République Algérienne Démocratique et Populaire

Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

UNIVERSITÉ MOHAMED KHIDER, BISKRA

FACULTÉ des SCIENCES EXACTES et des SCIENCES de la NATURE et de la VIE

DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES

Mémoire présenté en vue de l'obtention du Diplôme **:**

MASTER en Mathématiques

Option : **Probabilité**

Par

SOLTANE Zineb Kamir

Titre :

Contrôle Optimal des Equations Différentielles Stochastiques sous l'information partielle

Membres du Comité d'Examen :

Dr.	Abba abdelmadjid	Université de Biskra	Président
Dr.	Hafayed mokhtar	Université de Biskra	Encadreur
Dr.	Ghoul Abdelhak	Université de Biskra	Examinateur

Juin 2018

REMERCIEMENTS

Je tiens premièrement à remercier mon dieu aprés mes parents car mon éducation est le fruit de leurs ardents efforts.

Je remercie également tous les professeurs et le personnel du Département de mathématique de l'Université de Biskra qui.. m'ont transmis la connaissance et l'aide

nécessaires à la réalisation cie ce travail, en particulier mon encadreur monsier. Hafayed

mokhtar..

Enfin, je remercie, sans toutefois oublier tous mes amis pour tous leurs encouragements..

REMERCIEMENTS

Table des matières

Table des figures

Introduction

Dans ce travail, notre objectif est d'obtenir un principe du maximum stochastique pour un système gouverné par équations différentielles stochastiques sous l'information partielle. Nous présentons dans ce travail trois chapitres. Les deux premiers chapitres sont introductifs et permettent d'introduire les outils essentiels pour comprendre le principe du maximum stochastique. La suite de ce travail est organisée de la manière suivante :

Le premier chapitre intitulé : Introduction générale. Dans ce chapitre nous rappelons des notions importantes de contrôle optimal stochastique. Nous commençons par des généralités sur les processus stochastiques, espérances conditionnelles et leurs propriétés ainsi que les mouvements Browniens et martingales et l'intégrale stochastique et l'equation différentille stochastique.

Le deuxième chapitre intitulé : Méthodes de résolution en contrôle stochastique. Dans ce chapitre, nous présentons brièvement les différentes méthodes de résolution d'un problème de contrôle stochastique, bien connues, qui sont la méthode de programmation dynamique et le principe du maximum de Pontryagin . Ensuite on dennera les différentes classes de contrôles stochastiques.

Le dernier chapitre, intitulé Principe du maximum stochastique pour les $EDSs$ sous l'information partielle. Dans ce chapitre on va donner le principe du maximum pour des systèmes contrôlés gouvernés par des $EDSs$ dont la matrice de diffusion est contrôlée et le domaine de contrôle est convexe. Plus précisément, sous l'information partielle $\mathcal{G}_t$ de $\mathcal{F}_t$, on intéresse par la minimisation de la fonction de coût :

$$J(u()) = E\int_0^T l(t, X(t), u(t))dt + h(X(T)).$$

Où $X(t)$ solution de l'EDS suivante :

$$\begin{cases} dX(t) = f(t, X(t), u(t))dt + \sigma(t, X(t), u(t))dB_t, \\ X(0) = x_0. \end{cases}$$

Sur l'ensemble des contrôles admissible donnés.

$f : [0, T] \times \mathbb{R}^d \times A \to \mathbb{R}^d$.

$\sigma : [0, T] \times \mathbb{R}^d \times A \to \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d$.

$l : [0, T] \times \mathbb{R}^d \times A \to \mathbb{R}$.

$h : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$.

Les conditions nécessaires d'optimalité, vérifées par ce contrôle optimale sont appelé principe du maximum stochastique. Ceci nous amène à introduire un processus adjoint comme solution d'une certaine équation différentielle rétrograde, d'une inégalité variationelle vérifée par le contrôle optimal, noté par $u^*(\cdot)$. Ces résultats ont été prouvé par Baghiri & Oksendal [4].

Chapitre 1

Introduction générale

Dans ce chapitre, nous allons rappeler des notions essentielles en théorie des processus stochastiques, nous commençons par définir processus stochastique, espérance conditionnelle, les principales propriétés du martingale, nous rappelons ensuite la construction de mouvement Brownien et certaines de ses propriétés ainsi que l'intégrale stochastique et l'equation différentille stochastique.Dans la suite $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé et (E, ξ) un espace mesurable.

1.1 Processue stochastique

Définition 1.1.1 (Variable aléatoire) *Toute application mesurable* **X** *d'un espace probabilisé* $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ *dans un espace* (E, ξ) *définit une variable aléatoire .*X *vérifie donc la propriété de mesurabilité :* $\forall B \in \xi, X^{-1}(B) \in \mathcal{F}$.

Définition 1.1.2 (processus aléatoire) *un processus aléatoire (ou fonction aléatoire) discret (resp continue) est une famille de variables aléatoires* $(X(t))_{t\in\mathbb{N}}$ *(resp* $(X(t)_{t\in\mathbb{R}})$*).*

et on représente le processus stochastique comme un application

$$X(\cdot,\cdot) : T \times \Omega \to E,$$

$$(t,\omega) \to X(t,\omega).$$

L'application $X(t,\cdot) : \Omega \to E$ est une variable aléatoire.

L'application $X(\cdot,\omega) : T \to E$ est une trajectoire.

Définition 1.1.3 (Tribu engendré) *La tribu engendrée par une famille d'ensembles A est la plus petite tribu contenant cette famille, on la note $\sigma(A)$. Elle est l'intersection de toutes les tribus contenant A.*

Définition 1.1.4 (Filtration) *Une filtration est une famille croissante de sous tribus de $\mathcal{F}$, c'est-a-dire telle que $\mathcal{F}_t \subset \mathcal{F}_t$ pour tout $t \leq s$.*

Le quadruplet $(\Omega, (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}, \mathcal{F}, P)$ sera appelé un espace de probabilité filté. La filtration naturelle d'un processus $(X(t))_{t\in\mathbb{N}}$ est $(\mathcal{F}_t)_{t\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$\mathcal{F}_t^X = \sigma\left\{X(0), \cdots, X(t)\right\}, \forall t \in \mathbb{N}.$$

Définition 1.1.5 (Mesurable) *Un processus $X(t)$ est dit mesurable si lapplication : $(t,\omega) \to X(t,\omega)$ de $(\mathbb{R}_+ \times \Omega, B(\mathbb{R}_+) \otimes \mathcal{F}) \to (E,\xi)$ est mesurable.*

Définition 1.1.6 (progressivement mesurable) *Un processus $X(t)$ est dit progressivement mesurable si lapplication suivant : $(s,t) \to X(s,t)$ de $([0,t] \times \Omega, B([0,t] \otimes \mathcal{F}_t) \to (E,\xi))$ est mesurable pour tout $t \geq 0$.*

