République Algérienne Démocratique et Populaire

Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

UNIVERSITÉ MOHAMED KHIDER, BISKRA

FACULTÉ des SCIENCES EXACTES et des SCIENCES de la NATURE et de la VIE

DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES

Mémoire présenté en vue de l'obtention du Diplôme **:**

MASTER en Mathématiques

Option : **Statistique**

Par

Raounak Sabbah

Titre :

Fonction Caractéristique : Théorie et Applications

Membres du Comité d'Examen :

Dr.	**Soltan Louiza**	UMKB	Président
Dr.	**Yahia Djabrane**	UMKB	Encadreur
Dr.	**Ouanoughi Yasmina**	UMKB	Examinateur

Juin 2018

Dédicace

Je dédie ce humble travail

À ma très chère maman, pour sa tendresse, sa
bienveillance, son encouragement pour ce qu'elle a fait
depuis mon enfance jusqu'à ce jour.

A mon cher père du fond de cœur pour tout ce qui tu as fait
pour mois.

A mes chers et adorable frères et soeurs :Rihab,Raida,Islam,Muohamed et Asil.

A tous ce qui ont enseigné moi au long de ma vie scolaire.

Pour chacun des oublié mon stylo n'a pas
Oublié mon cœur.

REMERCIEMENTS

Je tient, en premier lieu, à remercier Dieu le tout puissant, qui ma a donné le courage et la volonté pour bien mener ce modeste travail.

Je remercie mes parents d'avoir été très proches de moi tout au long de la préparation de ce diplôme.

Je tiens à remercier particulièrement mon encadreur, Dr : Yahia Djabrane qui a proposé le thème de ce mémoire, pour ses conseils et ses dirigés du début à la fin de ce travail.

Mes vifs remerciements vont également aux membres de jury de soutenance de ce mémoire .

Mes remerciements vont également à tous les enseignants.

Table des matières

Table des figures

Introduction

En statistique et en théorie des probabilités, la fonction caractéristique d'une variable aléatoire réelle X détermine de façon unique sa loi de probabilité. Si cette variable aléatoire a une densité, alors la fonction caractéristique est la transformée de Fourier de la densité. Les valeurs en zéro des dérivées successives de la fonction caractéristique permettent de calculer les moments de la variable aléatoire. Les fonctions caractéristiques sont aussi très utiles pour étudier la convergence de suites de variable aléatoire. Il s'agit aussi d'une méthode alternative d'estimation des paramètres de certans lois de probabilités.

Historiquement, la notation de fonction caractéristique a été établie par François Massieu dans ses deux courtes publications parues en 1869, il y définit deux fonctions aujourd'hui appelées fonction de Massieu et fonction de Plank. Dès sa découverte des fonctions caractéristiques et sans avoir besoin de déterminer leur forme précise, il tira de leur simple existence des relations qui permirent en particulier de prouver l'incohérence de certains travaux existants. Les fonctions caractéristiques de Massieu, redécouvertes par Max Planck en1897 et désignées sous des noms divers, n'ont été mises en avant que plus récemment par Herbert Callen en 1960. Elles diffèrent des fonctions traditionnellement enseignées de Gibbs et de Helmholtz par le choix de $1/T$ au lieu de T comme variable caractérisant la température. De manière trés générale, sous sa forme actuelle introduite en 1937 par Paul Lèvy, la fonction caractéristique d'une variable aléatoire est la transformée de fourier de sa probabilité image. Elle prend une expression très simple pour des variables aléatoires discrètes ou à densité.

Le mémoire est organisé comme suit :

Dans le premier chapitre, nous donnons la définition et les propriétés générales de la fonction caractéristique. Le cas des lois stables qui sont définit uniquement par leurs fonctions caractéristiques est étudier.

Nous définissons dans le deuxième chapitre, comme cas particulier la fonction caractéristique dans un réseau. Nous rappelons aussi les fonctions caractéristiques de quelques lois de probabilités discrètes et continues.

Nous donnons dans le dernier chapitre, des applications de la fonction caractéristique : en mettons l'accent sur les méthodes d'estimation basée sur la fonction caractéristique des paramètres des lois stables.

Chapitre 1

Fonction Caractéristique : Propriétés et Distributions

De manière trés générale, sous sa forme actuelle introduite en 1937 par Paul Lèvy, la ***fonction caractéristique*** *(**FC**) d'une variable aléatoire est la transformée de fourier de sa probabilité image. Dans ce chapitre, nous donnons la définition et les propriétés générale de la* ***fonction caractéristique****.*

1.1 Généralités

Définition 1.1.1 *Soit μ une mesure de probabilité sur $\mathbb{R}$. La transformée de Fourier de la mesure μ est la fonction définie pour tout $t \in \mathbb{R}$ par*

$$\mathcal{F}_{\mu}(t) = \int_{\mathbb{R}} e^{itx} \, d\mu(x).$$

La fonction $\mathcal{F}_{\mu}$ est définie pour tout $t \in \mathbb{R}$,car $\mid \exp itx \mid \leq 1$ et $\int 1 d\mu = 1$.

Définition 1.1.2 *Soit X une varaible aléatoire (v.a) réelle. La **FC** de X est la transformée* *de Fourier de la mesure P_X ;c'est la fonction définie pour tout $t \in \mathbb{R}$ par :*

$$\phi_X(t) = \mathcal{F}_{P_X}(t) = \int_{\mathbb{R}} e^{itx}\ dP_X(x) = E\left(e^{itx}\right). \tag{1.1}$$

Remarque 1.1.1 *Soit P de densité f par rapport à la mesure de Lebesgue λ. Par extension , on appelle transformée de f la quantité :*

$$\phi_f(t) = \int_{\mathbb{R}} e^{itx}\ f(x)\, d\lambda(x).$$

Il en est de même si f est une application intégrable à valeurs réelles.

Remarque 1.1.2 *Sous réserve d'existence, on montre aisement en intégrant par partie que*

$$\phi_{f^{(K)}}(t) = (-1)^K (it)^K \phi_f(t), \qquad \text{pour } K \geq 1.$$

La définition des FCs se généralise au cas des v.a. vectorielles.

Définition 1.1.3 *Soit X un vecteur aléatoire $(\Omega, A, P) \to (\mathbb{R}^p, R^p)$; on appelle **FC** de X, la transformée de Fourier de P_X :*

$$\phi_X(t) = \phi_{P_X}(t) = \int e^{it^t x} dP_X(x) = E\left(e^{it^t X}\right).$$

avec des notations évidentes, on a : $\phi_X(t_1, ..., t_P) = Ee^{\left(i\sum_{j=1}^p t_j X_j\right)}$.

En particulier, si X est une v.a réelle définie sur (Ω, A, P) :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \phi_X(t) = E\left(e^{itX}\right) = \int_{\mathbb{R}} e^{itX}\ dP_X(x).$$

Remarque 1.1.3 *$Y = t^t X$ est une v.a.réelle dont la **FC** est :$\phi_Y(s) = E\left(e^{isY}\right) = E\left(e^{ist^t X}\right)$. En particulier, la **FC** de X vérifie : $\phi_X(t) = \phi_{t^t X}(1)$.*

Exemple 1.1.1 a) *Soit X une v.a qui stuit une loi uniforme sur $[a,b]$, noté $X \rightsquigarrow U_{[a,b]}$. Sa FC est donnée par :*

$$\phi_X(t) = \int_a^b e^{itx}\ f(x)\,dx = \frac{1}{it(b-a)}\left[e^{itx}\right]_a^b = \frac{e^{itb}\ - e^{ita}}{it(b-a)}.$$

b) *Soit X une v.a à valeurs dans $(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}))$, alors*

$$\phi_X(t) = \sum_{x\in\mathbb{N}} e^{ita}\ P\{X = x\}, t \in \mathbb{R}.$$

Ainsi, si suit la loi de Poisson de paramètre $\lambda : X \rightsquigarrow P(\lambda)$, alors

$$\begin{aligned}\phi_X(t) &= \sum_{x=0}^{\infty} e^{itx}\ \frac{\lambda^x e^{-\lambda}}{x!} = e^{-\lambda}\ \sum_{x=0}^{\infty} \frac{\left(\lambda e^{it}\right)^x}{x!} = e^{-\lambda}\ e^{\lambda e^{it}} \\ &= e^{\lambda\left(e^{it}\ -1\right)}.\end{aligned}$$

Remarque 1.1.4 *Si la loi de X se décompose en une somme $P_X = \mu + \nu$ d'une mesure discrète $\mu = \sum p_k \delta_{x_k}$ et d'une mesure ν de densité f, alors :*

$$\phi_X(t) = \mathcal{F}_\mu(t) + \mathcal{F}_\nu(t) = \sum p_k e^{itx_k}\ + \int f(x)\,e^{itx}\ dx.$$

Prenons par exemple une v.a X à valeurs dans l'intervalle $]0,+\infty[$, qui a pour densité $f_X(x) = e^{-x} 1_{]0,+\infty[}(x)$. Soit la v.a tronquée $X_a = \min(X,a)$ a pour loi :

$$P_{X_a} = e^{-a}\ \delta_a + \mu\ , \qquad a \geq 0$$

*où la mesure μ, admet pour densité la fonction $x \rightarrow e^{-x} 1_{]0,+\infty[}(x)$ .La **fonction caractéristique** de X_a est donc :*

$$\phi_{X_a}(t) = e^{-a}\ e^{iat}\ + \int_0^a e^{-x}\ e^{ixt}\ dt\ .$$

1.1.1 Cas particulier : la fonction génératrice

Soit X une v.a.r discrète à valeurs non négatives ; on appelle fonction génératrice de X la fonction :

$$G_X(t) = E\left(t^X\right) = \sum_{x \in N} t^x P(X = x),$$

définie pour tout $t \in \mathbb{C}, \mid t \mid \leq 1$.

On a $\mid t^X P(X = x) \mid \leq \mid t \mid^X$, et la série de terme général $t^X P(X = x)$ est donc absolument et uniformément convergente pour t appartenant au disque unité.

La définition de G_X revient à remplacer formellement $\exp it$ par t dans la fonction caractéristique de X :

$$\phi_X(t) = G_X\left(e^{it}\right).$$

En pratique, néanmoins, les utilisations de $G_X(t)$ seront faites avec t réel, $-1 \leq t \leq 1$. On remarque en outre que $G_X(1) = 1$.

