République Algérienne Démocratique et Populaire

Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

UNIVERSITÉ MOHAMED KHIDER, BISKRA

FACULTÉ des SCIENCES EXACTES et des SCIENCES de la NATURE et de la VIE

DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES

Mémoire présenté en vue de l'obtention du Diplôme **:**

MASTER en Mathématiques

Option : **Probabilité**

Par

MEKLID Saliha

Titre :

Lien entre la solution de l'EDDSR et l'EDPS

Membres du Comité d'Examen :

Dr.	AOUN Salima	UMKB	Président
Dr.	TAMER Lazhar	UMKB	Encadreur
Dr.	GATT Rafika	UMKB	Examinateur

Juin 2018

Dédicace

Je dédie ce modeste travail à :

Mes parents :

Ma mère, qui a oeuvré pour ma réussite, de par son amour, son soutien, pour toute son assistance et sa présence dans ma vie, reçois à travers ce travail aussi modeste soit-il, l'expression de mes sentiments et de mon éternelle gratitude

Mon père, qui peut être fier et trouver ici le résultat de longues années de sacrifices et de privations pour m'aider à avancer dans la vie. Puisse Dieu faire en sorte que ce travail porte son fruit ; Merci pour les valeurs nobles, l'éducation et le soutient permanent venu de toi.

Mes frères et soeurs qui n'ont cessé d'être pour moi des exemples de persévérance, de courage et de générosité.

A tout mes enseignants et mes collégues de la promotion 2018.

REMERCIEMENTS

Nous tenons tout d'abord à remercier Dieu le tout puissant et miséricordieux, qui nous a donné la force et la patience d'accomplir ce Modeste travail.

C'est avec un grand plaisir que, j'adresse mes sincères remerciements à mon professeur "Dr. Tamer lazhar " pour son encadrement, ses directives et sa sympathie tout au long l'année.

Je réserve une pensée spécial aux chefs de Département de Mathématique "Hfayed mokhtar" et à tout les enseignants, qui nous ont apporté leur aide durant notre formation universitaire.

Ce geste sera gravé à jamais dans nos mémoires. Aussi à mes collègues de la promotion 2017-2018

Je ne terminerai pas sans avoir exprimé des remerciments,envers toutes les personnes qui ont contribué de prés ou de loin à la réalisation de ce projet.

Table des matières

Introduction générale

Dans ce memoire, nous nous intèressont à trouver un couple de processus $\{(Y_s^{t,x}, Z_s^{t,x});\ t \leq s \leq T\}$, a valeurs dans $\mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^{k\times l}$ telles que pour chaque $s \in [t,T]$, $(Y_s^{t,x}, Z_s^{t,x})$ est un $\sigma(W_r;\ t \leq r \leq s) \vee \sigma(B_r - B_s.t \leq r \leq s)$ mesurable et

$$Y_s^{t,x} = h(X_T^{t,x}) + \int_s^T f(X_r^{t,x}, Y_s^{t,x}, Z_s^{t,x})dr$$

$$+\int_s^T g(X_r^{t,x}, Y_s^{t,x}, Z_s^{t,x})dB_r - \int_s^T Z_r^{t,x} dW_r, \qquad t \leq s \leq T.$$

Où l'intégrale dW est un intégrale d'Itô progressive et l'intégrale dB est un intégrale d'Itô retrograde. Nous montrerons que, dans des conditions appropriées sur f et g, l'équation différentielle doublement stochastique rétrograde (EDDSR) ci-dessus a une solution unique. Enfin nous montrerons que sous des conditions de régularité assez forte sur b, σ, f et g, $\{Y_t^{t,x}; (t,x) \in [0,T] \times \mathbb{R}^d\}$ est la solution unique du système d'équations différentielles partielles stochastiques (EDPS) suivantes :

$$u(t,x) = h(x) + \int_s^T [\mathcal{L}_s u(s,x) + f(x, u(s,x), (\nabla u\sigma)(s,x))]ds$$

$$+\int_s^T g(x, u(s,x), (\nabla u\sigma)(s,x))]dB_s, \qquad 0 \leq t \leq T.$$

Où u prend des valeurs dans $\mathbb{R}^k$,

$$(\mathcal{L}\ u)_i(t,x) = (Lu_i)(t,x), \quad 1 \leq i \leq k,$$

et

$$L = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{d} (\sigma\sigma^*)_{ij} \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial y_j} + \sum_{i=1}^{d} b_i \frac{\partial}{\partial x_i}.$$

Ce mèmoire est constitué de trois chapitres :

Chapitre 1. Dans ce chapitre introductif, nous avons donné une introduction sur le calcul stochastique.

Chapitre 2 Dans ce chapitre nous donnerons une démonstration dètaille des principaux résultats de la thèorie des èquations différentielles doublement stochastique retrograde, nous insisterons sur le résultat d'existence et d'unicité ainsi quelque propriétés de régularité de la solution par rapport à l'ètat initial.

Chapitre 3 dans ce chapitre on donne le lien entre les EDDSPR et un systéme d'èquations différentielles partielles stochastiques semi-lineaires.

Chapitre 1

Rappels et compléments

Dans tout la suite de ce résumé, on supposera donné un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{F}, P)$.

Ω est un ensemble, $\mathcal{F}$ est une tribu contenue dans l'ensemble des parties de Ω et P est une probabilité sur la tribu $\mathcal{F}$.

1.1 Notions générale

Définition 1.1.1 (filtration) *Une filtration $\{\mathcal{F}_t\}_{t\geq 0}$ sur un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ est suite croissante de sous-tribus de $\mathcal{F}$ c'est à dire :*

$$\mathcal{F}_s \subset \mathcal{F}_t \subset \mathcal{F}, \quad \forall s \leq t.$$

Définition 1.1.2 (processus stochastique) *On appelle processus stochastique X et à valeurs dans $\mathbb{R}^d$ une famille $(X_t)_{t\in T}$ d'applications mesurables de $(\Omega, \mathcal{F})$ dans $(\mathbb{R}^d,\ B(\mathbb{R}^d))$; pour tout $t \in T$, X_t est une variable aléatoire.*

Définition 1.1.3 (mesurabilité) *Un processus X est mesurable si l'application $(t, \omega) \longmapsto X_t(\omega)$ de $\mathbb{R}_+ \times \Omega$ dans $\mathbb{R}^d$ est mesurable par rapport aux tribus $B(\mathbb{R}_+) \otimes \mathcal{F}$ et $B(\mathbb{R}^d)$.*
On peut noter qu'un processus stochastique peut être vu comme une fonction aléatoire : à chaque ω, on associe la fonction $t \longmapsto X_t(\omega)$ qui est appelée trajectoire.

Définition 1.1.4 (adaptation) *Un processus X est adapté par rapport à la filtration $\{\mathcal{F}_t\}_{t\geq 0}$ si, pour tout t, X_t est $\mathcal{F}_t$-mesurable.*

1.2 Mouvement brownien

Définition 1.2.1 *On appelle mouvement brownien standard un processus stochastique W à valeurs réelles tel que :*

1. *P–p.s. $t \longmapsto W_t(\omega)$ est continue ;*
2. *pour $0 \leq s < t, W_t - W_s$ est indépendant de la tribu $\sigma\{W_u, u \leq s\}$ et de loi gaussienne centrée de variance $t - s$;*
3. *$W_0 = 0 \quad P - p.s.$*

Pour tout $t > 0$, la variable aléatoire W_t suit la loi gaussienne centrée de variance t donc de densité $(2\pi t)^{-1/2} \exp\{-x^2/(2t)\}$.

Remarque 1.2.1 *On dit que W est un $\{\mathcal{F}_t\}_{t\geq 0}$–MB si W est un processus continu, adapté à la filtration $\{\mathcal{F}_t\}_{t\geq 0}$, vérifiant :*

$$\forall u \in \mathbb{R} \forall 0 \leq s \leq t, E(e^{iu(W_t - W_s)} | \mathcal{F}_s) = \exp\{-u^2(t-s)/2\}.$$

1.3 Martingales

Définition 1.3.1 *Un processus X à valeurs réelles est une sur martingale par rapport à la filtration $\{\mathcal{F}_t\}_{t\geq 0}$ si :*

1. pour tout $t \geq 0$, X_t est $\mathcal{F}_t-$mesurable ;
2. pour tout $t \geq 0$, X_t^- est integrable ;
3. pour $0 \leq s \leq t$, $E(X_t|\mathcal{F}_s) \leq X_s$.

X est une sous-martingale lorsque -X est une sur-martingale ; X est une martingale si X est à la fois une sur-martingale et une sous-martingale.