Définition 1.1.7 (Processus adapté) *Un processus stochastique $X = (X_t, t \geq 0)$ est dit adapté (par rapport à une filtration $\mathcal{F}_t$) si X_t est $\mathcal{F}_t-$mesurable pour tout t.*

Définition 1.1.8 (Processus prévisible) *Le processus X est dit processus prévisible pour la filtration $\mathcal{F}_t$,où $\mathcal{F}_t-$prévisible si :$\forall t \in \mathbb{N}, X(t)$ est$\mathcal{F}_{t-1}-$mesurable.*

Définition 1.1.9 (Accroissement stationnaire) *Soit X un processus stochastique adapté la fitration $(\mathcal{F}_t)_{t\leq 0}$. On dit que :*

1. *X est accroissements indépendants si pour tous $s \leq t$, la variable aléatoire $X_t - X_s$ est indépendante de $\mathcal{F}_t^X = \sigma(X_u, u \leq s)$.*
2. *X est accroissements stationnaires si la loi de la variable aléatoire $X_t - Xs$, pour $s \leq t$, ne dépend que de $t - s$, $X_t - X_s \sim X_{t-s} - X_0, \forall s \leq t$.*

Définition 1.1.10 (Processus croissante) *Un processus $A = (A_t, t \geq 0)$ est un processus croissant si $A_0 = 0$ et $t \to A_t$ est une fonction croissante, c'est-a-dire $A_t(\omega) \leq A_s(\omega), \forall t \leq s$,P.s.*

Définition 1.1.11 (Processus gaussien) *Un processus X est gaussien si toute combinaison linéaire finie de $(X_t, t \geq 0)$ est une variable aléatoire gaussienne, c'est-a-dire si $\forall n, \forall ti, 1 \leq i \leq n, \forall a_i, \sum_{i=1}^{n} X_i = a_i X_{t_i}$ est une variable aléatoire gaussienne.*

Un processus gaussien est caractérisé par son espérance et sa covariance.

Définition 1.1.12 (Variation borné) *Soit X un processus stochastique, On appelle variation infinitésimale associé une subdivision $\Pi_n = (t_0^n, t_1^n, ...t_n^n)$ de lintervalle $[0, T]$ par :*

$$V_T^p(\Pi_n) = \sum_{i=1}^{n} \left| X_{t_i^n} - X_{t_{i-1}^n} \right|^p .$$

Si $V_T^p(\Pi_n)$ a une limite dans un certain sens lorsque $\|\Pi_n\|_\infty = \max_{1\leq i\leq n} \left| t_i^n - t_{i-1}^n \right| \to 0$ tant que $n \to \infty$.la limite ne dépend pas de la subdivision choisie, on lappelle variation d'ordre p de Xsur $[0, T]$:

Définition 1.1.13
1. *Si $p = 1$: la limite s'appelle variation totale de X sur $[0, T]$.*
2. *Si $p = 2$: la limite s"appelle variation quadratique de X on la note $\langle X, X \rangle_T$.*

1.2 Espérance conditionnelle

Définition 1.2.1 (Probabilité conditionnelle) *Soit A et B deux évènements (sous$-$ensembles de Ω). On définit la probabilité conditionnelle de A quand B par $P(A|B) = \frac{P(A\cap B)}{P(B)}$,pour tout B tel que $P(B) \neq 0$.*

Définition 1.2.2 (Espérance conditionnelle par rapport à un évènement) *un espérance conditionnelle de X sachant B :*

$$E(X \mid B) = \frac{1}{P(B)} \int_B X dP = \sum_j x_j \frac{P(X = x_j \cap B)}{P(B)}.$$

Définition 1.2.3 (Espérance conditionnelle) *Soit Y une variable aléatoire réelle intégrable (i.e). $E\left[|Y|\right] \prec \infty$, définie sur l'espace $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ et $\mathcal{G}$ une sous$-$tribu de $\mathcal{F}$. L'espérance conditionnelle $E\left[Y \mid G\right]$ de Y sachant $\mathcal{G}$ est l'unique variable aléatoire telle que :*

1. *$E\left[Y \mid G\right]$ est $\mathcal{G}-$mesurable.*
2. *$\forall A \in \mathcal{G}$, $\int_A E\left[Y \mid G\right] dP = \int_A Y dP$.*

La condition (2) est équivalente $E[ZE[Y \mid G]] = E[ZY]$ pour tout Z variable aléatoire $\mathcal{G}-$mesurable.

Proprietés de l'espérance conditionnelle [5]

soient X, Y deux variables aléatoires réelles appartenant $L^2(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, soit $\mathcal{G}$ et $\mathcal{G}\prime$ deux sous$-$tribus de $\mathcal{F}$ telle que $\mathcal{G} \subset \mathcal{G}\prime$ On a alors :

1. Linéarité : soit a et b deux constantes $E(aX + bY \mid \mathcal{G}) = aE(X \mid \mathcal{G}) + bE(Y \mid \mathcal{G})$.
2. Croissance : si $X \prec Y$ alors$E(X \mid \mathcal{G}) \prec E(Y \mid \mathcal{G})$.
3. Positivité : si $X \succ 0$; alors $E(X \mid \mathcal{G}) \succ 0$.
4. $E[E(X \mid \mathcal{G})] = E(X)$.

5. Si X est $\mathcal{G}-$mesurable alors $E(XY \mid \mathcal{G}) = XE(Y \mid \mathcal{G})$.

6. Si X est $\mathcal{G}-$mesurable alors $E(X \mid \mathcal{G}) = X$.

7. Si X est indépendante de $\mathcal{G}$ alors$E(X \mid \mathcal{G}) = E(X)$.

8. $E(X \mid \{\Omega, \emptyset\}) = E(X)$.

9. $E[E(X \mid \mathcal{G}\prime) \mid \mathcal{G}] = E(X \mid \mathcal{G})$.