Exemple 1.1.2 ***a)*** *Si $X \rightsquigarrow G(P)$:*

$$G_X(t) = \sum_{x=1}^{\infty} t^x p q^{x-1} = \frac{pt}{1 - qt}.$$
$$\phi_X(t) = \frac{pe^{it}}{1 - qe^{it}}.$$

b) *Si $X \rightsquigarrow B(n, p)$:*

$$G_X(t) = \sum_{x=0}^{\infty} t^x C_n^x p^x q^{n-x} = \sum_{x=0}^{\infty} C_n^x (tp)^x q^{n-x} = (tp + q)^n.$$
$$\phi_X(t) = \left(e^{it}\ p + q\right)^n.$$

1.1.2 Propriétés

Théorème 1.1.1 *La fonction ϕ est une **FC** si et seulement si elle possède les propriétés suivantes :*

a) *$\phi(0) = 1$, et $\mid \phi(t) \mid \leq 1$ pour tout t.*

b) *ϕ est uniformément continue sur $\mathbb{R}$.*

c) *ϕ est définie positive, c'est-à-dire :*

$$\sum_{\substack{k=1\\l=1}}^{n} \phi_X(t_k - t_l) z_k \bar{z}_l \geq 0,$$

pour tout $t_1, ..., t_n$ réels, et tout $z_1, ..., z_n$ complexes.

Preuve. a) *Soit ϕ **une FC**. Alors $\phi(0) = E(1) = 1$, et $\mid \phi(t) \mid \leq E(\mid e^{itx} \mid) = 1$.*

b) *On a également,*

$$\mid \phi(t+s) - \phi(t) = \mid E\left(e^{i(t+s)X} - e^{itX}\right) \mid \leq E\left(\mid e^{itX}\left(e^{isX} - 1\right) \mid\right) = E\left(\mid e^{isX} - 1 \mid\right).$$

Soit $y(s) = \mid e^{isX} - 1 \mid$; où $0 \leq y \leq 2$ et $\lim_{s \to 0} y(s) = 0$. Par conséquent, le théorème de convergence dominée implique que $\lim_{s \to 0} E(y(s)) = 0$, et la continuité uniforme est établie.

c) *Pour la positivité, il suffit d'observer que :*

$$\sum_{\substack{k=1\\l=1}}^{n} \phi_X(t_k - t_l) z_k \bar{z}_l = E\left(\sum_{\substack{k=1\\l=1}}^{n} z_l e^{itlX} \overline{z}_k e^{-it_k X}\right) = E\left(\mid \sum_{l=1}^{n} z_l e^{it_l X} \mid^2\right) \geq 0.$$

Nous ne démontrerons pas la réciproque (Théorème de Bochner) ici. ■

Proposition 1.1.1 *Pour tout t et toute variable aléatoire X, on a :*

$$\phi_X(-t) = \overline{\phi_X(t)}.$$

Si la distribution de X est symétrique par rapport à l'origine, ϕ_X est réelle et si X est à une dimension, ϕ_X est paire.

Preuve. *On a*

$$\phi_X(-t) = E\left(e^{-itX}\right) = E\left(\overline{e^{itX}}\right) = \overline{E\left(e^{itX}\right)} = \overline{\phi_X(t)}.$$

En outre si la distribution de X *est symétrique on a :*

$$\int f(x)\,\mu_X(dx) = \int f(-x)\,\mu_X(dx) \qquad \text{pour toute fonction } f\mu_X\text{-intégrable,}$$

d'où,

$$\phi_X(-t) = \int e^{-itx}\mu_X(dx) = \int e^{itx}\mu_X(dx) = \phi_X(t),$$

ce qui entraîne

$$\phi_X(-t) = \phi_X(t) = \overline{\phi_X(t)}.$$

D'où les conclusions de la proposition. ■

Remarque 1.1.5 *On déduit évidemment de ce qui précède la partie réelle (Re) et imaginaire (Im) de* ϕ_X :

$$\begin{aligned} Re(\phi_X(t)) &= \frac{1}{2}(\phi_X(-t) + \phi_X(t)) \;\;,\;. \text{ est une fonction paire.} \\ Im(\phi_X(t)) &= \frac{1}{2}(\phi_X(-t) - \phi_X(t)) \;\;, \quad \text{est une fonction impaire.} \end{aligned}$$

Théorème 1.1.2 *On a* $\phi_{aX+b}(t) = e^{itb}\phi_X(at)$. *En effet,*

$$\phi_{aX+b}(t) = E\left(e^{it(aX+b)}\right) = e^{itb}\; E\left(e^{i(at)X}\right).$$

Théorème 1.1.3 (Injectivité) *Si* P *et* Q *sont deux probabilités définies sur* $\left(\mathbb{R}^P, R^P\right)$:

$$\phi_P = \phi_Q \qquad \Longleftrightarrow \qquad P = Q$$

Si X et Y sont deux vecteurs aléatoires : $(\Omega, A, P) \rightarrow \left(\mathbb{R}^P, R^P\right)$:

$$\phi_X = \phi_Y \qquad \Longleftrightarrow \qquad P^X = P^Y$$

Théorème 1.1.4 (Inversion) *Si X est un vecteur aléatoire à valeurs dans $\left(\mathbb{R}^P, R^P\right)$ de **FC** $\phi(t)$ intégrable par rapport à λ_P,la loi de X possède une densité continue $f(x)$ définie par :*

$$f(x) = (2\pi)^{-P} \int_{\mathbb{R}^P} e^{-it^t x} \phi(t)\, d\lambda_P(t).$$

En particulier, pour une v.a.réelle ;

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-itx} \quad \phi(t)\, dt.$$

Lemme 1.1.1 *Soit X une v.a réelle. Pour tout $b \in \mathbb{R}$, on a :*

$$P(X = b) = \lim_{T \to \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{+T} e^{-ibt} \phi_X(t)\, dt.$$

Théorème 1.1.5 *Soit $\{x_1, ..., x_n, ...\}$ ensemble des éventuels points de discontinuité de la fonction de répartition de X donc*

$$\lim_{T \to \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{+T} \mid \phi_X(t) \mid^2 dt = \sum_{n \geq 1} (P(X = x_n))^2.$$

Preuve. La preuve est donnée dans [5]. ■

Corollaire 1.1.1 *La **FC** de lois continues n'est pas périodique (on remarque sa d'aprés les courbes).*

Théorème 1.1.6 *Soit a_i tel que : $a_i \geq 0$ et $\sum_{i=1}^{n} a_i = 1$, et $f_i(t)$, $i = 1, ..., n$ sont des*

fonctins caractéristiques, *alors*

$$g(t) = \sum_{i=1}^{n} a_i f_i(t),$$

*est une **FC**.*

Théorème 1.1.7 (Bochner, 1932) *Une condition nécessaire et suffisante pour qu'une fonction $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ soit une **FC** est que soient vérifiées :*

***a**) $\phi(t)$ continue.*

***b**) $\forall\ N\ , \forall (t_1, ..., t_N) \in \mathbb{R}^N, \forall (z_1, ..., z_N) \in \mathbb{C}^N$:*

$$\sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{N} \phi(t_i - t_j) z_i z_j,$$

est réeelle et non négative.

***c**) $\phi(0) = 1$.*

Le théorème de Bochner est d'une application peu aisée, on pourra lui préférer une condition suffisante, par exemple :

Théorème 1.1.8 (Polya, 1934) *Soit $\phi(t)$ une fonction continue ,définie pour tout t réel. Si $\phi(t)$ satisfait aux conditions :*

***a**) $\phi(0) = 1$.*

***b**) $\phi(-t) = \phi(t)$.*

***c**) $-\phi(t)$ est convexe pour $t > 0$.*

***d**) $\lim_{t\to\infty} \phi(t) = 0$.*

*Alors ϕ est la **FC** d'une v.a.r X absolument continue.*

Les **fonctions caractéristiques** sont aussi très utiles pour étudier la convergence de v.a.

Théorème 1.1.9 (Paul Lévy, 1937) ***a**) Si la suite (μ_n) de mesures bornées converge étroitement vers la mesure bornée μ, la suite $\phi_{\mu_n}(t)$ converge vers $\phi_\mu(t)$ pour tout $t \in \mathbb{R}$.*

b) *Réciproquement si des* ***FC's*** ϕ_{μ_n} *convergent simplement sur* $\mathbb{R}$ *vers une fonction* ϕ *continue en* 0, ϕ *est la* ***FC*** *d'une mesure bornée* μ *telle que* (μ_n) *converge étroitement vers* μ.

c) *Dans les 2 hypothèses précédentes la convergence de* $(\phi_{\mu_n})_{n\in\mathbb{N}}$ *vers* ϕ_μ *est uniforme sur tout intervalle borné* $[-T, +T]$.

1.1.3 *Fonctions caractéristiques des variables marginales et conditionnelles*

La **FC** de la variable marginale X_1, s'obtient àpartir de celle de la variable X en fisant $t_2 = ...t_n = 0$:

$$\phi_{X_1}(t_1) = E\left(e^{it_1X_1}\right) = \phi_X(t_1, 0, ..., 0).$$

Plus généralement, la **FC** de la variable marginale $X^{(p)}$, projection de X sur l'espace des p premiers axes de coordonnées, est :

$$\phi_{X^{(p)}}(t_1, ..., t_p) = \phi_X(t_1, ..., t_p, 0, ..., 0).$$

Soit un couple de variables aléatoires X et Y que nous supposons absolument cotinu pour fixer les idées. La **FC** du couple est :

$$\phi_{X,Y}(t, s) = E\left[e^{i(Xt+Ys)}\right] = E_x\left[\exp itX\left(E_{y/x}\exp isY\right)\right],$$

soit :

$$\phi_{X,Y}(t, s) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{itx}\ \phi_{Y/X=x}(s)\, f(x_\bullet)\, dx,$$

en désignant par $\phi_{y/X=x}(v)$ la **FC** de la variable aléatoire conditionnelle $Y/X=x$. D'où en appliquant le théorème de réciprocité de fourier :

$$\phi_{Y/X=x}(s)\, f(x_{\bullet}) = \frac{1}{2\pi}\lim_{A\to+\infty}\int_{-A}^{+A} e^{-itx}\ \phi_{X,Y}(t,s)\, dt.$$

Par ailleurs, en appliquant ce même théorème :

$$f(x_{\bullet}) = \frac{1}{2\pi}\lim_{A\to+\infty}\int_{-A}^{+A} e^{-itx}\ \phi_{X,Y}(t,0)\, dt.$$

D'où la **FC** de la variable conditionnelle $Y|X=x$:

$$\phi_{Y|X=x}(s) = \frac{\frac{1}{2\pi}\lim_{A\to+\infty}\int_{-A}^{+A} e^{-itx}\ \phi_{X,Y}(t,s)\, dt}{\frac{1}{2\pi}\lim_{A\to+\infty}\int_{-A}^{+A} e^{-itx}\ \phi_{X,Y}(t,0)\, dt}.$$

Ce résultat vaut encore pour un couple de variables aléatoires discrètes.

