X_t)_{t \in \mathbf{T}}$ est une famille de variables aléatoires X_t indexée par un ensemble T sur (Ω, \mathcal{F}) à valeur dans un espace mesurable (E, B) , dans ce qui suit on prendra tantôt $\mathbf{T} = [0, T]$, avec $T > 0$, en général un processus dépend de deux paramètres $X_t(\omega)$ dépend de temps t et de l'aléatoire $\omega \in \Omega$. Il est important de garder l'esprit si on a deux processus stochastiques X et Y définis sur le même espace de probabilité (Ω, \mathcal{F}, P) , Quand peut-on dire $X = Y$?.*

Définition 1.0.2 (Processus indistinguables) *On dit que deux processus X et Y qui sont définis sur le même espace de probabilité (Ω, \mathcal{F}, P) sont indistinguables si P -p.s les trajectoires de X et de Y sont les mêmes, c'est à dire $P(X_t = Y_t, \forall t \geq 0) = 1$. On peut affaiblir cette notion en*

Définition 1.0.3 (Modification d'un processus) *On dit que X est une modification (ou une version) de Y si pour tout $t \in T$, $P(X_t = Y_t) = 1$. Autrement dit, pour tout $t \in T$ les variables aléatoires X_t et Y_t sont presque sûrement égales.*

Remarque 1.0.1 Clairement si X et Y sont indistinguables alors l'un est une modification de l'autre. La réciproque est fautive, car la notion d'instinguabilité est plus forte que la notion de modification.

Définition 1.0.4 (Filtration) Une filtration (ou flot d'informations) $\{\mathcal{F}_t\}_{t \geq 0}$ de (Ω, \mathcal{F}) est une famille croissante de sous-tribus de \mathcal{F}

$$\forall s, t \in T, s < t \Rightarrow \mathcal{F}_s \subset \mathcal{F}_t \subset \mathcal{F}.$$

Alors on dit que $(\Omega, \{\mathcal{F}_t\}_{t \in T}, \mathcal{F}, P)$ est un espace de probabilité filtré.

Définition 1.0.5 (Conditions habituelles) Soit $\{\mathcal{F}_t\}_{t \geq 0}$ une filtration sur (Ω, \mathcal{F}, P) , On dit que \mathcal{F}_t satisfait aux conditions habituelles si et seulement si

- i \mathcal{F}_0 contient tous les P -négligeables de \mathcal{F} ,
- ii si $T = \mathbb{R}^+$ ou $[0, T]$ alors $\{\mathcal{F}_t\}$ est continue à droite, C'est à dire

$$\forall t \in T, \mathcal{F}_t = \bigcap_{\epsilon > 0} \mathcal{F}_{t+\epsilon}.$$

Définition 1.0.6 (Processus adapté) Soient $\{\mathcal{F}_t\}_{t \geq 0}$ une filtration et $(X_t)_{t \in T}$ un processus sur (Ω, \mathcal{F}, P) , On dit que X est $\{\mathcal{F}_t\}_{t \geq 0}$ -adapté (ou non-anticipant) si $\forall t \in T : X_t$ est \mathcal{F}_t -mesurable.

Définition 1.0.7 (Temps d'arrêt) On travaille sur un espace muni d'une filtration \mathcal{F}_t . Soit τ une variable aléatoire à valeurs dans $\overline{\mathbb{R}}_+$. τ est un $\{\mathcal{F}_t\}_{t \geq 0}$ -temps d'arrêt si, $\forall t \in T, \{\tau \leq t\} \in \mathcal{F}_t$.

Si τ un \mathcal{F}_t -temps d'arrêt, on appelle tribu des événements antérieurs à τ et on note \mathcal{F}_τ la tribu définie par

$$\mathcal{F}_\tau := \{A \in \mathcal{F} : A \cap \{\tau \leq t\} \in \mathcal{F}_t, \forall t \in T\}.$$

Définition 1.0.8 (*Processus à trajectoires continues*) On dit que le processus est à trajectoires continues (ou est continu) si les applications $t \mapsto X_t(\omega)$ sont continues pour presque tout ω .

1.1 Mouvement Brownien et Martingales

On se donne un espace de probabilité (Ω, \mathcal{F}, P) , et un processus $(B_t, t \geq 0)$ sur cet espace.

Définition 1.1.1 (*Mouvement Brownien standard*) Le processus $(B_t, t \geq 0)$ est un mouvement Brownien (MB en abrégé, dans la suite) si

- i $P - p.s$ $B_0 = 0$ (issu de l'origine),
- ii pour $0 \leq s \leq t$, $B_t - B_s$ est indépendant de la tribu $\sigma\{B_u, u \leq s\}$ et suit la loi $\mathcal{N}(0, t-s)$,
- iii $p - p.s$ $t \mapsto B_t(\omega)$ est continue, pour $\omega \in \Omega$.

Remarque 1.1.1 On dit que B est un $\{\mathcal{F}_t\}_{t \geq 0}$ -MB si B est un processus continu, adapté à la filtration $\{\mathcal{F}_t\}_{t \geq 0}$, vérifiant

$$\forall u \in \mathbb{R}, \forall 0 \leq s \leq t, E[\exp(iu(B_t - B_s)) / \mathcal{F}_s] = \exp\{-u^2(t-s)/2\}.$$

Proposition 1.1.1 Soit B un MB standard alors

- i $-B$ est aussi un MB,
- ii pour tout $c > 0$, le processus $\{\frac{1}{c}B_{c^2t}\}_{t \geq 0}$ est un MB (invariance par changement d'échelle),
- iii pour tout $s \geq 0$, le processus $\{B_{t+s} - B_s\}_{t \geq 0}$ est un MB indépendant de $\sigma\{B_u, u \leq s\}$ (propriété de Markov simple).

Définition 1.1.2 *Mouvement Brownien d -dimensionnel standard* est un processus $(B_t, t \geq 0)$ à valeurs dans \mathbb{R}^d tel que si on note

$$B_t = \left(B_t^{(1)}, \dots, B_t^{(d)} \right),$$

les processus $B^{(i)}, 1 \leq i \leq d$, sont des mouvements Browniens standards indépendants à valeurs réelles.

Définition 1.1.3 (Martingale) *On se donne une filtration $\{\mathcal{F}_t\}_{t \geq 0}$.*

Un processus X_t à valeurs réelles, \mathcal{F}_t -adapté et intégrable est

- une martingale, si $\forall n \in \mathbb{N}$ on a : $E[X_{n+1}/\mathcal{F}_n] = X_n$,
- une surmartingale, si $\forall n \in \mathbb{N}$ on a : $E[X_{n+1}/\mathcal{F}_n] \leq X_n$,
- une soumartingale, si $\forall n \in \mathbb{N}$ on a : $E[X_{n+1}/\mathcal{F}_n] \geq X_n$.

Ces définitions s'étendent aux vecteurs aléatoire de \mathbb{R}^d , c'est à dire chaque composantes doit être respectivement une martingale, surmartingale et sousmartingale réelle.

Remarque 1.1.2 *Si B est un MB, alors $\{B_t^2 - t\}_{t \geq 0}$ et $\{\exp(\sigma B_t - \sigma^2 t/2)\}_{t \geq 0}$ sont des martingales.*

Théorème 1.1.1 (Théorème d'arrêts) *Soit $(\Omega, \{\mathcal{F}_t\}_{t \in T}, \mathcal{F}, P)$ est un espace de probabilité filtré.*

Si X est une martingale et si δ et τ deux temps d'arrêts bornés tels que $\delta \leq \tau$ alors, $E[X_\tau/\mathcal{F}_\delta] = X_\delta$ $P - p.s.$

Rappelons aussi qu'un processus X adapté et intégrable est une martingale si et seulement si, pour tout temps d'arrêt borné τ , $E[X_\tau] = E[X_0]$.

Pour le dernier résultat nous supposons que la filtration $\{\mathcal{F}_t\}_{t \geq 0}$ vérifie les conditions habituelles.

Définition 1.1.4 (Martingale locale) *Soit X un processus $\{\mathcal{F}_t\}_{t \geq 0}$ -adapté, à trajectoires continues à droite. On dit que X est une martingale locale s'il existe une suite croissante de temps d'arrêts $\{\tau_n\}_{n \geq 1}$ telle que $\lim_{n \rightarrow \infty} \tau_n = +\infty$ $P - p.s$ et, pour tout n , $\{X^{\tau_n} 1\}_{\tau_n > 0}$ est une martingale.*

Définition 1.1.5 (Processus d'Itô) On appelle processus d'Itô un processus $(X(t))_{t \geq 0}$ à valeur réelles tel que $P - p.s \forall 0 \leq s \leq t$,

$$X(t) = X(0) + \int_0^t b(s)ds + \int_0^t \sigma(s)dB(s), \quad (1.1)$$

où, $X(0)$ est \mathcal{F}_0 -mesurable, b et σ sont deux processus mesurables vérifiant les conditions suivantes

$$\int_0^T |b(s)| ds < \infty \text{ } P - p.s \text{ et } \int_0^T \|\sigma(s)\| ds < \infty \text{ } P - p.s \quad (1.2)$$

où, $\|\sigma\| = \text{trace}(\sigma\sigma^t)$.

Le coefficient b est appelé le *drift* (ou la dérive), σ est le coefficient de *diffusion*.

Maintenant, nous établissons les célèbres formules d'Itô qui sont les outils principaux du calcul stochastique.

Théorème 1.1.2 (Première formule d'Itô) Soient $(X(t))_{t \geq 0}$ un processus d'Itô, et $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ fonction de classe \mathcal{C}^2 . Alors

$$f(X(t)) = f(X(0)) + \int_0^t f'_x(X(s))dX(s) + \frac{1}{2} \int_0^t f''_{xx}(X(s))\sigma^2(s)ds. \quad (1.3)$$

Théorème 1.1.3 (Deuxième formule d'Itô) Soient $(X(t))_{t \geq 0}$ un processus d'Itô, et $(t, x) \mapsto f(t, x)$ une fonction réelle deux fois différentiable en x , et une fois différentiable en t . On a

$$f(t, X(t)) = f(0, X(0)) + \int_0^t f'_s(s, X(s))ds + \int_0^t f'_x(s, X(s))dX(s) + \frac{1}{2} \int_0^t f''_{xx}(s, X(s))\sigma^2(s)ds. \quad (1.4)$$

Proposition 1.1.2 (Formule d'intégration par partie) Soient $(X(t))_{t \geq 0}$ et $(Y(t))_{t \geq 0}$ deux processus d'Itô, alors

$$X(t)Y(t) = X(0)Y(0) + \int_0^t X(s)dY(s) + \int_0^t Y(s)dX(s) + \langle X, Y \rangle_t. \quad (1.5)$$

1.2 Existence et Unicité de solution des équations différentielles stochastiques

Les équations différentielles stochastiques jouent un rôle primordial dans le domaine des applications tels la biologie, la chimie, l'économie et la finance. Une compréhension complète de la théorie des E.D.S demande une combinaison entre les probabilités avancées et les processus stochastiques.

