République Algérienne Démocratique et Populaire

Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

UNIVERSITÉ MOHAMED KHIDER, BISKRA

FACULTÉ des SCIENCES EXACTES et des SCIENCES de la NATURE et de la VIE

DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES

Mémoire présenté en vue de l'obtention du Diplôme **:**

MASTER en Mathématiques

Option : **Statistique**

Par

Ghiboub Djamel

Titre :

Théorèmes de la limite centrale et applications

Membres du Comité d'Examen :

Dr.	**Chine Amel**	UMKB	Président
Dr.	**Sayah Abdallah**	UMKB	Encadreur
Dr.	**Dhiabi Samra**	UMKB	Examinateur

Juin 2018

Dédicace

Je dédie ce travail à :

À mes très chers parents.

À mes très chers frères et sœurs.

À tous mes proches.

À tous mes amis.

À mes amis et mes collègues de la promotion 2018

«Mathématiques» .

REMERCIEMENTS

Avant tous, je remercie Dieu qui j'ai donné la force, le courage et la patience pour réaliser ce modeste travail.

Je remercie mon encadreur Monsieur **Sayah Abdallah** pour avoir accepter de diriger ce mémoire et pour ses conseils précieux qui m'ont été énormément utiles.

J'adresse mes remerciements aux présidents et membres du Jury qui ont accepté d'examiner ce mémoire en lui apportant de l'intérêt.

Je tiens à remercier les enseignants de tout ,on cursus formationnel.

Table des matières

Table des figures

Introduction

Le théorème centrale limite est un théorème fondamental du domaine de la probabilité et des statistiques. Il décrit la loi de distribution de la moyenne d'un échantillon aléatoire provenant d'une population avec une variance et une moyenne finies. Ce théorème est un résultat sur la convergence en loi d'une suite de variables aléatoires. Intuitivement, ce résultat affirme que toute somme de variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées tend vers une variable aléatoire gaussienne. Il souligne le rôle central des variables gaussiennes, qui peuvent être vues comme le comportement global d'une multitude de petits phénomènes. En pratique, quand $n \geq 30$, le TCL fournit une bonne approximation.

Dans les applications, le test de normalité joue un grand rôle du théorème central limité pour trouver la distribution normale. Intuitivement, ce résultat affirme que ce test permet de valider si des données réelles suivent une loi normale ou non.

Notre mémoire est réparti comme suit :

Chapitre 1. Le premier chapitre est divisé en trois parties :

Dans la première partie, on donne quelques rappels de la notion de probabilité et en définissant un espace de probabilité, et on en rappelle les principales propriétés.

La deuxième partie est consacré à l'étude la notion de variable aléatoire et décrit la loi, sa fonction de répartition et on donne les exemples de lois (discrètes et a continues), et on présente les caractéristiques d'une variable aléatoire (espérance, de variance et de moments...), et la fonction caractéristique.

La troisième partie contient le type de convergence des variables aléatoires (convergece en probabilité,convergece en loi, ...) et consacré à la loi de grands nombres (loi faible des grands nombres et loi forte).

Chapitre2. Le deuxième chapitre est consacré à l'étude le théorème central limite dans le cas des variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées, et nous étudions dans ce chapitre quelques approximations de la loi binomaile et la loi de Poisson par la loi normale.

Chapitre 3. Dans ce chapitre on va présenter quelques méthodes graphiques (hist, qqplot, . . .) et les tests statistiques de normalité (Test de Shapiro-Wilk, . . .). En utilisant le logiciel **Ri386 3.3.2** pour la simulation, où on va appliquer les méthodes graphiques et les tests de normalités. Ainsi nous donnons les applications de l'approximation gaussienne pour certaines lois.

À la fin de ce mémoire, on fait une conclusion générale du mémoire notre travail.

Chapitre 1

Les variables aléatoires réelles

La théorie des probabilités a pour objet l'étude des phénoménes aléatoires ou du moins considérés comme tels par l'observateur. Pour cela on introduit le concept d'expérience aléatoire dont l'ensemble des résultats possibles constitue l'ensemble fondamental, noté habituellement. Et aussi, on étudie quelques propriétés classiques des variables aléatoires (fonction de répartition, de densité, espérance, variance et fonction caractéristique), nous présentons ensuite les modes de convergence. Enfin nous décrivons les définitions de la loi des grands nombres.

1.1 Notion de probabilité

Définition 1.1.1 (Expérience aléatoire) *Est une expérience dont l'issue n'est pas prévisible car répétée dans des conditions identiques, elle peut donner lieu à des résultats différents ou aléatoires (expérience aléatoire)*

Définition 1.1.2 (Univers) *On appelle univers associé à une expérience aléatoire, l'ensemble (noté Ω) de tous les résultats possibles. Les éléments de l'univers s'appellent les éventualités.*

1.1.1 Types des événements

Définition 1.1.3 (Événement aléatoire) *Un événement A est un sous–ensemble de Ω et on dit que l'événement A s'est réalisé si et seulement si le résultat ω de Ω qui s'est produit appartient à A.*

Exemple 1.1.1 *Si on jette un dé, $A =$ «on tire un 6» $= \{\omega \in \Omega$, on tire un $6\}$est un événement (dans l'égalité précédente, les trois termes veulent dire la même chose. De même, $B =$«le résultat est supérieur ou égal à 3» est aussi un événement.*

Définition 1.1.4 (Événement impossible) *Un événement qui n'est jamais réalisé est appelé un événement impossible, il est représenté par l'ensemble vide $\varnothing$.*

Définition 1.1.5 (Événements élémentaires) *Sont Les événements qui sont représentés par un singleton $\{\omega\}$*

Définition 1.1.6 (Événement contraire) *On appelle événement contraire de A, noté A^c, le complémentaire de A dans Ω :*

$$A^c = \{\omega \in \Omega : \omega \notin A\}$$

Définition 1.1.7 (Les événements incompatibles) *Deux événements A et B sont dits incompatibles ou disjoints si la réalisation de l'un implique la non-réalisation de l'autre.Ils sont représentés par deux ensembles disjoints.Si $A \cap B = \varnothing$:*

Exemple 1.1.2 On reprend l'exemple du lancer de dé. Soit $A =$ «le résultat est pair» , $B =$ «le résultat est impair». Alors $A \cap B = \varnothing$, ces deux événements sont disjoints (le résultat ne peut pas être pair et impair).

Définition 1.1.8 (Réunion d'événements) *Pour l'événement A et B, l'événement «A et B» est réalisé si et seulement si l'un des deux est réalisé ou si les deux sont réalisés. C'est l'union*

$$A \cup B = \{\omega \in \Omega : \omega \in A \text{ ou } \omega \in B\}$$

Exemple1.1.3 On reprend l'exemple du lancer de dé. Soit $A =$ «le résultat est pair» , $B =$«le résultat est supérieur ou égal à 3». Alors $A \cup B =$ «le résultat est dans $\{2, 3, 4, 5, 6\}$».

Pour l'événement A et B, l'événement «A et B» est réalisé si et seulement si A et B sont réalisés.C'est l'intersection

$$A \cap B = \{\omega \in \Omega : \omega \in A \text{ et } \omega \in B\}$$

Exemple 1.1.4 Avec les A, B de l'exemple précédent, $A \cap B =$ «le résultat est dans$\{4, 6\}$» .

Définition 1.1.9 (Tribu($\sigma-$algèbre)) *une famille $\mathcal{F}$de parties d'un ensemble Ω est appelée une tribu sur, si elle vérifie les trois propriétés suivantes :*

1. $\Omega, \varnothing \in \mathcal{F}$.
2. Si $A \in \mathcal{F}$, alors $A^c \in \mathcal{F}$. (stabilité par passage au complémentaire)
3. Si $(A_n)_{n\geq 1}$ est une suite d'éléments dans $\mathcal{F}$, alors : $\cup_{n=1}^{+\infty} A_n \in \mathcal{F}$ (stabilité par réunion dénombrable).

Remarque 1.1.1

- Par passage au complémentaire, on a aussi sous l'hypothèse de (c) que : $\cap_{n=1}^{+\infty} A_n \in \mathcal{F}$.
- On dira qu'un ensemble est dénombrable si l'ensemble de ses éléments peut être indexé par une suite d'entiers.

Définition 1.1.10 (Espace probabilisable) *Un espace probabilisable est la donnée d'un couple $(\Omega, \mathcal{F})$ avec :*

1. Ω un univers des possibles.
2. $\mathcal{F}$une tribu des événements sur Ω.