10. **Théorème (convergence monotone conditionnelle)** Si $(X(t_n))_{n\geq 0}$ une suite de variables aléatoires croissantes, positives (i.e),$(X_n(t) \leq X_{n+1}(t)$ et si $X_n(t) \to X(t)$ tentque $n \to \infty$, $X \in L^1$ alors :

$$\lim_{n\to\infty} E(X_n \mid \mathcal{G}) = E(X \mid \mathcal{G}).$$

11. **Théorème (convergence dominée conditionnelle ou théorème de Lebesgue)** : Si $(X_n(t))_{n\geq 0}$une suite de variables aléatoires telle que $|X_n(t)| \prec Y$, où $Y \in L^1$ et si :

$$\text{tentque } n \to \infty, \text{on a } X_n(t) \to X(t) \text{ alors } : \lim_{n\to\infty} E(X_n(t) \mid \mathcal{G}) = E(X \mid \mathcal{G}).$$

12. **Théorème (Lemme de Fatou conditionnelle)** : Si on a $(X_n(t))_{n\geq 0}$une suite de variables aléatoires positives (p.s) alors :

$$E(\lim_{n\to\infty} \inf X_n(t) \mid \mathcal{G}) \leq \lim_{n\to\infty} \inf E(X_n(t) \mid \mathcal{G}).$$

13. **Théorème (Inégalité de Jensen conditionnelle)** : Si $\emptyset$ une fonction convexe alors :

$$\emptyset\left[E(X \mid \mathcal{G})\right] \leq E\left[\emptyset(X) \mid \mathcal{G}\right].$$

1.3 Martingale

Les martingales représentent une classe particulière de processus stochastiques. Elles jouent un important rôle en ingénierie financière.

Définition 1.3.1 *Un processus stochastique* $\{X_t\}_{t\geq 0}$ *adapté à la filtration* $\{\mathcal{F}_t\}_{t\geq 0}$ *est une martingale si* $\forall s < t, E(X_t \mid \mathcal{F}_s) = X_s$. *On parlera de sous−martingale si* $E(X_t \mid \mathcal{F}_s) \geq X_s$ *et de sur−martingale si* $E(X_t \mid \mathcal{F}_s) \leq X_s$.

Définition 1.3.2 (Temps d'arrêt) *Un temps d'arrêt par rapport à une filtration* $\{\mathcal{F}_t\}_{t\geq 0}$ *est une variable alétoire* $\tau : \Omega \rightarrow [0, +\infty]$ *telle que* $\{\tau \leq t\} = \{\omega \in \Omega \mid \tau(\omega) \leq t\} \in \mathcal{F}_t$, $\forall t \geq 0$. *Pour tout temps d'arrêt* τ *on définit :*

$$\mathcal{F}\tau = \{A \in \mathcal{F} \mid A \cap \{\tau \leq t\} \in \mathcal{F}_t, \forall t \geq 0\}.$$

1.3.1 Martingale à temps discret

Théorème 1.3.1 (Décomposition de Doob dune sous-martingale) *Toute sous-martingale* $X_n(t)$ *s'écrit de façon unique sous la forme* $X_n(t) = M_n(t) + A_n(t)$ *avec* $M_n(t)$ *martingale et* $A_n(t)$ *processus croissante prévisible intégrable.*

Théorème 1.3.2 (d'arrêt) *Si* $M_n(t)$ *est un processus adapté et* τ *est un temps darrêt, on définit le processus stoppé* $M_n^\tau(t)$ *par :* $M_n^\tau(t) = M_{n\wedge\tau}$.

Proposition 1.3.1 *Soient* $M_n(t)$ *une sous−martingale et* τ *un temps d'arrêt,* M^τ *est une sous−martingale.*

Martingale à temps continue

Définition 1.3.3 *Si* $N(t)$ *est une martingale de carré intégrable on a pour* $s \leq t$ *:* $E((N(t) - N(s))^2 \mid \mathcal{F}_s) = E(N(t)^2 - N(s)^2 \mid \mathcal{F}_s)$.

De plus $N(t)$ est un processus accroissements orthogonaux (i.e), pour $u < v \leq s < t$:

$$E((N(v) - N(u))(N(t) - N(s))) = 0.$$

Si $t_0 = 0 < t_1 < \cdots < t_n = t$ une subdivision de $[0, t]$:

$$E(N(t)N(0))^2 = \sum_{i=1}^{n-1} E(N(ti+1)N(ti))^2.$$

1.4 Mouvement Brownien

Définition 1.4.1 *Un mouvement brownien est un processus stochastique $\{B_t\}_{t\geq 0}$ à trajectoires continues dont les*

accroissements disjoints sont indépendants, et $\forall s \geq 0, (B_{t+s} - B_t) \sim \mathcal{N}(0, s)$.
Si de plus, $P(B_0 = 0) = 1$, alors $\{B_t\}_{t\geq 0}$ est un mouvement brownien standard.[5]

Définition 1.4.2 ***Proposition 1.4.1 (Scaling)*** *Soit $(B_t, t \geq 0)$un mouvemnet Brownien standard alors :*

1. *le processus $\hat{B}$ défini par $\hat{B}_t = -B_t$ est un mouvement Brownien.*
2. *le processus $\tilde{B}$ défini par $\tilde{B}_t = \frac{1}{c} B_{c^2 t}$ est un mouvement Brownien.*
3. *le processus $\bar{B}$ d ´efini par $\bar{B}_t = tB_{\frac{1}{t}}, \forall t > 0, \bar{B}_0 = 0$ est un mouvement Brownien.*

Proposition 1.4.2 (mouvement Brownien et martingale) *Si $(B_t, t \geq 0)$ est un Mouvement Brownien standard alors :*

1. *B_t est un $\mathcal{F}_t-$tmartingale.*
2. *$B_t^2 - t$ est $\mathcal{F}_t-$martingale.*
3. *$exp(\alpha B_t - \frac{\alpha^2}{2} t)$ est $\mathcal{F}_t-$martingale.*

1.5 Intégrale stochastique

Il s'agit d'une intégrale de la forme :

$$\int_0^T X(t)B_t. \tag{1.1}$$

où $\{B_t\}_{t\geq 0}$ est mouvement brownien, et $\{X_t\}_{t\geq 0}$ un processus stochastique répondant à certains critères d'intégrabilité. En ingénierie financière, $\{B_t\}_{t\geq 0}$ pourrait par exemple représenter l'évolution du prix d'un actif dans le temps et $\{X_t\}_{t\geq 0}$ la stratégie de transaction sur cet actif d'un investisseur. L'equation 1.1 est alors le gain réalisé à l'horizon T. La manipulation de cette forme d'intégrale est facilitée par l'utilisation de la formule d'Itô, faisant référence à son auteur, le mathématicien Kiyoshi Itô.