Soient (Ω, \mathcal{F}, P) un espace de probabilité complet et $(B_t)_{t \geq 0}$ un MB d -dimensionnel sur cet espace, et on considère une variable aléatoire y de carré intégrable, et indépendante du MB B_t . On se donne un intervalle $[0, T]$ et $s \in [0, T]$, et on considère une filtration définie, $\forall t > 0, \mathcal{F}_t = \delta\{\delta\{y, B_s; s \leq t\} \cup \mathbb{N}\}$. Et on considère aussi deux fonctions

$$\begin{aligned} b &: [0, T] \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n, \\ \sigma &: [0, T] \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^{n \times d}, \end{aligned}$$

qui sont mesurables. On cherche à résoudre l'équation différentielle stochastique

$$X_t = y + \int_0^t b(s, X(s))ds + \int_0^t \sigma(s, X(s))dB_s. \quad (1.6)$$

Le coefficients b s'appelle la dérive tandis que la matrice $\sigma \sigma^t$ s'appelle la matrice de diffusion.

1.2.1 Définitions et notations

Soient (Ω, \mathcal{F}, P) un espace de probabilité complet et $(B_t)_{t \geq 0}$ un MB d -dimensionnel sur cet espace, et on considère une variable aléatoire y de carré intégrable, et indépendante du MB B_t . On se donne un intervalle $[0, T]$ et $s \in [0, T]$, et on considère une filtration définie, $\forall t > 0, \mathcal{F}_t = \delta\{\delta\{y, B_s; s \leq t\} \cup \mathbb{N}\}$. Et on considère aussi deux fonctions

$$\begin{aligned} b &: [0, T] \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n, \\ \sigma &: [0, T] \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^{n \times d}, \end{aligned}$$

qui sont mesurables.

On cherche à résoudre l'équation différentielle stochastique

$$X_t = y + \int_0^t b(s, X(s)) ds + \int_0^t \sigma(s, X(s)) dB_s. \quad (1.7)$$

Le coefficients b s'appelle la dérive tandis que la matrice $\sigma \sigma^t$ s'appelle la matrice de diffusion.

Définition 1.2.1 (Solution forte) *Un processus $\{X_t\}_{t \in [0, T]}$ est appelé une solution forte de l'équation 1.7 avec condition initiale X_0 si*

- i** X_t est \mathcal{F}_t -mesurable, pour tout $t \in [0, T]$,
- ii** $\int_0^T \{|b(s, X(s))| + \|\sigma(s, X(s))\|^2\} ds < \infty$ $P - p.s$, où $\|\sigma\| = \text{trace}(\sigma \sigma^t)$,
- iii** Pour tout $t \in [0, T]$, on a $P - p.s$

$$X_t = y + \int_0^t b(s, X(s)) ds + \int_0^t \sigma(s, X(s)) dB_s. \quad (1.8)$$

On notera l'espace de Banach constitué des processus X suivant

$$S^2 = \left\{ (X_t)_{t \in [0, T]}, X_t \text{ progressivement mesurables, tels que } E \left[\sup_{0 \leq t \leq T} |X_t|^2 \right] < \infty \right\},$$

muni de la norme

$$\|X\| = E \left[\sup_{0 \leq t \leq T} |X_t|^2 \right]^{\frac{1}{2}}.$$

Nous donnons d'abord un résultat classique d'Itô d'existence et d'unicité d'une solution forte sous des conditions un peu restrictives sur les coefficients b et σ .

Théorème 1.2.1 (d'existence et d'unicité) *Supposons que la condition initiale X_0 est de carré intégrable, et qu'il existe des constantes L et K tels que, pour tout $t \in [0, T], x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}$*

1. Condition de Lipschitz

$$|b(t, x)|^2 + |\sigma(t, x)|^2 \leq K(1 + |x|).$$

2. Condition de croissance linéaire

$$|b(t, x) - b(t, y)| + |\sigma(t, x) - \sigma(t, y)| \leq L(|x - y|).$$

Alors l'équation ?? admet une solution forte $\{X_t\}_{t \in [0, T]}$ appartient à S^2 , à trajectoire presque sûrement continue, cette solution est unique dans le sens que si $\{X_t\}_{t \in [0, T]}$ et $\{Y_t\}_{t \in [0, T]}$ sont deux solutions presque sûrement continues, alors

$$P \left(\sup_{t \in [0, T]} |X_t - Y_t| > 0 \right) = 0.$$

De plus, cette solution vérifie

$$E \left(\sup_{t \in [0, T]} |X_t|^2 \right) < \infty.$$

Preuve. Voir [1]. ■

Remarque 1.2.1 *La première conditions nous assure l'existence et l'unicité de la solution de l'équation 1.7. La deuxième condition nous assure que le processus n'échappe pas à l'infini pour t fini (n'explose pas en temps fini). De plus, si cette condition n'est pas vérifiée, l'équation 1.7 admettra une solution unique mais seulement jusqu'au temps d'explosion.*

Chapitre 2

Discrétisation des équations différentielles stochastiques

Cette partie est consacrée à la théorie du développement des conditions de l'ordre des méthodes stochastiques pour résoudre les équations différentielles stochastiques. Notre but est de trouver un schéma approchant la solution d'une équation différentielle stochastique. Les solutions explicites des équations différentielles stochastiques (EDS) sont rarement connues en général. Il est donc nécessaire d'utiliser des méthodes numériques pour obtenir des solutions approchées aux solutions exactes. Les schémas d'Euler et Milstein sont les procédés de discrétisation les plus répandus. Dans le domaine des EDS, il existe deux techniques pour mesurer l'exactitude de cette approximation, l'une utilise la convergence en moyenne quadratique (convergence forte) qui consiste en l'approximation des trajectoires des solutions peuvent être calculés, tandis que la deuxième approche concerne l'approximation de quelques moments de la solution. Cette convergence est appelée la convergence au sens faible.

Dans ce chapitre, nous prions le processus défini par l'équation différentielle stochastique suivante

$$\begin{cases} dX_t = b(t, X_t)dt + \sigma(t, X_t)dB_t, 0 \leq t \leq T, \\ X(0) = X_0. \end{cases} \quad (2.1)$$

La mise en œuvre pratique de ce processus va nécessiter la discrétisation de celui-ci. Pour cela on met l'équation 2.1 sous forme intégrale

$$X_t = X_0 + \int_0^t b(s, X_s)ds + \int_0^t \sigma(s, X_s)dB_s, 0 \leq t \leq T. \quad (2.2)$$

Lorsque le processus considéré ne dispose pas d'une discrétisation exacte, il convient de se tourner vers des approximations discrètes basées sur un développement *d'Itô-Taylor* de 2.2 à des ordres différents.

2.1 Approximations stochastiques

2.1.1 Développement stochastique de Taylor

Dans cette partie, on s'intéresse au développement stochastique de Taylor, ce dernier est une généralisation de la formule déterministe de Taylor. Cette expression stochastique est appelée *formule d'Itô-Taylor*, puisque elle est basée essentiellement sur la formule d'Itô (lemme *d'Itô*). A partir de ce développement, plusieurs approximations d'ordre supérieur peuvent être obtenues.

Formule stochastique d'Itô-Taylor

Les formules de Taylor sont largement connues dans le cas déterministe. On va utilisé une terminologie facile pour présenter le cas stochastique. Ce développement repose sur la combinaison du lemme *d'Itô* et de l'écriture sous forme intégrale d'un processus. Au

début, on considère

$$X_t = X_0 + \int_0^t dX_s. \quad (2.3a)$$

il vient

$$X_t = X_0 + \int_0^t (b(s, X_s)ds + \sigma(s, X_s)dB_s). \quad (2.4)$$

Puis en utilisant à nouveau la méthode pour les fonctions b et σ , on obtient

$$X_t = X_0 + \int_0^t \left\{ b(0, X_0) + \int_0^s db(s, X_s) \right\} dt + \int_0^t \left\{ \sigma(0, X_0) + \int_0^s d\sigma(s, X_s) \right\} dB_t. \quad (2.5)$$

L'utilisation de lemme *d'Itô* aux fonctions b et σ nous permet d'obtenir le développement *d'Itô-Taylor* à l'ordre 1.

2.1.2 Méthodes explicites de Taylor au sens de la convergence forte

Dans la suite, on note δ le pas de discrétisation. T : désigne l'horizon de projection. X : sera le processus que l'on souhaite simuler. $(\tilde{X}_{k\delta})_{k \in [1, \frac{T}{\delta}]}$: le processus discret effectivement utilisé pour simuler des réalisations de X aux instant de discrétisation $k\delta$, $k \in [1, \frac{T}{\delta}]$.

2.1.3 Méthode d'Euler Maruyama

Cette méthode est considérée comme la méthode la plus simple des approximations fortes de Taylor, elle est appelée méthode *explicite d'Euler* (ou *Euler Maruyama*). Historiquement le premier schéma de discrétisation a été proposé par *Maruyama* comme une généralisation du schéma *d'Euler* pour les E.D.O. Le procédé de discrétisation *d'Euler* consiste en l'approximation du processus continu X par le processus discret \tilde{X} défini, avec les

mêmes notations que précédement par

Le schéma d'Euler On considère un mouvement Brownien, $(B_t)_{t \in [0, T]}$ d -dimensionnel, $B_t = (B_t^1, \dots, B_t^d)$, où β^1, \dots, β^d sont des Browniens indépendants.

Problème 2.1.1 Si $(X_t)_{t \in \mathbb{R}^+}$ est une solution de l'équation différentielle stochastique

$$\begin{cases} dX_t = b(t, X_t)dt + \sigma(t, X_t)dB_t, \\ X_0 = y. \end{cases} \quad (2.6)$$

Le problèmes est

- La loi de X_t est souvent inconnue.
- Impossible de simuler en temps continu on doit donc discrétiser.

Définition 2.1.1 (Le schéma d'Euler) Pour $n \in \mathbb{N}^*$

- On se donne une subdivision régulière de l'intervalle $[0, T]$ en N sous-intervalles de même longueur, ici $\{t_0 = 0, t_1 = \frac{T}{N}, \dots, t_N = T\}$ pour $k \in \{0, \dots, N\}$, on pose $t_k = \frac{kT}{N}$.
- On approxime la solution aux points de la subdivision suivant la grille $(t_k)_k$

$$\begin{cases} \tilde{X}^N(t_k) = \tilde{X}^N(t_{k-1}) + \frac{T}{N}b(t_{k-1}, \tilde{X}^N(t_{k-1})) + \sigma(t_{k-1}, \tilde{X}^N(t_{k-1}))(B_{t_k} - B_{t_{k-1}}), \\ \tilde{X}^N(0) = y. \end{cases} \quad (2.7)$$

- On approxime la solution sur $[0, T]$ par le processus linéaire par morceaux passant par les points $(t_k, \tilde{X}^N(t_k))_{0 \leq k \leq N}$, $\forall t \in [t_k, t_{k+1}]$

$$\tilde{X}^N(t) = \tilde{X}^N(t_k) + (t - t_k)b(t_k, \tilde{X}^N(t_k)) + \sigma(t_k, \tilde{X}^N(t_k))(B_t - B_{t_k}). \quad (2.8)$$

- La mise en œuvre pratique est simple, il suffit de générer N vecteurs gaussiens indépendants G_i suit la loi $\mathcal{N}(0, I_d)$, où I_d est la matrice identité de dimension d . Et considérer

$B_{t_i} - B_{t_{i-1}} = \sqrt{t_i - t_{i-1}} G_i$ et aussi l'accroissements $(B_t - B_{t_k})_{0 \leq k \leq N}$ sont indépendantes identiquement distribuées.