Définition 1.1.11 (Espace de probabilité (probabilisé)) *Soit un espace mesurable, on appelle probabilité sur* $(\Omega, \mathcal{F})$ *tout application* P *de* $\mathcal{F}$ *dans* $[0,1]$ *vérifiant :*

1. $P(\Omega) = 1$.
2. (Propriété de $\sigma-$ additivité) pour toute suite $(A_n)_{n \in N^*}$ d'évènements, deux à deux disjoints, on a : $P\left(\cup_{n \in N^*} A_n\right) = \sum_{n=1}^{+\infty} P(A_n)$

- Le triplet $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ s'appelle un espace probabilisé ou espace de probabilité.

1.2 Variable aléatoire réelle(v.a.r)

Définition 1.2.1 *Soit* $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ *un espace probabilisé, une variable aléatoire (ou v.a)*

$X : \Omega \to \mathbb{R}$ est une fonction mesurable définie sur Ω,à valeurs réelles : pour tout intervalle $I \subset \mathbb{R}$,l'image réciproque $X^{-1}(I)$ de cet intervalle est dans $\mathcal{F}$.

1.2.1 Différents types de variables aléatoires

Définition 1.2.2 (Variable aléatoire discrète) *Si une variable aléatoire* X *prend un nombre de valeurs fini ou dénombrable (son ensemble de définition est inclus dans* $\mathbb{N}$ *), on parle de variable discrète.*

On s'intéresse à définir l'ensemble des valeurs possibles et leurs probabilités associées.

Définition 1.2.3 (Variable aléatoire continue) *Une variable aléatoire est dite continue si elle peut prendre toutes les valeurs d'un intervalle. En particulier, dans le cas où la variable aléatoire peut prendre toute valeur réelle (son ensemble de définition contient un intervalle de* $\mathbb{R}$*), on parle de variable aléatoire réelle. Dans ce cas, il ne s'agira plus de calculer une probabilité d'apparition d'une valeur donnée mais d'un intervalle.*

1.2.2 Loi de probabilité

Définition 1.2.4 *Soit $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ un espace probabilisé et X une variable aléatoire réelle. On appelle loi de probabilité de X la probabilité, notée P_X, image de P par X :*

$$P_X(]a, b]) = P(X^{-1}(]a, b])).$$

1.2.3 Variables indépendantes et identiquement distribuées

Définition 1.2.5 *Deux variables aléatoires X et Y sont indépendantes si pour tout couple (I, J) d'intervalles de $\mathbb{R}$, on a :*

$$P((X \in I) \cap (Y \in J)) = P(X \in I)\ P(Y \in J).$$

Remarque 1.2.1

Des variables aléatoires X_1, X_2, X_3,... sont indépendantes si pour tous sous-ensembles $I_1, I_2, I_3, ..$de $\mathbb{R}$, les événements $[X_i \in I_i]$ sont indépendants. Soit encore : pour tous $I_1, I_2, I_3, .. \subset \mathbb{R}$,

$$P(X_1 \in I_1, X_2 \in I_2 ... X_n \in I_n) = P(X_1 \in I_1)P(X_2 \in I_2)...P(X_n \in I_n).$$

Définition 1.2.6 *On dira que deux éléments aléatoires X et Y ont* ***même loi****, ou sont* ***identiquement distribuées****, si leurs lois P_X et P_Y sont des probabilités identiques. Cette relation sera notée*

$$X \rightsquigarrow Y,$$

L'élément aléatoire X est entièrement déterminée par sa loi P_X.

Définition 1.2.7 *En théorie des probabilités et en statistique, des variables indépendantes et identiquement distribués sont des variables aléatoires qui suivent toutes la même loi de probabilité et sont indépendantes,on dit que ce sont des variables aléatoires i.i.d.*

1.2.4 Fonction de répartition

Définition 1.2.8 *Soit* $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ *un espace probabilisé et* X *une variable aléatoire réelle. On appelle fonction de répartition de* X *la fonction qui définie sur* $\mathbb{R}$ *par :*

$$F_X : \begin{cases} \mathbb{R} \to [0,1] \\ y \to P_X(]-\infty,\ y]) \end{cases}$$

avec

$$F_X(y) = P(X \leq y).$$

Propriétés 1.2.1

1) F est continue à gauche. la fonction F est croissante et continue à droite.

2) F est continue à gauche.

3) $lim_{+\infty} F = 1$ et $lim_{-\infty} F = 0$.

4) Une fonction de répartition caractérise la loi.

5) $P(a \leq X \leq b) = F_X(b) - F_X(a)$.

Un exemple de fonction de répartition correspondant à une variable discrète est donnée par la figure

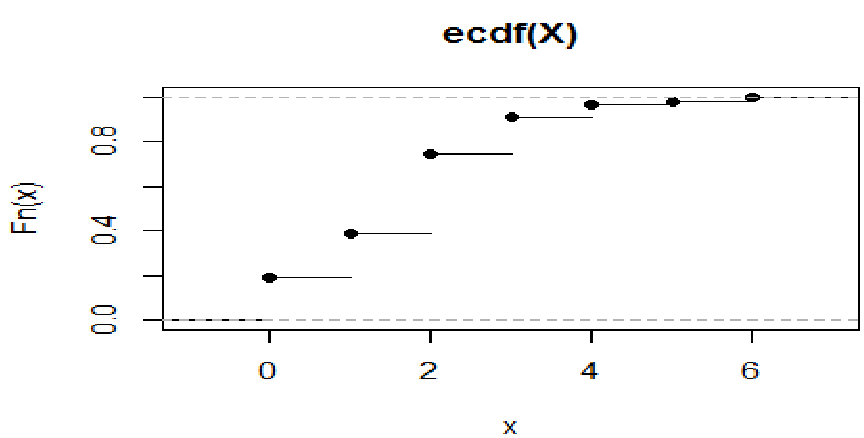

Fig. 1.1 – Fonction de répartition à une v.a.discrète

Un exemple de fonction de répartition correspondant à une variable continue est donnée par la figure

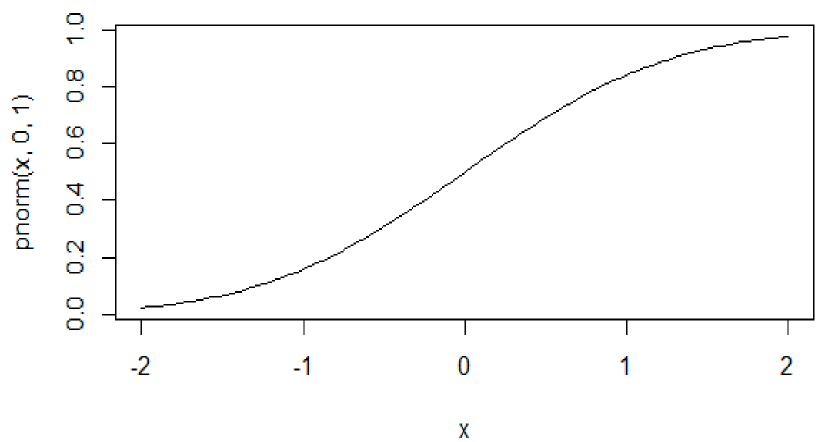

FIG. 1.2 – Fonction de répartition à une v.a.continue

Fonction de masse

Définition 1.2.9 *Soit* $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ *un espace probabilisé et* X *une variable aléatoire réelle. La fonction* $F_X : x \in \mathbb{R} \rightarrow P(X = x)$ *est appelée la fonction de masse de* X*. On peut aussi exprimer la fonction de masse comme :* $P(X = x) = F_X(x) - F_X(x-)$

Densité de probabilité

Définition 1.2.10 *On appelle densité de probabilité d'une variable aléatoire continue* X*, toute fonction* f *continue et positive sur un intervalle* I $([a, b]$, $[a, +\infty[$*ou* $\mathbb{R})$ *telle que :*

1. $P(X \in I) = \int_I f(t)dt = 1.$
2. Pour tout intervalle $J = [a, b]$ inclus dans I, on a : $P(X \in J) = \int_a^b f(t)dt.$

1.2.5 Caractéristiques d'une variable aléatoire

Espérance

Définition 1.2.11 *Soit X une variable aléatoire réelle, l'espérance mathématique de X est définie par :*

– Si X est une v.a.r discrète finie ou dénombrable :

$$E(X) = \sum_{x \in X(\Omega)} x P(X = x).$$

– Si X est une v.a.r continue à densité f_X :

$$E(X) = \int_{\mathbb{R}} t f_X(t) dt.$$

Propriétés 1.2.2

Soient X et Y deux v.a.r et $\lambda, \beta \in \mathbb{R}$, alors :

1) $E(X + \lambda Y) = E(X) + \lambda E(Y)$

2) $|E(X)| \leq E(|X|)$

3) $E(X \pm Y) = E(X) \pm E(Y)$

4) Si X et Y sont indépendantes :

$E(X \times Y) = E(X) \times E(Y)$

Variance

Définition 1.2.12 *Soit X une variable aléatoire réelle d'esperence $E(X)$, La variance d'une variable aléatoire X, telle que $E(X^2) < \infty$, et notée $Var(X)$ ou (S^2) le nombre positif suivant :*

– Si X est une v.a.r discrète finie ou dénombrable :

$$Var(X) = E\left[(X - E(X))^2\right] = \sum_{i=1}^{n} (X_i - E(X)) p_i.$$

– Si X est une v.a.r continue à densité f_X : $Var(X) = E\left[(X - E(X))^2\right] = \int_{\mathbb{R}}(X - E(X))^2 f(x)dx$.