Théorème 1.3.1 (Burkholder-Davis-Gundy (BDG)) *Soit $p > 0$ un réel. Il existe deux constantes c_p et C_p telles que, pour toute martingale locale continue X, nulle en zéro,*

$$c_p E\left[\langle X, X\rangle_\infty^{p/2}\right] \leq E\left[\sup_{t\geq 0} |X_t|^p\right] \leq C_p E\left[\langle X, X\rangle_\infty^{p/2}\right]$$

Remarque 1.3.1 *En particulier, si $T > 0$,*

$$c_p E\left[\langle X, X\rangle_T^{p/2}\right] \leq E\left[\sup_{0\leq t\leq T} |X_t|^p\right] \leq C_p E\left[\langle X, X\rangle_T^{p/2}\right]$$

Lemme 1.3.1 (Gronwall) *Soit $g : [0, T] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue telle que, pour tout t*

$$g(t) \leq a + b\int_0^t g(s)ds, \qquad a \in \mathbb{R}, \quad b \geq 0.$$

Alors, pour tout t,

$$g(t) \leq a \exp(bt).$$

Théorème 1.3.2 (Inégalité de Hölder) *Soient $p, q \in (1; +\infty)$ avec*

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1,$$

ou alors soient $p = 1$ et $q = \infty$. Alors, pour $f \in L^p$ et $g \in L^q$,

$$\int |fg|\, d\mu \leq \|f\|_p \, \|g\|_q \, .$$

Théorème 1.3.3 (Représentation des martingales browniennes) *Soit M une martingale (càdlàg) de carré intégrable pour la filtration $\{\mathcal{F}_t^W\}_{t\in[0,T]}$. Alors il existe un unique pro-*

cessus $(H_t)_{t\in[0,T]}$,*appartenant à* $M^2(\mathbb{R}^k)$, *tel que*

$$P - p.s. \qquad \forall t \in [0,T], \quad M_t = M_0 + \int_0^t H_s dW_s.$$

Il est important de remarquer que ce résultat implique que, dans la filtration brownienne, les martingales sont continues.

Théorème 1.3.4 (Critère de Kolmogorov) *Soit* $(X_t)_{t\in[0,1]^d}$ *un processus à valeurs dans un Banach. Supposons qu'il existe trois constantes strictement positives,* γ, ϵ, C *telles que :*

$$\forall s,t \in [0,1]^d, \quad E[\|X_t - X_s\|^\gamma] \leq C\,|t-s|^{d+\varepsilon}.$$

Alors il existe une modification Y *de* X *telle que*

$$\forall \alpha \in [0, \epsilon/\gamma[, \qquad E(\sup_{s\neq t} \|Y_t - Y_s\| \,/\, |t-s|^\alpha)^\gamma] < \infty.$$

En particulier, les trajectoires de Y *sont hölderiennes d'ordre* α.

1.4 Processus d'Itô

Définition 1.4.1 *On appelle processus d'Itô un processus* X *à valeurs dans* $\mathbb{R}$ *tel que :*

$$P.p.s \;\; \forall 0 \leq t \leq T, \quad X_t = X_0 + \int_0^t K_s ds + \int_0^t H_s dW_s.$$

où.X_0 *est* $\mathcal{F}_0-$*mesurable,* K *et* H *sont deux processus progressivement mesurables vérifiant les conditions,*

$$P - p.s: \quad \int_0^T |K_s|\,ds < \infty \qquad et \qquad \int_0^T |H_s|^2\,dW_s < \infty.$$

Cette décomposition, si elle existe est unique.

Proposition 1.4.1 *La variation quadratique sur* $[0,t]$ *d'un processus d'Itô* X *est donnée* *par :*

$$\langle X, X\rangle_t = \left\langle \int_0^t \theta_s dB_s, \int_0^t \theta_s dB_s \right\rangle = \int_0^t \theta_s^2 ds.$$

La covariation quadatique entre deux processus d'Itô X et Y donnée par :

$$X_t = X_0 + \int_0^t \varphi_s ds + \int_0^t \theta_s dB_s,$$

et

$$Y_t = Y_0 + \int_0^t \varphi_s' ds + \int_0^t \theta_s' dB_s,$$

vaut :

$$\langle X, Y\rangle = \int_0^t \theta_s \theta_s' dB_s.$$

1.5 Formule d'Itô

Est un outil particuliérement important dans l'étude des processus stochastique.

Théorème 1.5.1 *Toute fonction $f \in C^2(\mathbb{R})$ à dérivée seconder bornée vérifier :*

$$f(B_t) = f(B_0) + \int_0^t f'(B_s) dB_s + \frac{1}{2}\int_0^t f''(B_s) d\langle B, B\rangle_s, \quad \forall t \leq T.$$

Définition 1.5.1 *La notion d'intégrale stochastique par rapport à processus d'Itô se définit de la maniére naturelle suivante :*

$$\int_0^t f'(X_s) dX_s = \int_0^t f'(X_s)\varphi_s ds + \int_0^t f'(X_s)\theta_s dB_s.$$

Théorème 1.5.2 *Soit f une fonction $C^2(\mathbb{R})$, on a alors :*

$$\begin{aligned} f(X_t) &= f(X_0) + \int_0^t f'(X_s) dX_s + \frac{1}{2}\int_0^t f''(X_s) d\langle X, X\rangle_s \\ &= f(X_0) + \int_0^t f'(X_s)\varphi_s ds + \int_0^t f'(X_s)\theta_s dB_s + \frac{1}{2}\int_0^t f''(X_s)\theta_s^2 ds, \end{aligned}$$

ou forme différentielle

$$df(X_t) = f'(X_t)dX'_t + \frac{1}{2}\int_0^t f''(X_t)d\left\langle X, X\right\rangle_t .$$

Proposition 1.5.1 (Intégration par parties) *SI X et Y sont deux processus d'Itô, alors*

$$X_tY_t = X_0Y_0 + \int_0^t X_s dY_s + \int_0^t Y_s dX_s + \left\langle X, Y\right\rangle_t .$$

1.6 Intégrale stochastique progressive-rétrograde

1.6.1 Notation et préliminaires

Soit $\{W(t), t \in [0,1]\}$ un processus de Wiener standard de dimension d satisfaisant $W(0) = 0$, défini sur un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, P)$; $(W(t) = (W_1(t), W_2(t), ..., W_d(t)))$.

A chaque $t \in [0,1]$, on associe deux $\sigma-$algèbres

$$F_t = \sigma(W(s), 0 \leq s \leq t),$$

et

$$F^t = \sigma(W(s) - W(1); \quad t \leq s \leq 1).$$

Alors $\{F_t\}$ est une filtration progressive (c-à-d. $F_t \uparrow$ comme $t \uparrow$), et $\{F^t\}$ est une filtration retrograde ($F^t \uparrow$ comme $t \downarrow$).

Nous utiliserons la notation avec l'indice $\{X_t\}$ pour indiquer un processus F_t-adapté, et la notation avec $\{Y^t\}$ pour indiquer un processus F^t- adapté. La raison de la notation $\{W(t)\}$ est que $\{W(t), t \uparrow\}$ est un processus F_t Wiener, et $\{W(t) - W(1), t \downarrow\}$ est un processus F^t-Wiener, les deux ayant le même différentiel $dW(t)$.

On donne maintenant les définitions des intégrales stochastiques progressive et retrograde.

Soit $\{X_t, t \in [0,1]\}$ un processus continu F_t-adapté avec des valeurs dans $\mathbb{R}^n$, et $\Phi \in C(\mathbb{R}^n)$.

Soit $\{\pi^n, n \in \mathbb{N}\}$ n'importe quelle suite de partitions :

$$\pi^n = \{0 = t_0^n < t_1^n < ... < t_n^n = 1\},$$

tel que $|\pi^n| \triangleq \sup\limits_{0 \leq k \leq n-1} (t_{k+1}^n - t_k^n) \longrightarrow 0$ quand $n \longrightarrow \infty$.. Alors l'intégrale progressive d'Itô de $\Phi(X_t)$ par rapport à $dW(t)$ est définie comme suit

$$\int_0^t \Phi(X_s) dW(s) \triangleq P - \lim_{n \longrightarrow \infty} \sum_{k=0}^{n-1} \Phi(X_{t_k})(W(t_{k+1} \wedge t) - W(t_k \wedge t)),$$

On suppose maintenant que $\{Y^t, t \in [0,1]\}$ soit un processus continu F^t-adapté avec des valeurs dans $\mathbb{R}^M$, et $\Psi \in C(\mathbb{R}^M)$. Alors l'intégrale d'Itô retrograde de $\Psi(Y^t)$ par rapport à $dW(t)$ est définie comme :

$$\int_t^1 \Psi(Y^s) dW(s) \triangleq P - \lim_{n \longrightarrow \infty} \sum_{k=0}^{n-1} \Psi(Y^{t_k+1})(W(t_{k+1} \vee t) - W(t_k \vee t)).$$

Et le processus qui en résulte est une F^t martingale locale continue retrograde.

Chapitre 2

Equations différentielles doublement stochastiques rétrogrades

Le but de ce chapitre est de presenter briévement le resultat d'existence et d'unicité de la solution d'une equation différentielle doublement stochastique retrograde et étudions la régularité.

