

I.1 Introduction

Le traitement du signal occupe une place dont les frontières avec des sciences fondamentales telles que les mathématiques et la physique, le traitement du signal intervient en particulier dans l'électronique, l'informatique, l'automatique, et les mathématiques appliquées à des domaines aussi divers que la finance et la biologie.

Il en résulte plusieurs approches s'estompent cependant dans la mesure où le traitement du signal devient une discipline clairement identifiée. Leur but est de réussir à extraire le maximum d'information utile en utilisant les défis techniques scientifiques, en s'appuyant sur les classes des signaux, leur présentation spectrale et les modèles de représentation.

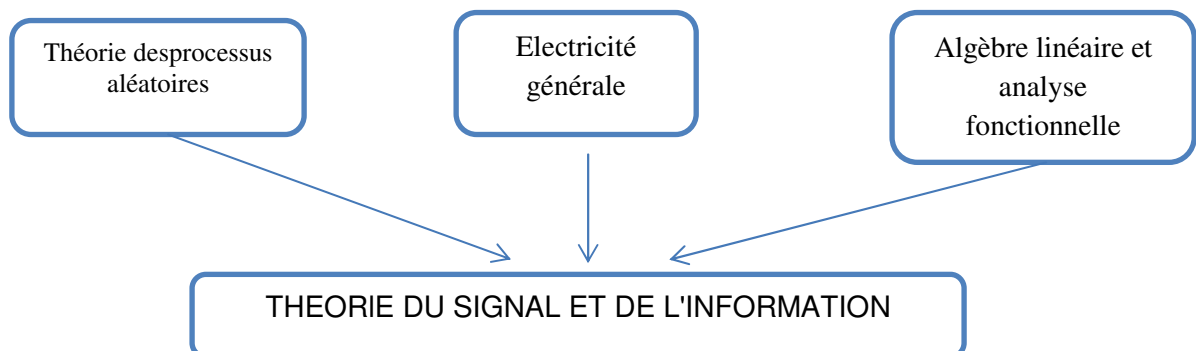
I.2 Généralités sur le traitement du signal

Les outils de la théorie et de traitement du signal s'appliquent à de nombreux domaines, dès qu'un capteur mesure une grandeur physique porteuse d'information, qui est perturbée (par du bruit et le système de mesures) et qui devra être traitée pour en extraire l'information utile.

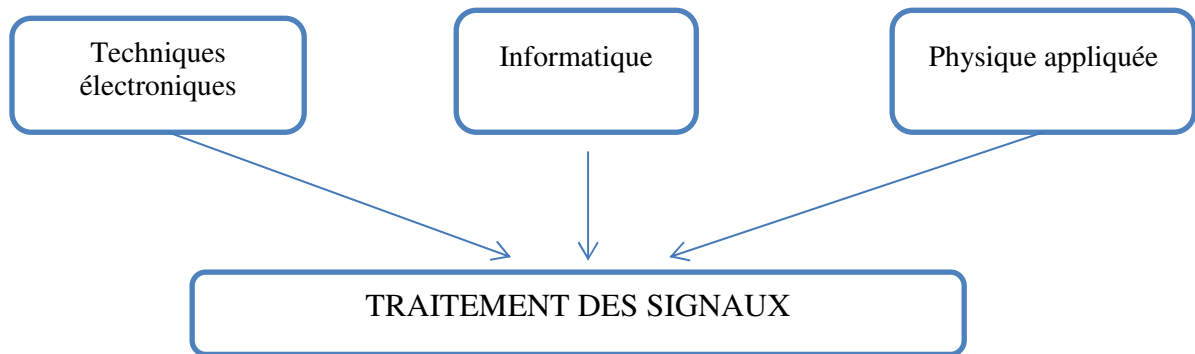
Définition

Le traitement des signaux est la discipline qui, s'appuie sur les enseignements de la théorie du signal et de l'information, les ressources de l'électronique, de l'informatique et de la physique appliquée, a pour objet l'élaboration ou l'interprétation des signaux porteurs d'information. Elle trouve son champ d'application dans tous les domaines concernés par la perception, la transmission ou l'exploitation de ces informations.[1]