Propriétés 1.2.3

Soient X et Y deux v.a.r et $\lambda, \beta \in \mathbb{R}$, alors :

1) $Var(X) = E(X^2) - (E(X))^2$.

2) $Var(\lambda X + \beta) = \lambda^2 Var(X)$.

3) $Var(X) \geq 0$.

4) Si plus X et Y sont indépendantes

$Var(X \pm Y) = Var(X) + Var(Y)$.

L'écart-type

Définition 1.2.13 *Soit X une variable aléatoire réelle admettant un moment d'ordre 2. l'écart-type de X est défini par :*

$$\sigma(X) = \sqrt{Var(X)} = \sqrt{E(X^2) - (E(X))^2}.$$

Covariance

Définition 1.2.14 *On appelle covariance de deux variables aléatoires X et Y la quantité*

$$\begin{aligned} Cov(X, Y) &= E((X - E(X))(Y - E(Y))) \\ &= E(XY) - E(X)E(Y), \end{aligned}$$

En particulier,

$$Var(X + Y) = Var(X) + Var(Y) + 2Cov(X, Y).$$

Propriétés 1.2.4

1. $Cov(X, Y) = Cov(Y, X)$.
2. $Cov(aX, bY) = abCov(X, Y)$; $Cov(X + Z, Y) = Cov(X, Y) + Cov(Z, Y)$.

Corrélation

Définition 1.2.15 *On appelle coefficient de corrélation de deux variables aléatoires X et Y de variances non-nulles la quantité*

$$\rho(X, Y) = \frac{Cov(X, Y)}{\sqrt{Var(X)\ Var(Y)}}.$$

Propriétés1.2.5

1. $Corr(X, Y) = Corr(Y, X)$.
2. $Corr(aX + b, cY + d) = Corr(X, Y)$.
3. $-1 \leq Corr(X, Y) \leq 1$.

Moments

Définition 1.2.16 *On appelle moment non centrés d'ordre r de la v.a. X, où r est un entier positif, la valeur (si elle existe) $\mu_r = E(X^r)$.*

- Le moment d'ordre 1 d'une v.a.r. X s'appelle son espérance (on dit aussi (sa moyenne)). Nous avons $E(1) = 1$ (la moyenne de la variable constante égale à 1 est 1).

Définition 1.2.17 *On appelle moment centré d'ordre r de la v.a. X, où r est un entier positif, la valeur (si elle existe) $\mu_r = E((X - E(X))^r)$.*

- Pour $r = 1$ on a $E(X - m) = E(X) - m = m - m = 0$ ce qui caractérise le centrage de X.

- Soit X une v.a.r. de moyenne m. Le moment d'ordre 2 de $X - m$ s'appelle la variance de X. Ce moment est donc égal à $E((X-m)^2) = E((X-E(X))^2)$. Nous noterons $Var(X)$ la variance de X.

1.2.6 Fonction génératrice

Définition 1.2.18 *Soit X une variable aléatoire réelle et $I_X = \{t \in \mathbb{R} \ telque \ E \ et \ X \ existe\}$La fonction*

$$M_X : \begin{cases} I_X \to \mathbb{R} \\ t \to E\left(e^{tX}\right) \end{cases}$$

est la fonction génératrice.

1. I_X est un intervalle contenant 0.
2. Si I_X n'est pas réduit à $\{0\}$ alors M_X se développe en série entière

$$M_X(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{E(X^n)}{n!} t^n.$$

3. Si X et Y sont deux v.a. indépendantes, alors $I_{X+Y} = I_X \cap I_Y$ et $M_{X+Y} = M_X M_Y$ sur I_{X+Y}.

1.2.7 Fonctions caractéristiques

Définition 1.2.19 *La fonction caractéristique de la variable aléatoire X est définie sur $\mathbb{R}$ par :*

- Pour X une v.a. discrète, on a :

$$\varphi_X(t) = E(e^{itX}) = \sum_{x \in X(\Omega)} e^{itx} P(X = x).$$

- Pour X une v.a continue de densité f_X, on a :

$$\varphi_X(t) = E(e^{itX}) = \int_{\mathbb{R}} e^{itx} f_X(x)dx,$$

où i est l'unité imaginaire ($i^2 = -1$).

1. φ_X est continue sur $\mathbb{R}$ et majorée par $\varphi_X(0) = 1, \varphi'_X(0) = -iE(X)$, $\varphi''_X(0) = -E(X^2)$, $\varphi_X^{(k)}(0) = i^k E(X^k)$.
2. La relation suivante sert, par exemple, à calculer la fonction caractéristique d'une variable centrée réduite, à partir de la fonction caractéristique de la variable de départ : pour tous a, b réels, $\varphi_{aX+b}\ (t) = e^{ibt}\varphi_X(at)$.
3. Si X et Y sont indépendants alors :

$\varphi_{X+Y} = \varphi_X \times \varphi_Y$.

1.2.8 Lois usuelles

Lois usuelles discrètes

Soit X une v.a.r. discrète prenant ses valeurs dans un ensemble $\{x_1, x_2, x_3, ...\}$, éventuellement infini. Alors la loi de X est caractérisée par l'ensemble des probabilités $P(X = x_i)$, c'est-à-dire les nombres réels positifs p_i tels que $P(X = x_i) = p_i$ avec $0 \leq p_i \leq 1$ et $\sum_{i=1}^{n}$ $p_i = 1$.

Loi de Bernoulli Une variable aléatoire X suit la loi de Bernoulli de paramètre $p \in [0, 1]$ si $X \in \{0, 1\}$ et $P(X = 1) = p$, $P(X = 0) = 1-\ p$. On note $X \rightsquigarrow B(p)$, et on :

$$E(X) = p \text{ et } Var(X) = p(1-p).$$

Loi Binômiale Une variable aléatoire X suit la loi Binômiale de paramètres $n \in \mathbb{N}$ et $p \in [0, 1]$ lorsque $X \in \{0, 1, 2, ...n\}$ et $P(X = k) = C_k^n p^k (1-p)^{n-k}$. La loi Binômiale de paramètres n et p se note

$B(n,p)$, et on :

$$E(X) = np \text{ et } Var(X) = np(1-p),$$

et sa fonction caractéristique est :

$$\varphi_X(t) = (p\exp(it) + 1 - p)^n.$$

Remarque 1.2.2 $C_k^n = \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!}$appelés coefficients binomiaux.

Lois de Poisson Une variable X suit la loi de Poisson de paramètre λ positif, si pour tout entier $k \geq 0$, $P(X = k) = e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}$.