2.1 Définitions et notations

Soient $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ un espace de probabilités, $T > 0$ un temps fini.
$\{W_t, o \leq t \leq T\}$ et $\{B_t, o \leq t \leq T\}$ deux processus de mouvement brownien standard et independants avec des valeurs dans $\mathbb{R}^d$ et $\mathbb{R}^l$ définie sur $(\Omega,\ \mathcal{F},\ P)$, respectivement.
On considère les filtrations

$$\mathcal{F}_t^W = \sigma\{W_s, 0 \leq s \leq t\} \;\text{ et } \mathcal{F}_{t,T}^B = \sigma\{B_s - B_t; t \leq s \leq T\}$$

complétes par les ensemble p-null.
Le σ-algebre

$$\mathcal{F}_t \triangleq \mathcal{F}^W_{t,T} \vee \mathcal{F}^B_{t,T} \ ,$$

où pour chaque processus $\{\eta_t\}$,

$$\mathcal{F}^\eta_{s,t} = \sigma\{\eta_r - \eta_s; s \leq r \leq t\} \vee N, \quad \mathcal{F}^\eta_t = \mathcal{F}^\eta_{0,t}.$$

Notons que la collection $\{ \mathcal{F}_t,\ t \in [0,T\ ]\}$ n'est ni croissante, ni décroissante, et il ne s'agit pas donc d'une filtration.

On défini les éspaces des processus suivants :

$M^2([0,T];\mathbb{R}^n)$ l'ensemble des processus $\{\varphi_t, t \in [0,T\ ]\}$ mesurables, à valeurs dans $\mathbb{R}^n$, tels que :

1. $E\int\limits_0^T |\varphi_t|^2\, dt < \infty.$
2. φ_t est $\mathcal{F}_t$ mesurable $\forall t \in [0,T\ ]$.

$S^2([0,T];\mathbb{R}^n)$ l'ensemble des processus aléatoires continues $\{\varphi_t, t \in [0,T\ ]\}$ à valeurs dans $\mathbb{R}^n$, qui satisfait :

1. $E(\sup\limits_{0\leq t\leq T} |\varphi_t|^2) < \infty.$
2. φ_t est $\mathcal{F}_t$ mesurable pour $\forall t \in [0,T\ ]$.

On considère les deux fonctions

$$f : \Omega \times [0,T] \times \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^{k\times d} \longrightarrow \mathbb{R}^k,$$

$$g : \Omega \times [0,T] \times \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^{k\times d} \longrightarrow \mathbb{R}^{k\times l}.$$

Qui sont mesurables pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^{k\times d}$, et

$$f(.,y,z) \in M^2([0,T];\mathbb{R}^k)$$

$$g(.,y,z) \in M^2([0,T];\mathbb{R}^{k\times l}).$$

2.2 Hypothèses

On considère les hypothèses suivantes

$$\textbf{(H.1)} \begin{cases} \text{Il existe des constantes } c>0 \text{ et } 0<\alpha<1, \text{ tel que,} \\ \text{pour tout } (\omega,t) \in \Omega\times[0,T], (y_1,z_1),(y_2,z_2) \in \mathbb{R}^k\times\mathbb{R}^{k\times l}, \\ |f(t,y_1,z_1)-f(t,y_2,z_2)|^2 \leq c(|y_1-y_2|^2+\|z_1-z_2\|^2), \\ \|g(t,y_1,z_1)-g(t,y_2,z_2)\|^2 \leq c\,|y_1-y_2|^2+\alpha\,\|z_1-z_2\|^2. \end{cases}$$

$$\textbf{(H.2)} \begin{cases} \text{Il existe } c, \text{ tel que pour tous } (t,y,z)\in[0,T]\times\mathbb{R}^k\times\mathbb{R}^{k\times d}, \\ gg^*(t,y,z) \leq zz^* + c(\|g(t,0,0)\|^2+|y|^2)I. \end{cases}$$

$$\textbf{(H.3)} \left\{ g'_z(t,x,y,z)\theta\theta^* g'_z(t,x,y,z)^* \leq \theta\theta^*, \forall t\in[0,T], x\in\mathbb{R}^d, y\in\mathbb{R}^k, \quad z,\theta\in\mathbb{R}^{k\times d}. \right.$$

Etant donné $\xi \in L^2(\Omega, \mathcal{F}_T, P, \mathbb{R}^k)$, on cherche à resoudre l'équation différentielle doublement stochastique retrograde suivante :

$$Y_t = \xi + \int_t^T f(s,Y_s,Z_s)ds + \int_t^T g(s,Y_s,Z_s)dB_s - \int_t^T Z_s dW_s, \qquad 0\leq t\leq T, \tag{2.1}$$

la variable aléatoire ξ est dite condition terminale et f est le générateur.
Nous notons que l'intégrale par rapport à $\{B_t\}$ est " l'integrale d'Itô retrograde" et l'integrale par rapport à $\{W_t\}$ est " l'integrale d'Itô progressive ".

2.3 Existence et unicité :

L'objectif principal de cette section est de prouver le :

Théorème 2.3.1 *Sous l'hypothèse **(H.1)**, l'eq(2.1) possède une unique solution, telles que :*

$$(Y, Z) \in S^2([0, T]; \mathbb{R}^k) \times M^2([0, T]; \mathbb{R}^{k\times d}).$$

Avant de prouver le théorème, nous établissons le même résultat dans le cas où f et g ne dépendent pas ni de Y et ni de Z. Etant donné $f \in M^2([0, T]; \mathbb{R}^k)$ et $g \in M^2([0, T]; \mathbb{R}^{k\times l})$ et $\xi \in L^2(\Omega, \mathcal{F}_T)$, considérons l'EDDSR :

$$Y_t = \xi + \int_t^T f(s)ds + \int_t^T g(s)dB_s - \int_t^T Z_s dW_s, \qquad 0 \leq t \leq T. \tag{2.2}$$

Proposition 2.3.1 *Il existe un unique couple*

$$(Y, Z) \in S^2([0, T]; \mathbb{R}^k) \times M^2([0, T]; \mathbb{R}^{k\times d}).$$

qui résoudre l'eq.(2.2).

Preuve.

unicité. Soit $(\overline{Y}, \overline{Z})$ la différence de deux solutions, alors

$$\overline{Y_t} + \int_t^T \overline{Z_s} dW_s = 0, \quad 0 \leq t \leq T.$$

par l'orthogonalité on obtient que

$$E(\left|\overline{Y}_t\right|^2) + E\int_t^T T_r[\overline{Z_s Z_s}^*]ds = 0,$$

et donc $\overline{Y_t} = 0$ P p.s.,$\overline{Z_t} = 0$ $dt\ dP$ p.s d'où l'unicité.

Existence. On défini la filtration $(\mathcal{G}_t)_{0\leq t\leq T}$ par

$$\mathcal{G}_t = \mathcal{F}_t^W \vee \mathcal{F}_T^B, \quad \text{et soit}$$

$$M_t = E^{\mathcal{G}_t}[\xi + \int_0^T f(s)ds + \int_0^T g(s)dBs], \quad 0 \leq t \leq T, \text{ une martingales de carré intégrable}$$

Par le théorème de représentation des martingale, il existe un processus $\{Z_t\}$, $(\mathcal{G}_t)-$progressivement mesurable à valeurs dans $\mathbb{R}^{k\times d}$, tel que :

$$E\int_0^T |Z_t|^2 \, dt < \infty,$$

et

$$M_t = M_0 + \int_0^t Z_s dW_s, \quad 0 \leq t \leq T.$$

Par conséquent

$$M_T = M_t + \int_t^T Z_s dW_s,$$

En remplacement M_T et M_t, par leurs définition, alors on a, pour $t \in [0, T]$,

$$Y_t = \xi + \int_t^T f(s)ds + \int_t^T g(s)dB_s - \int_t^T Z_s dW_s,$$

où

$$Y_t \triangleq E^{\mathcal{G}_t}(\xi + \int_t^T f(s)ds + \int_t^T g(s)dB_s).$$

Il me reste à montrer que $\{Y_t\}$ et $\{Z_t\}$ sont $\mathcal{F}_t$-adaptés. Pour Y_t est évident puisque pour chaque t,

$$Y_t = E(\Theta/\mathcal{F}_t \vee \mathcal{F}_t^B).$$

Où Θ est $\mathcal{F}_T \vee \mathcal{F}_t^B$ mesurable. Puisque $\mathcal{F}_t^B$ est indépendante de $\mathcal{F}_t \vee \sigma(\Theta)$, et

$$Y_t = E(\Theta/\mathcal{F}_t).$$

Maintenant
$$\int_t^T Z_s dW_s = \xi + \int_t^T f(s)ds + \int_t^T g(s)dBs - Y_t,$$

Et le côté droit est $\mathcal{F}_T^W \vee \mathcal{F}_{t,T}^B$ mesurable. Ainsi, d'après le théorème de représentation des martingales d'Itô, $\{Z_s,\, t < s < T\}$ est $\mathcal{F}_s^W \vee \mathcal{F}_{t,T}^B$ adapté. Par conséquent Z_s est $\mathcal{F}_s^W \vee \mathcal{F}_{t,T}^B$ mesurable pour tout $t < s$, donc il est $\mathcal{F}_s^W \vee \mathcal{F}_{t,T}^B$ mesurable. ■