1.2 Exemple de loi définie par sa fonction caractéristique

Nous allons utiliser le théorème 1.1.4 pour engendrer une famille de lois de probabilités définie par sa **FC.** En 1925 Paul Lévy définit la loi appelée par la suite loi de Paul Lévy par l'équation (1.2) dans la définition suivante :

Définition 1.2.1 *Une v a r X est dite avoire une distribution stable si et seulement si il existe quatre paramètres uniques :*$0<\alpha\leq 2, -1\leq\beta\leq 1, \gamma\geq 0$ *et un réel* δ *tels que :*

$$\phi_X(t) = \begin{cases} \exp\left(-\gamma^{\alpha}\mid t\mid^{\alpha}\left(1-i\beta sign(t)\tan\frac{\alpha\pi}{2}\right)+i\delta t\right) & si\ \alpha\neq 1, \\ \exp\left(-\gamma^{\alpha}\mid t\mid^{\alpha}\left(1+i\beta\frac{2}{\pi}sign(t)\log\mid t\mid\right)+i\delta t\right) & si\ \alpha=1, \end{cases} \tag{1.2}$$

$$\text{où} \qquad sign(t) = \begin{cases} 1 & si\ t > 0, \\ 0 & si\ t = 0, \\ -1 & si\ t < 0. \end{cases}$$

*Une variable aléatoire réelle qui a cette expression pour sa **FC** est notée* $X \sim S_\alpha(\gamma, \beta, \delta)$.

Mais cette represéntation de la **FC,** qui s'appelle *paramètrisation standard*, a le désavantage de ne pas être continue en ses paramètres. En fait, il y a discontinuité en les points où $\alpha = 1$ et $\beta = 0$. Par aiilleurs il existe d'autre paramètrisations de la **FC** plus adaptées aux différentes problèmes. Ici, on fait référence à deux paramètrisations proposées par *Zolotarev :*

$$\phi_X(t) = \begin{cases} \exp\left(-\gamma^\alpha \mid t \mid^\alpha \left\{1 + i\beta sign(t) \tan\frac{\alpha\pi}{2}\left[(\gamma \mid t \mid)^{1-\alpha} - 1\right] + i\delta_0 t\right\}\right), & \text{si } \alpha \neq 1, \\ \exp\left(-\gamma \mid t \mid \left\{1 + i\beta\frac{2}{\pi} sign(t) \log(\gamma \mid t \mid)\right\} + i\delta_0 t\right), & \text{si } \alpha = 1. \end{cases} \tag{1.3}$$

Cette representation S^0 se note $X \sim S_\alpha^0(\gamma, \beta, \delta_0)$. Les paramètres α, β et γ de la paramètrisation standard, mais δ et δ_0 sont reliés par

$$\delta = \begin{cases} \delta_0 - \gamma\beta\tan(\alpha\pi/2) & \text{pour } \alpha \neq 1, \\ \delta_0 - \gamma\beta\left(\frac{2}{\pi}\right)\log\gamma & \text{pour } \alpha = 1. \end{cases}$$

Cette paramètresation est très importante parce que la **FC**, la densité et la fonction de répartition sont continues par rapport aux quatre paramètres. Donc, elle est bien conditionnées numériquement pour le calcul. Pour $\beta = 0$, les deux représentations sont équivalentes, cependant dans le cas général la représentation S^0 est préféré.

Une autre paramètrisation S^1 est donnée par

$$\phi_X(t) = \begin{cases} \exp\left(-\gamma_2^\alpha \mid t \mid^\alpha \exp\left\{-i\beta_2 sign(t)\frac{\pi}{2}K(\alpha)\right\} + i\delta t\right), & \text{si } \alpha \neq 1, \\ \exp\left(-\gamma_2 \mid t \mid \left\{\frac{\pi}{2} + i\beta_2 sign(t) \log \mid t \mid\right\} + i\delta t\right), & \text{si } \alpha = 1, \end{cases} \tag{1.4}$$

où

$$K(\alpha) = \alpha - 1 + sign(1-\alpha) = \begin{cases} \alpha & \text{si } \alpha < 1, \\ \alpha - 2 & \text{si } \alpha > 1. \end{cases}$$

Les paramètres α et δ sont les mêmes que pour la paramètrisation standard, les autres paramètres satisfont les relations suivantes

$$\begin{cases} \tan\left(\beta_2 \frac{\pi K(\alpha)}{2}\right) = \beta \tan \frac{\alpha\pi}{2} & \text{si } \alpha \neq 1, \\ \beta_2 = \beta & \text{si } \alpha = 1. \end{cases}$$

Et

$$\begin{cases} \gamma_2 = \gamma \left(1 + \beta^2 \tan^2 \frac{\alpha\pi}{2}\right)^{1/2\alpha} & \text{si } \alpha \neq 1, \\ \gamma_2 = \frac{2}{\pi}\gamma & \text{si } \alpha = 1. \end{cases}$$

Nous donnons ici l'interprétation des quatre paramètres :

♦ Le paramètre α est appelé *exposant caractéristique* ou index de stabilité. Il détermine la vitesse de décroissance de la queue de distribution, c'est-'a-dire que plus α tend vers 0, plus lourde est la queue.

♦Le paramètre β est le *paramètre d'asymétrie*. Lorsque $\beta = 1$ la distribution de X est dite asymétrique (totalement asymétrique) à droite et lorsque $\beta = -1$ on dit que la distribution de X est asymétrique (totalement asymétrique) à gauche. Quand $\beta = 0$, la distribution de X est symétrique par rapport à δ.

♦Le paramètre δ est le *paramètre de position*. En terme de **FC**, une distribution est symétrique autour de 0 si et seulement si sa **FC** est réelle.

♦Le paramètre γ est le *paramètre d'échelle*.

Remarque 1.2.1 *On remarque d'après l'équation (1.2) que :*

a) *pour* $\alpha = 2,\ \beta = 0,\ \gamma = \frac{1}{2},\ \delta = 0 : \log\phi(t) = -\frac{t^2}{2},\ \ \phi(t) = e^{-t^2/2}$.*La loi de Paul Lévy se ramène alors à la loi* $N(0,1)$.

b) *pour* $\alpha = 1,\ \beta = 0,\ \gamma = 1,\ \delta = 0 : \log\phi(t) = -\mid t \mid$.*On retrouve la loi de Cauchy.*

c) *La loi normale* $N(m,\gamma^2)$ *est une loi* $S_2(\beta, \frac{\gamma^2}{2}, m)$ *(et rèciproquement une loi* $S_2(\beta,\gamma,\mu)$

est une loi normale $N(\mu, 2\gamma^2)$.

d) *La loi de Cauchy généralisée de densité* $f(x) = \frac{1}{\pi} \frac{\gamma}{\gamma^2 + (x-m)^2}$ *est une loi* $S_1(0, \gamma, m)$.

e) *La loi de Poisson* $P(\lambda)$ *n'est pas stable.*

Remarque 1.2.2 *Le principal inconvénient est que les densités des lois stables sont inconnues sauf dans trois cas :*

a) *La distribution gaussienne* $S_2(0, \gamma, \mu)$ *où* $f(x) = \frac{1}{2\gamma\sqrt{\pi}} \exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{4\gamma^2}\right)$.

b) *La distribution de Cauchy* $S_1(0, \gamma, \mu)$ *où* $f(x) = \frac{2\gamma}{\pi\left((x-\mu)^2 + 4\gamma^2\right)}$.

c) *La distribution de Lévy* $S_{\frac{1}{2}}(1, \gamma, \mu)$ *où* $f(x) = \left(\frac{\gamma}{2\pi}\right)^{\frac{1}{2}} (x-\mu)^{-\frac{3}{2}} \exp\left(-\frac{\gamma}{2(x-\mu)}\right) \times 1_{]\mu, +\infty[}$.

Remarque 1.2.3 *Pour* $\alpha \neq 1$, *nous avons l'équivalence suivante :*

$$X \text{ suit une loi } S_\alpha(\beta, \gamma, \mu) \iff Y = \frac{X-\mu}{\gamma^{\frac{1}{\alpha}}} \text{ suit une loi } S_\alpha(\beta, 1, 0).$$

En effet, d'aprés le théorème 1.1.2 on a :

$$\phi_{aX+b}(t) = E\left(e^{it(aX+b)}\right) = e^{itb}\phi_X(at).$$

Si on pose $a = \frac{1}{\gamma^{\frac{1}{\alpha}}}$ *et* $b = -\frac{\mu}{\gamma^{\frac{1}{\alpha}}}$ *nous avons donc :*

$$\phi_Y(t) = \exp\left(-\frac{i\mu t}{\gamma^{\frac{1}{\alpha}}}\right)\phi_X\left(\frac{t}{\gamma^{\frac{1}{\alpha}}}\right)$$
$$\phi_Y(t) = \exp\left(-\frac{i\mu t}{\gamma^{\frac{1}{\alpha}}}\right)\exp\left\{-\frac{i\mu t}{\gamma^{\frac{1}{\alpha}}} - \gamma \mid \frac{t}{\gamma^{\frac{1}{\alpha}}} \mid^\alpha \left[1 - i\beta.sign\left(\frac{t}{\gamma^{\frac{1}{\alpha}}}\right).\tan\frac{\alpha\pi}{2}\right]\right\}.$$

Or $sign\left(\frac{t}{\gamma^{\frac{1}{\alpha}}}\right) = sign(t)$ *car* $0 < \gamma$ *donc :*

$$\phi_Y(t) = \exp\left\{- \mid t \mid^\alpha \left[1 - i\beta.sign(t).\tan\frac{\alpha\pi}{2}\right]\right\},$$

qui est bien la forme de la ***fonction caractéristique*** *d'une loi* $S_\alpha(0, \beta, 1)$.