1.5.1 Propriétés de lintégrale stochastique

1. $\int_0^t \theta_s dB_s$ est linéaire.
2. $\int_0^t \theta_s dB_s$ est continue p.s.
3. $(\int_0^t \theta_s dB_s)_{0\leq t\leq T}$ est un processus $\mathcal{F}_t-$adapté.
4. $E(\int_0^t \theta_s dB_s) = 0$ et $Var(\int_0^t \theta_s dB_s) = E(\int_0^t \theta_s^2 ds)$.
5. Propriétés disométrie : $E\left[(\int_0^t \theta_s dB_s)^2\right] = E(\int_0^t \theta_s^2 dB_s)$.
6. $\int_0^t \theta_s dB_s$est une $\mathcal{F}-$martingale.
7. La variation quadratique de lintégrale stochastique est donnée par :

$$\left\langle \int_0^t \theta_s dB_s \right\rangle = \int_0^t \theta_s^2 ds.$$

8. La covariation quadratique entre deux intégrales stochastiques est donnée par :

$$\left\langle \int_0^t \theta_s dB_s, \int_0^v \phi_s dB_s \right\rangle = \int_0^{t\wedge v} \theta_s \phi_s ds.$$

1.5.2 Processus d'Itô

Un processus X est un processus d'Itô si :

$$X_t = x + \int_0^t b_s ds + \int_0^t \sigma_s dB_s,$$

où b est un processus adapté tel que $\int_0^t |bs| ds$ existe **(au sens Lebesgue)** $p.s.$ pour tout t, et σ un processus.

On utilise la notation plus concise suivante :

$$\begin{cases} dX_t = b_t dt + \sigma_t dB_t, \\ X_0 = x. \end{cases}$$

Le coefficient b est le drift où la dérive, σ est le coefficient de diffusion. L'´ecriture $dX_t = b_t dt + \sigma_t dB_t$ est unique.

1.5.3 Formule d'Ito

Théorème 1.5.1 (Première formule d'Itô) *Supposons f de classe C^2 alors :*

$$f(X(t)) = f(x) + \int_0^t f'(X(s))dX(s) + \frac{1}{2}\int_0^t f''(X(s)(\sigma(s))^2 ds.$$

Cette formule s'écrit sous forme condensé

$$\begin{aligned} df(X(t)) &= f'(X(t))dX(t) + \frac{1}{2} f''(X(s)(\sigma(s))^2 \\ &= f'(X(t))b(t) + \frac{1}{2} f''(X(s)(\sigma(s))^2 + f'(X(t))\sigma(t)dB_s \\ &= f'(X(t))b(t) + \frac{1}{2} f''(X(s))d\left\langle X\right\rangle_t + f'(X(t))\sigma(t)dB_s. \end{aligned}$$

Théorème 1.5.2 (deuxième formule d'Itô) *Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}$*

de classe C^1 par rapport à t, de classe C^2 par rapport à x, à dérivées bornées, on a :

$$f(t, X(t)) = f(0, X(0)) + \int_0^t f'_t(s, X_s)ds + \int_0^t f'_x(s, X_s)dXs + \frac{1}{2}\int_0^t f"_{xx}(s, X_s)\sigma(s)^2 ds.$$

On peut écrire cette formule sous forme différentielle :

$$\begin{aligned} df(t, X(t)) &= [f'_x(t, X_t) + \frac{1}{2}f"_{xx}(t, X_t)\sigma(t)^2]dt + f'_x(t, X_t)dX_t \\ &= f'_x(t, X_t)dt + f'_x(t, X_t)dX_t + \frac{1}{2}f"_{xx}(t, X_t)d\langle X\rangle_t \\ &= (f'_x(t, X_t) + f'_x(t, X_t)b(t) + \frac{1}{2}f"_{xx}(t, X_t)\sigma(t)^2)dt + f'_x(t, X_t)(t)dB_t. \end{aligned}$$

1.6 Equation différentielle stochastique

Définition 1.6.1 *Une équation différentielle stochastique (EDS) est une équation de la forme :*

$$\begin{cases} dX_t = b(t, X_t)dt + \sigma(t, X_t)dB_t, \\ X_0 = x. \end{cases} \tag{1.2}$$

Où sous forme intégrale :

$$X_t = x + \int_0^t b(s, X_s)ds + \int_0^t \sigma(s, X_s)dB_s, \forall t \geq 0.$$

Où $X_0 \in \mathbb{R}^n$, B_t un mouvement brownien et $b(s, X_s)$ et $\sigma(s, X_s)$ sont des fonctions continues.

Définition 1.6.2 *Une solution forte de l'EDS 1.2 est un processns $X = \{X(t), t \in [0, T]\}$ continu qui est $\mathcal{F}_t-$adapté et tel que :*

1. $\int_0^t \left|b(s, X_{s)}\right|^2 ds + \left|\sigma(s, X_s)\right|^2 dB_s \prec \infty$
2. *X vérifie 1.2.*

Théorème 1.6.1 (Condition d'existence et unicité d'une solution forte) *Supposons que, pour tous $x, y \in \mathbb{R}^d$ et $t \geq 0$. les fonctions b et σ satisfont les deux conditions suivante :*

1. *Condition de croissance linéaire : il existe une constante $C > 0$, telle que :*

$$|b(t,x)| + \|\sigma(t,x)\| \prec C(1+|x|).$$

2. *Condition de Lipschitz globale telle qu'il existe une constante $L > 0$, telle que :*

$$|b(t,x)b(t,y)| + \|\sigma(t,x)\sigma(t,y)\| \, L\, |x-y| \, .$$

et de plus, la condition initiale $X_0 = x$ est indépendante de $(B_t)_{t\geq 0}$ et est de carré intégrable $(i.e)$. $E\left[|x|^2\right] < \infty$. Alors, il existe une unique solution de l'EDS 1.2 trajectoires continues pour tout t. De plus cette solution vérifie $E\left[sup_t\, |X_t|^2\right] < \infty$.

Chapitre 2

Méthodes de résolutions en contrôle stochastique

Ce chapitre sera organisé comme suit : Dans le première section, nous donnons une formulation du contrôle stochastique. Dans la deuxième section, nous étudions deux approches de résolution du problème du contrôle stochastique. La première, vérifée dans les années 50 par Pontryagin et son équipe, c'est le principe du maximum. La deuxième approche, la programmation dynamique. Ensuite on dennera les différentes classes de contrôles stochastiques.

2.1 Contrôle stochastique

Les problèmes d'obtimisation dynamique stochastique ont de nombreuses applications dans des problèmes de gestion, d'économie et de finance. De façon générale, un problème de contrôle se formule selon les caractéristiques suivantes :

2.1.1 Etat du système

On considère un système dynamique caractérisé par son état à tout instant. Le temps peut être discret ou continu. Nous considérons ici qu'il varie de façon continue et dans des condition d'incertitude. L'horizon (intervalle de variation du temps) peut être fini ou infini. L'état du système représente l'ensemble des variables quantitatives constituant une description "exhaustive" du système. Les variables d'état sont supposées en nombre fini à valeurs réelles. On notera $X_t(\omega)$ l'état du système à l'instant t dans un scénario du nombre $\omega \in \Omega$ espace mésurable muni d'une probabilité $\mathbb{P}$.