Le support de X est ici $\mathbb{N}$. La loi de Poisson de paramètre λ est notée $P(\lambda)$, et on :

$$E(X) = \lambda \; et \; Var(X) = \lambda$$

et sa fonction caractéristique est :

$$\varphi_X(t) = \exp(\lambda)(\exp(it-1)).$$

Loi hypergéométrique Une v.a.r. X est dite de loi hypergéométrique de paramètre (N, n, b) où N, n et b sont des entiers tels que $b < n$ et $N < n$, si elle est à valeurs dans $D = N \cap [\max(0, N-(n-b)), \min(N, b)]$ et si

$$P(X = k) = \frac{\binom{n}{k} \ \binom{N-n}{b-k}}{\binom{N}{b}} \text{ si } k \in \{0, ...\min(n, b)\}.$$

Lois usuelles continues

Loi uniforme La loi uniforme sur un intervalle $[a, b]$ est la loi de densité

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} \text{ si } x \in [a, b] \\ 0 \qquad\quad \text{sinon} \end{cases}$$

On note $X \rightsquigarrow U[a, b]$ (" X suite la loi uniforme sur $[a, b]$").

$$E(X) = \frac{b+a}{2} \; et \; Var(X) = \frac{(b-a)^2}{12}.$$

Loi normale On dit que X suit une loi gaussienne (ou normale) d'espérance m et de variance $\sigma^2 > 0$ si et seulement si X a pour densité

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}\right) \; x \in \mathbb{R}.$$

On note alors $X \rightsquigarrow \mathcal{N}(m, \sigma^2)$. La variable aléatoire X vérifie alors

$$\begin{cases} E(X) = m \\ Var(x) = \sigma^2 \\ \varphi_X(t) = \exp\left(itm - \frac{(\sigma t)^2}{2}\right) \end{cases}$$

Si $m = 0$ et $\sigma^2 = 1$, on dit que la loi est normale centrée et réduite. Si X suit $\mathcal{N}(m, \sigma^2)$ avec $\sigma > 0$, alors $\frac{X-m}{\sigma}$ suit $\mathcal{N}(0, 1)$. Sa fonction de densité est

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) \; x \in \mathbb{R},$$

et sa fonction caractéristique est :

$$\varphi_X(t) = \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) \; x \in \mathbb{R}.$$

Un exemple de fonction de densité est donnée par la figure

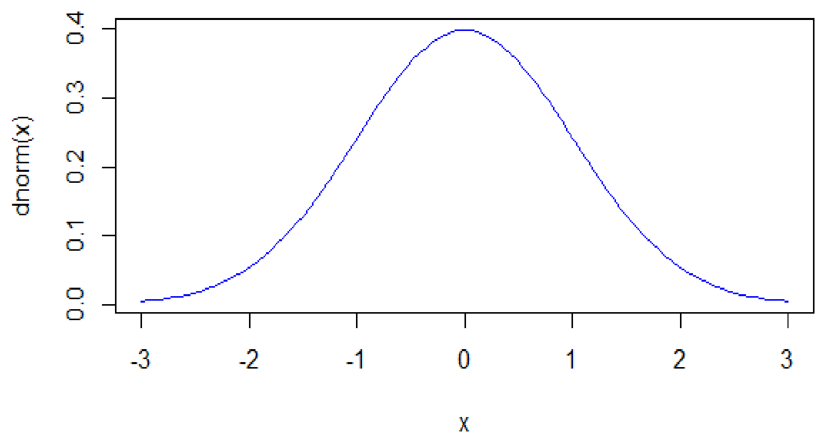

FIG. 1.3 – densité de loi $\mathcal{N}(0;1)$

Cette loi est fondamentale en théorie des probabilités et en statistique : c'est la loi limite de la moyenne dans une suite infinie d'épreuves répétées indépendantes. En pratique elle sert à modéliser les effets additifs de petits phénomènes aléatoires indépendants répétés souvent.

Loi exponentielle Soit $a > 0$ un réel. On dit que X suit la loi exponentielle de paramètre a si elle admet la densité :

$$f(x) = ae^{-ax}1_{\mathbb{R}^+}(x) = \begin{cases} ae^{-ax} \text{ si } x \geq 0 \\ 0 \qquad\quad \text{sinon} \end{cases}$$

$$E(X) = \frac{1}{a} \text{ et } V(X) = \frac{1}{a^2}.$$

Loi de Cauchy C'est la loi d'une variable X réelle de densité :

$$f(x) = \frac{1}{\pi\left(1+x^2\right)}.$$

L'espérance mathématique se calcule par :

$$\begin{aligned} E(X) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x}{\pi\left(1+x^2\right)} dx \\ &= \frac{1}{2\pi}\left[\ln\left(1+x^2\right)\right]_{-\infty}^{+\infty} = +\infty, \end{aligned}$$

La loi de Cauchy n'admet donc pas de moyenne.

1.3 Les types de convergence d'une suite de v.a

Soit $(X_n)_{n\in N}$ une suite de variables aléatoires et soit X une variable aléatoire. On définit les modes de convergence suivants :

1.3.1 Convergence en probabilité

Définition 1.3.1 *On considère une suite (X_n) d'une v.a. définie sur Ω, X une autre v.a. définie sur Ω.On dit que la suite (X_n) converge en probabilité vers X si :*

$$\forall \varepsilon > 0, \lim_{n\to+\infty} P\left(|X_n - X| > \varepsilon\right) = 0.$$

Théorème 1.3.1 *Soit (X_n) une suite de variables aléatoires sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ admettant des espérances et des variances vérifiant*

$$\lim_{n\to+\infty} E\left(X_n\right) = a, \lim_{n\to+\infty} Var\left(X_n\right) = 0,$$

alors les (X_n) convergent en probabilité vers a.

1.3.2 Convergence en moyenne d'ordre p

Définition 1.3.2 *Une suite de v.a.r.* $(X_n)_{n\in N}$ *converge en moyenne d'ordre p vers une v.a.r.* X *si :*

$$\lim_{n\to+\infty} E\left((X_n - X)^p\right) = 0.$$

La plus utilisée est la convergence en moyenne quadratique si $p = 2$.

Proposition 1.2.1

La convergence en moyenne d'ordre p implique la convergence en probabilité.

1.3.3 Convergence presque sûrement

Définition 1.3.3 *On dit que* $\{X_n\}_{n\in N}$ *converge presque sûrement vers la v.a* X *si*

$$P\left(\lim_{n\to+\infty} X_n = X\right) = 1,$$

ou encore si

$$\lim_{n\to+\infty} P\left(\underset{m\geq n}{\cup}\{|X_m - X| \geq \varepsilon\}\right) = 0 \forall\varepsilon > 0,$$

et on note

$$X_n \underset{n\to+\infty}{\overset{p.s}{\to}} X.$$

Proposition 1.2.2

1. La convergence presque sûre entraîne la convergence en probabilité.

1.3.4 Convergence en loi

Définition 1.3.4 *Soient* (X_n) *et* X *des variables aléatoires sur un même espace probabilisé* $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ *de fonctions de répartition respectives* F_n *et* F*, on dit que les* (X_n) *convergent* vers X en loi si en tout point x où F est continue, les $F_n(x)$ convergent vers $F(x)$. et on note

$$X_n \overset{loi}{\to} X.$$

De même, on dit que $X_n \overset{loi}{\to} X$ si φ_{X_n} converge simplement vers φ_X en tout point de continuité de X.

Propositions 1.2.3

1. La convergence en probabilité entraîne la convergence en loi.
2. Si les (X_n) et X sont des variables aléatoires discrètes, alors X_n converge en loi vers X si et seulement si

$$\forall x \in \mathbb{R}, \lim_{n \to +\infty} P(X_n = x) = P(X = x).$$

Théorème 1.3.2 (continuité de Lévy-Cramér) *Soit (X_n) une suite de variables aléatoires de fonctions caractéristiques φ_{X_n} et X une variable aléatoire de fonction caractéristique φ_X, toutes sur un même espace probabilisé. Si les (X_n) convergent en loi vers X alors la suite de fonctions (φ_{X_n}) onverge uniformément vers φ_X sur tout intervalle $[-a, a]$. Inversement si les (φ_{X_n}) convergent vers une fonction φ dont la partie réelle est continue en 0, alors φ est la fonction caractéristique d'une variable aléatoire X vers laquelle les X_n convergent en loi vers X. On peut le résumer ainsi :*

$$\{\forall t \in \mathbb{R}, \varphi_{X_n}(t) \to \varphi_X(t)\} \Leftrightarrow \left\{X_n \overset{loi}{\to} X\right\}.$$

Convergence de la loi hypergéométrique vers la loi Binômiale

Soit (X_N) une suite de variables aléatoires sur un même espace probabilisé, de loi hypergéométrique : $X_N \to \mathcal{H}(N, n, b)$ où n et p sont supposés constants. Alors (X_N) convergent en loi, quand N tend vers l'infini, vers X de loi Binômiale $B(n, p)$ (mêmes valeurs de paramètres).