Lemme 2.3.1 *Soit* $\alpha \in S^2([0,T];\mathbb{R}^k)$, $\beta \in M^2([0,T];\mathbb{R}^k)$, $\gamma \in M^2([0,T];\mathbb{R}^{k\times l})$, *et* $\delta \in M^2([0,T];\mathbb{R}^{k\times d})$, *tels que :*

$$\alpha_t = \alpha_0 + \int_0^t \beta_s ds + \int_0^t \gamma_s dB_s + \int_0^t \delta_s dW_s,\ 0 \le t \le T,$$

alors

$$|\alpha_t|^2 = |\alpha_0|^2 + 2\int_0^t (\alpha_s, \beta_s)ds + 2\int_0^t (\alpha_s, \gamma_s dBs) + 2\int_0^t (\alpha_s, \delta_s dW_s) - \int_0^t \|\gamma_s\|^2 ds + \int_0^t \|\delta_s\|^2 ds.$$

Et
$$E|\alpha_t|^2 = E|\alpha_0|^2 + 2E\int_0^t (\alpha_s, \beta_s)ds - E\int_0^t \|\gamma_s\|^2 ds + E\int_0^t \|\delta_s\|^2 ds.$$

Plus généralement, si $\phi \in C^2(\mathbb{R}^k)$

$$\phi(\alpha_t) = \phi(\alpha_0) + \int_0^t (\phi'(\alpha_s), \beta_s)ds + \int_0^t (\phi'(\alpha_s), \gamma_s dB_s) + \int_0^t (\phi'(\alpha_s), \delta_s dW_s)$$
$$- \frac{1}{2}\int_0^t Tr[\phi''(\alpha_s)\gamma_s\gamma_s^*]ds + \frac{1}{2}\int_0^t Tr[\phi''(\alpha_s)\delta_s\delta_s^*]ds.$$

Preuve. (de la théoreme 2.3.1)

L'unicité. Soit $\{Y_t^1, Z_t^1\}$ est $\{Y_t^2, Z_t^2\}$ deux solutions.de l'EDDSR (2.1) On suppose que :

$$\overline{Y_t} = Y_t^1 - Y_t^2, \quad \overline{Z_t} = Z_t^1 - Z_t^2, \quad 0 \leq t \leq T.$$

Alors

$$\overline{Y_t} = \int_t^T [f(s, Y_s^1, Z_s^1) - f(s, Y_s^2, Z_s^2)]ds + \int_t^T [g(s, Y_s^1, Z_s^1) - g(s, Y_s^2, Z_s^2)]dB_s - \int_t^T \overline{Z_s} dW_s.$$

Et par suite, on applique le lemme (2.3.1) a $\overline{Y}$, on trouve

$$E(\left|\overline{Y_t}\right|^2) + E\int_t^T \left\|\overline{Z}_s\right\|^2 ds = 2E\int_t^T (f(s, Y_s^1, Z_s^1) - f(s, Y_s^2, Z_s^2), \overline{Y_s})ds + E\int_t^T \left\|g(s, Y_s^1, Z_s^1) - g(s, Y_s^2, Z_s^2)\right\|^2 ds.$$

D'aprés **(H.1)** et l'inégalité

$$ab \leq \frac{1}{2(1-\alpha)}a^2 + \frac{1-\alpha}{2}b^2$$

$$E(\left|\overline{Y_t}\right|^2) + E\int_t^T \left\|\overline{Z_s}\right\|^2 ds \leq c(\alpha)E\int_t^T \left|\overline{Y_t}\right|^2 ds + \frac{1-\alpha}{2}E\int_t^T \left\|\overline{Z}_s\right\|^2 ds + \alpha E\int_t^T \left\|\overline{Z}_s\right\|^2 ds,$$

avec $0 < \alpha < 1$ est la constante dans **(H.1)**. Par conséquent

$$E(\left|\overline{Y_t}\right|^2) + \frac{1-\alpha}{2}E\int_t^T \left\|\overline{Z}_s\right\|^2 ds \leq c(\alpha)E\int_0^T \left\|\overline{Y_s}\right\|^2 ds,$$

par le lemme de Gronwall, il vient que $E(\left|\overline{Y_t}\right|^2) = 0, \ \ 0 \leq t \leq T,$

et donc $E\int_0^T \|Z_s\|^2 \, ds = 0.$

Existence. On défini une suite récurssive $\{(Y_t^i, Z_t^i)\}_{i=0,1,\ldots}$ comme suit $Y_t^0 \equiv 0, Z_t^0 \equiv 0.$ étant donné $\{(Y_t^i, Z_t^i)\}$, $\{(Y_t^{i+1}, Z_t^{i+1})\}$ l'unique solution de l'EDDSR suivante :

$$Y_t^{i+1} = \xi + \int_t^T (f(s, Y_s^i, Z_s^i)ds + \int_t^T (g(s, Y_s^i, Z_s^i)dB_s - \int_t^T Z_s^{i+1} dW_s.$$

Soient $\overline{Y_t}^{i+1} \triangleq Y_t^{i+1} - Y_t^i$, et $\overline{Z_t}^{i+1} \triangleq Z_t^{i+1} - Z_t^i, \ \ 0 \leq t \leq T$ par un calcul on obtient :

$$E\left(\left|\overline{Y_t}^{i+1}\right|^2\right) + E\int_t^T \left\|\overline{Z_t}^{i+1}\right\|^2 ds = 2E\int_t^T (f(s, Y_s^i, Z_s^i) - (f(s, Y_s^{i-1}, Z_s^{i-1}), \overline{Y_s}^{i+1})ds$$
$$+ E\int_t^T \left\|g(s, Y_s^i, Z_s^i) - g(s, Y_s^{i-1}, Z_s^{i-1})\right\|^2 ds.$$

Soit $\beta \in \mathbb{R}$. Par l'intégration par parties, on obtient

$$E(\left|\overline{Y_t}^{i+1}\right|^2)e^{\beta t} + \beta E\int_t^T \left|\overline{Y_t}^{i+1}\right|^2 e^{\beta s} ds + E\int_t^T \left\|\overline{Z}_s^{i+1}\right\|^2 e^{\beta s} ds,$$
$$= 2E\int_t^T (f(s, Y_s^i, Z_s^i) - (f(s, Y_s^{i-1}, Z_s^{i-1}), \overline{Y_s}^{i+1})e^{\beta s} ds$$
$$+ E\int_t^T \left\|g(s, Y_s^i, Z_s^i) - g(s, Y_s^{i-1}, Z_s^{i-1})\right\|^2 e^{\beta s} ds.$$

Il existe $c, \gamma > 0$, tels que

$$E(\left|\overline{Y}_t^{i+1}\right|^2)e^{\beta s} + (\beta - \gamma)E\int_t^T \left|\overline{Y}_s^{i+1}\right|^2 e^{\beta s}ds + E\int_t^T \left\|\overline{Z}_s^{i+1}\right\|^2 e^{\beta s}ds$$
$$\leq E\int_t^T (c\left|\overline{Y}_s^{i}\right|^2 + \frac{1+\alpha}{2}\left\|\overline{Z}_s^{i}\right\|^2)e^{\beta s}ds.$$

Où $\beta = \gamma + \overline{c}$, et $\overline{c} = \frac{2c}{1+\alpha}$,

$$E\left(\left|\overline{Y}_t^{i+1}\right|^2\right)e^{\beta t} + E\int_t^T \left(\overline{c}\left|\overline{Y}_s^{i+1}\right|^2 + \left\|\overline{Z}_s^{i+1}\right\|^2\right)e^{\beta s}ds,$$
$$\leq \frac{1+\alpha}{2}E\int_t^T (c\left|\overline{Y}_s^{i}\right|^2 + \left\|\overline{Z}_s^{i}\right\|^2)e^{\beta s}ds.$$

Et par suite

$$E\int_t^T (\overline{c}\left|\overline{Y}_s^{i+1}\right|^2 + \left\|\overline{Z}_s^{i+1}\right\|^2)e^{\beta s}ds \leq \left(\frac{1+\alpha}{2}\right)^i E\int_t^T (\overline{c}\left|Y_s^1\right|^2 + \left\|Z_s^1\right\|^2)e^{\beta s}ds.$$

Et comme $\frac{1+\alpha}{2} < 1$, $\{(Y_t^i, Z_t^i)\}_{i=0,1,2,\ldots}$ est une suite de Cauchy dans $M^2(0,T;\mathbb{R}^k)\times$ $M^2(0,T;\mathbb{R}^{k\times d})$. et donc $\{Y_t^i\}_{=0,1,2\ldots}$est de Cauchy dans $S^2([0,T];\mathbb{R}^k)$, et que

$$\{(Y_t, Z_t)\} = \lim_{i\longrightarrow\infty}\{(Y_t^i, Z_t^i)\}$$

est la solution de l'équation (2.1). ■

Théorème 2.3.2 *Supposons, de plus que pour certains* $p > 2$, $\xi \in L^P(\Omega, \mathcal{F}_T, P; \mathbb{R}^k)$ *et que*

$$E\int_0^T (|f(t,0,0)|^p + \|g(t,0,0)\|^p)dt < \infty,$$

alors

$$E\left(\sup_{0\leq t\leq T}|Y_t|^p+\left(\int_0^T\|Z_t\|^2\,dt\right)^{\frac{p}{2}}\right)<\infty.$$