1.2.1 Détermination de la densité

Les conditions du théorème 1.1.4 étant réunies, en notant $f(x,\alpha,\beta,\gamma,\delta)$ la densité de la v.a de **FC** ϕ de l'équation (1.2) :

$$f(x,\alpha,\beta,\gamma,\delta) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-itx} \quad \phi(t)\,dt.$$

En développant , on a :

$$\begin{aligned} f(x,\alpha,\beta,\gamma,\delta) &= \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} e^{i[(\delta-x)t-\beta\gamma|t|^{\alpha} sign(t) W[t,\alpha]\ ]} e^{-\gamma|t|^{\alpha}} dt \\ &= \frac{1}{\pi}\int_{0}^{+\infty} \cos\left[(\delta-x)\,t-\beta\gamma t^{\alpha}W[t,\alpha]\right] e^{-\gamma t^{\alpha}} dt, \end{aligned}$$

où :

$$W[t,\alpha] = \begin{cases} \tan\frac{\alpha\pi}{2} & \text{pour } \alpha \neq 1 \\ \frac{2}{\pi}\log\mid t\mid & \text{pour } \alpha = 1 \end{cases}$$

pour $\alpha \neq 1$, on obtient donc :

$$f(x,\alpha,\beta,\gamma,\delta) = \frac{1}{\pi}\int_{0}^{+\infty} \cos\left[(x-\delta)\,t+\beta\gamma t^{\alpha}\tan\frac{\alpha\pi}{2}\right] e^{-\gamma t^{\alpha}} dt. \tag{1.5}$$

1.2.2 Particularités de la densité

La densité donnée par (1.5) vérifié :

- ▶ $f(x+\delta,\alpha,\beta,\gamma,\delta) = f(x,\alpha,\beta,\gamma,0)$; on peut prendre $\delta = 0$.
- ▶ $f(x,\alpha,\beta,\gamma) = f(-x,\alpha,-\beta,\gamma)$.
- ▶ $f(x,\alpha,\beta,\gamma) = \gamma^{-1/\alpha} f\left(\frac{x}{\gamma^{1/\alpha}},\alpha,\beta,1\right)$.
- ▶ $f(x,\alpha,\beta,\gamma) = \beta^{-1/\alpha} f\left(\frac{x}{\beta^{1/\alpha}},\alpha,\beta,\gamma/\beta\right)$.
- ▶ $f(x,\alpha,\beta,\gamma) = (\beta\gamma)^{-1/\alpha} f\left(x/(\beta\gamma)^{1/\alpha},\alpha,\beta,1/\beta\right)$.

On peut standardiser la loi de Lèvy en prenant $\delta = 0$ et $\gamma = 1$. La densité (1.5) est alors :

$$f(x, \alpha, \beta) = \frac{1}{\pi} \int_0^{+\infty} \cos\left(xt + \beta t^\alpha \tan \frac{\alpha\pi}{2}\right) e^{-t^\alpha} dt.$$

Chapitre 2

Fonction caractéristique de lois des probabilités usuelles

Nous rappelons dans ce deuxième chapitre, les ***fonctions caractéristiques*** *de quelques lois de probabilités usuelles (discrètes et continues). Ainsi que leurs représentation graphique, par l'intermédière du logociel statistique R.*

2.1 Fonction caractéristique des lois discrèts

2.1.1 Loi uniforme discrète

Si X est à valeurs sur $\{1, ..., n\}$ et uniforme, alors sa **FC** est :

$$\phi_X(t) = \sum_{x=1}^{n} \frac{e^{itx}}{n} = \frac{1}{n} \sum_{x=1}^{n} (e^{it})^x = \frac{e^{it}}{n} \sum_{x=0}^{n-1} (e^{it})^x = \frac{e^{it}}{n} \frac{1 - e^{itn}}{1 - e^{it}}. \tag{2.1}$$

Sa représentation graphique est la suivante :

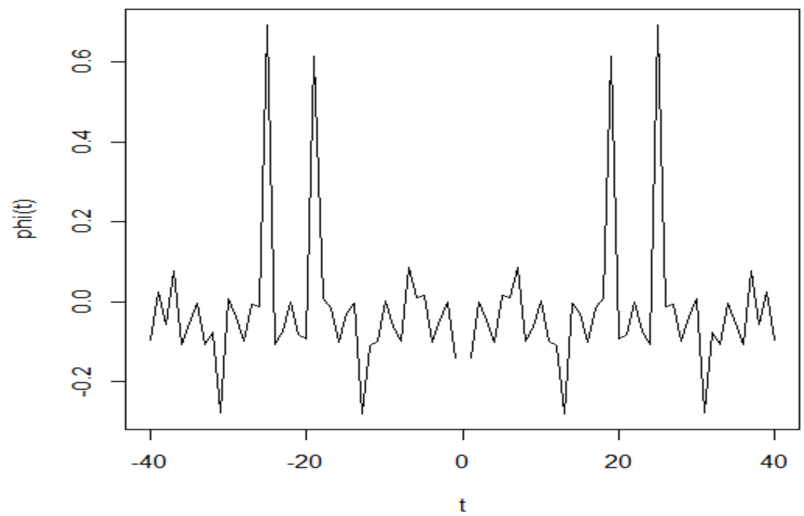


FIG. 2.1 – **Fonction caractéristique** de loi uniforme ($n = 10$)

2.1.2 Loi de Dirac

On établit immédiatement, pour une v.a de loi de Dirac :

$$\phi_{\delta_a}(t) = e^{ita}. \tag{2.2}$$

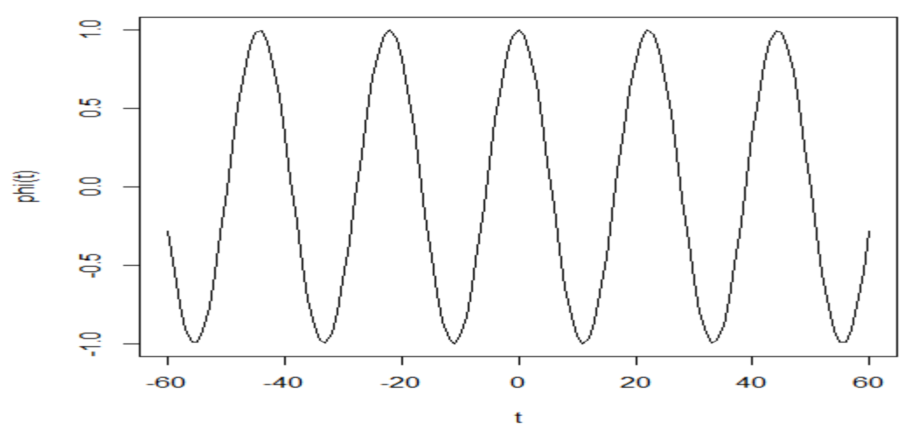


FIG. 2.2 – **Fonction caractéristique** de Dirac (masse de Dirac en 6)

2.1.3 Loi géométrique

Si X une v.a de loi géométrique notée $G(p)$, $\quad p \in]0,1[$. Alors,

$$\phi_X(t) = (pe^{it}/1 - qe^{it}) \qquad ,p \in]0,1[, q = 1 - p. \tag{2.3}$$

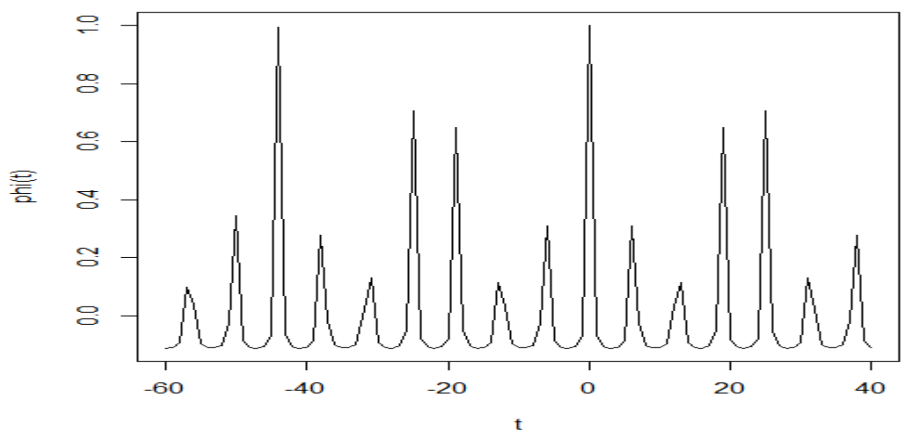


FIG. 2.3 – **Fonction caractéristique** de loi $G\,(0.2)$

2.1.4 Loi de Bernoulli

Soit X une v.a de loi de Bernoulli de paramètre $p \in]0,1[$: $X \tilde{} B(p)$, alors

$$\phi_X(t) = p.\exp it + q.\exp it0 = p\exp it + q = pe^{it} + q. \tag{2.4}$$

2.1.5 Loi binomiale

Soit X une v.a de loi de binomiale de paramètres $n \in \mathbb{N}^*$ et $p \in]0,1[$: $X \to B(n,p)$, donc

$$\phi_X(t) = \sum_{x=0}^{n} e^{itx}\ C_n^x p^x (1-p)^{n-x} = \sum_{x=0}^{n} C_n^x (pe^{it})^x q^{n-x} = \left(pe^{it} + q\right)^n. \tag{2.5}$$