2.1.2 Contrôle

La dynamique X_t de l'état de système est influencée par un contrôle que nous modélisons comme un processus $(u_t)_t$ dont la valeur peut être décidée à tout instant t en fonctions des informations disponibles à cet instant, c'est à dire que u est adapté par rapport à une certaine filtration, et prend ses valeurs dans un espace de contrôle A.

2.1.3 Critère de coût/performance

L'objectif est de minimiser (ou maximiser) sur les contrôles une fonctionnelle J. Dans ce cours, on considérera des fonctionnelle de la forme :

$$J(u) = E\left[\int_0^T f(s, X_s, u_s)ds + g(X_T)\right],$$

en horizon fini $T < +\infty$.

Le problème de contrôle stochastique d'une diffusion en horizon fini se formule comme suit :

Soit $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{0\leq t\leq T}, \mathbb{P})$ un espace de probabilité filltré. $T > 0$ un temps fini, B_t un mouvement brownien d-dimentionnel définie sur l'espace de probabilité filtré$(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{0\leq t\leq T}, \mathbb{P})$ .Nous considérons le processus stochastique X de valeurs dans $\mathbb{R}^n$ satisfait l'équation différentielle stochastique suivante :

$$\begin{cases} dX_t = b(t, X_t, u_t) + \sigma(t, X_t)dB_t, \\ X_0 = x. \end{cases} \tag{2.1}$$

Le contrôle $u = (u_s)_{0 \leq s \leq T}$ est un processus progressivement mesurable à valeurs dans l'ensemble A sous$-$ensemble de $\mathbb{R}^n$.

Pour assurer l'existense et l'unicité d'une solution forte à l'équation 2.1 les fonctions boreliennes b et σ définies par $b : [0, T] \times \mathbb{R}^d \times A \to \mathbb{R}^d$ et $\sigma : [0, T] \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d \otimes \mathbb{R}^d$ satisfont une condition de croissance linéaire : $\exists C \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}^d, u \in A$:

$$|b(t, x, u)| + |\sigma(t, x)| \leq C(1 + |x|).$$

On suppose aussi que b et σ vérfient une condition de Lipschitz uniforme en A : $\exists C \geq 0, \forall x, y \in \mathbb{R}, \forall u \in A$:

$$|b(t, x, u) - b(t, y, u)| + |\sigma(t, x) - \sigma(t, y| \leq c\,|x - y|\,.$$

$b(t; x; :) : A \to \mathbb{R}^d$ est continue uniformément en (t, x).

Puisque notre objectif du contrôle optimal stochastique est de minimiser un coût, ou de maximiser s'il s'agit d'un gain, sur un ensemble U de tous les contrôles admissibles.Nous définissons la fonction de coût sur U :

$$J(u) = E\left[\int_0^T f(s, X_s, u_s)ds + g(X_T)\right]. \tag{2.2}$$

La fonction f est la fonction de coût intégral, g est le coût final ou terminal.Généralement le coût est donné par :

$$J(u) = E(g(X_T)). \tag{2.3}$$

Où $g : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ une application de classe C^1, $|g_x(X)| \leq C(1+|x|)$ et à dérivée bornée.C'est à dire :$|g_x(X)| \leq M$; où g_x est le gradiant de g en x.Si en partant d'un état x à l'instant t on définit pour tout processus de contrôle que le coût est donné par :

$$J(u) = E\left[\int_0^T f(s, X_s, u_s)ds + g(X_T)\right]. \tag{2.4}$$

La fonction de valeur associée à ce problème de contrôle stochastique est donnée par : Pour tout $(t, x) \in [0; T] \times \mathbb{R}^d$et $u \in U$

$$V(t, x) = \inf_{u \in U} J(t, x, u). \tag{2.5}$$

Lorsque'on cherche à maximiser un gain, au lieu minimiser un coût, alors on écrira :

$$V(t, x) = \sup_{u \in U}(t, x, u) = -\inf_{u \in U} J(-(t, x, u)). \tag{2.6}$$

Un contrôle est admissible $u^* \in U$ est dit optimal si $V(t, x) = J(t, x, u^*)$.

2.2 Méthodes de résolution en contrôle stochastique

Dans ce paragraphe, on se propose les deux célèbres approches dans la résolution des problème de contrôle stochastique. Les principes de la programmation dynamique de Billman qui a une version infinitésimale d'équation d'Hamilton Jaccobi Bellman et de maximum de Pontryagin qui sera au centre de notre intérêt dans ce travail qui consiste à cherche les condition nécessaires d'optimalité satisfaites par un contrôle optimal u^*.

2.2.1 Le principe d'optimalité de Bellman

Le principe d'optimalité de Bellman, initié par Bellman et aussi appelé le dynamique principe de programmation (DPP), est un principe fondamental de la théorie du contrôle stochastique.L'idée basique de la méthode est de considèrer une famille de problèmes de contrôle à différents états initiaux et établir des relations entre les fonctions valeurs associées.L'équation de la programmation dynamyque conduit à une équation aux dérivées partielles (EDP) parabolique fortement non linéaire du second ordre, appelée Hamilton-Jaccobi- Bellman (HJB en abrégé).

Equation de Hamilton-Jacobi-Bellman

L'équation HJB est la version infinitésimale de la programmation dynamique principe. Il est formellement dérivé en supposant que la fonction valeur V est de classe C^2. L'équation classique HJB associé au problème de contrôle stochastique 2.5 est :

$$-\frac{\partial V}{\partial t}(t,x) - \sup_{\alpha \in \mathcal{A}} \left[\mathcal{L}^{\alpha} V(t,x) + f(t,x,\alpha)\right] = 0, \quad \text{sur } [0,T] \times \mathbb{R}, \tag{2.7}$$

où $\mathcal{L}^{\alpha}$ est le générateur infinitésimal de second-ordre à la diffusion X avec un contrôle constant a :

$$\mathcal{L}^{\alpha} V = b(x,a).D_x(V) + \frac{1}{2} tra\left[\sigma(x,a)\sigma'(x,a)D_x^2(V)\right]. \tag{2.8}$$

D'autre part, on peut avoir cette équation 2.7 de la façon suivante :

$$-\frac{\partial \upsilon}{\partial t}(t,x) - H(t,x,D_x\upsilon(t,x), D_x^2\upsilon(t,x)) = 0, \quad \forall\ (t,x) \in [0,T] \times \mathbb{R}^n, \tag{2.9}$$

telle que $\forall\,(t,x,p,M) \in [0,T] \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathcal{S}_n$ ($\mathcal{S}_n$ l'ensemble des matrices symétrique $n \times n$.)

$$H(t,x,p,M) = \sup_{\alpha \in \mathcal{A}} \left[b(x,a).p + \frac{1}{2} tr(\sigma\sigma'(x,a)M) + f(t,x,\alpha)\right]. \tag{2.10}$$

Cette équation 2.9 est appelée équation de la programmation dynamique ou équation d'HJB.La fonction H est dite l'Hamiltonien du problème de contrôle associé.