Preuve. On applique le Lemme (2.3.1). avec $\varphi(x)=|x|^p$, ce qui donne

$$|Y_t|^p+\frac{p}{2}\int_t^T|Y_s|^{p-2}\|Z_s\|^2\,ds+\frac{p}{2}(p-2)\int_t^T|Y_s|^{p-4}\left(Z_sZ_s^*Y_s,Y_s\right)ds$$
$$=|\xi|^p+p\int_t^T|Y_s|^{p-2}\left(f(s,Y_s,Z_s),Y_s\right)ds+p\int_t^T|Y_s|^{p-2}\left(Y_s,g(s,Y_s,Z_s)dB_s\right)$$
$$+\frac{p}{2}\int_t^T|Y_s|^{p-2}\|g(s,Y_s,Z_s)\|^2\,ds$$
$$+\frac{p}{2}(p-2)\int_t^T|Y_s|^{p-4}\left(gg^*(s,Y_s,Z_s)Y_s,Y_s\right)ds-p\int_t^T|Y_s|^{p-2}\left(Y_s,Z_sdW_s\right).$$

Si on prend l'espérance, on obtient

$$E(|Y_t|^p)+\frac{p}{2}E\int_t^T|Y_s|^{p-2}\|Z_s\|^2\,ds+\frac{p}{2}(p-2)E\int_t^T|Y_s|^{p-4}\left(Z_sZ_s^*Y_s,Y_s\right)ds$$
$$\leq E(|\varepsilon|^p)+p\ E\int_t^T|Y_s|^{p-2}\left(f(s,Y_s,Z_s),Y_s\right)ds+\frac{p}{2}E\int_t^T|Y_s|^{p-2}\|g(s,Y_s,Z_s)\|^2\,ds$$
$$+\frac{p}{2}(p-2)E\int_t^T|Y_s|^{p-4}\left(gg^*(s,Y_s,Z_s)Y_s,Y_s\right)ds.$$

D'aprés **(H.1)** et pour tout $\alpha<\alpha^{'}<1$, il existe $c(\alpha^{'})$ tel que

$$\|g(t,y,z)\|^2\leq c(\alpha^{'})(|y|^2+\|g(t,0,0)\|^2)+\alpha^{'}\|z\|^2.$$

En utilisant les hypothèses **(H.1)**, **(H.2)**, et l'inégalité de Hölder et Young, on déduit qu'il existe $\theta > 0$ et c, tels que pour $0 \leq t \leq T$,

$$\begin{aligned} & E(|Y_t|^p) + \theta E\int_t^T |Y_s|^{p-2} \|Z_s\|^2 \, ds \\ & \leq E(|\xi|^p) + c\ E\int_t^T (|Y_t|^p + |f(s,0,0)|^p + \|g(s,0,0)\|^p) ds. \end{aligned}$$

Et par suite, d'aprés le lemme de Gronwall,

$$\sup_{0\leq t\leq T} E(|Y_t|^p) + E\int_0^T |Y_t|^{p-2} \|Z_t\|^2 \, dt < \infty.$$

Et donc,

$$\begin{aligned} |Y_t|^p \leq |\xi|^p + c\int_t^T (|Y_s|^p) + |f(s,0,0)|^p + \|g(s,0,0)\|^p) ds. \\ + p\int_t^T |Y_s|^{p-2} (Y_s, g(s,Y_s,Z_s)dB_s) - p\int_t^T |Y_s|^{p-2} (Y_s, Z_s dW_s). \end{aligned}$$

D'aprés l'inégalité de BDG, on obtient la majoration suivante

$$\begin{aligned} E(\sup_{0\leq t\leq T} |Y_t|^p) \leq E(|\xi|^p) + cE\int_0^T |Y_t|^p + |f(t,0,0)|^p + \|g(t,0,0)\|^p) dt. \\ + cE\sqrt{\int_0^T |Y_t|^{2p-4} (gg^*(t,Y_t,Z_t)Y_t, Y_t) dt} \\ + cE\sqrt{\int_0^T |Y_t|^{2p-4} (Z_t Z_t^* Y_t, Y_t) dt}. \end{aligned}$$

Par suit :

$$E\sqrt{\int_0^T |Y_t|^{2p-4}\left(Z_tZ_t^*Y_t,Y_t\right)dt} \le E\left(Y_t^{\frac{p}{2}}\sqrt{\int_0^T |Y_t|^{p-2}\left\|Z_t\right\|^2 dt}\right)$$
$$\le \frac{1}{3}E(\sup_{0\le t\le T}|Y_t|^p)+\frac{1}{4}E\int_0^T |Y_t|^{p-2}\left\|Z_t\right\|^2 dt.$$

Alors

$$E(\sup_{0\le t\le T}|Y_t|^p)<\infty.$$

$$\int_0^T \left\|Z_t\right\|^2 dt = |\xi|^2-|Y_0|^2+2\int_0^T (f(t,Y_t,Z_t),Y_t)dt+2\int_0^T (Y_t,g(t,Y_t,Z_t)dB_t)$$
$$+\int_0^T \left\|g(t,Y_t,Z_t)\right\|^2 dt-2\int_0^T (Y_t,Z_tdW_t).$$

Donc, pour tout $\delta>0$,

$$\left(\int_0^T \left\|Z_t\right\|^2 dt\right)^{\frac{p}{2}} \le (1+\delta)\left(\int_0^T \left\|g(t,Y_t,Z_t)\right\|^2 dt\right)^{\frac{p}{2}}$$
$$+c(\delta+p)\left[|\xi|^p+|Y_0|^p+\left|\int_0^T (f(t,Y_t,Z_t),Y_t)dt.\right|^{\frac{p}{2}}\right.$$
$$\left.+\left|\int_0^T (Y_t,g(t,Y_t,Z_t)dB_t)\right|^{\frac{p}{2}}+\left|\int_0^T (Y_t,Z_t\ dW_t)\right|^{\frac{p}{2}}\right].$$

Il vient, alors

$$
\begin{aligned}
& E\left[\left(\int_0^T \|Z_t\|^2 \, dt\right)^{\frac{p}{2}}\right] \\
& \leq (1+\delta)^2 \alpha E\left[\left(\int_0^T \|Z_t\|^2 \, dt\right)^{\frac{p}{2}}\right] + c'(\delta, p) \\
& + c(\delta+p) E\left[\left(\int_0^T |Y_t| \, \|Z_t\| \, dt\right)^{\frac{p}{2}}\right] + c(\delta+p) E\left[\left(\int_0^T |Y_t|^2 \, \|Z_t\|^2 \, dt\right)^{\frac{p}{4}}\right], \\
& \leq (1+\delta)^2 \alpha E\left[\left(\int_0^T \|Z_t\|^2 \, dt\right)^{\frac{p}{2}}\right] + c'(\delta, p) \\
& + c(\delta+p) E\left\{\left(\sup_{0 \leq t \leq T} |Y_t|^{\frac{p}{2}}\right)\left[\left(\int_0^T \|Z_t\| \, dt\right)^{\frac{p}{2}} + \left(\int_0^T \|Z_t\|^2 \, dt\right)^{\frac{p}{4}}\right]\right\}, \\
& \leq [(1+\delta)^2 \alpha + (1+\delta)] E\left[\left(\int_0^T \|Z_t\|^2 \, dt\right)^{\frac{p}{2}}\right] + c''(\delta+p).
\end{aligned}
$$

Nous choisissons $\delta > 0$ assez petit, tel que

$$
(1+\delta)^2 \alpha + (1+\delta) < 1.
$$

(Rappelons que $\alpha < 1$). ■

2.4 Régularité de la solution de l'EDDSR

2.4.1 Définitions et notations

Soit T un réel strictement positif. Notons par :

$C^k(\mathbb{R}^p;\mathbb{R}^q)$ l'ensemble des fonctions de classe C^k de $\mathbb{R}^p$ dans $\mathbb{R}^q$,

$C^k_{l,b}(\mathbb{R}^p;\mathbb{R}^q)$ l'ensemble des fonctions de classe C^k dont les dérivées partielles d'ordre inférieur ou égal à k sont bornées (et donc la fonction elle-même croît au plus linéairement à l'infini), et ensuite $C^k_p(\mathbb{R}^p;\mathbb{R}^q)$ l'ensemble des fonctions de classe C^k qui, avec toutes leurs dérivées partielles d'ordre inférieur ou égal à k, croissent au plus comme une fonction polynomiale en x à l'infini.

Etant donnés $b \in C^3_{l,b}(\mathbb{R}^d;\mathbb{R}^d)$ et $\sigma \in C^3_{l,b}(\mathbb{R}^d;\mathbb{R}^{d\times d})$ et pour tout $t \in [0,T)$, $x \in \mathbb{R}^d$, nous désignons par $\{X^{t,x}_s,\ t \leq s \leq T\}$ l'unique solution de l'EDS suivante :

$$\begin{cases} dX^{t,x}_s = b(X^{t,x}_s)ds + \sigma(X^{t,x}_s)dW_s, t \leq s \leq T \\ X^{t,x}_s = x. \end{cases} \tag{2.3}$$

d'aprés des résultats connues sur les EDS, la solution $\{X^{t,x}_s,\ 0 \leq t \leq s \leq T,\ x \in \mathbb{R}^d\}$ admet une version continue de classe C^2 p.s, (la fonction et ses dérivées étant p.s. continue par rapport à (t,s,x)).