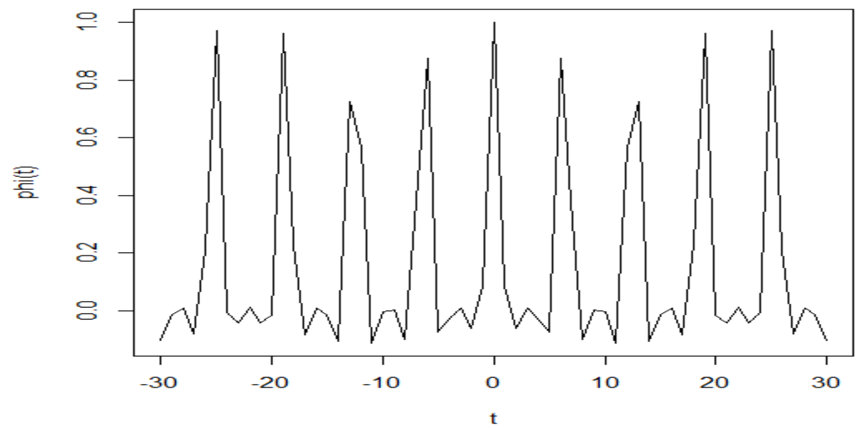


FIG. 2.4 – **Fonction caractéristique** de loi $B(5, 0.3)$

2.1.6 Loi de Poisson

Considérons une v.a de loi de Poisson de paramètre λ : $X\tilde{}P(\lambda)$. La **FC** de X est donnée par :

$$\phi_X(t) = \sum_{x=0}^{\infty} e^{itx} \ \frac{\lambda^x e^{-\lambda}}{x!} = e^{-\lambda} \sum_{x=0}^{\infty} \frac{(\lambda e^{it})^x}{x!} = e^{-\lambda} e^{\lambda e^{it}} = e^{\lambda(e^{it}-1)}. \qquad (2.6)$$

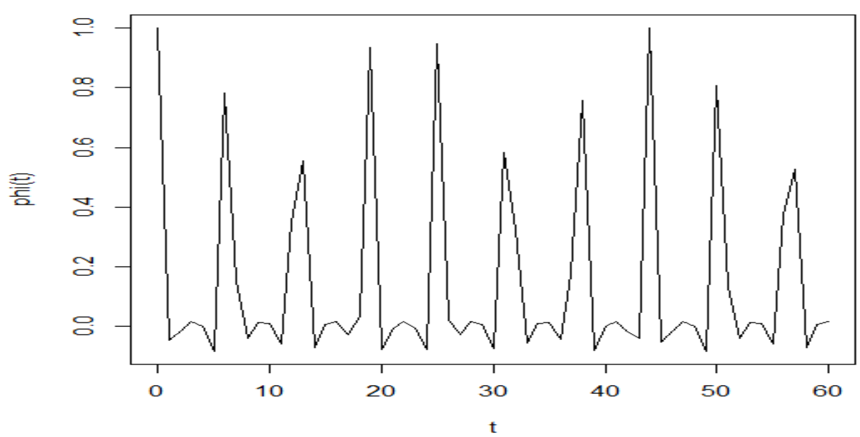


FIG. 2.5 – **Fonction caractéristique** d'une loi $P(6)$

2.1.7 Loi multinomiale

Soit $X = (N_1, ..., N_k)$ un v.a de dimension k de loi multinomiale $M(n; p_1, ..., p_k)$. La **FC** de la v.a définie par

$$t^t X = \sum_{j=1}^{k} t_j N_j,$$

est

$$\phi_{t^t X}(s) = \sum \frac{n!}{n_1!...n_k!} p_1^{n_1}...p_k^{n_k} e^{is\sum_{j=1}^{k} t_j n_j},$$

où la somme porte sur tous les $k-$uples $(n_1, ..., n_k)$ vérifiant $\sum_{j=1}^{k} n_j = n$,

$$\begin{aligned}\phi_{t^t X}(s) &= \sum \frac{n!}{n_1!...n_k!} (p_1 e^{ist_1})^{n_1}....(p_k e^{ist_k})^{n_k} \\ &= (\sum_{j=1}^{k} p_j e^{ist_j})^n.\end{aligned}$$

En $s = 1$

$$\phi_X(t) = (\sum_{j=1}^{k} p_j e^{it_j})^n. \tag{2.7}$$

2.2 Fonction caractéristique des lois continues

2.2.1 Loi exponentielle

Considérons une v.a X de loi Exponentielle de paramètre λ : $X\tilde{}\xi(\lambda)$. La **FC** de X est donnée par :

$$\phi_X(t) = \int_0^\infty e^{itx}\ \lambda e^{-\lambda x}\ dx = \int_0^\infty \lambda e^{-x(\lambda - it)}\ dx = \frac{\lambda}{\lambda - it}. \tag{2.8}$$

Sa représentation graphique est donnée comme suit

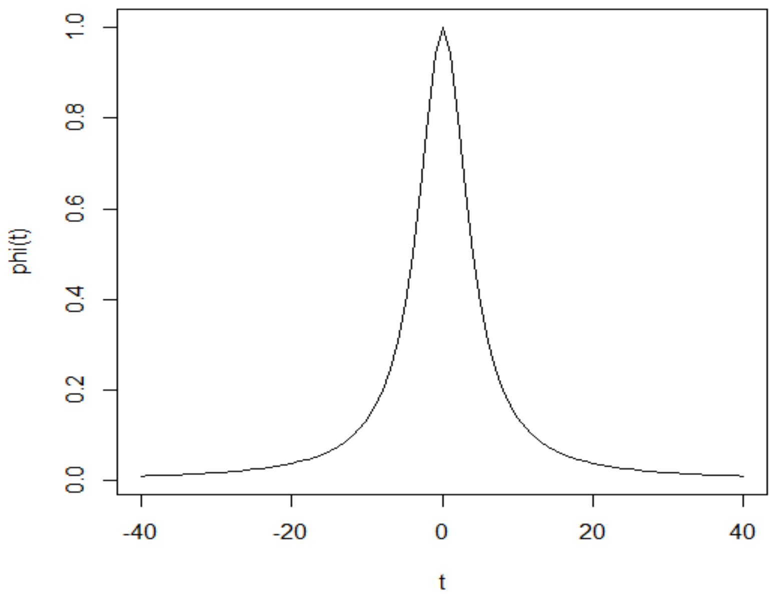


FIG. 2.6 – **Fonction caractéristique** de loi $\xi(4)$

2.2.2 Loi normale

Soit Y une v.a qui suit la loi Normale centrée et réduite $Y\tilde{}N(0,1)$. La **FC** de X est donnée par :

$$\begin{aligned}
\phi_Y(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{ity} e^{-y^2/2} \frac{dy}{\sqrt{2\pi}} = \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{y^2 - 2ity}{2}\right) \frac{dy}{\sqrt{2\pi}} \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{(y-it)^2 - (it)^2}{2}\right) \frac{dy}{\sqrt{2\pi}} = \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{(y-it)^2}{2}\right) e^{-t^2/2} \frac{dy}{\sqrt{2\pi}} \\
&= e^{-t^2/2} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{(y-it)^2}{2}\right) \frac{dy}{\sqrt{2\pi}},
\end{aligned}$$

En déduit que

$$\phi_Y(t) = \exp -t^2/2. \tag{2.9}$$

Car avec le changement de variable (complexe) $z = y - it$, on a :

$$\int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{(y-it)^2}{2}\right)\frac{dy}{\sqrt{2\pi}} = \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{z^2}{2}\right)\frac{dz}{\sqrt{2\pi}} = 1.$$

Considérons maintenant le cas générale de la la loi Normale de moyenne m et de variance σ^2 i.e., $X\tilde{}N(m,\sigma^2)$. Dans ce cas, il suffit de remarquer que $X = m + \sigma Y$, et la **FC** de X est définie comme suit :

$$\phi_X(t) = E(e^{it(m+\sigma Y)}) = e^{itm}\phi_Y(\sigma t) = e^{itm}e^{-t^2\sigma^2/2}.$$

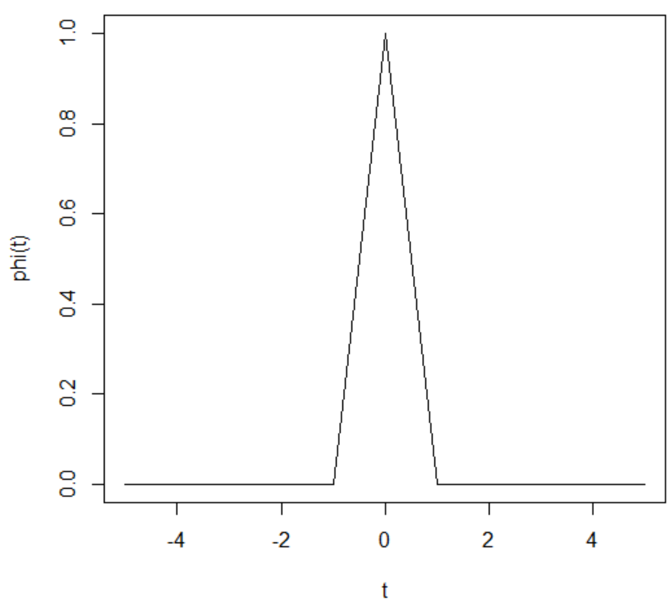


FIG. 2.7 – **Fonction caractéristique** de loi $N(2, 5)$

2.2.3 Loi de Cauchy

Si X est de densité $f(x) = \frac{a}{\pi(a^2+x^2)}$, $a \in \mathbb{R}_+^*$. On dit alors que X suit la loi de Cauchy de **FC** :

$$\phi_X(t) = \exp - \{a \mid t \mid\}, \qquad a \in \mathbb{R}_+^*. \tag{2.10}$$