RESSOURCES SCIENTIFIQUES



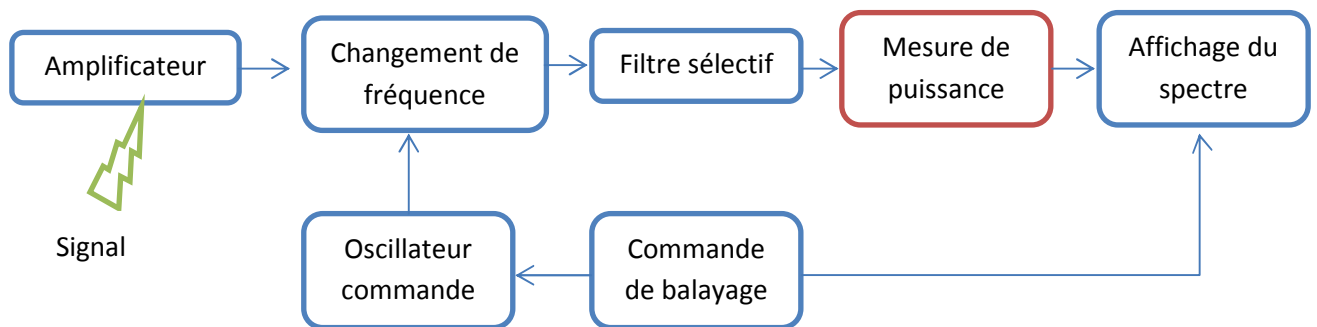
RESSOURCES TECHNOLOGIQUES



I.2.1 Langage du traitement des signaux

Au plus haut niveau, le langage du traitement des signaux est celui des schéma-blocs, également familier du spécialiste du réglage automatique et de la théorie des systèmes en général à laquelle le traitement des signaux est apparenté.

Un schéma-bloc est un assemblage symbolique, représenté sous forme graphique, de blocs fonctionnels, en principe indépendants, réalisant une fonction donnée.



Le comportement théorique de chaque bloc peut être décrit par une ou un ensemble de relations mathématiques. Nous intéressons sur le quatrième bloc « mesure de puissance » on s'appuyant sur les techniques d'estimation non paramétrique des signaux.

I.2.2 Définitions

I.2.2.1 Signal

Un signal est la représentation physique de l'information, qu'il convoie de sa source à sa destination. La description mathématique des signaux est l'objectif de la théorie du signal.

Elle offre les moyens d'analyser, de concevoir et de caractériser des systèmes de traitement de l'information.

Un signal est donc la représentation physique de l'information. Sa nature physique peut être très variable : acoustique, électronique, optique, etc.

Le mot signal est pratiquement toujours associé au mot bruit. Ce dernier est utilisé dans le langage commun, mais il couvre, dans la théorie du signal, un sens bien particulier.[2]

I.2.2.2 Bruit

On appelle bruit (en anglais: noise) tout phénomène perturbateur (interférence, bruit de fond, etc.) gênant la perception ou l'interprétation d'un signal, ceci par analogie avec les nuisances acoustiques du même nom. [3]

I.2.2.3 Le rapport signal à bruit

Le rapport signal sur bruit (RSB) est une mesure du degré de contamination du signal par du bruit. Il s'exprime sous la forme du rapport RSB des puissances respectives du signal P_s et du bruit P_B . [1]

$$RSB = \frac{P_s}{P_B} \quad (I.1)$$

Il est souvent indiqué selon une échelle logarithmique mesurée en décibels :

$$RSB_{dB} = 10 \log \frac{P_s}{P_B} \quad (I.2)$$

Le RSB mesure donc la qualité du signal. C'est une mesure objective. Cependant, dans de nombreux cas, en particulier ceux où l'opérateur humain intervient dans la chaîne de traitement, cette mesure n'est pas très significative. Ceci est particulièrement vrai pour les signaux audio ou les images et les vidéos. Des mesures subjectives, ou des mesures plus fines, prenant en compte les propriétés de la perception humaine doivent être mises en œuvre.