A l'EDP $(2,7)$ on ajoute la condition terminale :

$$V(t,x) = g(x)\,,\ \forall x \in \mathbb{R}^n,$$

et elle vient immédiatement d'aprés la fonction valeur 2.5.

Géneralement, l'EDP n'est facile à résoudre donc il faut supposer que la solution soit de classe C^2, ce qui n'est pas nécessairement le cas même pour des fonctions simples.

2.2.2 Le principe du maximum de Pontryagin

Le principe du maximum de Pontryagin a été utilisé dans la théorie du contrôle optimal. Il fournit les conditios nécessaires d'optimalité pour minimier une fonctionnelle coût $J(\alpha)$ tout en utilisant l'approche de Lagrange en calcul des variations. La dérivée de la fonctionnelle $J(\alpha)$ par rapport à un certain paramètre de perturbtion doit être positive. Ceci entraîne que $\frac{dJ(\alpha_\theta)}{d\theta}\mid_{\theta=0}\geq 0$.

Ce principe consiste à intoduire un processus adjoint $p(t)$ solution d'une certaine équation différentielle stochastique rétrograde et d'une hnégalité variationelle.

Cas du contrôle déterministe

Dans le cas du contrôle déterministe $(\sigma = 0)$.Le principe du maximum a été établie par le mathématicien soviétique Lev-Semionovitch Pontryaguin en 1950.

Des résultats récents pour l'étude du contrôle optimal dans le cas déterministe ont été traités par Fleming, où l'auteur présente des résultats fondamentals dans la théorie du contrôle.

En générale le problème du contrôle optimal est considérée comme un système différentiel gouverné par l'équation suivante :

$$\begin{cases} dX_s = b(s, X_s, \alpha_s)ds, s \in [0,T]\,, \\ X_0 = x. \end{cases} \quad . \tag{2.11}$$

Pour tout contrôle $u \in \mathcal{U}$ avec $\mathcal{U}$ est l'ensemble des contrôle admissibles sur $[0, T]$, c'est-à-dire l'ensemble des contrôles telles que les trajectoires assocées soient bien définies sur $[0, T]$.

On définit donc le coût de la trajectoire associée par :

$$J(\alpha) = \left[\int_0^T f(s, X_s, \alpha_s) ds + g(X_T) \right]. \tag{2.12}$$

L'objectif est de minimiser la fonction $J(\alpha)$ sur un ensemble $\mathcal{U}$ de tout les contrôles admissibles. Alors un contrôle u^* est optimal si

$$J(\alpha^*) = \min \{J(\alpha),\ \alpha \in \mathcal{U}\}. \tag{2.13}$$

Sous les hypothèse suivantes :

1. $b, f : [0, T] \times \mathbb{R}^d \times A \to \mathbb{R}^d$:

$$|b(t, x, a) - b(t, y, a)| \leq c\, |x - y|,$$

$$|b(t, x, a)| + |f(t, x, \alpha)| \leq c\, (1 + |x|),$$

   telle que $b(t, x, \cdot), f(t, x, \cdot)$ de :$A \to \mathbb{R}^d$ sont continues en α et uniformément en (t, x).

2. b, f et g sont de classes C^1 en x.

L' Hamiltonien de ce système est donné par :

$$H(t, X_t, \alpha_t, p_t) \overset{\triangle}{=} p_t b(t, X_t, \alpha_t) - f(t, X_t, \alpha_t). \tag{2.14}$$

Théorème 2.2.1 (Principe de Pontryagin) *Soit (X^*, α^*) la solution optimale de 2.11*

2.12, alors il existe un processus $p(t)$ *est* $\mathcal{F}_t-$*adapté, solution de l'équation suivante :*

$$\begin{cases} dp_t = -H(t, X_t, \alpha_t, p_t)\, dt, \\ p(T) = -g_x(X_T), \end{cases}.$$

telle que :

$$H(t, X_t^*, \alpha_t^*, p_t) = \max_{\alpha \in \mathcal{U}} H(t, X_t^*, \alpha, p_t) . \ \mathbb{P} - p.s \text{ et } dt - p.p.$$

Cas du contrôle stochastique

Dans le cas stochastique, plusieurs formes de principe du maximum de Pontryagin.

Le principe du maximum de Pontryagin connue sous le nom conditions nécessaires d'optimalité introduite par Pontryagin en 1956 .Il s'appuie sur l'idée suivante : si un contrôle optimal existe en utilisant l'approche de Lagrange en calcul des variations sur la fonctionnelle $J(u(\cdot))$ par rapport à certain paramétre de perturbation θ doit être positive.Généralement cette approche consiste à introduire un processus adjoint $p(t)$ solution d'une équation différentielle stochastique rétrograde et d'une inégalité variationnelle..

2.3 Classes de contrôles stochastique

2.3.1 Contrôle admissible

On appelle contrôle admissible tout processus u_t où $t \in [0, T]$ mésurable et $\mathcal{F}_t-$adapté à valeur dans un borélien A de $\mathbb{R}^n$. Notons par U l'ensemble de tous les contrôle admissible.

2.3.2 Contrôle optimal

Le problème de contrôle optimal consiste à minimiser une fonction coût $J(u)$ sur un ensemble de contrôle admissible U. On dit que le contrôle u est optimal si $J(u^*) \leq J(u)$ $\forall u \in U$.

2.3.3 Contrôle feed-back

Soit u_t un contrôle $\mathcal{F}_t-$adapté, et soit $\left\{\mathcal{F}_t^X\right\}$ la filltration naturelle engendrée par le pocessus X. On dit qu'un contrôle u est feed-back si et seulement si u dépend de X.

2.3.4 Contrôle relaxé

Soit V l'ensemble des mesures de Radon sur $[0,T]\times A$ dont la projection sur $[0,T]$ coïncide avec la mesure de Lebesgue dt muni de la topologie de la convergence stable des mesures. L'espace V est muni de sa tribu borelienne, qui est la plus petite tribu telle que l'application $q \to \int f(s,a)q(ds,da)$ soit mesurable pour toute fonction f mesurable, bornée et continues en a.

Un contrôle relaxé q est une variable aleatoire $q(w,dt,da)$ à valeur dans V telle que pour chaque t, $\mathbf{1}_{[0,t]}\ q$ est $\mathcal{F}_t-$mesurable $(\mathcal{F}_t - \sigma(B_s 0 \leq s \leq t))$. Tout contrôle relaxé peut être intégré en $q(w,dt,da) = dtq(w,t,da)$ où $q(t,da)$ est un processus progressivement mesurable à valeurs dans l'espace des mesures de probabilités.