Le schéma *d'Euler* est simple à implémenter car il repose sur la simulation des accroissements d'un mouvement Brownien standard.

2.1.4 Convergence forte du schéma d'Euler

L'approche forte consiste à comparer la solution exacte et son approximation pour une même trajectoire du mouvement Brownien B .

Théorème 2.1.1 *On considère l'hypothèses suivantes*

$$\begin{aligned}
 - \mathcal{H}_1 : & \begin{cases} \exists K > 0, \forall t \in [0, T], \forall (x, y) \in (\mathbb{R}^n)^2 \\ 1. |b(t, x) - b(t, y)| + |\sigma(t, x) - \sigma(t, y)| \leq K |x - y|. \\ 2. |b(t, x)| + |\sigma(t, x)| \leq K(1 + |x|). \end{cases} \\
 - \mathcal{H}_2 : & \begin{cases} \exists K > 0, \exists \alpha > 0, \forall (t, s) \in [0, T]^2, \forall x \in \mathbb{R}^n, \\ |b(t, x) - b(s, x)| + |\sigma(t, x) - \sigma(s, x)| \leq K(1 + |x|)(t - s)^\alpha. \end{cases}
 \end{aligned}$$

Remarque 2.1.1 *Lorsque l'équation différentielle stochastique est homogène \mathcal{H}_2 est automatiquement vérifiée.*

Proposition 2.1.1 *Supposons que \mathcal{H}_2 vérifiée. Pour $\lambda = \min(\alpha, \frac{1}{2})$, $\forall p \geq 1, \exists C_p > 0, \forall N \in \mathbb{N}^*$, on note \tilde{X}^N le schéma d'Euler avec N pas de temps, alors*

$$E \left(\sup_{t \in [0, T]} |X_t - \tilde{X}^N(t)|^{2p} \right) \leq \frac{C_p}{N^{2p\lambda}}.$$

Ainsi, $\forall \gamma < \lambda$,

$$N^\gamma \sup_{t \in [0, T]} |X_t - \tilde{X}^N(t)| \xrightarrow[N \rightarrow \infty]{} 0 \text{ , } P.p.s.$$

Preuve. On va donner la démonstration de l'inégalité $E \left(\sup_{t \leq T} |X_t - \tilde{X}^N(t)|^2 \right) \leq \frac{C_p}{N^{2\lambda}}$ qui correspond au cas $p = 1$. Pour tout $u \in [0, T]$ on a

$$\begin{cases} X_u = X_0 + \int_0^u b(s, X_s) ds + \int_0^u \sigma(s, X_s) dB_s, \\ \tilde{X}_u = X_0 + \int_0^u b(\tau_s, \tilde{X}_{\tau_s}) ds + \int_0^u \sigma(\tau_s, \tilde{X}_{\tau_s}) dB_s. \end{cases} \quad (2.9)$$

Alors

$$X_u - \tilde{X}_u = \int_0^u \left(b(s, X_s) - b(\tau_s, \tilde{X}_{\tau_s}) \right) ds + \int_0^u \left(\sigma(s, X_s) - \sigma(\tau_s, \tilde{X}_{\tau_s}) \right) dB_s. \quad (2.10)$$

Donc pour $t \in [0, T]$, en utilisant l'inégalité de *Cauchy-Schwarz* pour l'intégrale classique et celle de *Doob* pour l'intégrale stochastique, on aura

$$\begin{aligned} E \left(\sup_{u \leq t} |X_u - \tilde{X}_u|^2 \right) &\leq 2E \left(\sup_{u \leq t} \left| \int_0^u \left(\sigma(s, X_s) - \sigma(\tau_s, \tilde{X}_{\tau_s}) \right) dB_s \right|^2 \right), \\ &+ 2E \left(\sup_{u \leq t} \left| \int_0^u \left(b(s, X_s) - b(\tau_s, \tilde{X}_{\tau_s}) \right) ds \right|^2 \right), \end{aligned} \quad (2.11)$$

maintenant en utilisant l'inégalité d'*Hölder* pour

$$E \left(\sup_{u \leq t} \left| \int_0^u \left(b(s, X_s) - b(\tau_s, \tilde{X}_{\tau_s}) \right) ds \right|^2 \right) \leq tE \left(\int_0^u |b(s, X_s) - b(\tau_s, \tilde{X}_{\tau_s})|^2 ds \right), \quad (2.12)$$

et l'isométrie d'*Itô* pour

$$2E \left(\sup_{u \leq t} \left| \int_0^u \left(\sigma(s, X_s) - \sigma(\tau_s, \tilde{X}_{\tau_s}) \right) dB_s \right|^2 \right) \leq CE \left(\int_0^u |\sigma(s, X_s) - \sigma(\tau_s, \tilde{X}_{\tau_s})|^2 ds \right), \quad (2.13)$$

on obtient

$$\begin{aligned}
 E \left(\sup_{u \leq t} |X_u - \tilde{X}_u|^2 \right) &\leq CE \left(\int_0^u |\sigma(s, X_s) - \sigma(\tau_s, \tilde{X}_{\tau_s})|^2 ds \right) \\
 &\quad + 2tE \left(\int_0^u |b(s, X_s) - b(\tau_s, \tilde{X}_{\tau_s})|^2 ds \right).
 \end{aligned} \tag{2.14}$$

Avec les hypothèses de régularité faites sur les coefficients σ et b de l'équation différentielles stochastique, on a

$$\begin{aligned}
 \left| \sigma(s, X_s) - \sigma(\tau_s, \tilde{X}_{\tau_s}) \right|^2 &\leq 3 |\sigma(s, X_s) - \sigma(\tau_s, X_{\tau_s})|^2 + 3 |\sigma(s, X_{\tau_s}) - \sigma(\tau_s, X_{\tau_s})|^2 \\
 &\quad + 3 \left| \sigma(\tau_s, X_{\tau_s}) - \sigma(\tau_s, \tilde{X}_{\tau_s}) \right|^2, \\
 &\leq C \left(|X_s - X_{\tau_s}|^2 + (1 + |X_{\tau_s}|^2 (s - \tau_s)^{2\alpha} + |X_{\tau_s} + \tilde{X}_{\tau_s}|^2) \right).
 \end{aligned} \tag{2.15}$$

Comme

$$\begin{aligned}
 E (|X_s - X_{\tau_s}|^2) &\leq 2E \left(\left| \int_{\tau_s}^s \sigma(u, X_u) dB_u \right|^2 \right) + 2E \left(\left| \int_{\tau_s}^s b(u, X_u) du \right|^2 \right), \\
 &\leq C \int_{\tau_s}^s E (|\sigma(u, X_u)|^2) du + 2(s - \tau_s) \int_{\tau_s}^s E (|b(u, X_u)|^2) du, \\
 &\leq C(1 + (s - \tau_s)) \int_{\tau_s}^s E (1 + |X_u|^2) du, \\
 &\leq C(1 + (s - \tau_s))(1 + |z|^2)(\tau_s - s).
 \end{aligned} \tag{2.16}$$

D'après le théorème *d'Itô* (si $E(|z|^2) < \infty$, alors $E \left(\sup_{t \leq T} |X_t|^2 \right) \leq C (1 + E(|z|^2))$ où C ne dépend pas de Z), et comme $0 \leq s - \tau_s \leq \frac{T}{N}$, on en déduit que

$$E \left(\left| \sigma(s, X_s) - \sigma(\tau_s, \tilde{X}_{\tau_s}) \right|^2 \right) \leq C \left(\frac{1}{N} + \frac{1}{N^{2\alpha}} + E \left(\sup_{u \leq s} |X_u - \tilde{X}_u|^2 \right) \right), \tag{2.17}$$

en utilisant 2.14 et en remplaçant σ par b au membre de gauche, on en déduit que

$$E \left(\sup_{u \leq t} |X_u - \tilde{X}_u|^2 \right) \leq C \left(\frac{1}{N} + \frac{1}{N^{2\alpha}} + \int_0^t E \left(\sup_{u \leq s} |X_u - \tilde{X}_u|^2 \right) ds \right). \quad (2.18)$$

On conclut avec le lemme de *Gronwall*. Pour rendre l'argument qui précède rigoureux, il aurait fallu utiliser une technique de localisation, par exemple avec les temps d'arrêt $\eta_p = \inf \left\{ t \geq 0 : |X_t - \tilde{X}_t| \geq p \right\}$ qui sont tels que $E \left(\sup_{u \leq t} |X_{u \wedge \eta_p} - \tilde{X}_{u \wedge \eta_p}|^2 < \infty \right)$. ■

Corollaire 2.1.1 *En pratique, nous intéressons à la convergence de l'espérance d'une fonctionnelle de (\tilde{X}_T^N) vers le même espérance calculée en (X_t) plutôt qu'à la vitesse forte de schéma.*

Dans un premier temps, on peut déduire le corollaire qui donne un premier résultat (grosier) de la convergence faible du schéma d'Euler.

2.1.5 Convergence faible du schéma d'Euler

L'approche faible consistera à comparer les lois, par exemple en comparant des moments. On étudie ici la vitesse de convergence d'espérance d'une fonctionnelle de (\tilde{X}_T^N) vers le même espérance calculée en (X_T) plutôt qu'à la vitesse du schéma.

Proposition 2.1.2 *Sous \mathcal{H}_2 , et f est une fonction lipschitzienne de constante de lipschitz K , et lorsque $\alpha \geq \frac{1}{2}$*

$$\begin{aligned} \left| E(f(X_T)) - E(f(\tilde{X}_T^N)) \right| &\leq E \left(|f(X_T) - f(\tilde{X}_T)| \right), \\ &\leq \sqrt{E \left(|f(X_T) - f(\tilde{X}_T)|^2 \right)}, \end{aligned}$$

comme f est une fonction lipschitzienne de constante de lipschitz K , on aura

$$\begin{aligned} &\leq K \sqrt{E(|X_T - \tilde{X}_T|^2)}, \\ &\leq \frac{C}{\sqrt{N}}. \end{aligned}$$

Mais la première inégalité qui consiste à majorer la valeur absolue de la différence des espérances par l'espérance de la valeur absolue des espérances est très grossière. En fait la question de savoir si $E(f(\tilde{X}^N(T)))$ est proche de $E(f(X_T))$ revient à se manifester si la loi de \tilde{X}_T est proche de celle de X_T . On va donc s'intéresser au problème de la convergence en loi du schéma d'Euler. La convergence en loi est une convergence contre des fonctions tests comme la fonction f introduite plus haut. C'est pourquoi on parle de convergence faible. Le résultat suivant a été démontré par *Talay et Tubaro* [2].