I.3 Classes de signaux

Différents modes de classification des modèles de signaux peuvent être envisagés. Parmi les principaux, on peut citer [1]:

- **classification phénoménologique:** on met ainsi en évidence le type d'évolution du signal, son caractère prédéterminé ou son comportement aléatoire;
- **classification énergétique:** on sépare les modèles de signaux satisfaisant à une condition d'énergie finie d'autres plus idéalisés. à puissance moyenne finie et énergie infinie;
- **classification morphologique:** celle-ci permet de distinguer les signaux selon le caractère continu ou discret de l'amplitude et de la variable libre;
- **classification spectrale:** on met en évidence le domaine des fréquences dans lequel s'inscrit le spectre du signal;
- **classification dimensionnelle:** on considère les signaux unidimensionnels $x(t)$, les signaux bidimensionnels - ou image - $i(x,y)$, voire les signaux tridimensionnels $i(x,y,t)$ représentant par exemple l'évolution d'une image en fonction du temps.

I.3.1 Classification phénoménologique :[1,4]

La première classification est obtenue en considérant la nature profonde de l'évolution du signal en fonction du temps. Elle fait apparaître deux types fondamentaux de signaux:

- **Signaux déterministes**

Les signaux déterministes dont l'évolution en fonction du temps peut être parfaitement prédite par un modèle mathématique approprié.

Ces signaux peuvent être simplement modélisés par des fonctions mathématiques.

- Les signaux périodiques, satisfaisant à la relation :

$$x(t) = x(t + kT) \quad (I.3)$$

qui obéissent à une loi de répétition cyclique régulière, de période T.

- les signaux non périodiques, qui ne jouissent pas de cette propriété.

Les signaux sinusoïdaux, d'équation générale :

$$x(t) = A \sin(2\pi ft + \theta) \quad (I.4)$$

Parmi les signaux non périodiques, il faut distinguer les signaux quasi-périodiques, qui résultent d'une somme de sinusoïdes de périodes incommensurables, des signaux transitoires dont l'existence est éphémère.

- **Signaux aléatoires**

Les signaux aléatoires, dont le comportement temporel est imprévisible et pour la description desquels il faut se contenter d'observations statistiques.

Les signaux aléatoires peuvent, quant à eux, être classés en deux grandes catégories:

- Signal stationnaire : Un signal aléatoire $x(t)$ est stationnaire, si ses caractéristiques statistiques sont invariantes dans le temps.
- les signaux aléatoires non stationnaires, qui ne jouissent pas de cette propriété
- Signal ergodique : Un signal aléatoire $x(t)$ est ergodique si les valeurs moyennes statistiques (moyennes d'ensemble) sont égales aux valeurs moyennes temporelles (sur une réalisation).

Commentaire

Un signal aléatoire à comportement transitoire est non stationnaire.

Le concept de stationnarité est, comme le caractère permanent associé aux signaux périodiques, une abstraction commode. Il est précieux dans la mesure où l'on peut souvent considérer, en pratique, qu'un signal est stationnaire pendant la durée d'observation.

I.3.2 Classification énergétique [1,5]

Une distinction fondamentale peut être faite entre deux grandes catégories de signaux :

- **les signaux à énergie finie.**

Définition

Les signaux à énergie finie sont ceux pour lesquels l'intégrale (1.5) est bornée.

Ces signaux, dits aussi de carré intégrable (ou sommables), satisfont donc à la condition :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2 dt < \infty \quad (1.5)$$

La puissance moyenne du signal de cette classe, est nulle.

- **les signaux à puissance moyenne finie non nulle.**

Définition

Les signaux à puissance moyenne finie (non nulle) sont ceux qui satisfont à la condition :

$$0 < \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} |x(t)|^2 dt < \infty \quad (I.6)$$

La première catégorie comprend tous les signaux de type transitoire, qu'ils soient déterministes ou aléatoires. La deuxième catégorie englobe presque tous les signaux périodiques, quasi-périodiques et les signaux aléatoires permanents.

Certains signaux théoriques n'appartiennent à aucune de ces deux catégories: c'est le cas par exemple de $x(t) = \exp(at)$ pour $-\infty < t < \infty$.