Chapitre 3

Principe du maximum stochastiques sous l'information partielle

3.1 Introduction

Notre objectif est d'établir des conditions nécessaires d'optimalité pour une EDS sous l'information partielle. On considère l'équation différentielle stochastique suivante :

$$\begin{cases} dX(t) = f(t, X(t), u(t))dt + \sigma(t, X(t), u(t))dB_t, \\ X(0) = x_0. \end{cases} \tag{3.1}$$

Avec une fonction de coût a minimisé

$$J(u(\cdot)) = E\int_0^T l(t, X(t), u(t))dt + h(X(T)).$$

Sous l'information partielle $\mathcal{G}_t$sous tribu de $\mathcal{F}_t$.

3.2 Conditions

Conditions (H1) : Les fonctions f, σ, l et h sont de classe C^1 en (x, u). Les applications f, σ sont des processus progressive mesurable telles que $f(\cdot, 0, 0)$, et $\sigma(\cdot, 0, 0, 0) \in \mathcal{M}^{n\times d}(\mathbb{R})$.
Conditions (H2) : Les dérivées de f, σ par rapport à (x, u) sont bornées. De plus, l'application f est bornée par $C(1+|x|+|u|)$ l'application l est bornée par $C(1+|x|+|u|)$ et ces dérivées dominées par : $C(1+|x|^2+|u|^2)$. L'applications h est bornée par : $C(1+|x|)$ et ces dérivées par rapport à x sont dominées par : $C(1+|x|^2)$.
Notons que, sous les conditions **(H1)** et **(H2)** (voir Baghiri & Oksendal [4]), l'équation 3.1 admit une solution unique $x(\cdot) \in L^2([0, T], \mathbb{R}^n)$ donnée par :

$$X(t) = x_0 + \int_0^T f(s, X(s), u(s))ds + \int_0^T \sigma(s, X(s), u(s))dB_s.$$

3.3 Processus adjoint, Hamiltonien

Pour tout contrôle $u(\cdot) \in U_{\mathcal{G}}([0, T])$ avec la trajectoire associée $X(\cdot)$, on définiele processus adjoint $(p(\cdot), q(\cdot))$ comme une solution de l'équation différentielle stochastique rétrograde de la forme suivante :

$$\begin{cases} -dp(t) = [f_x(t)p(t) + \sigma_x(t)q(t) + l_x(t)]dt - q(t)dB_t, \\ p(T) = g_x(x(T)). \end{cases} \tag{3.2}$$

Soit $H : [0, T]\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times A \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{n\times d} \times l^2(\mathbb{R}^n) \to \mathbb{R}^n$: l'hamiltonien associé a notre problème de contrôle stochastique 3.1 et 3.2 définit par :

$$H(t, x, u, p(\cdot), q(\cdot)) = p(t)f(t, x, u) + q(t)\sigma(t, x, u) + l(t, x, u). \tag{3.3}$$

Si on note par $H(t) = H(t, x, u, p(\cdot), q(\cdot))$: Alors, l'équation adjointe 3.2 peut considérée comme la solution du système suivant :

$$\begin{cases} -dp(t) = H_x(t)dt - q(t)dB_t, \\ p(T) = g_x(x(T)). \end{cases} \tag{3.4}$$

Sous les conditions **(H1)** et **(H2)**, l'équation adjointe 3.2 ou 3.4 admit une solution unique $(p(t), q(t))$, de plus, comme les dérivées de f, σ, g par rapport a x sont bornées on déduit qu'il existe une constante positive C telle que :

$$E\left[\sup_{t\in[0,T]} |p(t)|^2 + \int_0^T |q(t)|^2 \, dt\right] < C. \tag{3.5}$$

3.3.1 Principe de maximum stochastique sous l'information partielle

Dans cette section, sous l'information partielle, on dérive des conditions nécessaires d'optimalité sous forme d'un principe du maximum stochastique pour le problème de contrôle stochastique 3.1 et 3.2 .Sous les conditions **(H1)** et **(H2)**, on ajoute les conditions suivantes :

Conditions (H3)

1. pour toute t, r telle que $t \in [t+r, T,]$ et pour $i = 1, 2, \cdots, k$ et toute processus $\alpha = \alpha(w)$,qui est $\mathcal{G}_t-$mesurable, borné, le contrôle $\beta(t) = (0, \cdots, 0, \beta_i(t), 0, \cdots, 0) \in A \subset \mathbb{R}^k$,avec $\beta_i(s) = \alpha_i \mathbf{1}_{[t,t+r]}(s)$, $s \in [0,T]$ appartient à $U_{\mathcal{G}}([0,T])$.
2. Pour tout $u(\cdot)$, $\beta \in U_{\mathcal{G}}([0,T])$, avec bornée, il existe $\varsigma > 0$ telle que $u + \theta\beta \in U_{\mathcal{G}}([0,T])$ pour tout $\theta \in [-\varsigma, \varsigma]$.

Soit $u(\cdot)$, $\beta \in U_{\mathcal{G}}([0,T])$, bornés, on défini le processus $Z(\cdot)$ par :

$$Z(t) = Z^{u,\theta}(t) = \frac{d}{d\theta} X^{u,\theta}(t).$$

Notons que $Z(t)$ est un processus stochastique vérifié l'équation différentielle stochastique linéaire suivante :

$$\begin{cases} dZ(t) = [f_x(t)Z(t) + f_u(t)\beta(t)]dt + [\sigma_x(t)Z(t) + \sigma_u(t)\beta(t)]dB_t, \\ Z(0) = 0. \end{cases} . \tag{3.6}$$

Le théorème fondamental de ce chapitre est donné par le résultat suivant :

Soit $u(\cdot)$ le minimum local de la fonctionnel J sur l'ensemble $U_{\mathcal{G}}([0,T])$ au sence pour tout , bornée il existe $\varsigma > 0$ telle que $u + \theta\beta \in U_{\mathcal{G}}([0,T])$ pour toute $\theta \in [-\varsigma, \varsigma]$ et $\psi(\theta) = J(u^* + \theta\beta)$ est minimal au point $\theta = 0$:

$$\psi'(\theta) = \frac{d}{d\theta} J(u^* + \theta\beta)\bigg|_{\theta=0} = 0. \tag{3.7}$$

Soit $x^*(\cdot)$la solution de EDS 3.1 associée à $u^*(\cdot)$.