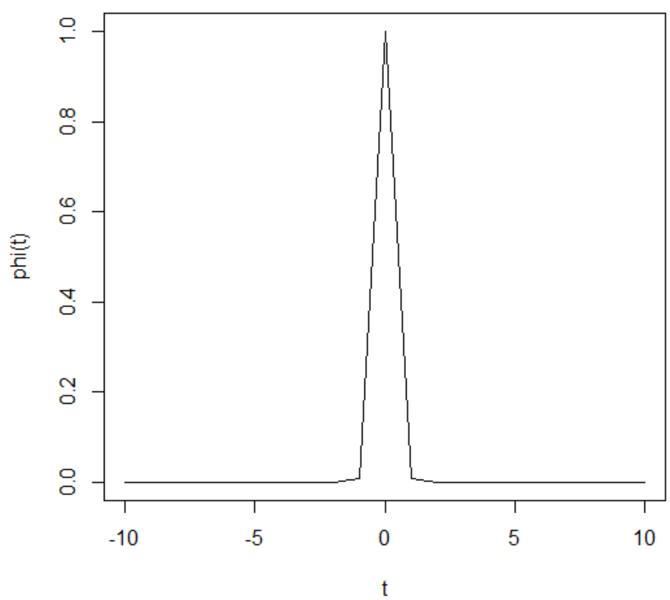


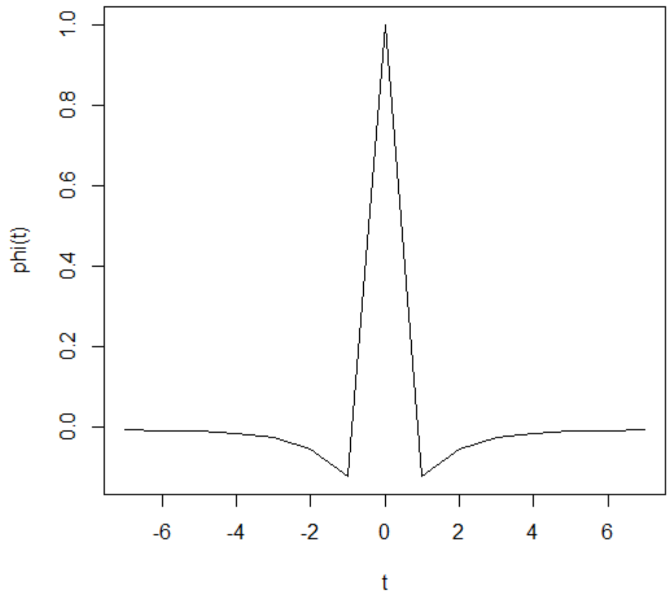
FIG. 2.8 – **Fonction caractéristique** de la loi de Cauchy $C(5)$

2.2.4 Loi du khi_deuX

Soit X une v.a qui suit la loi de khi-2, notée $X\tilde{}\mathcal{X}^2_{(n)}$. La **FC** de X est donnée par :

$$\phi_X(t) = \frac{1}{(1-2it)^{n/2}}. \tag{2.11}$$

deux



$_1 0.pdf$

FIG. 2.9 – **Fonction caractéristique** de la loi $\mathcal{X}^2_{(4)}$

2.2.5 Loi Gamma

Soit X une v.a de densité $f(x) = \frac{x^{\alpha-1}e^{-x/\beta}}{\Gamma(\alpha)\beta^{\alpha}}, \quad x > 0$. Dans ce cas, la v.a est dite de loi Gamma notée $\Gamma(\alpha, \beta)$, sa **FC** est définie comme suit :

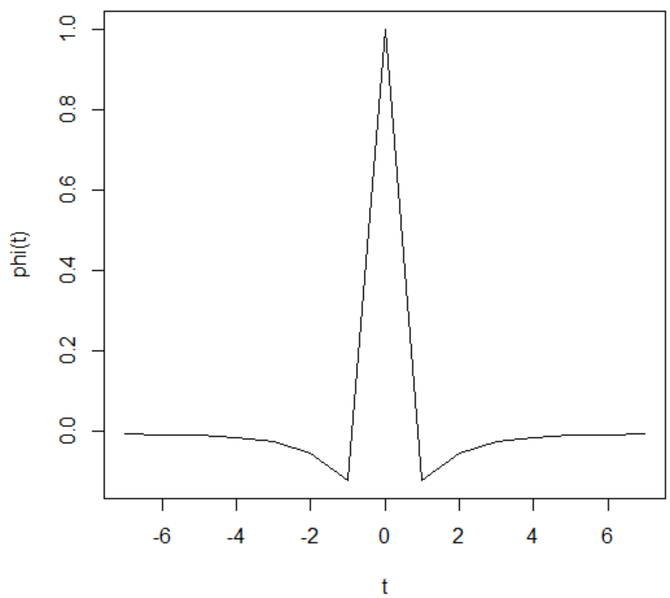
$$\begin{aligned} \phi_X(t) &= \int_0^{+\infty} \exp(itx) \frac{x^{\alpha-1}e^{-x/\beta}}{\Gamma(\alpha)\beta^{\alpha}} dx = \frac{1}{\Gamma(\alpha)\beta^{\alpha}} \int_0^{+\infty} \exp\left(itx - \frac{x}{\beta}\right) x^{\alpha-1} dx \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)\beta^{\alpha}} \int_0^{+\infty} \exp\{-x\left(\frac{1}{\beta} - it\right)\} x^{\alpha-1} dx = \frac{1}{\Gamma(\alpha)\beta^{\alpha}} \frac{\Gamma(\alpha)}{\left(\frac{1}{\beta} - it\right)^{\alpha}}, \end{aligned}$$

Alors,

$$\phi_X(t) = (1 - \beta it)^{-\alpha} \quad , \qquad \alpha \in \mathbb{N}^*, \beta \in \mathbb{R}^*_+. \tag{2.12}$$

elle est représentée graphiquement comme suit :

deux



$_1 1.pdf$

FIG. 2.10 – **Fonction caractéristique** de loi $\Gamma(3, 2.5)$

Loi de Laplace

Soit X la v.a de densité $f(x) = \frac{1}{2} \exp - \mid x \mid$, $x \in \mathbb{R}$. On dit alors que X suit la loi de Laplace, dont la **FC** est :

$$\begin{aligned}\phi_X(t) &= \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{0} e^{x(1+it)}\ dx + \frac{1}{2} \int_{0}^{+\infty} e^{-x(1-it)}\ dx \\ &= \frac{1}{2} \int_{0}^{+\infty} [e^{-x(1+it)} + e^{-x(1-it)}] dx = \int_{0}^{+\infty} \cos tx.e^{-x}\ dx.\end{aligned}$$

En particulier par intégration par parties :

$$\begin{aligned}\phi_X(t) &= [-e^{-x} \cos tx]_0^{\infty} - t \int_0^{\infty} \sin tx\ e^{-x}\ dx = 1 - t \int_0^{\infty} \sin tx.e^{-x}\ dx \\ &= 1 + t[e^{-x} \sin tx]_0^{+\infty} - t^2 \int_0^{+\infty} \cos tx.e^{-x}\ dx \\ &= 1 - t^2 \phi_X(t).\end{aligned}$$

D'où :

$$\phi_X(t) = \frac{1}{1+t^2}. \tag{2.13}$$

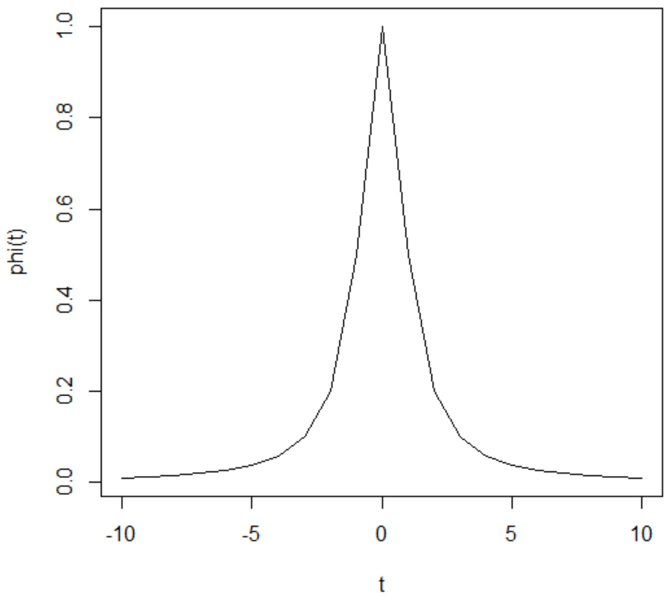


FIG. 2.11 – **Fonction caractéristique** de loi Laplace

Chapitre 3

Caractérisation de la fonction caractéristique

3.1 Applications de la FC

La **FC** est un outil de calcul de probabilités qui aide à établir un certain nombre de résultats. On en développera trois ci-dessous :

3.1.1 Caractérisation de l'indépendance de deux vecteurs aléatoires

Théorème 3.1.1 *Soient* X_1 *et* X_2 *deux vecteurs aléatoires à valeurs respectivement dans* $(\mathbb{R}^p, R^p)$ *et* $(\mathbb{R}^q, R^q)$, *On note :* $X = \begin{pmatrix} X_1 & X_2 \end{pmatrix}^t$ *de dimension* $p+q$.

a) $\forall (t_1, t_2) \in \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q, \phi_{X_1}(t_1) = \phi_X(t_1, 0)$ *et* $\phi_{X_2}(t_2) = \phi_X(0, t_2)$.

b) X_1 *et* X_2 *sont indépendants si et seulement si* $\forall (t_1, t_2) \in \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q$,

$$\phi_X(t_1, t_2) = \phi_{X_1}(t_1)\, \phi_{X_2}(t_2).$$

Preuve. *Pour* ***a****), on a*

$$\phi_X(t_1,t_2) = E\left(e^{i\left(t_1^t x_1 + t_2^t x_2\right)}\right), \text{ donc } \phi_X(t_1,0) = E\left(e^{it_1^t x_1}\right) = \phi_{X_1}(t_1),$$

et de même,

$$\phi_X(0,t_2) = E\left(e^{it_2^t X_2}\right) = \phi_{X_2}(t_2).$$

b*) Si* X_1 *et* X_2 *sont indépendants alors :*

$$\begin{aligned}\phi_X(t_1,t_2) &= E\left(e^{it_1^t X_1}e^{it_2^t X_2}\right) = E\left(e^{it_1^t X_1}\right)E\left(e^{it_2^t X_2}\right)\\ &= \phi_{X_1}(t_1)\,\phi_{X_2}(t_2).\end{aligned}$$