Convergence de la loi Binômiale vers une loi de Poisson

Soit (X_n) une suite de variables aléatoires Binômiale sur un même espace probabilisé : pour tout n, (Xn) suit $B(n, p_n)$. On suppose que $\lim\limits_{n\to+\infty} p_n = 0$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} np_n = \lambda$. Alors (X_n)

convergent en loi, quand n tend vers l'infini, vers une loi de Poisson de paramètre λ.

1.3.5 Loi des grands nombres

Lemme 1.3.1 (Inégalité de Markov) *Soit une variable aléatoire $X \in L^p$ et $\varepsilon > 0$.Nous avons*

$$P(|X| \geq \varepsilon) \leq \frac{1}{\varepsilon^r} E\left(|X|^r\right)$$

Preuve. Nous avons

$$\begin{aligned} E\left(|X|^r\right) &\geq \int_{|X|\geq\varepsilon} X\left(\omega\right) dP\left(\omega\right) \\ &\geq \varepsilon^r \int_{|X|\geq\varepsilon} dP = \varepsilon^r P(|X| \geq \varepsilon). \end{aligned}$$

Définition 1.3.5 (Moyenne empirique) *Soient $X_1, X_2, ...X_n$, n variables aléatoires indépendantes et de même loi de variance σ^2. On définit la somme de ces variables aléatoires par :*

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i,$$

et la moyenne empirique est donnée par :

$$\overline{X_n} = \frac{S_n}{n}.$$

Propriétés 1.2.1

1. $E\left[\overline{X_n}\right] = E\left[X_1\right].$
2. $Var\left[\overline{X_n}\right] = \dfrac{\sigma^2}{n}.$

Loi faible des grands nombres

Théorème 1.3.3 *Soit* $(X_n)_{n \in N^*}$ *une suite de variables aléatoires réelles définies sur le même espace* $(\Omega, \mathcal{F}, P)$*, indépendantes, d'espérance* μ *et de variance* σ^2 *finie* $\left(\lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^{n} \sigma^2 = 0 \right)$.

Alors on a :

$$\overline{X_n} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i \underset{n \to +\infty}{\overset{P}{\to}} E\left(X_1\right)$$

Preuve. Nous voulons prouver que pour tout $\varepsilon > 0$,

$$P\left(\left|\overline{X_n} - E\left(X_1\right)\right| > \varepsilon\right) \to 0,$$

on a que $E\left[\overline{X_n}\right] = E\left[X_1\right]$. L'inégalité de Markov avec $r = 2$ nous donne

$$\begin{aligned} P\left(\left|\overline{X_n} - E\left[\overline{X_n}\right]\right| > \varepsilon\right) &\leq \frac{1}{\varepsilon^2} E\left(\left|\overline{X_n} - E\left[\overline{X_n}\right]\right|^2\right) \\ &= \frac{1}{\varepsilon^2} Var\left[\overline{X_n}\right] = \frac{\sigma^2}{n\varepsilon^2}, \end{aligned}$$

qui tend vers zéro lorsque n $\to +\infty$

$$P\left(\left|\overline{X_n} - E\left(X_1\right)\right| > \varepsilon\right) \to 0.$$

Loi forte des grands nombres

Théorème 1.3.4 *Soit* $(X_n)_{n \in N^*}$ *une suite de v.a.réelles iid et intégrable* $(E[|X_1| < +\infty])$*.*

Alors on a :

$$\overline{X_n} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i \underset{n \to +\infty}{\overset{ps}{\to}} E\left(X_1\right)$$

ou

$$\lim_{n \to +\infty} E\left[\left|\overline{X_n} - E\left(X_1\right)\right|\right] = 0.$$

Chapitre 2

Le théorème central limite

Le théorème central limite est un résultat sur la convergence en loi d'une suite de variables aléatoires. Intuitivement, ce résultat affirme que toute somme de variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées tend vers une variable aléatoire gaussienne. Et nous étudions dans ce chapitre une approximations est l'approximation de la loi binomaile et la loi de Poisson par la loi normale.

2.1 Le théorème central limite

Théorème 2.1.1 *Soit une suite* (X_n) *de variables aléatoires définies sur le même espace de probabilité, suivant la même loi* $\mathcal{D}$ *et dont l'espérance* μ *et l'écart-type* σ *communes existent et soient finis* $(\sigma \neq 0)$*. On suppose que les* (X_n) *sont indépendantes. Considérons la somme* $S_n = X_1 + ... + X_n$*. Alors* $\dfrac{S_n - n\mu}{\sigma\sqrt{n}}$ *converge en loi vers une variable aléatoire normale centrée réduite.*

Preuve. Posons $Y_i = \dfrac{X_i - \mu}{\sigma\sqrt{n}}$. Alors

$$\varphi_{Y_i}(t) = \varphi_{\frac{X_i-\mu}{\sigma\sqrt{n}}}(t) = \varphi_{X_i-\mu}(\frac{t}{\sigma\sqrt{n}}).$$

Pour t fixé, lorsque n tend vers l'infini, $\dfrac{t}{\sigma\sqrt{n}}$ est infiniment petit. Ecrivons le développement limité, au voisinage de 0, de la fonction caractéristique d'une variable aléatoire W :

$$\begin{aligned}\varphi_W(u) &= \varphi_W(0) + u\varphi_W^{'}(0) + \frac{u^2}{2}\varphi_W^{''}(0) + u^2\varepsilon\left(u\right) \\ &= 1 + iuE\left(W\right) - \frac{u^2}{2}E\left(W^2\right) + u^2\varepsilon\left(u\right).\end{aligned}$$

En posant $W = X_i - \mu$, $u = \dfrac{t}{\sigma\sqrt{n}}$, $E\left(W\right) = E\left(X_i - \mu\right) = 0$ et $E\left(W^2\right) = E\left(\left(X_i - \mu\right)^2\right)\right) = Var\left(X_i\right) = \sigma^2$ d'où

$$\begin{aligned}\varphi_{X_i-\mu}(\frac{t}{\sigma\sqrt{n}}) &= 1 - \frac{t^2}{2n\sigma^2}\sigma^2 + \frac{1}{n}\varepsilon\left(\frac{t^3}{\sigma^3\sqrt{n}}\right) \\ &= 1 - \frac{t^2}{2n} + \frac{1}{n}\varepsilon_i\left(n\right),\end{aligned}$$

avec $\underset{n\to+\infty}{lim}\ \varepsilon_i\left(n\right) = 0$.
Maintenant, posons $Z_n = \dfrac{S_n - n\mu}{\sigma\sqrt{n}} = \sum_{i=1}^{n} Y_i$.
L'indépendance des X_n entraîne celle des Y_i et ainsi

$$\begin{aligned}\varphi_{Z_n}(t) &= \prod_{i=1}^{n}\varphi_{Y_i}(t) \\ &= \exp\left(\sum_{i=1}^{n}\ln n\left(1 - \frac{t^2}{2n} + \frac{1}{n}\varepsilon_i\left(n\right)\right)\right),\end{aligned}$$

et, sachant que $\underset{n\to+\infty}{lim}\left(1 + \frac{a}{n}\right)^n = e^a$, on a :
$\underset{n\to+\infty}{lim} Z_n\left(t\right) = e^{-\frac{t^2}{2}}$ qui est la fonction caractéristique de $\mathcal{N}(0,1)$.
Ce théorème établit une propriété générale, qui va justifier l'importance considérable de la loi normale, à la fois comme modèle pour décrire des situations pratiques, mais aussi comme outil théorique.

2.2 L'approximation de la loi binômiale par la loi normale

Théorème 2.2.1 *(X_n) étant une suite de variables binômiales $B(n,p)$ alors*

$$\frac{X_n - np}{\sqrt{np\,(1-p)}} \to \mathcal{N}(0,1).$$

La fonction caractéristique de X_n vaut$(p\exp\,(it)+1-p)^n$ donc celle de $\dfrac{X_n - np}{\sqrt{np\,(1-p)}}$ vaut :

$$\varphi(t) = (p\exp(\frac{it}{\sqrt{np\,(1-p)}}) + 1 - p)^n \exp(-\frac{itnp}{\sqrt{np\,(1-p)}})$$

$$\ln\varphi = n\ln\left(p\left(\exp(\frac{it}{\sqrt{np\,(1-p)}}) - 1\right)\right) - \frac{itnp}{\sqrt{np\,(1-p)}}.$$

On développons au deuxième ordre l'exponentielle ; il vient :

$$\ln\varphi \simeq n\ln\left(1 + p\left(\frac{it}{\sqrt{np\,(1-p)}} - \frac{t^2}{2np\,(1-p)}\right)\right) - \frac{itnp}{\sqrt{np\,(1-p)}},$$

puis le logarithme :

$$\ln\varphi \simeq n\left[\frac{pit}{\sqrt{np\,(1-p)}} - \frac{pt^2}{2np\,(1-p)} + \frac{p^2t^2}{2np\,(1-p)}\right] - \frac{itnp}{\sqrt{np\,(1-p)}}.$$

Soit :

$$\ln\varphi \simeq -\frac{t^2}{2\,(1-p)} + \frac{pt^2}{2\,(1-p)} = \frac{t^2}{2\,(1-p)}\,(p-1) = -\frac{t^2}{2},$$

$\varphi \to \exp\left(-\dfrac{t^2}{2}\right)$ qui est la fonction caractéristique de la loi normale centrée réduite.