De plus,

$$\sup_{0\leq s\leq T}\left(\left|X^{t,x}_s\right| + \left|\triangledown X^{t,x}_s\right| + \left|D^2X^{t,x}_s\right|\right) \in \bigcap_{p\geq 1} L^p(\Omega),$$

où $\triangledown X^{t,x}_s$ désigne la matrice des dérivées de premier ordre de $X^{t,x}_s$ par rapport à x, et $D^2X^{t,x}_s$ la matrice des dérivées du second ordre.

Maintenant, on a utilise les notations suivantes

$$f(s,y,z) \triangleq f(s,X_s^{t,x},y,z),$$
$$g(s,y,z) \triangleq g(s,X_s^{t,x},y,z).$$

Où

$$f:[0,T]\times\mathbb{R}^d\times\mathbb{R}^k\times\mathbb{R}^{k\times d}\longrightarrow\mathbb{R}^k,$$
$$g:[0,T]\times\mathbb{R}^d\times\mathbb{R}^k\times\mathbb{R}^{k\times d}\longrightarrow\mathbb{R}^{k\times l}.$$

On suppose, que pour tout $s\in[0,T]$, $(x,y,z)\longrightarrow(f(s,x,y,z),g(s,x,y,z))$ est de classe C^3, et des dérivés bornées

On suppose que **(H.1)**,**(H.2)** et **(H.3).**sont satisfaits :

Soit $h\in C_p^3(\mathbb{R}^d;\mathbb{R}^k)$, pour tout $t\in[0,T], x\in\mathbb{R}^d$, soit $\{(Y_s^{t,x},Z_s^{t,x}),\ t\le s\le T\}$ la solution unique de l'EDDSR :

$$Y_s^{t,x}=h(X_T^{t,x})+\int_s^T f(r,X_r^{t,x},Y_r^{t,x},Z_r^{t,x})dr \tag{2.4}$$
$$+\int_s^T g(r,X_r^{t,x},Y_r^{t,x},Z_r^{t,x})dB_r-\int_s^T Z_r^{t,x}dW_r,\quad t\le s\le T.$$

Où $X_s^{t,x}=X_{s\vee t}^{t,x},\ \ Y_s^{t,x}=Y_{s\vee t}^{t,x}$ et $Z_s^{t,x}=0$, pour $s<t$.

Théorème 2.4.1 $\{Y_s^{t,x};(s,t)\in[0,T]^2,x\in\mathbb{R}^d\}$ *admet une version de trajectoire appartiennent à* $C^{0,0,2}([0,T]^2\times\mathbb{R}^d)$.

Corollaire 2.4.1 *Il existe une version continue de champs aleatoire* $\{Y_t^{t,x};t\in[0,T],x\in\mathbb{R}^d\}$ *tel que pour tout* $t\in[0,T]$, $x\longrightarrow Y_t^{t,x}$ *est de classe* C^2*p.s, est de dérivées continues p.s en* (t,x).

Preuve. (du theoreme 2.4.1) D'aprés le théorème (2.3.2), pour tout $p \geq 2$, il existe c_p et q, tels que

$$E\left(\sup_{t\leq s\leq T}\left|Y_s^{t,x}\right|^p+\left(\int_t^T\left\|Z_s^{t,x}\right\|^2 ds\right)^{p/2}\right)\leq c_p(1+|x|^q).$$

Pour $t \vee t\prime \leq s \leq T$, il vient alors

$$\begin{aligned}
Y_s^{t,x}-Y_s^{t',x'} &= [\int_0^1 h'(X_T^{t',x'}+\lambda(X_T^{t,x}-X_T^{t',x'}))d\lambda](X_T^{t,x}-X_T^{t',x'}) \\
&+\int_s^T(\varphi_r(t,x;t',x')[X_r^{t,x}-X_r^{t',x'}]+\psi_r(t,x;t',x')[Y_r^{t,x}-Y_r^{t',x'}] \\
&+\chi_r(t,x;t',x')[Z_r^{t,x}-Z_r^{t',x'}])dr+\int_s^T(\overline{\varphi}_r(t,x;t',x')[X_r^{t,x}-X_r^{t',x'}] \\
&+\overline{\psi}_r(t,x;t',x')[Y_r^{t,x}-Y_r^{t',x'}]+\overline{\chi}_r(t,x;t',x')[Z_r^{t,x}-Z_r^{t',x'}])dB_r \\
&-\int_s^T(Z_r^{t,x}-Z_r^{t',x'})dW_r.
\end{aligned}$$

Où

$$\begin{aligned}
\varphi_r(t,x;t',x') &= \int_0^1 f'_x(\textstyle\sum_{r,\lambda}^{t,x;t',x'})d\lambda. \\
\psi_r(t,x;t',x') &= \int_0^1 f'_y(\textstyle\sum_{r,\lambda}^{t,x;t',x'})d\lambda. \\
\chi_r(t,x;t',x') &= \int_0^1 f'_z(\textstyle\sum_{r,\lambda}^{t,x;t',x'})d\lambda.
\end{aligned}$$

De la même maniére on obtient $\overline{\varphi}_r, \overline{\psi}_r$et $\overline{\chi}_r$, avec f remplacé par g, et

$$\begin{aligned}
\textstyle\sum_{r,\lambda}^{t,x;t',x'} &= (r, X_r^{t',x'}+\lambda(X_r^{t,x}-X_r^{t',x'}), Y_r^{t',x'}+\lambda(Y_r^{t,x}-Y_r^{t',x'}) \\
&, Z_r^{t',x'}+\lambda(Z_r^{t,x}-Z_r^{t',x'})).
\end{aligned}$$

Par suite, d'aprés le théorème (2.3.2) et l'estimation :

$$E\left(\sup_{0\leq s\leq T}\left|X_s^{t,x}-X_s^{t',x'}\right|^p\right)\leq c_p(1+|x|^p+|x'|^p)(|x-x'|^p+|t-t'|^{p/2}),$$

donc, pour tout $p\geq 2$, il existe c_p et q, tels que

$$\begin{aligned}&E\left(\sup_{0\leq s\leq T}\left|Y_s^{t,x}-Y_s^{t',x'}\right|^p+\left(\int_t^T\left\|Z_s^{t,x}-Z_s^{t',x'}\right\|^2ds\right)^{p/2}\right)\\&\leq c_p(1+|x|^q+|x'|^q)(|x-x'|^p+|t-t'|^{p/2}).\end{aligned}$$

Ensuite, nous définissons

$$\Delta_h^iX_s^{t,x}\triangleq(X_s^{t,x+he_i}-X_s^{t,x})/h,$$

où $h\in\mathbb{R}\backslash\{0\}$, $\{e_1,...,e_d\}$ est une base orthonormale de $\mathbb{R}^d$. $\Delta_h^iY_s^{t,x}$ et $\Delta_h^iZ_s^{t,x}$ sont définis de même manière. On à :

$$\begin{aligned}\Delta_h^iY_s^{t,x}=&\int_0^t h'(X_T^{t,x}+\lambda h\Delta_h^iX_T^{t,x})\Delta_h^iX_T^{t,x}d\lambda\\&+\int_s^T\int_0^1[f_x'(\Xi_{r,\lambda}^{t,x,h})\Delta_h^iX_r^{t,x}+f_y'(\Xi_{r,\lambda}^{t,x,h})\Delta_h^iY_r^{t,x}+f_z'(\Xi_{r,\lambda}^{t,x,h})\Delta_h^iZ_r^{t,x}]d\lambda dr\\&+\int_s^T\int_0^1g_x'(\Xi_{r,\lambda}^{t,x,h})\Delta_h^iX_r^{t,x}g_y'(\Xi_{r,\lambda}^{t,x,h})\Delta_h^iY_r^{t,x}+g_z'(\Xi_{r,\lambda}^{t,x,h})\Delta_h^iZ_r^{t,x}]d\lambda dB_r\\&-\int_s^T\Delta_h^iZ_r^{t,x}dW_r,\end{aligned}$$

où

$$\Xi_{r,\lambda}^{t,x,h}=(r,X_r^{t,x}+\lambda h\Delta_h^iX_r^{t,x},Y_r^{t,x}+\lambda h\Delta_h^iY_r^{t,x},Z_r^{t,x}+\lambda h\Delta_h^iZ_r^{t,x}).$$

Nous notons que pour chaque $p\geq 2$, il existe un c_p, tel que

$$E\left(\sup_{0\leq s\leq T}\left|\Delta_h^iX_s^{t,x}\right|^p\right)\leq c_p.$$

Les mêmes estimations que ci-dessus donnent que

$$E\left(\sup_{t\leq s\leq T}\left|\triangle_h^i\ Y_s^{t,x}\right|^p+\left(\int_t^T\left\|\triangle_h^i\ Z_s^{t,x}\right\|^2 ds\right)^{p/2}\right)\leq c_p(1+|x|^q+|h|^q).$$