L'abstraction mathématique commode qu'est l'impulsion de Dirac $\delta(t)$ n'est pas classable non plus dans ce contexte, pas plus que la suite périodique d'impulsions de Dirac $\delta_T(t)$.

Commentaires

La fonction $x^2(t)$ correspond à une distribution de l'énergie du signal en fonction du temps. La puissance moyenne $P_x(T)$ est, en d'autres termes, la distribution moyenne de l'énergie sur l'intervalle T choisi.

L'examen des conditions (1.5) et (1.6) montre clairement qu'un signal à puissance moyenne finie non nulle possède une énergie infinie et qu'un signal à énergie finie possède une puissance moyenne nulle. Bien évidemment, seul ce dernier est physiquement réalisable.

I.3.3 Classification morphologique

Définitions

Un signal peut se présenter sous différentes formes selon que son amplitude est une variable continue ou discrète et que la variable libre t (considérée ici comme le temps) est elle-même continue ou discrète. On distingue donc ainsi quatre types de signaux[1,6]:

- Le signal à amplitude et temps continus appelé couramment signal analogique;
- Le signal à amplitude discrète et temps continu appelé signal quantifié;
- Le signal à amplitude continue et temps discret appelé signal échantillonné;

- Le signal à amplitude et temps discrets appelé signal numérique (ou improprement digital), car il est représentable par une suite de nombres ou série temporelle.

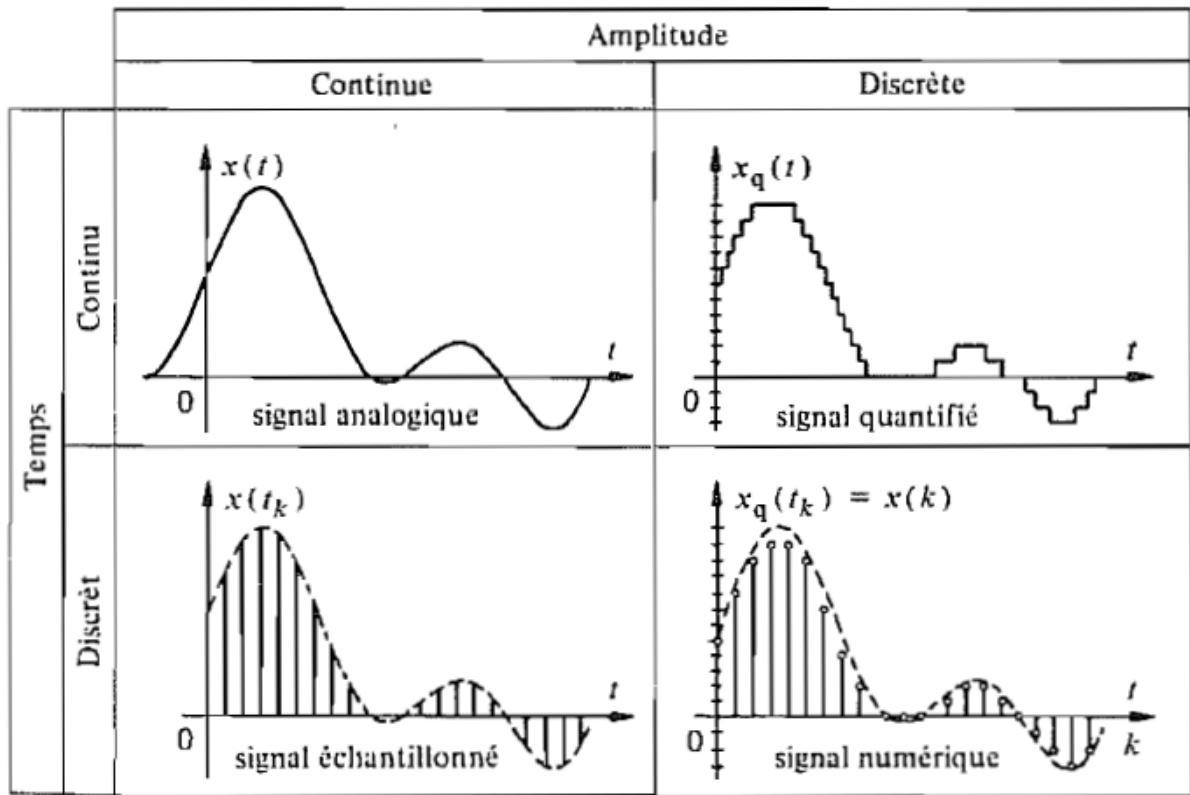


Fig.I.1. Classification morphologique des signaux.