Réciproquement, on suppose que $\phi_X(t_1,t_2) = \phi_{X_1}(t_1)\,\phi_{X_2}(t_2)$ *.Pour montrer que* X_1 *et* X_2 *sont alors indépendants, il suffit de prouver que* $P_X = P_{X_1} \otimes P_{X_2}$ *(d'aprés théorème de Fubini). Calculons la transformée de Fourier de* $P = P^{X_1} \otimes P^{X_2}$ *:*

$$\begin{aligned}\phi_P(t_1,t_2) &= \int e^{i\left[t_1^t x_1 + t_2^t x_2\right]} dP(x_1,x_2) = \int e^{i\left[t_1^t x_1 + t_2^t x_2\right]} d\left(P_{X_1} \otimes P_{X_2}\right)(x_1,x_2)\\ &= \int e^{i^t t_1 x_1} dP_{X_1}(x_1) \int e^{i^t t_2 x_2} dP_{X_1}(x_2) = \phi_{X_1}(t_1)\,\phi_{X_2}(t_2).\end{aligned}$$

Donc, $\phi_P = \phi_{P_X}$ *,ce qui entraîne* $P = P_X$ *d'après la propriété d'injectivité et* X_1 *et* X_2 *sont indépendants.* ∎

3.1.2 Loi d'une somme de vecteurs aléatoires

Théorème 3.1.2 *Soient* X *et* Y *deux vecteurs aléatoires indépendantes à valeurs dans* $\left(\mathbb{R}^P, R^P\right)$ *,de* ***FC*** *respectives* ϕ_X *et* ϕ_Y *alors:*

$$\phi_{X+Y}(t) = \phi_X(t)\,\phi_Y(t).$$

Preuve. *On a,*

$$\phi_{X+Y}(t) = E\left(e^{it^t(X+Y)}\right) = E\left(e^{it^tX}\ e^{it^tY}\right).$$

Par séparation des intégrales, puisque X *et* Y *sont indépendantes :*

$$\phi_{X+Y}(t) = E\left(e^{it^tX}\right) E\left(e^{it^tY}\right) = \phi_X(t)\,\phi_Y(t).$$

Cette propriété se généralise sans difficulté au cas de n *vecteurs aléatoires indépendants. Si* (X_i), $\quad i = 1$ *à* n*, sont indépendants ,*ϕ_i *étant la* ***FC*** *de* X_i *,alors,*

$$\phi_{\Sigma X_i}(t) = \prod_{i=1}^{n} \phi_i(t).$$

■

Remarque 3.1.1 (Contre-exemple) *Soit* X *une v.a réelle qui suit une loi de Cauchy* $C(1)$*. Sa* ***FC*** *est :*

$$\forall t \in \mathbb{R} : \phi_X(t) = e^{-|t|}.$$

Le couple (X, Y)*, avec* $X = Y$ *vérifier*

$$\forall t \in \mathbb{R} : \phi_{X+Y}(t) = \phi_{2X}(t) = e^{-2|t|} = \left(e^{-|t|}\right)^2 = \phi_X(t)\,\phi_Y(t).$$

mais X *et* Y *ne sont pas indépendantes.*

Exemple 3.1.1 ***a****)Soient* X *et* Y *deux v.a.r indépendantes de lois respectives* $B(n,p)$ *et* $B(m,p)$ *.La v.a.* $X+Y$ *suit la loi* $B(n+m,p)$*. En effet :*

$$\phi_{X+Y}(t) = \left(pe^{it} + q\right)^n \left(pe^{it} + q\right)^m = \left(pe^{it} + q\right)^{n+m},$$

qui est la ***FC*** *d'une loi* $B(n+m,p)$*.*

b*) Soient* X *et* Y *deux v.a.r indépendantes de lois respectives* $C(a)$ *et* $C(b)$ *.La v.a.*$X+Y$

suit la loi $C(a+b)$. *En effet :*

$$\phi_{X+Y}(t) = e^{-a|t|}\ e^{-b|t|} = e^{-(a+b)|t|},$$

*qui est la **FC** d'une loi* $C(a+b)$.

Remarque 3.1.2 *La fonction* $\phi_{(X_1,\ldots,X_n)}$ *est une fonction dépendant de* n *variables réelles* $(t_1,\ldots,t_n)$. *Si on la restreint à la droite engendrée par* $v_k = (0,\ldots,1,\ldots,0)$ *(le* 1 *est en* k*-ème position), on obtient la fonction caractéristique de* X_k*,car :*

$$\phi_{(X_1,\ldots,X_n)}(0,\ldots,t,\ldots,0) = E\left(e^{itX_k}\right) = \phi_{X_k}(t).$$

On peut aussi remarquer que pour tout $t \in \mathbb{R}$ *on a :*

$$\phi_{(X_1,\ldots,X_n)}(t,\ldots,t) = E\left(e^{it(X_1+\ldots+X_k)}\right) = \phi_{(X_1+\ldots+X_n)}(t).$$

3.1.3 Obtention des moments non centrés

Théorème 3.1.3 *Soit* X *une v.a.r appartenant à* $L_n(\Omega, A, P)$ *c'est-à-dire :*

$$\forall\ k \leq n, \qquad E\left(\mid X \mid^k\right) < \infty.$$

*Alors, la **FC*** ϕ_X *est dérivable au moins jusqu'à l'ordre* n, *et pour tout* k, $k = 0$ *à* n *:*

$$\phi_X^{(k)}(0) = i^k E\left(X^k\right).$$

Preuve. Pour tout k, $k = 1$ à n :

$$\begin{aligned}\phi_X^{(k)}(t) &= \frac{d^k}{dt^k}\phi_X(t) = \frac{d^k}{dt^k}\int_{\mathbb{R}} e^{itx}\ dP^X = \int_{\mathbb{R}} \frac{d^k}{dt^k} e^{itx}\ dP^X \\ &= \int_{\mathbb{R}} i^k x^k e^{itx}\ dP^X.\end{aligned}$$

En effet ,la fonction $(t,x) \to \exp itx$ *est continue sur* $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ *; elle admet pour dérivée d'ordre* k *:*

$$\frac{\partial^k}{\partial t^k} e^{itx} \ = i^k x^k e^{itx},$$

qui forme une suite de fonctions continues sur $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$.

En outre, $i^k \int_{\mathbb{R}} x^k e^{itx}\ dP^X$ *est uniformément convergente sur* $\mathbb{R}$ *car :*

$$\mid \int_{\mathbb{R}} x^k e^{itx}\ dP^X \mid < E\left(\mid X\mid^k\right) < \infty,$$

et on peut donc permuter les opérations d'intégration et de dérivation , Il suffit alors de prendre $t=0$ *pour obtenir :*

$$\phi_X^{(k)}(0) = i^k E\left(X^k\right).$$

■

Remarque 3.1.3 *Réciproquement, si* ϕ_X *admet des dérivées en 0 jusqu'à l'ordre* n*, alors* X *admet des moments non centrés au moins jusqu'à l'ordre* n.

Exemple 3.1.2 *Soit* X *une v.a.r absolument continue de densité :*

$$f(x) = \lambda e^{-\lambda x}, \qquad\qquad x \in]0,+\infty],$$

*sa **FC** est :*

$$\phi_X(t) = \frac{\lambda}{\lambda - it},$$

alors

$$\begin{aligned}
\phi_X^{'}(t) &= \frac{i\lambda}{(\lambda-it)^2} \quad ,\text{où : } \ \phi_X^{'}(0) = \frac{i}{\lambda}\ ,\ \text{et} \ \ E(X) = \frac{1}{\lambda}.\\
\phi_X^{"}(t) &= \frac{i^2 2\lambda}{(\lambda-it)^3} \quad ,\text{où : } \ \phi_X^{"}(0) = \frac{i^2 2}{\lambda^2}\ ,\ \text{et} \ \ E\left(X^2\right) = \frac{2}{\lambda^2}\ ,\text{donc :} V(X) = \frac{1}{\lambda}.
\end{aligned}$$

Remarque 3.1.4 *Notons que si* X *est dans* $L^1(\Omega)$*, autrement dit si* $E(X)$ *est bien dé-*

finie, alors la fonction ϕ_X est dérivable en 0 (et $\phi_X^{'}(0) = iE(X)$) Mais, la réciproque est fausse. Pour le voir, il suffit de considérer la v.a X qui prend ses valeurs dans $\mathbb{Z}$ et dont la loi est :

$$P_X = \sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n\delta_n \text{ , avec } a_0 = a_1 = a_{-1} = 0 \text{ et } \forall n \geq 2 : a_n = a_{-n} = \frac{c}{n^2 \ln(\mid n \mid)},$$

où la constante de normalisation c vérifie $\sum_{n\neq 0,1} \frac{c}{n^2\ln(|n|)} = 1$, et Comme la loi de X est symétrique, ϕ_X est une fonction à valeurs réelles : :

$$\phi_X(t) = 2c\sum_{n\geq 2} \frac{\cos(nt)}{n^2\ln(\mid n \mid)}.$$

On peut montrer que ϕ_X est dérivable et que sa dérivée s'obtient en dérivant sous le signe somme :

$$\phi_X'(t) = -2c\sum_{n\geq 2} \frac{\sin(nt)}{n\ln(\mid n \mid)}.$$

On a donc $\phi_X^{'}(0) = 0$ - Pourtant, la variable aléatoire X n'est pas dans $L^1(\Omega)$, car :

$$E(|X|) = 2\sum_{k\in\mathbb{N}^*} ka_k = 2\sum_{k=2}^{\infty} \frac{c}{n\ln(\mid n \mid)} = \infty$$

Remarque 3.1.5 *Le théorème 3.1.3, peut être étendu aux vecteurs aléatoires $X = (X_1, ..., X_p)^t$ de dimension p :*

$$\left(\frac{\partial^n \phi(t_1, ..., tp)}{\partial t_1^{\alpha_1} .....t_p^{\alpha_p}}\right)_{(0,...,0)} = i^n E\left(X_1^{\alpha_1} .....X_p^{\alpha_p}\right),$$

avec $\sum_{j=1}^{p} \alpha_j = n$.