Finalement, on considére

$$\begin{aligned}
\Delta_h^i Y_s^{t,x}-\Delta_{h'}^i Y_s^{t',x'} &= \int_0^1 h'(X_T^{t,x}+\lambda h\Delta_h^i X_T^{t,x})\Delta_h^i X_T^{t,x} d\lambda \\
&- \int_0^1 h'(X_T^{t',x'}+\lambda h'\Delta_h^i X_T^{t',x'})\Delta_{h'}^i X_T^{t',x'} d\lambda \\
&+ \int_s^T\int_0^1 f_x'(\Xi_{r,\lambda}^{t,x,h})\Delta_h^i X_r^{t,x}-f_x'(\Xi_{r,\lambda}^{t',x',h'})\Delta_{h'}^i X_r^{t',x'}]d\lambda dr \\
&+ \int_s^T\int_0^1 f_y'(\Xi_{r,\lambda}^{t,x,h})\Delta_h^i Y_r^{t,x}-f_y'(\Xi_{r,\lambda}^{t',x',h'})\Delta_{h'}^i Y_r^{t',x'}]d\lambda dr \\
&+ \int_s^T\int_0^1 f_z'(\Xi_{r,\lambda}^{t,x,h})\Delta_h^i Z_r^{t,x}-f_z'(\Xi_{r,\lambda}^{t',x',h'})\Delta_{h'}^i Z_r^{t',x'}]d\lambda dr \\
&+ \int_s^T\int_0^1 g_x'(\Xi_{r,\lambda}^{t,x,h})\Delta_h^i X_r^{t,x}-g_x'(\Xi_{r,\lambda}^{t',x',h'})\Delta_{h'}^i X_r^{t',x'}]d\lambda dB_r \\
&+ \int_s^T\int_0^1 g_y'(\Xi_{r,\lambda}^{t,x,h})\Delta_h^i Y_r^{t,x}-g_y'(\Xi_{r,\lambda}^{t',x',h'})\Delta_{h'}^i Y_r^{t',x'}]d\lambda dB_r \\
&+ \int_s^T\int_0^1 g_z'(\Xi_{r,\lambda}^{t,x,h})\Delta_h^i Z_r^{t,x}-g_z'(\Xi_{r,\lambda}^{t',x',h'})\Delta_{h'}^i Z_r^{t',x'}]d\lambda dB_r \\
&- \int_s^T[\Delta_h^i Z_r^{t,x}-\Delta_{h'}^i Z_r^{t',x'}]dW_r.
\end{aligned}$$

On note que

$$E\left(\sup_{0\leq s\leq T}\left|\Delta_h^i X_s^{t,x}-\Delta_{h'}^i X_s^{t',x'}\right|^p\right)\leq c_p(1+|x|^p)(|x-x'|^q+|h-h'|^p+|t-t'|^{p/2}),$$

et

$$\begin{aligned}\left|\Xi_{r,\lambda}^{t,x,h} - \Xi_{r,\lambda}^{t',x',h'}\right| \leq (&\left|X_r^{t,x} - X_r^{t',x'}\right| + \left|X_r^{t,x+h_{e_i}} - X_r^{t',x'+h'_{e_i}}\right| \\ &+ \left|Y_r^{t,x} - Y_r^{t',x'}\right| + \left|Y_r^{t,x+h_{e_i}} - Y_r^{t',x'+h'_{e_i}}\right| \\ &+ \left\|Z_r^{t,x} - Z_r^{t',x'}\right\| + \left\|Z_s^{t,x+h_{e_i}} - Z_s^{t',x'+h'_{e_i}}\right\|).\end{aligned}$$

D'aprés le théorème (2.3.2), et le théorème 2.9 dans [4], on obtient que

$$\begin{aligned}&E\left(\sup_{0\leq s\leq T}\left|\Delta_h^i Y_s^{t,x} - \Delta_{h'}^i Y_s^{t',x'}\right|^p + \left(\int_{t\wedge t'}^{T}\left\|\Delta_h^i Z_s^{t,x} - \Delta_{h'}^i Z_s^{t',x'}\right\|^2 ds\right)^{p/2}\right) \\ &\leq c_p(1+|x|^q+|x'|^q+|h|^q+|h'|^q)\times(|x-x'|^p+|h-h'|^p+|t-t'|^{p/2}).\end{aligned}$$

L'existence d'une dérivée continue de $Y_s^{t,x}$ par rapport à x suit de l'estimation ci-dessus, ainsi que l'existence d'une dérivée en moyenne quadratique de $Z_r^{t,x}$ par rapport à x, qui est continue en moyenne quadratique par rapport à (s,t,x). L'existence d'une dérivée seconde continue de $Y_s^{t,x}$ par rapport à x est prouvée de manière similaire. ■

Par [4], $\left\{\left(\nabla Y_s^{t,x} = \frac{\partial Y_s^{t,x}}{\partial x}, \nabla Z_s^{t,x} = \frac{\partial Z_s^{t,x}}{\partial x}\right)\right\}$ est la solution unique de l'EDDSR :

$$\begin{aligned}\nabla Y_s^{t,x} = h'(X_T^{t,x})\nabla X_T^{t,x} + \int_s^T &[f'_x(r,X_r^{t,x},Y_r^{t,x},Z_r^{t,x})\nabla X_r^{t,x} \\ &+ f'_y(r,X_r^{t,x},Y_r^{t,x},Z_r^{t,x})\nabla Y_r^{t,x} + f'_z(r,X_r^{t,x},Y_r^{t,x},Z_r^{t,x})\nabla Z_r^{t,x}]dr \\ &+ \int_s^T [g'_x(r,X_r^{t,x},Y_r^{t,x},Z_r^{t,x})\nabla X_r^{t,x} + g'_y(r,X_r^{t,x},Y_r^{t,x},Z_r^{t,x})\nabla Y_r^{t,x} \\ &+ g'_z(r,X_r^{t,x},Y_r^{t,x},Z_r^{t,x})\nabla Z_r^{t,x}]dB_r - \int_s^T \nabla Z_r^{t,x} dW_r.\end{aligned}$$

Proposition 2.4.1 *Le champ aléatoire* $\{Z_s^{t,x}; 0\leq t\leq s\leq T, x\in\mathbb{R}^d\}$ *a une version continue* *presque sûrement, tels que*

$$Z_s^{t,x} = \nabla Y_s^{t,x} (\nabla X_s^{t,x})^{-1} \sigma(X_s^{t,x}),$$

et en particulier

$$Z_t^{t,x} = \nabla Y_t^{t,x} \sigma(x).$$

Preuve. Pour tout variable aléatoire de la fore $F = f(W(h_1), ..., W(h_n); B(k_1), ..., B(k_p))$, avec $f \in C_b^\infty(\mathbb{R}^{n+p}), h_1, ..., h_n \in L^2([0,T], \mathbb{R}^d), k_1, ..., k_p \in L^2([0,T], \mathbb{R}^l)$, où :

$$W(h_i) \triangleq \int_0^T (h_i(t), dW_t), \qquad B(k_j) \triangleq \int_0^T (k_j(t), dB_t),$$

et soit

$$D_t F \triangleq \sum_{i=1}^n f_i'(W(h_1), ..., W(h_n); B(k_1), ..., B(k_p)) h_i(t), \quad 0 \leq t \leq T.$$

Nous supposons que

$$\|F\|_{1,2} = \left(E[F^2 + \int_0^T |D_t F|^2 \, dt] \right)^{\frac{1}{2}}.$$

On définit l'espace de Sobolev :

$$\mathbb{D}^{1,2} \ \triangleq \ \overline{S}^{\|\cdot\|_{1,2}}.$$

sous les hypothèses de théorème 2.4.1, les composantes de $X_s^{t,x}, Y_s^{t,x}$ et $Z_s^{t,x}$ prennent des valeurs dans $\mathbb{D}^{1,2}$, et les couples $\{(D_\theta Y_s^{t,x}, D_\theta Z_s^{t,x}; \quad t \leq \theta \leq s \leq T\}, \{(\nabla Y_s^{t,x}, \nabla Z_s^{t,x})\}$, vérifiont pour chaque θ fixé la même équation, mais le $\nabla X_s^{t,x}$ a été remplacé par $D_\theta X_s^{t,x}$. Alors, pour $t \leq \theta < s$,

$$D_\theta X_s^{t,x} = \nabla X_s^{t,x} (\nabla X_\theta^{t,x})^{-1} \sigma(X_\theta^{t,x}).$$

Et

$$D_\theta X_\cdot^{t,x} \longrightarrow (D_\theta Y_\cdot^{t,x}, D_\theta Z_\cdot^{t,x}),$$

$$\nabla X_\cdot^{t,x} \longrightarrow (\nabla Y_\cdot^{t,x}, \nabla Z_\cdot^{t,x}),$$

il s'ensuit que

$$D_\theta Y_s^{t,x} = \nabla Y_s^{t,x} (\nabla X_\theta^{t,x})^{-1} \ \sigma(X_\theta^{t,x}).$$