Application : Lorsque n est assez grand, on peut donc approximer la loi binômiale par la loi de Gauss. On donne généralement comme condition np et $n(1-p) > 5$.

Correction de continuité

Si la variable aléatoire X suit la loi binômiale $B(n,p)$, alors la variable aléatoire X prend des valeurs entières positives entre 0 et n. Remplacer la loi binômiale $B(n,p)$ par la loi normale
$\mathcal{N}\left(np, \sqrt{np\,(1-p)}\right)$ revient à considérer la variable aléatoire X comme une variable qui prend donc toutes les valeurs réelles.

2.3 L'approximation de la loi de Poisson par la loi normale

Théorème 2.3.1 *Soit* (X_n) *une suite de variables aléatoires suivants des lois de Poisson de paramètres* λ_n*.*

Si $\underset{n\to+\infty}{lim} \lambda_n = \infty$, alors $\dfrac{X_n - \lambda_n}{\sqrt{\lambda_n}}$ converge en loi vers $\mathcal{N}(0,1)$.
Preuve. La fonction caractéristique de X est :

$$\varphi_{X_n}(t) = \exp(\lambda_n)(\exp(it-1))$$

d'où :

$$\begin{aligned}\varphi_{\frac{X_n-\lambda_n}{\sqrt{\lambda_n}}}(t) &= \exp\left(\lambda_n\left(\exp\left(\frac{it}{\sqrt{\lambda_n}}\right)-1\right)\right)\exp\left(-\frac{it\lambda_n}{\sqrt{\lambda_n}}\right)\\ &= \exp\left(\lambda_n\exp\left(\frac{it}{\sqrt{\lambda_n}}\right)-\lambda_n - it\sqrt{\lambda_n}\right),\end{aligned}$$

comme :

$$\exp\left(\frac{it}{\sqrt{\lambda_n}}\right) \simeq 1 + \frac{it}{\sqrt{\lambda_n}} - \frac{t^2}{2\lambda_n},$$

il vient :

$$\begin{aligned}\varphi_{\frac{X_n-\lambda_n}{\sqrt{\lambda_n}}}(t) &= \exp\left(\lambda_n + it\sqrt{\lambda_n} - \frac{t^2}{2} - \lambda_n - it\sqrt{\lambda_n}\right) \\ &= \exp\left(-\frac{t^2}{2}\right),\end{aligned}$$

qui est la fonction caractéristique de la loi normale centrée réduite.

Condition : On admet que si $\lambda \geq 18$, la loi de Poisson peut être approchée par la loi normale de moyenne $m = \lambda$ et d'écart-type $\sigma = \sqrt{\lambda}$

Remarque 2.3.1

Le théorème central limite n'est pas toujours réalisée. Soient X_i variables i.i.d de loi de Cauchy. Pour cette loi on a $E\left|X_1\right| = +\infty$, $E(X_1)$ n'est pas définie et la moyenne empirique $\overline{X}$ n'est pas convergente presque sûrement.

Chapitre 3

Test de normalité et application du TCL

Les tests de normalité en statistiques permettent de vérifier si des données réelles suivent une loi normale ou non. Les tests de normalité sont des cas particuliers des tests d'adéquation. tests permettant de comparer des distributions, appliqués à une loi normale, grâce à son rôle dans le théorème central limite. Dans ce chapitre, on va expliquer les méthodes graphiques et le test de shapiro-wilk, l'approximation gaussienne de quelques lois en utilisant les graphes de densités, de quantiles et d'histogrammes.

3.1 Méthodes graphiques

3.1.1 Histogramme de fréquence

L'outil graphique le plus simple est l'histogramme de fréquence. Il s'agit de couper automatiquement l'intervalle de définition de la variable en intervalles de largeur égale, puis de produire une série de barres dont la hauteur est proportionnelle à l'effectif associé à l'intervalle.

Exemple 3.1.1

x = rnorm (5000)

hist(x, col="4")

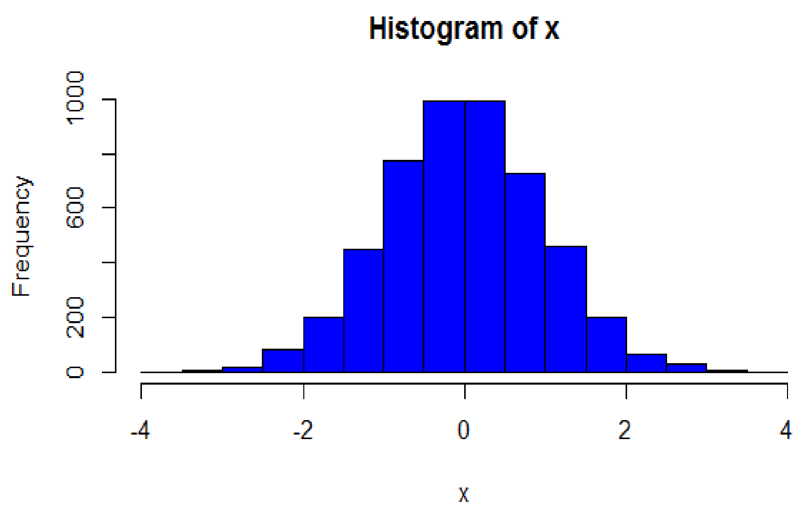

FIG. 3.1 – Histogramme de fréquence

- Il est possible de visualiser la forme de la distribution des données à analyser en les représentant sous forme d'histogramme puis de comparer la forme de cet histogramme avec une courbe représentant une loi normale. Ceci ne permet pas de conclure à la normalité des données mais peut donner une idée du type de loi.

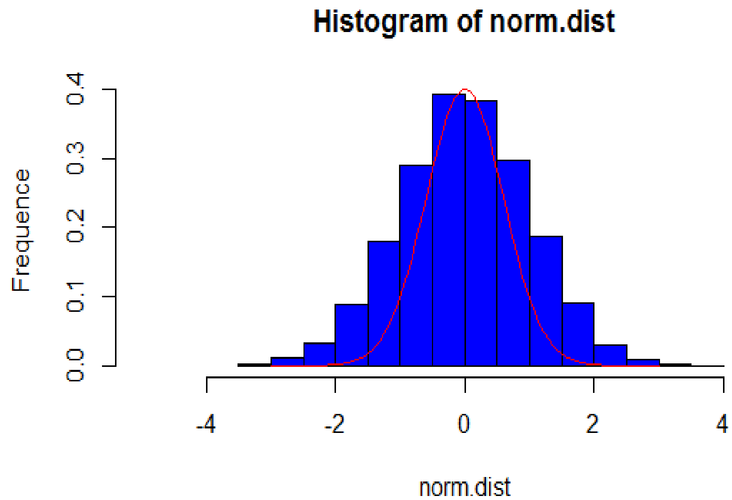

FIG. 3.2 – Histogramme de fréquence de distribution et densité de la loi normale

3.1.2 Le Q-Q(Quantile-Quantile) plot graph

Le principe du QQ-plot général est de comparer la position de certains quantiles dans la population observée avec leur position dans la population théorique.

Le QQ-plot est un outil graphique qui permet d'apprécier visuellement la normalité d'une v.a. La fonction à utiliser est la fonction qnorm().