Théorème 2.1.2 *On suppose que σ et b sont des fonctions C_b^∞ sur $[0, T] \times \mathbb{R}^n$ (i.e. de classe C^∞ , avec des dérivées de tous ordres bornées). Et que $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ est C^∞ avec des dérivées à croissance polynomiale*

$$\forall a = (a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{N}^n, \exists p, C > 0, \forall x \in \mathbb{R}^n, \left| \frac{\partial^{a_1 + \dots + a_n} f}{\partial x_1^{a_1} \dots \partial x_n^{a_n}} \right| \leq C(1 + |x|^p).$$

Alors pour tout $l \in \mathbb{N}^*$, on a un développement de l'erreur de la forme suivant

$$E\left(f(\tilde{X}_T^N) - f(X_T)\right) = \frac{C_1}{N} + \frac{C_2}{N^2} + \dots + \frac{C_l}{N^l} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{N^{l+1}}\right). \quad (2.19)$$

Les constantes C_1, \dots, C_l ne dépendent que de f .

- En particulier cela implique que $\left|E\left(f(\tilde{X}_T^N)\right) - E\left(f(X_T)\right)\right| \leq \frac{C}{N}$ alors qu'utiliser la vitesse forte et le caractère lipschitzien de f amène à majorer $\left|E\left(f(\tilde{X}_T^N)\right) - E\left(f(X_T)\right)\right|$ par $\frac{C}{\sqrt{N}}$, ($\alpha = 1$ dans le théorème de convergence forte sous les hypothèses faites ici sur b et σ).

- On peut obtenir la majoration $\left| E \left(f(\tilde{X}_T^N) \right) - E \left(f(X_T) \right) \right| \leq \frac{C}{N}$ (sans développement de l'erreur) en supposant simplement que b et σ sont des fonctions appartenant à C^4 avec des dérivées bornées et $f \in C^4$ avec des dérivées à croissance polynomiales.
- Extrapolation de *Romberg (Richardson)* : on a

$$\begin{aligned} & E \left(2f(\tilde{X}_T^{2N}) - (f(\tilde{X}_T^N) - E(f(X_T))) \right), \\ & = 2 \left(E(f(\tilde{X}_T^{2N})) - (E(f(X_T))) - \left(E(f(\tilde{X}_T^N) - E(f(X_T))) \right) \right), \end{aligned}$$

en utilisant 2.19 pour $l = 2$ on aura

$$\begin{aligned} & = 2 \left(\frac{C_1}{2N} + \frac{C_2}{4N^2} + \mathcal{O} \left(\frac{1}{N^3} \right) \right) - \left(\frac{C_1}{N} + \frac{C_2}{N^2} + \mathcal{O} \left(\frac{1}{N^3} \right) \right), \\ & = -\frac{C_2}{2N^2} + \mathcal{O} \left(\frac{1}{N^3} \right). \end{aligned}$$

La preuve du théorème utilise la régularité de la solution de l'Équation aux Dérivées Partielles

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t}(t, x) + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(t, x) \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}(t, x) + \sum_{i=1}^n b_i(t, x) \frac{\partial u}{\partial x_i}(t, x) = 0, (t, x) \in [0, T] \times \mathbb{R}^n \\ u(T, x) = f(x), x \in \mathbb{R}^n. \end{cases} \quad (2.20)$$

où $a(t, x) = \sigma(t, x)\sigma^*(t, x)$ ($\forall i, j \in \{1, \dots, n\}, a_{ij}(t, x) = \sum_{l=1}^d \sigma_{il}(t, x)\sigma_{jl}(t, x)$). Cette régularité est assurée par le résultat suivant.

Proposition 2.1.3 *Sous les hypothèses du théorème, 2.20 admet une unique solution. En outre, cette solution est C^∞ avec des dérivées à croissance polynomiale. Enfin, pour $(X_t)_{t \in [0, T]}$ solution de 2.6*

$$u(0, y) = E(f(X_T)). \quad (2.21)$$

Preuve du théorème

Nous nous plaçons en dimension $n = d = 1$ pour simplifier et nous allons seulement faire apparaître le premier terme du développement de l'erreur. D'après la condition terminale dans 2.20 et d'après 2.21,

$$E(f(\tilde{X}_T)) - E(f(X_T)) = E(u(T, \tilde{X}_T)) - u(0, z) = E(u(T, \tilde{X}_T) - u(0, \tilde{X}_0)) = \sum_{k=0}^{N-1} \epsilon_k. \quad (2.22)$$

avec $\epsilon_k = E\left(u\left(t_{k+1}, \tilde{X}_{t_{k+1}}\right) - u\left(t_k, \tilde{X}_{t_k}\right)\right)$. Comme sur $[t_k, t_{k+1}]$, $d\tilde{X}_t = b(t_k, \tilde{X}_{t_k})dt + \sigma(t_k, \tilde{X}_{t_k})dB_t$, la formule d'Itô assure que

$$\begin{aligned} u(t_{k+1}, \tilde{X}_{t_{k+1}}) - u(t_k, \tilde{X}_{t_k}) &= \int_{t_k}^{t_{k+1}} \sigma(t_k, \tilde{X}_{t_k}) \frac{\partial u}{\partial x}(t, \tilde{X}_t) dB_t + \int_{t_k}^{t_{k+1}} \frac{\partial u}{\partial t}(t, \tilde{X}_t) \\ &\quad + \frac{1}{2} \sigma^2(t_k, \tilde{X}_{t_k}) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t, \tilde{X}_t) + b(t_k, \tilde{X}_{t_k}) \frac{\partial u}{\partial x}(t, \tilde{X}_t) dt. \end{aligned}$$

L'intégrale stochastique étant d'espérance nulle, on en déduit que

$$\begin{aligned} \epsilon_k &= \int_{t_k}^{t_{k+1}} E(f_k(t, \tilde{X}_t)) dt, \text{ où } f_k(t, \tilde{X}_t) = \frac{\partial u}{\partial t}(t, x) + \frac{1}{2} \sigma_k^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t, x) + b_k \frac{\partial u}{\partial x}(t, x), \\ \sigma_k &= \sigma(t_k, \tilde{X}_{t_k}) \text{ et } b_k = b(t_k, \tilde{X}_{t_k}). \end{aligned}$$

Écrivant 2.20 au point $(t, x) = (t_k, \tilde{X}_{t_k})$, on a $f_k(t_k, \tilde{X}_{t_k}) = 0$, la formule d'Itô assure comme précédemment que

$$E(f_k(t, \tilde{X}_t)) = \int_{t_k}^t E\left(\frac{\partial f_k}{\partial t}(s, \tilde{X}_s) + \frac{1}{2} \sigma_k^2 \frac{\partial^2 f_k}{\partial x^2}(s, \tilde{X}_s) + b_k \frac{\partial f_k}{\partial x}(s, \tilde{X}_s)\right) ds.$$

Ainsi, pour toute fonction g intégrable, $\int_{t_k}^{t_{k+1}} \int_{t_k}^t g(s) ds dt = \int_{t_k}^{t_{k+1}} (t_{k+1} - s) g(s) ds$, il vient

$$\epsilon_k = \int_{t_k}^{t_{k+1}} (t_{k+1} - s) E\left(\frac{\partial f_k}{\partial t}(s, \tilde{X}_s) + \frac{1}{2} \sigma_k^2 \frac{\partial^2 f_k}{\partial x^2}(s, \tilde{X}_s) + b_k \frac{\partial f_k}{\partial x}(s, \tilde{X}_s)\right) ds.$$

Avec la régularité des fonctions u, b et σ , l'espérance dans l'intégrale est bornée ce qui

implique que

$$|\epsilon_k| \leq C \int_{t_k}^{t_{k+1}} (t_{k+1} - s) ds = \frac{CT^2}{2N^2}.$$

En reportant cette inégalité dans 2.22, on obtient que

$$\left| E(f(\tilde{X}_T)) - E(f(X_T)) \right| \leq \frac{CT^2}{2N}.$$

2.1.6 Schéma de Milstein

On peut construire à partir du schéma d'Euler d'autres schémas, on s'intéresse d'essayer d'améliorer l'ordre de convergence forte du schéma d'Euler. Le schéma de Milstein est obtenu en allant plus avant dans le développement *d'Itô-Taylor* (deuxième ordre) et en rajoutant des termes au schéma d'Euler et sa vitesse de convergence forte est en $\frac{1}{N}$ au lieu de $\frac{1}{\sqrt{N}}$ pour le schéma d'Euler. Il permet de faire converger à une vitesse supérieure dans les espaces L^p mais est difficile à simuler quand la dimension est strictement plus grande que 1 et converge en loi à la même vitesse que le schéma d'Euler.

Le cas unidimensionnel

On suppose $n = d = 1$ et on se place dans le cas homogène en temps $\sigma(t, x) = \sigma(x)$ et $b(t, x) = b(x)$. On souhaite discrétiser l'équation différentielle stochastique suivante

$$dX_t = b(X_t)dt + \sigma(X_t)dB_t, \quad X_0 = Z \in \mathbb{R}.$$

Sur l'intervalle de temps $[t_k, t_{k+1}]$,

$$X_t = X_{t_k} + \int_{t_k}^t b(X_s)ds + \int_{t_k}^t \sigma(X_s)dB_s.$$

Comme

$$E \left[\left(\int_{t_k}^t \sigma(X_s)dB_s \right)^2 \right] = E \left(\int_{t_k}^t \sigma^2(X_s)ds \right) \sim C(t - t_k).$$

On voit que, lorsque le pas de temps est petit, le terme d'intégrale stochastique est dominant. Donc pour améliorer la convergence du schéma, il faut améliorer la discrétisation de ce terme d'intégrale stochastique. Pour cela on se place en dimension 1 et on suppose que $b = 0$. Alors, pour $s \in [t_k, t_{k+1}]$,

$$\begin{aligned}\sigma(X_s) &= \sigma\left(X_{t_k} + \int_{t_k}^s \sigma(X_s)dB_s\right) \\ &\simeq \sigma(X_{t_k} + \sigma(X_{t_k})(B_s - B_{t_k})) \\ &\simeq \sigma(X_{t_k}) + \sigma'(X_{t_k})(X_s - X_{t_k}) \\ &\simeq \sigma(X_{t_k}) + \sigma'(X_{t_k})\sigma(X_{t_k})(B_s - B_{t_k}).\end{aligned}$$

Maintenant on utilise l'égalité suivante

$$\int_{t_k}^t (B_s - B_{t_k})dB_s = \frac{1}{2} \{(B_t - B_{t_k})^2 - (t - t_k)\},$$

ce qui conduit à l'approximation

$$\begin{aligned}\int_{t_k}^t \sigma(X_s)dB_s &\simeq \sigma(X_{t_k}) \int_{t_k}^t dB_s + \sigma'(X_{t_k})\sigma(X_{t_k}) \int_{t_k}^t (B_s - B_{t_k})dB_s \\ &= \sigma(X_{t_k})(B_t - B_{t_k}) + \frac{1}{2}\sigma\sigma'(X_{t_k})((B_t - B_{t_k})^2 - (t - t_k)).\end{aligned}$$

Le schéma de *Milshtein* basé sur ce développement.