Remarque 3.1.6 *Un résultat analogue existe pour les v.a.r à valeurs entières non négatives en considérant leur fonction génératrice. En effet :*

$$G^{(k)}(t) = \sum_{x=k}^{\infty} x(x-1)...(x-k+1)t^{x-k}P(X = x),$$

et donc $G^{(k)}(1)$ donne le moment factoriel d'ordre k.

$$\mu_{(k)} = E\left(x\left(x-1\right)...\left(x-k+1\right)\right).$$

Exemple 3.1.3 *Pour X ˜$G(p)$, on a*

$$G_X(t) = \frac{pt}{1-qt}, \qquad q = 1-p,$$

et donc :

$$G_X^{(k)}(t) = \frac{k!pq^{k-1}}{(1-qt)^{k+1}}.$$

D'où

$$\mu_{[k]} = G_X^{(k)}(1) \ = \frac{q^{k-1}}{p^k}\ k!.$$

3.2 Méthode d'estimation basée sur la FC

L'expression de la **Fc** empirique est donnée par la formule suivante :

$$\widehat{\phi}(t) = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} \exp\{itX\}.$$

Comme $|\ \widehat{\phi}(t)\ |$est borée par 1, alors tous les moment de $\widehat{\phi}(t)$ sont fini. A partir de la loi des grands nombres, $\widehat{\phi}(t)$ est un estimateur convergent de $\phi(t)$, la **FC** théorique. Les méthodes d'estimation dans cette section sont des méthodes basées sur cette expression. Chacune des méthodes essaye d'obtenir la **FC** d'une v.a stable plus proche de la **FC** empirique en un certain sens. Un autre avantage de ces méthodes est qu'elles peuvent être étendues à des cas qui ne sont pas i.i.d.

3.2.1 Méthode de Minimum de Distance

Ces méthodes calculent la quantité :

$$\widehat{\theta} = \arg\min_{\theta\in\Theta} \parallel \phi(t) - \widehat{\phi}(t) \parallel,$$

où $\theta = (\alpha, \beta, \gamma, \delta)$ est un point de l'espace paramétrique Θ et $\parallel . \parallel$est une norme. Habituellement, on considère la norme L^{∞} ou une norme pondérée L^r, le premier cas posant le problème de la non-différentiabilité de $g(\theta) = \sup_t \mid \phi(t) - \widehat{\phi}(t) \mid$, ce qui rend la minimisation de g très complexe. C'est pourquoi on considère plutôt les normes pondérées L^r :

$$h(\theta) = \int_{-\infty}^{+\infty} \mid \phi(t) - \widehat{\phi}(t) \mid^r W(t)\, dt.$$

où $W(t)$ est une fonction de poids garantissant la convergence de l'intégrale. Les estimateurs de minimum de distance minimisent g ou h.

3.2.2 Méthodes des Moments

Press a proposé une autre méthode basée sur une transformation de la **FC.** Pour tout α,

$$\mid \phi(t) \mid = \exp(-\gamma^{\alpha} \mid t \mid^{\alpha}) \quad \text{alors} \quad -\log \mid \phi(t) \mid = \gamma^{\alpha} \mid t \mid^{\alpha}. \tag{3.1}$$

Il y a deux cas à considérer,$\alpha \neq 1$ et $\alpha = 1$. Dans le premier cas, pour l'estimation de α et γ on utilise l'équation (3.1). Pour l'éstimation de β et δ on considère $u(t) = \mathrm{Im}(\log \phi(t))$, alors,

$$u(t) = \delta t + \gamma^{\alpha} \mid t_k \mid^{\alpha} \beta \frac{t}{\mid t \mid} \tan \frac{\alpha\pi}{2}.$$

Le cas $\alpha = 1$ est plus simple, en suivant le même raisonnement. Pour plus de détails voir [2]

Remarque 3.2.1 *La méthode des moments est très facile à implémenter et elle est très* *efficace en temps de calcul mais très imprécise si l'échantillon n'est pas normalisé.*

3.2.3 Méthode de Régression

Koutrouvelis présente une méthode de type régression qui construit une expression linéaire à partir de certaines fonctions de la **FC** et des paramètres α, γ. On utilise la **FC** empirique pour estimer α, qui est précisément la pente de la droite, puis on estimer γ. Une autre expression linéaire des paramètres β et δ s'obtient apartir de la **FC** avec des relations non linéaires en α et γ, donc, une fois ces derniers paramètres estimés. L'algorithme de ce méthode peut se décliner de la façon suivante :

- Fixer un K approprié , et pour les points $t_k = \frac{\pi k}{25}, k = 1, 2, ..., K$ calculer la **FC** empirique $\widehat{\phi}(t_k)$.(telle que K entre 9 et 134)
- Calculer $y_k = \log(-\log \mid \widehat{\phi}(t_k) \mid^2)$.(qui est la première expression s'obtient à partir de l'équation (1.1) et égale $\log(2\gamma^\alpha) + \alpha \log \mid t \mid$.)
- Ajuster laregression linéaire $y = m + \alpha w_k + e_k$, pour obtenir des estimateurs $\widehat{\alpha}$ et $\widehat{m}$.
- Obtenir l'estimateur $\widehat{\gamma}$ à partir de $m = \log(2\widehat{\gamma})^{\widehat{\alpha}}$.
- Calculer, pour un L approprié, $z(u_i)$ pour $u_i = \frac{\pi i}{50}$, et $i = 1, 2, ..., L$.
- Ajuster la régression

$$z_i = \delta u_i + \beta \widehat{\gamma}^{\widehat{\alpha}} \tan \frac{\pi \widehat{\alpha}}{2} sign(u_i) \mid u_i \mid^{\widehat{\alpha}} + \eta_i, i = 1, 2, ..., L.$$

pour obtenir les estimateurs de δ et β.

La méthode de regression est facile à implémenter et elle est très efficase en temp calcul. Les propriétés asymptotiques (convergence et normalité) des estimateurs de moindre carrés dans une régression linéaire sont bien connues. Le principal inconvénient de cette méthode est que les résultats sont insatisfaisonts quand l'échantillon n'est pas normalisé. Pour résoudre ce problème Koutrouvelis a proposé la variante suivante de la méthode dont les résultats sont bien meilleurs pour une plus grande région de l'espace paramétrique.

3.2.4 Méthode de régression Itérative

Au pas k de l'algorithme on utilise les estimateurs $\widehat{\gamma}_{k-1}$ et $\widehat{\delta}_{k-1}$ pour normaliser l'échantillon selon ces valeurs, c'est-à-dire, pour chaque X de l'échantillon on faït la transformation $\left(X-\widehat{\delta}_{k-1}\right)/\widehat{\gamma}_{k-1}$. Le nouvel échantillon est presque normalisé et l'on estime ses paramètres par la méthode de regression. Si les estimateurs obtenus pour l'échantillon normalisé sont $\left(\widehat{\alpha}_k, \widehat{\gamma}_k^*, \widehat{\beta}_k, \widehat{\delta}_k^*\right)$, alors on actualise les paramètrs d'échelle et de position de l'échantillon original de la façon suivante :

$$\widehat{\gamma}_k = \widehat{\gamma}_{k-1}\widehat{\gamma}_k^*.$$

et

$$\widehat{\delta}_k = \widehat{\gamma}_{k-1}\widehat{\delta}_k^* + \widehat{\delta}_{k-1}.$$

Les valeurs $\widehat{\gamma}_0$ et $\widehat{\delta}_0$ pour initialiser l'algorithme doivent être des estimateurs proches des valeurs réelles des paramètres.

Chapitre 4

Conclusion

Nous avons étudier dans les trois chapitre de ce mémoire une nouvelle fonction dite fonction caractéristique, qui permetra de caractériser la loi d'une variable aléatoire, mais de façon plus intérissante que la fonction de répartition ou la densité de probabilités.

Cette fonction est bien adaptée pour :

- *étudier l'indépendance de variables aléatoires,*
- *étudier la convergence de variables aléatoires,*
- *étudier le comportement asymptotique de la somme de variables aléatoires indépendant,*
- *éstimer les paramètres des lois stable par des méthodes différents,*
- *retrouver la stabilité d'un grand nombre de lois usuelles par somme indépendante,*
- c*alcul des moments.*

Bibliographie

[1] Alphonse, P. (2015) Fonction caractéristique et transformée de Laplace d'une variable aléatoire. Exemples et applications. ENS de Rennes. Professeur encadrant : Jean-Christophe Breton.

[2] Alverez A, Olivarez. P,(2005), Méthodes d'estimation pour des lois stables avec des applications en finance. Journal de la société française de statistique, tome 146, n^o4, page. 23-54.

[3] Berrouis, N.(2012) . Sur l'estimation des paramètres de loi lèvy-stable. Mémoire de Majister, Professeur encadrant : Meraghni D. Univ. de Biskra.

[4] Calot, G.(1967) . cours de Calcul des probabilités. Deuxième Édition Dunod.

[5] Candelpergher, B. (2013). Théorie des probabilités : Une introduction élémentaire . Edition Calvage & Mounet

[6] Cochran, W.G. (1977). Sampling Techniques. Third edition. John Wiley & Sons, Inc. New York.

[7] Lukacs, E.(1970) . Characteristic functions. second Edition. Charles Griffin & Company Limited - london.

[8] Métivier, M. (1972). Notions Fondamentales de la théorie des probabilités. Maîtrises de mathématiques. Deuxième Édition, Dunod.

[9] Ouimet, G. (2013) . Tests de dépendance extrême basés sur une fonction caractéristique empirique de rangs. Université du Québec.

[10] Tassi, P. Legait S. (1990) . Théorie des probabilités en vue des des applications statistiques. Editions Technip.

Annexe : Abréviations et notations

Les différentes abrévariations et notations utilisées tout au long de ce mémoire sont expliquées ci-dessous :

$\mathcal{F}$	transformée de fourier
$i.i.d$	indépendantes et identiquement distribuées
$\phi_X(t)$	Fonction caractéristique de X.
FC	fonction caractéristique
$v.a.$	variable aléatoire.
$(X_1, ..., X_n)$	échantillon de taille n de v.a's
$v.a.r$	variable aléatoire réelle
$E(X)$	espérance ou moyenne de X
$\sim$	suit la loi
$\mathbb{R}$	ensemble réel
$\mathbb{R}^+$	ensemble réel positif

$1_{[a,b[}$	la fonction indicatrice :$I = 1$ si $x \in [a,b[$ et $I = 0$ sinon .
P_X	mesure de probabilité sur $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.
$f(x)$	Fonction de densité en x.
$S_\alpha(\beta,\gamma,\delta)$	loi stable de paramètres $\alpha,\beta,\gamma,\delta$.
G_X	fonction génératrice de X
$\mathrm{Re}(z)$	partie réelle du nombre complexe z
$\mathrm{Im}(z)$	partie imaginaire du nombre complexe z
X^t	transposé de X