Exemple 3.1.2

$x = \text{rnorm}(1000, 0, 1)$;

qqnorm(x) ; # pour dessiner les quantile de loi normale $\mathcal{N}$ $(0, 1)$ avec les quantiles de x

qqline(x, col $= 2$) ; # ajouter une ligne au graphe qqnorm

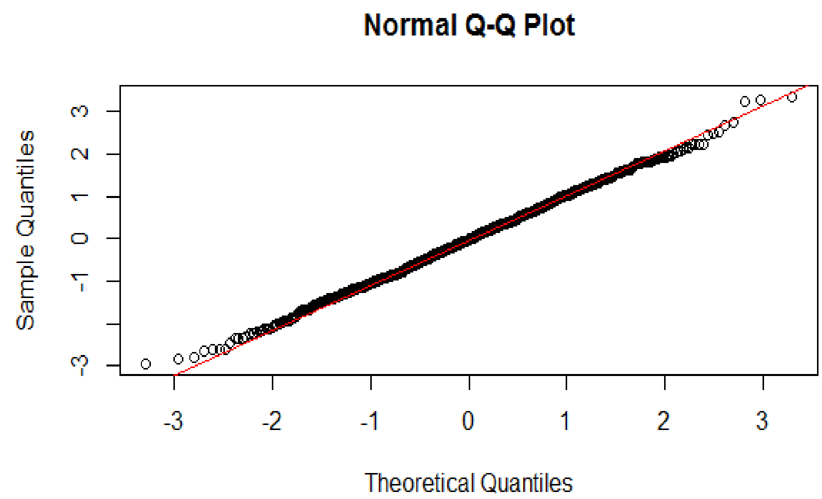

FIG. 3.3 – Graphe de quantiles de loi normale et les quantile de x

Interprétation statistique Si les points sont alignés autour de la droite tracée par la fonction qqline(), c'est que la distribution de la variable étudiée est celle d'une loi normale.

Remarque 3.1.1 Il existe également une autre méthode graphique des tests de normalité comme la droite de Henry (est une méthode graphique pour ajuster une distribution gaussienne à celle d'une série d'observations).

3.2 Tests statistiques

3.2.1 Test de Shapiro-wilk

Le test de Shapiro-Wilk est conçu specialement pour étudier la non-norrnalité d'une variable continue X. C'est le test le plus puissant pour tester la norrnalité d'une distribution. Les hypotheses sont : H_0 : X suit une loi normale donc si p-value > 0.01, l'hypothèse de normalité est compatible avec nos données et H_1 : X ne suit pas une loi normale. La statistique de test est

$$W = \frac{\left(\sum_{i=1}^{n} a_i x_{(i)}\right)^2}{\sum_{i=1}^{n} (x_i - \overline{x})^2}$$

où a_i sont des constantes générées à partir de la moyenne et de la matrice de variance covariance des quantiles d'un échantillon de taille n suivant la loi normale. Ces constantes sont fournies dans des tables spécifiques.

Instruction R : L'instruction à utiliser est : shapiro. test ().

Exemple 3.2.1

v $<$ rnorm(1000, mean = 20, sd = 2)

Résultat : Le résultat du test statistique est :

(res.sh = shapiro.test(v))

Shapiro-Wilk normality test

data : v

W= 0.99884, p-value = 0.78

Exemple 3.2.2

u $<$ runif(100, min= 2, max = 4)

Résultat : Le résultat du test statistique est :

(res.sh = shapiro.test(u))

Shapiro-Wilk normality test

data : u

W = $0,95295$, p-value = $0,001304$

Interprétation : Si la valeur-p est inférieure à une seuil α qu'on s'est donné (en général,5%), alors on rejette H_0. Ici, la valeur-p dans example 1 est égale à 0.78, ce qui nous

conduit (bien entendu) à accepter H_0. Et pour example 2 la valeur-p est égale à 0.001304 donc on rejette H_0.

Remarque 3.2.1 Il existe également un grand nombre de tests statistiques de normalité.

3.3 Application du TCL sous $\mathcal{R}$

3.3.1 Approximation gaussienne de la loi de poisson

```
n = 5000 # la taille de l'echantillon
N = 3000 # nombre de simulations
S = numeric(N)
M = numeric(N)
for(i in 1 :N){
X= rpois(n, 2) # Générer N échantillon d'une loi fixée
M[i]= mean(X) # Calculer la moyenne de chaque échantillon
S[i]=sqrt(n) *(M[i]−2)/sqrt(2)}# Calculer la variable M−E(X)/Ecart-type
par(mfrow=c(1, 2))
qqnorm(S) # comparer la quantile empirique avec celui de la loi normale graphiquement
hist(S, proba="T")
lines(density(S), col = 2)
abline(v=mean(S), lty = 2, lwd = 2,col = 4)
shapiro.test(S)
```

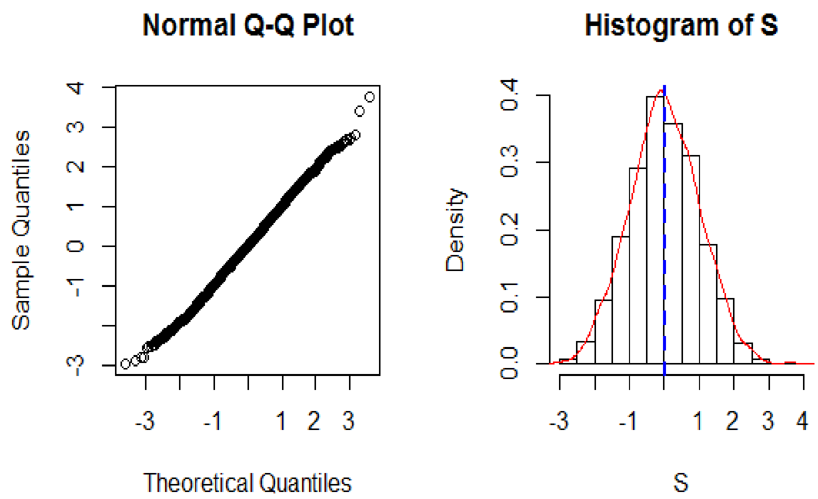

FIG. 3.4 – Graphe de quantile, et d'histogramme de S

shapiro.test(S)

Shapiro-Wilk normality test

data : S

W= 0.99889, p-value = 0.04756

3.3.2 Approximation gaussienne de la loi binômiale

```
n = 900
N = 1000
S = numeric(N)
M = numeric(N)
for(i in 1 :N){
X = rbinom(n,100, 0.5)
M[i] = mean(X)
S[i] = sqrt(n)*(M[i]−50) / sqrt(25)}
par(mfrow = c(1, 2))
qqnorm(S)
```

hist(S, proba = "T")

lines(density(S),col ="red")

abline(v = mean(S),lty = 2,lwd = 2,col = 4)

shapiro.test(S)

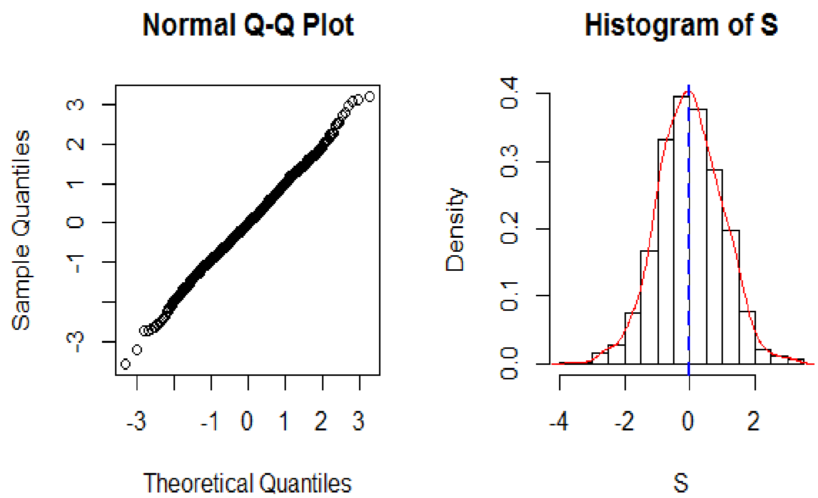

FIG. 3.5 – Graphe de quantile et d'histogramme de S

shapiro.test(S)

Shapiro-Wilk normality test

data : S

W = 0.99831, p-value = 0.4353

3.3.3 Approximation gaussienne de la loi uniforme

N = 1000

n = 30

M = numeric(N)

S = numeric(N)

for(i in 1 :N){

X = runif(n)

M[i] = mean(X)