Théorème 3.3.1 (Principe de maximum sous l'information partielle) *D'après les conditions (**H1**), (**H2**) et (**H3**). Il existe la solution unique $(p*\ (\cdot), q*(\cdot))$ de l'équation 3.2 telle que $u*(\cdot)$ est un point stationnaire de $E[H \mid \mathcal{G}_t]$ telle que :*

$$E[H_u(t, x^*(t), u^*(t), p^*(t), q^*(t)) \mid \mathcal{G}_t] = 0, \tag{3.8}$$

$$p : s, t \in [0; T].$$

Preuve. D'après :3.7 on a :

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{d}{d\theta} J(u^* + \theta\beta) \qquad (3.9) \\ &= E\int_0^T l_x(t, x^*(t), u^*(t))Z^*(t)dt \\ &+ E\int_0^T l_u(t, x^*(t), u^*(t))\beta(t)dt \\ &+ E(h_x(x^*(T))Z(T)). \end{aligned}$$

On applique la formule d'Itô pour $p^*(t)Z^*(t)$ on obtient :

$$\begin{aligned}
&E(p^*(t)Z^*(t)) \\
&= E\int_0^T p^*(t)Z^*(t) \\
&+ E\int_0^T Z^*(t)dp^*(t) \\
&+ E\int_0^T q^*(t)[\sigma_x(t)Z^*(t)) + \sigma_u(t)\beta(t)]dt \\
&= I_1 + I_2 + I_3,
\end{aligned} \tag{3.10}$$

telle que :

$$\begin{aligned}
I_1 &= E\int_0^T p^*(t)Z^*(t) \\
&= E\int_0^T p^*(t)[f_x(t)Z^*(t) + f_u(t)(t)]dt \\
&= E\int_0^T p^*(t)Z^*(t)f_x(t) + E\int_0^T p^*(t)f_u(t)\beta(t))dt,
\end{aligned} \tag{3.11}$$

par simple calcul on trouve :

$$\begin{aligned}
I_2 &= E\int_0^T Z^*(t)dp^*(t) \\
&= -E\int_0^T Z^*(t)[f_x(t)q^*(t) + (\sigma_x(t)q^*(t)) + l_x(t)]dt \\
&= -E\int_0^T Z^*(t)f_x(t)p^*(t)dt \\
&- E\int_0^T Z^*(t)(\sigma_x(t)q^*(t)) \\
&- E\int_0^T Z^*(t)l_x(t)dt.
\end{aligned} \tag{3.12}$$

$$\begin{aligned} I_3 &= E\int_0^T q^*(t)[\sigma_x(t)Z^*(t)) + \sigma_u(t)\beta(t)]dt \\ &= E\int_0^T q^*(t)(\sigma_x(t)Z^*(t))dt \\ &+ E\int_0^T q^*(t)(\sigma_u(t)\beta^*(t)), \end{aligned} \tag{3.13}$$

d'après 3.10 et $Z^*(0) = 0$,$p^*(T) = h_x(x^*(T))$, on a :

$$\begin{aligned} &E(h_x(x(T))Z^*(T)) \\ &= E\int_0^T [p^*(t)f_u(t)\beta(t) + q^*(t)\sigma_u(t)\beta(t) + l_x(t)Z^*(t)]dt, \end{aligned} \tag{3.14}$$

d'après3.9 et 3.12,on obtient :

$$0 = E\int_0^T [p^*(t)f_u(t)\beta(t) + q^*(t)\sigma_u(t)\beta(t) - l_x(t)Z^*(t)]dt,$$

ce qui implique :

$$E\int_0^T H_u(t, x^*(t), u^*(t), p^*(t), q^*(t))\beta_i(t)dt = 0. \tag{3.15}$$

Maintenant, on fixe $t \in [0,T]$ et par le fait que $\beta(s) = (0,\cdots,\beta_i(s),\cdots,0)$, où $\beta_i(s) = \alpha_i\mathbf{1}_{[t,t+r]}(s)$, $s \in [0,T]$,$t + r \leq T$ et le fait que $\alpha_i = \alpha_i(w)$ est bornée et, $\mathcal{G}_t-$mesurable. Alors par 3.15 on a :

$$E\int_t^{t+r} \frac{\partial}{\partial u_i}H(s, x^*(s), u^*(s), p^*(s), q^*(s))\alpha_i(w)ds = 0,$$

par la dérivation par rapport a r en $r = 0$,on obtient :

$$E\left[\frac{\partial}{\partial u_i}H(s, x^*(s), u^*(s), p^*(s), q^*(s))\alpha_i\right] = 0, \tag{3.16}$$

comme 3.16 vérifiée pour toute processus $\mathcal{G}_t-$mesurable α_i, bornée, on trouve :

$$E\ \left[H_u(t, x^*(t), u^*(t), p^*(t), q^*(t)) \mid \mathcal{G}_t\right] = 0.p.s,$$

D'où le résultat cherché, ce qui termine la preuve de **Théorème 3.1** ■

Conclusion

Dans ce travail, nous avons étudié un problème de contrôle stochastique optimal pour des equations differentielle stochastiques ($EDSs$) sous l'information partielles. Cette étude nous permis de voir de prés le principe du maximum stochastique d'optimalité dans le cas où l'ensemble des informations pour le controlleur est incomplet.

Bibliographie

[1] M. Hafayed, (2009) : Gradient généralisés et contrôle stochastique, Thèse de Doctorat, Université de Biskra.

[2] J. Yong and X. Y. Zhou, (1999) : Stochastic Controls. Hamiltonian Systems and HJB Equations. Springer-Verlag. New York.

[3] V. Borkar, (2005) : Controlled diffusion processes. Probabilite surveys. (2), $213-244$.

[4] F. Baghery, B. Oksendal, (2007) : A maximum principal for stochastic control with partial information. Stoch. Anal. Appl. 25, $705-717$.

[5] J.B. Monique, (2006) : Cours de calcul stochastique, Master 2IF Evry.

[6] R.J Elliott, M Kollmann (1989) : The variational principle for optimal control of diffusion with partial information, System & control Letters $1263-89$.

Annexe : Abréviations et Notations

Les différentes abréVariations et notations utilisées tout au long de ce mémoire sont expliquées ci-dessous.

$(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$	Espace de probabilité
$(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}, \mathbb{P})$	Espace de probabilité filtré
B_t	Mouvement brownien
EDS	Equation différentielle stochastique
$EDSR$	Equation différentielle stochastique rétrograd
U	ensemble de contrôle admissible
$J(u(\cdot))$	Lafonction de coût à minimiser dans le cas sans contrainte
u	Contrôle admissible
u^*	Contrôle optimal
$H(t, X, u, p, q)$	Hamiltonien
(p_t, q_t)	Les processus adjoints
$V(t, x)$	Fonction de valeur
$\mathcal{L}^\alpha$	le générateur infinitésimal de second-ordre à la diffusion$X$ avec un contrôle const
HJB	Equation Hamilton-Jacobi-Bellman