Pour $d = 1, k \in \{0, \dots, N - 1\}, \forall t \in [t_k, t_{k+1}]$,

$$\begin{cases} \tilde{X}_t = \tilde{X}_{t_k} + \sigma(\tilde{X}_{t_k})(B_t - B_{t_k}) + \frac{1}{2}\sigma\sigma'(\tilde{X}_{t_k})((B_t - B_{t_k})^2 - (t - t_k)) + b(\tilde{X}_{t_k})(t - t_k). \\ \tilde{X}_0 = Z \end{cases}$$

Remarque 2.1.2 Dans un certain sens, on peut considérer la méthode de Milshtein comme une généralisation de la méthode d'Euler déterministe, elles ont le même ordre fort de convergence. Et lorsque la fonction σ est constante, ce schéma est coïncide avec le

schéma d'Euler Maruyama et la vitesse forte de ce dernier est donc en $\frac{C}{N}$.

Pour générer le schéma aux instants de discrétisation $(\tilde{X}_{t_k})_{0 \leq k \leq N}$, il suffit de générer à nouveau les accroissements $(B_{t_{k+1}} - B_{t_k})_{0 \leq k \leq N-1}$, qui sont indépendantes identiquement distribuées, et suit la loi gaussienne $\mathcal{N}(0, \frac{T}{N})$.

Exemple 2.1.1 *Considérons le cas où $(X_t, t \geq 0)$ est une diffusion log-normale définie par :*

$$\begin{cases} dX_t = X_t (r dt + \sigma dB_t), \\ X_0 = x. \end{cases}$$

Soit $\Delta B_k = B_{(k+1)h} - B_{kh}$. Le schéma de *Milshtein* s'écrit

$$\tilde{X}_{t_{kh}} = \tilde{X}_{t_{kh}} \left(1 + \left(r - \frac{1}{2} \sigma^2 \right) h + \sigma \Delta B_k + \frac{1}{2} \sigma^2 (\Delta B_k)^2 \right).$$

Le cas multidimensionnel

Dans le cas général, on effectue la même correction qu'en dimension 1 mais les notations sont plus lourdes. Pour $s \in [t_k, t_{k+1}]$, $(i, j) \in \{1, \dots, n\} \times \{1, \dots, d\}$, on a

$$\begin{aligned} \sigma_{ij}(X_s) &\simeq \sigma_{ij}(X_{t_k}) + \sum_{l=1}^n \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_l}(X_{t_k})(X_s^l - X_{t_k}^l) \\ &\simeq \sigma_{ij}(X_{t_k}) + \sum_{l=1}^n \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_l}(X_{t_k}) \sum_{m=1}^d \sigma_{lm}(X_{t_k})(B_s^m - B_{t_k}^m). \end{aligned}$$

On a donc cette forme vectorielle

$$\sigma_j(X_s) \simeq \sigma_j(X_{t_k}) + \sum_{m=1}^d \partial \sigma_j(X_{t_k})(B_s^m - B_{t_k}^m).$$

Dans $\sigma(X_s)dB_s = \sum_{j=1}^d \sigma_j(X_s)B_s^j$, la j -ème colonne de σ vient multiplier B_s^j . Donc on obtient

$$\sigma(X_s)dB_s \simeq \sigma(X_{t_k})dB_s + \sum_{j=1}^d \left(\sum_{m=1}^d \partial \sigma_j \sigma_m(X_{t_k})(B_s^m - B_{t_k}^m) \right) dB_s^j.$$

Alors, pour $k \in \{0, \dots, N - 1\}$ et $\forall t \in [t_k, t_{k+1}]$, le schéma de *Milshtein* s'écrit sous la forme :

$$\begin{cases} \tilde{X}_t = \tilde{X}_{t_k} + \sigma(\tilde{X}_{t_k})(B_t - B_{t_k}) + \sum_{m=1}^d \sum_{j=1}^d \partial \sigma_j \sigma_m(\tilde{X}_{t_k}) \int_{t_k}^t (B_s^m - B_{t_k}^m) dB_s^j. \\ \tilde{X}_0 = Z. \end{cases}$$

Le schéma de *Milshtein* est difficile à implémenter car l'on doit simuler le vecteur

$$\left((B_t^j - B_{t_k}^j), \int_{t_k}^t (B_s^j - B_{t_k}^j) dB_s^j \right),$$

pour $1 \leq j \leq d$, il est facile de voir la simulation de

$$\int_{t_k}^t (B_s^j - B_{t_k}^j) dB_s^j,$$

ne peut faire intervenir que $(B_t - B_{t_k})$. Il n'existe pas à ce jour de méthodes efficace pour la simulation de ces lois.

Quand $d = 2$, il est équivalent de simuler

$$\left((B_t^1 - B_{t_k}^1), \int_{t_k}^t (B_s^1 dB_s^2 - B_s^2 dB_s^1) \right),$$

et la méthode décrite dans [3] est compliqué.

Le schéma de *Milshtein* peut être utilisé facilement quand il n'est pas nécessaire de simuler

$$\int_0^t B_s^1 dB_s^2 - B_s^2 dB_s^1.$$

C'est le cas en dimension 1 ou quand la condition de commutativité suivante est satisfaite

$$(C) \{ \text{pour } j, m \in \{1, \dots, d\} \text{ et pour } x \in \mathbb{R}^n, \partial \sigma_j(x) \sigma_m(x) = \partial \sigma_m(x) \sigma_j(x). \}$$

Sous les hypothèses (C), on peut réécrire le schéma de *Milshtein* comme

$$\tilde{X}_t = \tilde{X}_{t_k} + \left(b(\tilde{X}_{t_k}) - \frac{1}{2} \sum_{j=1}^d \partial \sigma_j \sigma_j(\tilde{X}_{t_k}) \right) + \sigma(\tilde{X}_{t_k})(B_t - B_{t_k}) + \frac{1}{2} \sum_{j,l=1}^d (\partial \sigma_j \sigma_l)(\tilde{X}_{t_k})(B_t^j - B_{t_k}^j)(B_t^l - B_{t_k}^l).$$

On a alors seulement besoin de

$$((B_t^j - B_{t_k}^j), k \geq 0, 1 \leq j \leq d).$$

2.2 Convergence forte du schéma de Milshtein

Proposition 2.2.1 *On suppose que les coefficients σ et b sont de classe C^2 avec des dérivées bornées. Alors*

$$\forall p \geq 1, \sup_{t \leq T} E \left(\left| X_T - \tilde{X}_T^N \right|^{2p} \right) \leq \frac{C}{N^{2p}},$$

où la constante C ne dépend pas de N . En outre $\forall \gamma < 1$

$$N^\gamma \max_{0 \leq k \leq N} \left| X_{\frac{kT}{N}} - \tilde{X}_{\frac{kT}{N}}^N \right| \xrightarrow{N \rightarrow +\infty} 0 \text{ P.p.s.}$$

2.3 Convergence faible du schéma de Milshtein

Proposition 2.3.1 *On peut étudier la convergence en loi si on suppose que f, σ et b sont des fonctions de classe C^4 avec des dérivées bornées jusqu'à l'ordre 4 et si de plus f est à croissance polynomiale, alors il existe une constante $C_T(f) > 0$ telle que*

$$\left| E(f(X_T)) - E(f(\tilde{X}_T)) \right| \leq \frac{C_T(f)}{N}.$$

Remarque 2.3.1 *Le schéma de Milshtein améliore les vitesses de convergence trajecto-rielles : il est d'ordre $\frac{1}{N}$ alors que le schéma d'Euler est d'ordre $\frac{1}{\sqrt{N}}$.*

Chapitre 3

Simulation numérique de l'équation différentielle stochastique

Notre objectif dans ce chapitre est de présenter un cas d'applications en utilisant les différents schémas de discrétisations que nous avons traités précédemment, et le but essentiel est l'étude de la simulation numérique de certains processus stochastiques, les diffusions dont le mouvement Brownien est un exemple typique. Pour cet objectif là, La mise en œuvre pratique est proposée dans le langage MATLAB qui présente l'avantage d'être d'une utilisation aisée et de bénéficier d'une large diffusion. C'est l'environnement idéal pour cet traitement à cause de sa haut niveau pour la généralisation des variables aléatoires, il contient des outils graphiques maniable et aussi il exécuter les programmes avec rapidité (dans des minutes).

3.1 Simulation de trajectoire Brownienne

Pour simuler le mouvement Brownien $(B_t)_{t \geq 0}$, il faut d'abord discrétiser le temps, soit Δt la longueur d'une période de temps. Nous simulerons le mouvement Brownien au temps $0, \Delta t, 2\Delta t, \dots, N\Delta t$ avec $N \in \mathbb{N}^*$ sur l'intervalle $[0, 1]$, en utilisant $N = 400$. Dans ce cas, le générateur de variables aléatoires “**randn**” est utilise chaque appel à la commande

“**randn**” qui produit un générateurs pseudo-aléatoires “**pseudo-randn**” indépendants à partir de la distribution $\mathcal{N}'(0, 1)$, Dans l'objectif est d'avoir des expériences répétables. Le MATLAB permet de définir l'état initial du générateur de variables aléatoires, cet dernier à été défini, arbitrairement, à la valeur 100, en utilisant la commande **randn('state',100)**. Les différentes simulations peut-être performés par redéfinir l'état initial, par exemple **randn('state',200)**. Les nombres donnés à partir de la commande “**randn**” sont multipliés avec la quantité $\sqrt{\delta t}$ et sont utilisés d'une manière supplémentaire dans la boucle **for** qui va crée un tableau B de dimension $1 \times N$. Mais, il ya un mineur inconvénient : le MATLAB commence la classification dans ce tableau à partir de l'indice 1 et pas 0. Pour cela. on va computer B comme $B(1), B(2), \dots, B(N)$, et après on va utilisé la commande **plot([0 :dt :T],[0,B])** pour inclus la valeur initiale $B(0) = 0$ dans le graphe. La figure 3.1 présente le résultat.

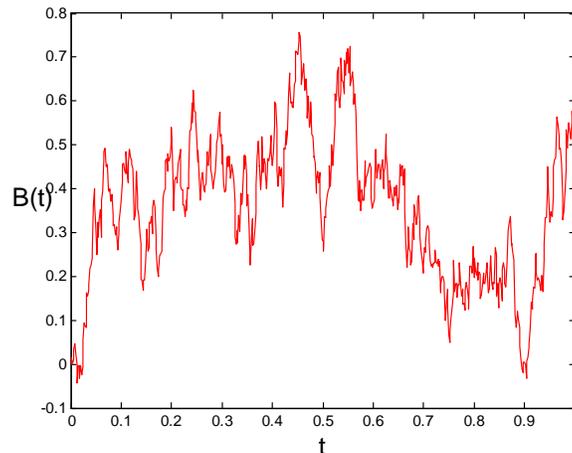


FIG. 3.1 – Simulation d'une trajectoire de mouvement Brownien sur $[0,1]$.