S[i] = sqrt(n)*(M[i] − 0.5) / sqrt(1/12)}

par(mfrow = c(1, 2))

qqnorm(S)

hist(S,proba ="T")

lines(density(S),col = 2)

abline(v = mean(S),lty = 2,lwd = 2,col = 4)

shapiro.test(S) shapiro.test(S)

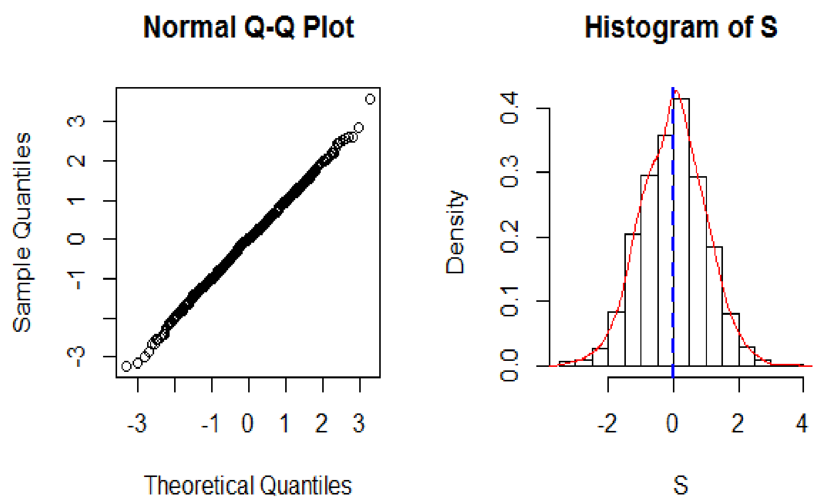

FIG. 3.6 – Graphe de quantile, et d'histogramme de S

Shapiro-Wilk normality test

data : S

W = 0.99904, p-value = 0.8914

3.3.4 Approximation gaussienne de la loi exponentielle

N = 1000

n = 90

S = numeric(N)

for(i in 1 :N){

X = rexp(n)

S[i] = sqrt(n)*(mean(X) −1)}

qqnorm(S)

shapiro.test(S) shapiro.test(S)

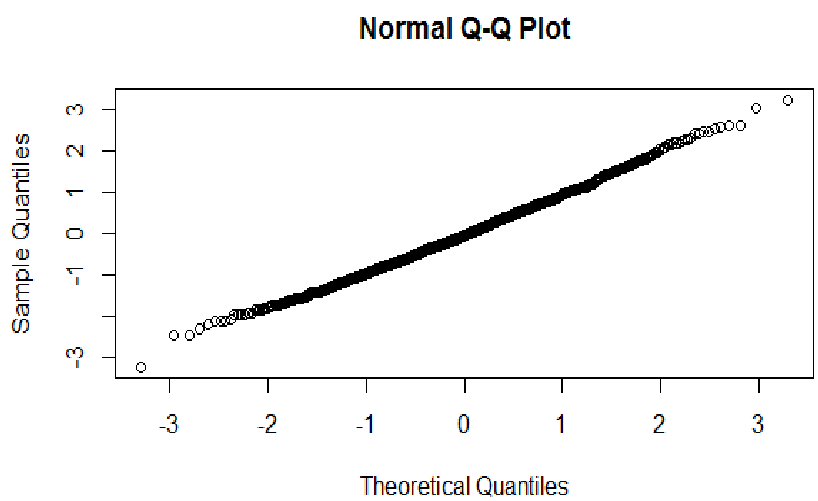

FIG. 3.7 – Graphe de quantile et de densités de S

Shapiro-Wilk normality test

data : S

W = 0.99727, p-value = 0.08867

Commentaire On observe dans chaque approximation que il existe une similarité entre l'histogramme de S et la courbe de densité de la loi normale et les points des quantiles sont aligneés, le p-value de S est non significatif, alors S suit la loi normale centrée réduite.

Conclusion

Le théorème central limite est sans doute l'un des théorèmes qui occupe un grand espace en statistique grâce à son importance.

Cette importante est répresentée par le fait qu'une somme d'une suite de variables aléatoires i.i.d converge en loi vers la loi normale.Ce théorème établit une propriété générale, qui va justifier l'importance considérable de la loi normale, à la fois comme modèle pour décrire des situations pratiques, mais aussi
comme outil théorique.

Finalement, pour réaliser l'idée de (TCL), on a choisit le logiciel $\mathcal{R}$ pour faire une partie de simulation.

Bibliographie

[1] Lejeune, M. (2010). Statistique La théorie et ses applications, Deuxième édition. Springer-Verlag France, Paris.

[2] Philippe, A. Viano, M.-C. (2010). Cours de Probabilités, Modèles et Applications. Université de nantes.

[3] C. Fiszka,Cours d'introduction aux Probabilités, Université Paris.

[4] Y. Velenik Version du 24 mai 2012. Probabilités et Statistique. Université de Genève.

[5] Pierre DUSART. (2016) Cours de Probabilités.

[6] Pierre DUSART. (2017) Cours de Statistiques inférentielles.

[7] Laurent Claessens. Décembre (2012). Mes notes de mathématiques.

[8] G.SAPORTA, (2006) t Edition TECHNIP 27 rue Ginoux 75737 Paris cedex 15 FRANCE, Probabilités Analyse des données et statistique.

[9] Veysseyre, R. (2006). Aide-mémoire Statistique et probabilités pour l'ingénieur, 3^e édition. Dunod, Paris.

[10] Rakotomalala, R. (2011). Tests de normalité. Université Lumière Lyon 2.

[11] Philippe, A. (2012). Notes de Cours sur le logiciel **R**. Université de nantes, Laboratoire de Mathématiques Jean Leray.

[12] N.JEGOU. Statistiques de données, MASS Licence 3 - Université Rennes 2

Annexe A : Logiciel *R*

R est un logiciel (langage) libre qui possède une large collection d'outils statistiques et graphiques. qui permet de réaliser des analyses statistiques. Plusieurs sites
sont consacrés à ce logiciel, en particulier le site **http ://www.r-project.org/**, aussi pour obtenir des informations sur l'installation, les calcules et la programmation. Il existe plusieurs versions, telle que **Ri386 3.3.2** que l'on a utilisé dans l'application de ce mémoire. Ce logiciel contient des packages de base trouvés dans toute les versions, et des packages correspond avec quelque versions, telle que le package f-basics qui contient les testes de normalités.

Annexe B : Abréviations et Notations

Les différentes abrévariations et notations utilisées tout au long de ce mémoire sont expliquées ci-dessous.

$v.a.r$	Variable aléatoire réelles.
X	Variable aléatoire réelles.
iid	Indépendant et identiquement distribué.
Ω	Un univers des possibles.
$\mathcal{F}$	Tribu
A	événement.
$\varnothing$	L'ensemble vide.
A^c	événement contraire.
$A \cap B$	Intersection de A et B.
$A \cup B$	Union de A et B.
$(\Omega, \mathcal{F})$	Espase de probabilisable.
$(\Omega, \mathcal{F}, P)$	Espase probabilité.
$\mathbb{R}$	Ensemble des nombres réels.
$\mathbb{N}$	Ensemble des entiers naturels.
$F_X(y)$	Fonction de répartition.
$f(x)$	Fonction de densité.

$E[X]$	Espérance mathématique ou moyenne de X.
$Var(X)$	Variance mathématique.
$Cov(X,Y)$	Covariance mathématique.
$\rho(X,Y)$	Coefficient de corrélation.
σ	écart-type.
$\varphi_X(t)$	La fonction caractéristique de X.
$B(p)$	La loi Bernoulli.
$B(n,p)$	La loi Binomiale de taille n et deparamètre p.
$P(\lambda)$	La loi de Poissan de paramètre λ.
$G(p)$	La loi Géométrique.
$\mathcal{H}(N,n,b)$	Loi hypergéométrique.
$N(\mu,\sigma)$	La loi normale(ou Laplace Gauss)de paramètre μ et σ.
$N(0,1)$	.La loi normale centrée et réduite.
$\chi^2(v)$	La loi de khi-deux à v degrés de liberté.
$(X_1,...,X_n)$	échantillon de taille n de v.a.
$\xrightarrow{\mathcal{P}}$	convergence en probabilité.
$\xrightarrow{\mathcal{L}}, \xrightarrow{\mathcal{D}}$	convergence en loi, convergence en distribution.
$\xrightarrow{p.s.}$	convergence presque sûre.
$\xrightarrow{m.p}$	convergence en moyenne d'ordre p.
TCL	Théorème Central Limite.