Maintenant, $D_\theta Y_s^{t,x} = 0$ pour $\theta > s$, et

$$D_\theta Y_\theta^{t,x} \triangleq \lim_{s\downarrow \downarrow\theta} D_\theta Y_s^{t,x} = Z_\theta^{t,x}, \theta \quad p.s$$

Ce qui termine la preuve de proposition ■

Chapitre 3

Interprétation probabiliste de la solution de l'EDPS

On donne maintenant le lien entre l'EDDSR et un système d'équations différentielles partielles stochastiques retrogrades semi lineaire :

$$u(t,x) = h(x) + \int_t^T [\mathcal{L}u(s,x) + f(s,x,u(s,x),(\nabla u\sigma)(s,x))]ds \tag{3.1}$$

$$+\int_t^T g(s,x,u(s,x),(\nabla u\sigma)(s,x))dB_s, \qquad 0 \leq t \leq T.$$

Où $u : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{R}^k$,

$$\mathcal{L}\ u = \begin{pmatrix} Lu_1 \\ \vdots \\ Lu_k \end{pmatrix},$$

avec

$$L = \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{d}(\sigma\sigma^*)_{ij}(t,x)\frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^{d} b_i(t,x)\frac{\partial}{\partial x_i}.$$

Théorème 3.0.2 *Si les fonctions f et g satisfaisont les hypothèses **(H.1)** et **(H.2)**;et h de classe C^2. soit $\{u(t,x); 0 \leq t \leq T,\ x \in \mathbb{R}^d\}$ un champ aleatoire tel que $u(t,x)$ est $\mathcal{F}^B_{t,T}$-mesurable pour tout $(t,x), u \in C^{0,2}([0,T] \times \mathbb{R}^d; \mathbb{R}^k)$ p.s et u vérifier l'équation (3.1) Alors $u(t,x) = Y^{t,x}_t$, où $\{(Y^{t,x}_s, Z^{t,x}_s);\ t \leq s \leq T\}_{t \geq 0, x \in \mathbb{R}^d}$ est la solution unique de l'EDDSR (2.4).*

Preuve. Il suffit de montrer que $\{(u(t, X^{t,x}_s), (\nabla u\sigma)(s, X^{t,x}_s); 0 \leq s \leq t\}$ est la solution de l'EDDSR (2.4).

Soit $t = t_0 < t_1 < t_2 < ... < t_n = T$.

$$
\begin{aligned}
&\sum_{i=0}^{n-1}[u(t_i, X^{t,x}_{t_i}) - u(t_{i+1}, X^{t,x}_{t_{i+1}})] \\
&= \sum_i [u(t_i, X^{t,x}_{t_i}) - u(t_i, X^{t,x}_{t_{i+1}})] + \sum_i [u(t_i, X^{t,x}_{t_{i+1}}) - u(t_{i+1}, X^{t,x}_{t_{i+1}})] \\
&= -\int_{t_i}^{t_{i+1}} \mathcal{L}\ u(t_i, X^{t,x}_s)ds - \int_{t_i}^{t_{i+1}} (\nabla u\sigma)(t_i, X^{t,x}_s)dW_s \\
&+ \int_{t_i}^{t_{i+1}} [\mathcal{L}(u(s, X^{t,x}_{t_{i+1}})) + f(s, X^{t,x}_{t_{i+1}}, u(s, X^{t,x}_{t_{i+1}}), (\nabla u\sigma)(s, X^{t,x}_{t_{i+1}}))]ds \\
&+ \int_{t_i}^{t_{i+1}} g(s, X^{t,x}_{t_{i+1}}, u(s, X^{t,x}_{t_{i+1}}), (\nabla u\sigma)(s, X^{t,x}_{t_{i+1}}))dB_s.
\end{aligned}
$$

où nous avons utilisé la formule d'Itô et l'équation satisfait par u. On obtient ensuite une unique de l'equation (2.4). ■

Nous montrons maintenant l'inverse de théorème (3.0.2).

Théorème 3.0.3 *Si f, g et h satisfaisons les hypothèses de chapitre2 Alors $\{u(t,x) \triangleq Y^{t,x}_t;\ 0 \leq t \leq T,\ x \in \mathbb{R}^d\}$ est l'unique solution classique de système de l'EDPS retrograde (3.1).*

Preuve. On sait que

$$Y^{t,x}_{t+h} = Y^{t+h, X^{t,x}_{t+h}}_{t+h}$$

par conséquent,

$$
\begin{aligned}
u(t+h,x)-u(t,x) &= u(t+h,x)-u(t+h,X_{t+h}^{t,x})+u(t+h,X_{t+h}^{t,x})-u(t,x) \\
&= -\int_t^{t+h} \mathcal{L}\ u(t+h,X_s^{t,x})ds+\int_t^{t+h} (\nabla u\sigma)(t+h,X_s^{t,x}dW_s \\
&- \int_t^{t+h} f(s,X_s^{t,x},Y_s^{t,x},Z_s^{t,x})ds-\int_t^{t+h} g(s,X_s^{t,x},Y_s^{t,x},Z_s^{t,x})dB_s \\
&+ \int_t^{t+h} Z_s^{t,x}dW_s.
\end{aligned}
$$

On peut alors terminer la preuve exactement comme dans le Théorème 3.2 de Pardoux et Peng[4] ■

Remarque 3.0.1 *Dans le cas ou g est linéaire par rapport au dernier variables, et ne depend pas de y, g est de la forme :*

$$g(s,x,z)=c(s,x)z,$$

*La condition **(H.1)** pour g, dans ce cas, se réduit à $|c(s,x)|\leq\alpha<1$.*

Remarque 3.0.2 *Notre résultat généralise la formule stochastique de Feynman-Kac pour les EDPS linéaires. En effet, si $k=1$, f et g sont linéaires en y et ne dépendent pas de z, l'EDDSR devient*

$$Y_s^{t,x}=h(X_T^{t,x})+\int_s^T a(r,X_r^{t,x})Y_r^{t,x}dr+\int_s^T b(r,X_r^{t,x})Y_r^{t,x}dB_r-\int_s^T Z_r^{t,x}dW_r,$$

et il a une solution explicite donnée par :

$$\begin{aligned} Y_s^{t,x} &= \exp\left(\int_s^T a(r, X_r^{t,x})dr + \int_s^T b(r, X_r^{t,x})dB_r - \frac{1}{2}\int_s^T \left|b(r, X_r^{t,x})\right|^2 dr\right) h(X_T^{t,x}) \\ &\quad - \int_s^T \exp\left(\int_s^r a(\theta, X_\theta^{t,x})d\theta + \int_s^r b(\theta, X_\theta^{t,x})dB_\theta - \frac{1}{2}\int_s^r \left|b^2(\theta, X_\theta^{t,x})\right|^2 d\theta\right) Z_r^{t,x}dW_r, \end{aligned}$$

et $Y_t^{t,x}$ *est* $\mathcal{F}_{t,T}^B$*mesurable,*

$$Y_t^{t,x} = E\left[h(X_T^{t,x})\exp(\int_t^T a(r, X_r^{t,x})dr + \int_t^T b(r, X_r^{t,x})dB_r - \frac{1}{2}\int_t^T \left|b(r, X_r^{t,x})\right|^2 dr)\,/\mathcal{F}_{t,T}^B\right]$$

.

Bibliographie

[1] Briand, P. (2001). Equations Différentielles Stochastiques Rétrogrades. Mars.

[2] Nualart, D., & Pardoux, É. (1988). Stochastic calculus with anticipating integrands. Probability Theory and Related Fields, 78(4), 535 – 581..

[3] Pardoux, E. (1978). Un résultat sur les équations aux dérivées partielles stochastiques et filtrage des processus de diffusion. CR Acad. Sci. Paris Sér. AB, 287(16), 1065 – 1068..

[4] Pardoux, E., & Peng, S.(1992). Backward stochastic differential equations and quasilinear parabolic partial differential equations. In Stochastic partial differential equations and their applications (pp. 200 – 217). Springer, Berlin, Heidelberg.

[5] Peng, S.(1992). A nonlinear Feynman-Kac formula and applications. In Proceedings of Symposium of System Sciences and Control Theory (pp. 173 – 184). World Scientific.

Annexe : Abréviations et Notations

Les différentes abréVariations et notations utilisées tout au long de ce mémoire sont expliquées ci-dessous.

$B(\mathbb{R}^d)$		la tribu borélienne de $\mathbb{R}^d$
$\mathcal{N}$	:	l'ensemble de la classe p-nulle de $\mathcal{F}$
$\|A\|$	$=$	$\sqrt{\text{trac } AA^*}$ (la norme euclidienne pour une matrice A de dimension $d \times d$)
$\|F\|_{1.2}$		est la norme 1.2
$D^2 X_s^{t,x}$		la tenseur des dérivées du second ordre
D		est l'opérateur de dérivation
$\mathbb{D}^{1.2}$		est l'opérateur de dérivation dans $L^2(\Omega, L^2[0,T], \mathbb{R}^d)$
$\bigtriangledown X_s^{t,x}$		la matrice des dérivées de premier ordre de $X_s^{t,x}$ par rapport a x