On peut performé les mêmes calculs d'une manière efficace et élégante, en remplaçant la boucle **for** par des commandes “**vectorised**” de niveau élevé, ici, on a donné deux arguments au générateur de variables aléatoires **randn(1,N)** qui va crée un tableau de dimension $1 \times N$, il contient l'échantillon d'une distribution $\mathcal{N}'(0, 1)$ indépendantes. La fonction **cumsum** calcule la somme cumulative de ses arguments, donc le $j^{\text{ème}}$ élément de

tableau B est $dB(1) + dB(2) + \dots + dB(j)$ comme exigé.

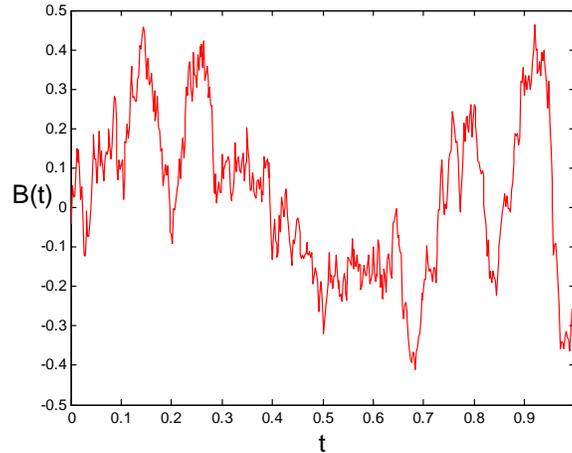


FIG. 3.2 – Simulation d'une trajectoire Brownienne : vectorisée.

Maintenant, on va évaluer la fonction

$$u(B(t)) = \exp\left(t + \frac{1}{2}B(t)\right), \quad (3.1)$$

dans tous les 1000 trajectoires Browniennes discrétisés. La valeur moyenne de $u(B(t))$ dans ces trajectoires sont tracés par une ligne continue (solide). Il ya cinq trajectoires individuelles sont aussi tracés en utilisant une ligne rouge discontinue. cette méthode a vectorisée à travers de trajectoire. dB est un tableau de dimension $N \times M$ tel que $dB(i, j)$ donne un accroissement à dB_j dans l'équation

$$B_j = B_{j-1} + dB_j, j = 1, \dots, N.$$

Pour le $i^{\text{ème}}$ trajectoire. On utilise la commande `cumsum(dB, 2)` pour former des sommes cumulatives à travers d'une dimension secondaire. Pour cela, B est un tableau de dimension $M \times N$ dont la $i^{\text{ème}}$ ligne contient la $i^{\text{ème}}$ trajectoire. On utilise la commande `repmat(t,[M,1])` pour produire un tableau de dimension $M \times N$ dont les lignes sont tous des copies de t . Le tableau U de dimension $M \times N$ contient la $i^{\text{ème}}$ ligne qui corresponde

à $u(B(t))$ le long de $i^{\text{ème}}$ trajectoire.

L'instruction **Umean** = **mean(u)** calcule les moyennes des colonnes, donc “**Umean**” est un tableau de dimension $1 \times N$ dont la $j^{\text{ème}}$ valeur est la moyenne échantillonnée de $u(B(t_j))$.

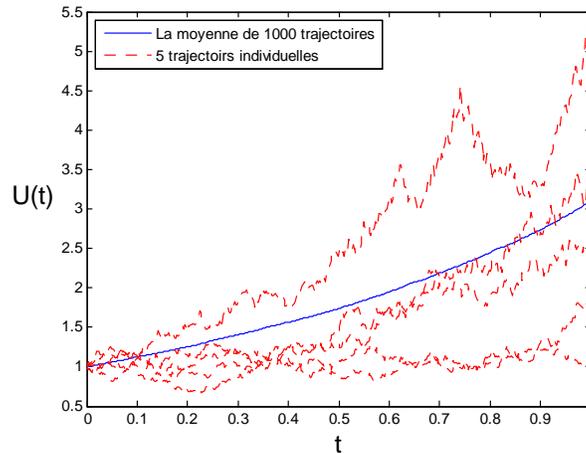


FIG. 3.3 – La fonction $u(B(t))$ en moyenne sur 1000 trajectoires discrétisés et les 5 trajectoires individuelles.

Dans la figure 3.3, on voit que malgré dans tous les trajectoires individuelles de $u(B(t))$ sont non lisse, par contre la moyenne d'échantillon apparaît lisse, ceci peut-être prouver rigoureusement (la valeur attendue de $u(B(t))$ est proche de $\exp(\frac{9t}{8})$). Concernant la commande “**averr**” qui calcule la différence maximal entre la moyenne d'échantillon et la valeur exacte expectante dans tous les points t_j . On trouve que $averr = 0.0517$. Si on augmente le nombre de notre échantillon vers 4000, le $averr$ va diminuer à 0.0205.

3.2 Simulation avec la méthode d'Euler Maruyama

On va appliquer la méthode d'*Euler Maruyama* à un système d'équations différentielles se rencontre, par exemple, La plupart des modèles d'actifs financiers reposent sur des EDS dont le modèle de *Black et scholes* est le plus typique, et sa solution exacte est bien connue

comme suit :

$$X(t) = X(0) \exp\left(\left(\lambda - \frac{1}{2}\sigma^2\right)t + \sigma B(t)\right). \quad (3.2)$$

On considère les valeurs numériques suivantes : $\lambda = 2$, $\sigma = 1$, et $X(0) = 1$ (constantes), on a calculé le trajectoire Brownienne discrétisés sur l'intervalle $[0, 1]$ avec $\delta t = 2^{-8}$ et on a évalué la solution dans 3.2 comme **Xtrue**, cette solution a été tracer au moyen d'une ligne continue de couleur magenta dans la figure ci-dessous. Puis, on applique la méthode d'*Euler Maruyama* en utilisant un pas $\Delta t = R\delta t$ avec $R = 4$.

Généralement, la méthode d'*Euler Maruyama* nécessite un accroissement $B(\tau_j) - B(\tau_{j-1})$, qui est donné par l'expression suivante :

$$\begin{aligned} B(\tau_j) - B(\tau_{j-1}) &= B(jR\delta t) - B((j-1)R\delta t), \\ &= \sum_{k=jR-R+1}^{jR} dB_k. \end{aligned}$$

Dans le programme MATLAB, cette quantité précédente apparait comme l'instruction **Binc=sum(dB(R*(j-1)+1 :R*j))**. Le tableau **Xem** de dimension $1 \times L$ stocke la solution de la méthode d'*Euler Maruyama*, laquelle est tracée dans la figure suivante comme une forme d'astérisque rose, liés avec des lignes discontinues.

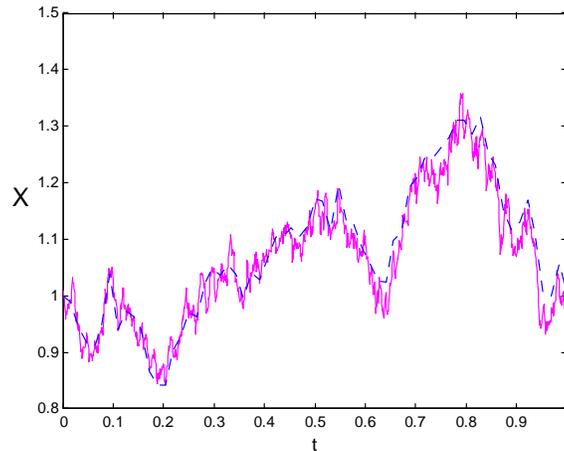


FIG. 3.4 – La solution approchée par la méthode d'Euler-Maruyama et la solution exacte.

L'écart entre la solution d'*Euler Maruyama* et la solution exacte au point final $t = T$, calculée comme étant **emerr**, a été trouvée égale à 0.1163. En prenant $\Delta t = R\delta t$, si R égale à 1 et 2, on trouve que l'erreur égale respectivement à 0.021 et 0.0037.

3.3 La convergence forte et faible de la méthode d'Euler

Lorsque on diminue Δt , la solution d'*Euler Maruyama* dans l'exemple ci-dessus est coïncide avec la solution exacte (la convergence prend sa place). Gardant à l'esprit que $X(\tau_n)$ et X_n sont des variables aléatoire, pour préciser la notion de la convergence, nous devons décider comment mesurer leur différence. En utilisant $E [|X_n - X(\tau_n)|]$, où E indique la valeur expectée, qui conduit au concept de la convergence forte.

On dit qu'une méthode à un ordre fort de convergence égale à γ s'il existe une constante C tel que

$$E [|X_n - X(\tau_n)|] \leq C\Delta t^\gamma, \quad (3.3)$$

pour n'importe quel $\tau = n\Delta t \in [0, T]$, avec Δt suffisamment petit. Si f et g satisfaites avec quelque conditions appropriées, il peut-être présenté que l'ordre fort de la convergence égale à $\frac{1}{2}$.

Dans notre test numérique, on va se concentrer sur l'erreur au point final $t = T$, pour cela, on prend

$$e_{\Delta t}^{strong} = E [|X_L - X(T)|], \text{ où } L\Delta t = T, \quad (3.4)$$

on indique l'erreur de point final d'*Euler Maruyama* dans ce sens fort, dans 3.3 on prend $\gamma = \frac{1}{2}$ à n'importe quel point fixe dans $[0, T]$ et qui certainement se tient au point final, donc on a

$$e_{\Delta t}^{strong} \leq C\Delta t^{\frac{1}{2}}, \quad (3.5)$$

pour Δt suffisamment petit. Notre programme MATLAB “**emstrong.m**” traite la convergence forte d'*Euler Maruyama* pour l'équation différentielle suivante :

$$\begin{cases} dX(t) = \lambda X(t)dt + \mu dB(t) \\ X(0) = X_0, \end{cases} \quad (3.6)$$

en utilisant le même λ , μ et X_0 comme dans le programme précédent. On calcule les 1000 différentes trajectoires Brownienne discrétisées sur $[0, 1]$ avec $\delta t = 2^{-9}$. Pour chaque trajectoire, *Euler Maruyama* est appliquée avec 5 différents pas tel que $\Delta t = 2^{p-1}$ pour $1 \leq p \leq 5$, l'erreur de point final dans la $s^{\text{ème}}$ trajectoire de l'échantillon pour le $p^{\text{ème}}$ pas est stockée dans **Xerr(s,p)** alors, **Xerr** est un tableau de dimension 1000×5 . La fonction **mean** est utilisée pour atteindre en moyenne sur toute les trajectoires de l'échantillon tel que, lorsque on utilise la commande **mean(Xerr)**, on obtient un tableau 1×5 où chaque colonne de **Xerr** est remplacée par sa moyenne, d'où, l'élément $p^{\text{ème}}$ de moyenne **mean(Xerr)** est une approximation pour $e_{\Delta t}^{\text{strong}}$ avec $\Delta t = 2^{p-1} \delta t$.

Si l'inégalité 3.5 prises avec une égalité approximative alors, on prend

$$\log e_{\Delta t}^{\text{strong}} \approx \log C + \frac{1}{2} \log \Delta t. \quad (3.7)$$

La commande **loglog(Dtvals, mean(Xerr), 'b * - ')** dans notre programme MATLAB “**emstrong.m**” trace notre approximation pour $e_{\Delta t}^{\text{strong}}$ contre Δt à une échelle log log, cela nous donnent des étoiles de couleurs bleu liée avec des lignes continues, la ligne rouge discontinue de moitié tendance est ajoutée, la figure ci-dessous présente le résultat.

Nous voyons que les tendances des deux courbes apparaissent identique et correspondre bien, supposons que 3.7 soit valide, on va testé ça plus loin, en supposant qu'une relation de loi de puissance fort $e_{\Delta t}^{\text{strong}} = C \Delta t^q$ existe pour certain constants C et q pour que

$$\log e_{\Delta t}^{\text{strong}} = \log C + q \log \Delta t,$$

un ajustement de moindres carrés pour $\log C$ et q est calculée à la fin de notre programme “**emstrong**”, donnant la valeur 0.5383 pour q avec un moindre carré résiduel égale à 0.0265, pour cela, notre résultats sont en accord avec l'ordre fort de convergence égale à $\frac{1}{2}$.

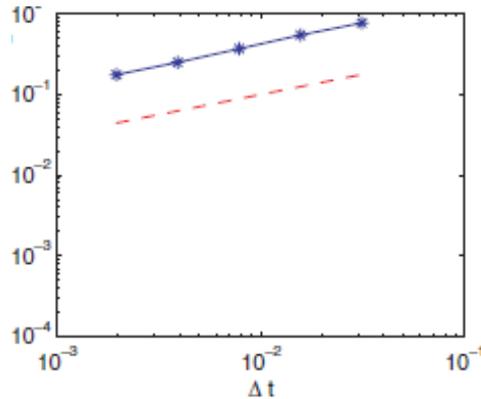


FIG. 3.5 – La convergence forte d'Euler-Maruyama.

Quand en contrôlant l'erreur $e_{\Delta t}^{strong}$ dans **emstrong.m** on suggère une estimation tel que le nombre d'autre sources d'erreur sont négligeables, y compris les suivants

1. *L'erreur d'échantillonnage* : l'erreur augmente à cause de l'approximation d'une valeur expectée par un échantonné moyen.
2. *Le biais de nombres aléatoires* : inhérent l'erreur dans le générateur de nombres aléatoires.
3. *L'erreur d'arrondi* : l'erreur d'arrondi avec une virgule flottante.

Pour un calcul typique, l'erreur d'échantillonnage est capable d'être la plus significative que les deux autres.

Nous avons trouvé dans cette étude qu'il y a quelques expérimentation nécessaire pour mettre le nombre d'échantillon suffisamment grand et le pas de temps suffisamment petit pour les ordres prévus de convergence d'être observable (l'erreur d'échantillonnage se disparaître comme $\frac{1}{\sqrt{M}}$, où M représente le nombre de trajectoires de l'échantillon utilisés). Il

Il y a une étude dans [4] qui indique que : tant que Δt diminue, il y a un manque d'indépendance dans les échantillons d'un générateur de nombres aléatoires dégrade typiquement le calcul avant l'arrondissement de l'erreur ne deviennent significatives.

Bien que, la définition de la convergence forte demande une valeur attendue, elle a une implication pour la simulation individuelle. L'inégalité de *Markov* dite que si on a une variable aléatoire X à une valeur attendue finie, alors $\forall a > 0$

$$P(|X| \geq a) \leq \frac{E[|X|]}{a},$$

pour cela, prenant $a = \Delta t^{\frac{1}{4}}$, nous voyons comme conséquence la convergence forte d'*Euler Maruyama* d'ordre $\gamma = \frac{1}{2}$ est

$$P\left(|X_n - X(\tau)| \geq \Delta t^{\frac{1}{4}}\right) \leq C\Delta t^{\frac{1}{4}},$$

où, équivalentement

$$P\left(|X_n - X(\tau)| < \Delta t^{\frac{1}{4}}\right) \leq C\Delta t^{\frac{1}{4}},$$

cela montre que l'erreur à un point fixe dans $[0, T]$ est petit *P.p.s.* L'ordre fort de convergence de 3.3 mesure le taux dans lequel la moyenne de l'erreur se désintègre et disparaît quand $\Delta t \rightarrow 0$. Une alternative moins exigeante pour mesurer le taux de désintégration de l'erreur des moyens, ceci nous conduit au concept de la convergence faible.

On dit qu'une méthode à l'ordre de convergence faible égale à γ s'il existe une constante C tel que, pour toute fonction p appartenant à certaine classe on a

$$|E_p(X_n) - E_p(X(\tau))| \leq C\Delta t^\gamma, \tag{3.8}$$

pour tout τ fixé égale à $n\Delta t \in [0, T]$ et Δt suffisamment petit. Typiquement, les fonctions p permis 3.8 de devient satisfaire les conditions de régularité et de croissance polynômiale, on s'intéresse sur le cas où p est une fonction d'identité. Pour f et g appropriées, ceci peut

être montré que l'ordre de convergence faible d'*Euler Maruyama* égale à 1. En imitant notre test de convergence faible, on prend

$$e_{\Delta t}^{weak} := |E[X_L] - E[X(T)]|,$$

où $L\Delta t = T$, indique l'erreur de point final faible dans *Euler Maruyama*, ainsi 3.8 pour $P(X) \equiv X$ avec $\gamma = 1$ implique immédiatement que

$$e_{\Delta t}^{weak} \leq C\Delta t, \tag{3.9}$$

pour Δt suffisamment petit.

3.3.1 L'examen de la convergence faible

On examine la convergence faible d'*Euler Maruyama* on utilise notre programme MATLAB, ici on résoudre 3.6 sur $[0, 1]$, pour $\lambda = 2$, $\mu = 0.1$ et $X_0 = 1$, on échantillonne plus de 50000 trajectoires Brownienne discrétisés et on utilise 5 pas tels que $\Delta t = 2^{p-10}$, pour $1 \leq p \leq 5$. Ce code MATLAB a un niveau supplémentaire de la vectorisation comparée avec “**emstrong**” (on calculé simultanément avec tous les 50000 trajectoires) cette computation améliore le temps d'exécution à la charge des exigences de stockage supplémentaires. Pour compenser ça, nous avons utilisé les différentes trajectoires pour chaque pas Δt , pour que seulement les accroissements actuels, plutôt que les trajectoires complète qui devient être stockés. De plus, si on choisit l'accroissement de trajectoire $\delta t = \Delta t$ pour une efficacité supplémentaire.

Les approximations moyennes de l'échantillon pour $E[X_L]$ sont stockés dans **Xem** à partir de 3.2 apparit que $E[X(T)] = \exp(\lambda T)$ pour la vraie solution, et **Xerr** stocke l'erreur des points faible correspondante à chaque Δt . La figure ci-dessus montre comment l'erreur faible varié avec Δt à une échelle log log.

La première tendance de la ligne rouge discontinue de la référence est ajouté, il semble

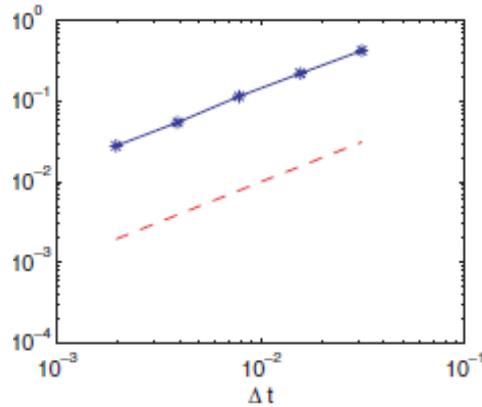


FIG. 3.6 – La convergence faible d'Euler-Maruyama.

que 3.9 tient une égalité approximative. Comme dans **emstrong.m** nous faisons un ajustement faible de la puissance, qui nous donne $q = 0.9857$ et $resid = 0.0506$, confirmant ce comportement.

Il est important de mettre en considération que pour les calculs dans **emstrong.m**, nous avons utilisé les différentes trajectoires pour chaque pas Δt , c'est parfaitement raisonnable. La convergence faible concerne seulement la moyenne de la solution et alors, nous sommes libres d'utiliser n'importe quel échantillon de distribution $\sqrt{\Delta t}\mathcal{N}(0, 1)$ pour l'accroissement $B(\tau_j) - B(\tau_{j-1})$ dans

$$X_j = X_{j-1} + f(X_{j-1})\Delta t + g(X_{j-1})(B(\tau_j) - B(\tau_{j-1})), \quad j = 1, 2, \dots, L,$$

sur n'importe quel pas.

En réalité, si l'accroissement précédent est remplacé par une variable aléatoire indépendante à deux points $\sqrt{\Delta t}\mathcal{V}_j$, où \mathcal{V}_j prend les valeurs 1 et -1 avec une probabilité égale, l'ordre de convergence faible est préservé (remarquons que $\sqrt{\Delta t}\mathcal{V}_j$ a la même moyenne et la même variance que $\sqrt{\Delta t}\mathcal{N}(0, 1)$).

En remplaçant l'accroissement Brownien avec $\sqrt{\Delta t}\mathcal{V}_j$, ce trajet nous conduit à la méthode d'*Euler Maruyama faible*, qui a un ordre de convergence faible $\gamma = 1$ mais, lorsqu'elle

utilise des informations mal dirigé on n'offre pas aucune convergence forte. La motivation derrière de la méthode d'*Euler Maruyama faible* est ces générateurs de nombres aléatoires qui échantillonnent à partir de \mathcal{V}_j peut-être rendus plus efficaces que ceux qui échantillonnent à partir de $\mathcal{N}(0, 1)$

Remarque 3.3.1 Dans le programme MATLAB *emweak.m* on a inclue la ligne de commentaire “ `%Binc=sqrt(Dt)*(randn(M,1))` ” et le résultat d'erreur graphiquement est présenter dans la figure suivante

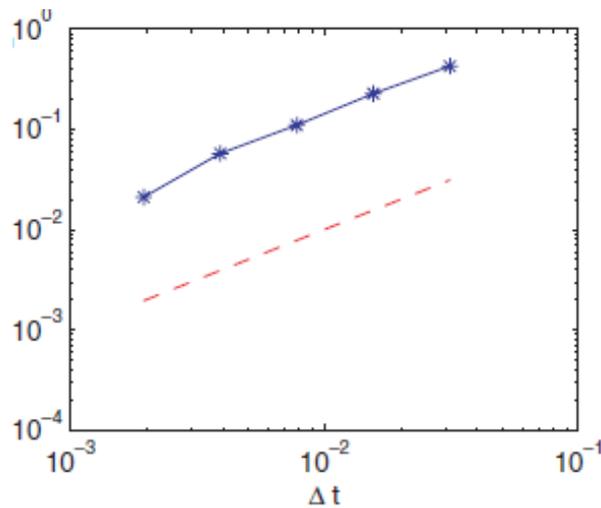


FIG. 3.7 – Le résultat de l'erreur faible pour la méthode d'Euler-Maruyama.

Un ajustement faible de la puissance du moindre carré donne $q = 1.0670$ et $resid = 0.1098$.

3.4 Simulation avec la méthode de Milshtein

Nous avons vu dans le chapitre précédent que la méthode d'*Euler Maruyama* possède un ordre de convergence forte égale à $\frac{1}{2}$, néanmoins la méthode d'*Euler* sous-jacente déterministe converge avec un ordre classique égale à 1. Il est possible d'augmenter l'ordre fort de la méthode d'*Euler* jusqu'à la valeur 1, en ajoutant une correction à l'accroissement stochastique qui va nous donner la méthode de *Milshtein*, cette correction apparait à cause

de la modification faite sur le développement traditionnel de *Taylor* dans le cas de calculs d'*Itô*. C'est pour cela, il est appelé le développement d'*Itô-Taylor* et qui peut-être formé à partir d'application de résultat d'*Itô*, qui est l'outils fondamental de calculs stochastique. On va appliquer la méthode de *Milshstein* à une équation différentielle stochastique suivante :

$$dX(t) = bX(t)(k - X(t))dt + \sigma X(t)dB(t), \quad (3.10)$$

$$X(0) = X_0,$$

ici b, k et σ des constantes. On prend comme valeurs $b = 2, k = 1, \sigma = 0.25$ et $X_0 = 0.5$ et en utilisant le trajectoire Brownienne discrétisé sur l'intervalle $[0, 1]$ avec $\delta t = 2^{-11}$. la solution de l'équation 3.10 peut-être écrite comme une expression sous forme d'intégrale. D'une manière simple, on peut prendre la solution de *Milshstein* avec $\Delta t = \delta t$ pour obtenir une bonne approximation pour la solution exacte, et la comparer avec l'approximation de *Milshstein*, en utilisant

$$\Delta t = 128\delta t, \Delta t = 64\delta t,$$

$$\Delta t = 32\delta t, \Delta t = 16\delta t,$$

sur 500 échantillon (trajectoires).

En ajoutant un autre niveau de vécotorisation comparant avec la dernière méthode (mieux que l'utilisation de la boucle **for** pour ranger l'échantillon, et puis on calcule simultanément tout les trajectoires. on désigne dB comme un tableau de dimension $M \times N$. Laquelle $dB(s, j)$ est le $j^{\text{ème}}$ trajectoire. les accroissements demander pour *Milshstein* avec le pas de temps $R(p) * dt$ sont : **B inc=sum(dB) : , R(p)*(j-1) + 1 : R(p)*j , 2)**; et sa nécessite un sous tableau consiste des rangés de dB et des colonnes **R(p)*(j-1)+1** vers **R(p)*j** et l'ajoute d'une dimension secondaire.

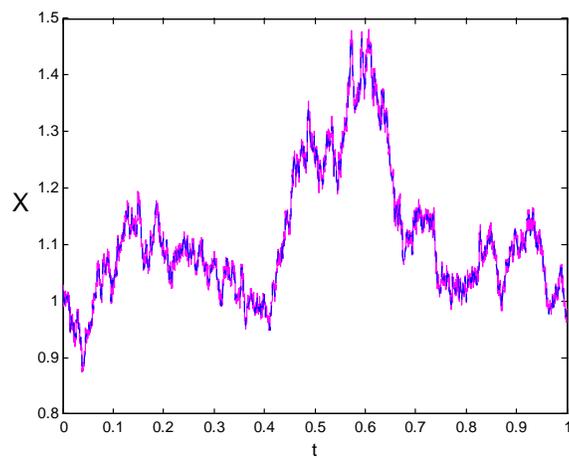


FIG. 3.8 – La solution approchée par la méthode de Milshtein et la solution exacte.

Conclusion

Dans ce mémoire, on s'inscrit dans le cadre de l'étude des équations différentielles stochastiques, plus particulièrement l'étude numérique des équations différentielles stochastiques, et plus précisément l'analyse et la construction des approximations numériques pour la discrétisation tels le schéma d'*Euler-Maruyama* et le schéma de *Milstein*, et nous avons étudié leurs propriétés de convergence. Nous avons aussi réalisé des simulations numériques pour confirmer les résultats théoriques de convergence.

Bibliographie

- [1] P.Briand, Equations Différentielles Stochastiques Rétrogrades. Université de Savoie. France, Mars 2001.
- [2] D.Talay, L.Tubaro, Expansion of the global error for numerical schemes solving stochastic differential equations. *Stochastic Anal. Appl.* 8 (1990), no. 4, 483 – 509.
- [3] J.G. Gaines , T.J. Lyons, Variable step size control in the numerical solution of stochastic differential equations. (submitted), 1991.
- [4] Y. Komori, Y. Saito, and T. Mitsui, Some issues in discrete approximate solution for stochastic differential equations, *Comput. Math. Appl.* 28 (1994), pp. 269 – 278.
- [5] W.G.Cochran, *Sampling Techniques*. Third edition. John Wiley & Sons, Inc. New York (1977).
- [6] D.J.Higham, An algorithmic introduction to numerical simulation of stochastic differential equations. *Society for industrial and applied mathematics*. Vol. 43, No. 3, pp . 525 – 546, (2001).

Annexe A : Les programmes

MATLAB

Simulation de trajectoire Brownienne

```
randn(100, 1);
T=1; N=600; dt=T/N;
dB=zeros(1,N); B=zeros(1,N);
dB(1)=sqrt(dt)*randn;
for j=2 :N
dB(j)=sqrt(dt)*randn;
B(j)=B(j-1)+dB(j);
end
plot(0 :dt :T,[0,B], 'r-');
xlabel('t', 'FontSize',16); ylabel('B(t)', 'FontSize',16, 'Rotation',0)
```

Simulation de trajectoire Brownienne : vectorisée

```
randn(100, 1);
T=1; N=500; dt=T/N; dB=sqrt(dt)*randn(1,N);
B=cumsum(dB);
plot(0 :dt :T,[0,B], 'r-')
xlabel('t', 'FontSize',16);
```

```
ylabel('B(t)', 'FontSize', 16, 'Rotation', 0);
```

La fonction $u(B(t))$ en moyenne sur 1000 trajectoires discrétisés et les 5 trajectoires individuelles

```
randn(100, 1);  
T=1; N=500; dt=T/N; t=(dt :dt :1); M=1000;  
dB=sqrt(dt)*randn(M,N);  
B=cumsum(dB,2); U =exp(repmat(t,[M 1])+0.5*B);  
plot([0,t],[1,Umean], 'b-'), hold on  
plot([0,t],[ones(5,1),U(1 : 5, :)], 'r-'), hold off  
xlabel('t', 'FontSize', 16);  
ylabel('U(t)', 'FontSize', 16, 'Rotation', 0, 'HorizontalAlignment', 'right');  
legend('La moyenne de 1000 trajectoires', '5 trajectoires individuelles', 2);  
averr=norm(Umean-exp(9 * t/8), 'inf');
```

Simulation avec la méthode d'Euler Maruyama

```
sigma=0.4; mu=0.2; Xzero=1; T=1; N=2^10;  
dt=T/N; dB=sqrt(dt)*randn(1,N); B=cumsum(dB);  
Xtrue=Xzero*exp((mu-0.5*sigma^2)*(dt : dt : T)+sigma*B);  
plot(0 :dt :T,[Xzero,Xtrue], 'm-'), hold on  
R=2; Dt=R*dt; L=N/R; Xem=zeros(1,L);  
for j=1 :L  
    Binc=sum(dB(R * (j - 1) + 1 : R * j));  
    Xtemp=Xtemp+Dt*mu*Xtemp+sigma*Xtemp*Binc;  
    Xem(j)=Xtemp;  
end  
plot(0 : Dt : T, [Xzero, Xem], 'b -'), hold off
```

```
Xlabel('t','FontSize',12)
ylabel('X','FontSize',16,'Rotation',0,'HorizontalAlignment','r')
emerr=abs(Xem(end)-Xtrue(end));
```

Simulation avec la méthode de Milshtein

```
sigma=0.4; mu=0.2; Xzero=1; T=1; N=2^14;
dt=T/N; dB=sqrt(dt)*randn(1,N); B=cumsum(dB);
Xtrue=Xzero*exp((mu-0.5*sigma^2)*(dt :dt :T)+sigma*B);
plot(0 : dt : T, [Xzero,Xtrue], 'm -'), hold on
R=20; Dt=R*dt; L=N/R; Xtemp=Xzero;
for j=1 : L
    Binc=sum(dB(R * (j - 1) + 1 : R * j));
    Xtemp=Xtemp+Dt*mu*Xtemp+sigma*Xtemp*Binc+0.5 * (sigma^2) * ((Binc^2) - Dt);
    Xem(j)=Xtemp;
end
plot(0 :Dt :T,[Xzero,Xem], 'b -'), hold off
Xlabel('t','FontSize',12); ylabel('X','FontSize',16,'Rotation',0,'HorizontalAlignment','ri')
emerr=abs(Xem(end)-Xtrue(end));
```

Annexe B : Abréviations et Notations

Convergence presque sûre

Une suite de variables aléatoire $(X_n)_{n \geq 0}$ converge presque sûrement vers une autre variable aléatoire X si lorsque $n \rightarrow \infty$ on a

$$P \left(\left\{ \omega \in \Omega : \lim_{n \rightarrow \infty} X_n(\omega) = X(\omega) \right\} \right) = 1.$$

et on note $X_n \xrightarrow{P.s} X$.

Convergence en loi

Une suite de variable aléatoire X_n converge en loi vers X si, pour tout fonction continue bornée ϕ

$$E[\phi(X_n)] \rightarrow E[\phi(X)], \text{ quand } n \rightarrow \infty.$$

Et on note $X_n \xrightarrow{\text{loi}} X$.

Convergence dans L^p

Une suite de variable aléatoire X_n dans L^p converge vers X dans L^p si

$$\|X_n - X\|^p \rightarrow 0, \text{ quand } n \rightarrow \infty.$$

Et on note $X_n \xrightarrow{L^p} X$.

Lemme de Gronwall

Soit $g : [0; T] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue telle que, pour tout t ,

$$g(t) \leq a + b \int_0^t g(s) ds, a \in \mathbb{R}, b \geq 0.$$

Alors, pour tout t , $g(t) \leq a \times \exp(bt)$.

Abréviations et notations

Les différentes abréviations et notations utilisées tout au long de ce mémoire sont expliquées ci-dessous.

(Ω, \mathcal{F}, P)	espace de probabilité complet.
(B_t)	mouvement Brownien.
$P - p.s$	presque sûrement pour la mesure de probabilité P .
$\{\mathcal{F}_t\}$	filtration engendré par un mouvement Brownien.
$(\Omega, \{\mathcal{F}_t\}_{t \in T}, \mathcal{F}, P)$	espace de probabilité filtré..
$B(\mathbb{R}^d)$	tribu borélienne sur \mathbb{R}^d .
EDS	équation différentielle stochastique.
$\langle \cdot, \cdot \rangle$	Crocher stochastique.