I.3.4 Classification spectrale[5]

L'analyse spectrale, par transformée de Fourier (TF), conduit à considérer le spectre des signaux, c'est-à-dire leur représentation dans le domaine fréquentiel, comme une représentation duale, équivalente d'un point de vue de l'information contenue.

On appelle largeur de bande, $B = f_2 - f_1$, le domaine des fréquences où le spectre a des valeurs non nulles.

Un signal dont le spectre est nul en dehors d'une bande de fréquence donnée est appelé signal à bande limitée, ou signal à spectre à support borné.

I.3.5 Classification dimensionnelle [5]

- signaux 1D : $x(t)$ (signal reçu par un microphone monophonique).
- signaux 2D : $I(x, y)$ (image, signal reçu par un microphone stéréophonique).

- signaux 3D : $I(x, y, z)$ (image volumique en tomographie ou IRM, $I(x, y, f)$).
- signaux 4D ou 3D +t (séquence d'images 3D, en IRM par exemple).

I.4 Transformée de Fourier

L'analyse harmonique est l'instrument majeur de la théorie du signal. La transformation de Fourier, généralisée par l'emploi des distributions, permet d'obtenir une représentation spectrale des signaux. Celle-ci exprime la répartition fréquentielle de l'amplitude, de la phase, de l'énergie ou de la puissance des signaux considérés. [1]

La transformée de Fourier

D'une fonction $x(t)$ est une fonction de la pulsation définie par [7]:

$$f[x(t)] = F(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)e^{-j\omega t} dt \quad (I.7)$$

La transformation réciproque se définit par :

$$x(t) = f^{-1}[F(\omega)] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} F(\omega)e^{j\omega t} d\omega \quad (I.8)$$

Transformée de Fourier à temps discrète

Trouver une représentation fréquentielle consiste à rechercher des périodicités dans un signal et à mesurer les contributions, c'est ce que fait par la transformée de Fourier à temps discret (TFTD) qui effectue le produit scalaire entre le signal et l'exponentielle complexe $\exp(-j2\pi fn)$ pour toute f . [3,8]

$$X(f) = \sum_{-\infty}^{+\infty} x(n)e^{-j2\pi fn} \quad (I.9)$$

La TFTD joue pour les signaux numériques le rôle de la transformée de Fourier pour les signaux à temps continu.

I.4.1 Propriétés et définition

L'importance de la transformation de Fourier en théorie du signal est largement due à certaines de ses propriétés remarquables.[1]

$$x^*(t) \leftrightarrow X^*(-f) \quad (\text{I. 10})$$

$$a x(t) + b y(t) \leftrightarrow a X(f) + b Y(f) \quad (\text{I. 11})$$

La propriété (1.11) indique que la transformation de Fourier est une opération linéaire.

$$\frac{d^n x}{dt^n} \leftrightarrow (j2\pi f)^n X(f) \quad (\text{I. 12})$$

$$x(t) * y(t) \leftrightarrow X(f) \cdot Y(f) \quad (\text{I. 13})$$

$$x(t) \cdot y(t) \leftrightarrow X(f) * Y(f) \quad (\text{I. 14})$$

Les propriétés (1.13) et (1.14) sont essentielles. Elles montrent qu'à tout produit dans le domaine temporel correspond un produit de convolution dans le domaine fréquentiel et réciproquement.

$$x(t - t_0) \leftrightarrow X(f)e^{-j2\pi f t_0} \quad (\text{I. 15})$$

La propriété (1.15) est connue sous le nom de théorème du retard.

$$x(t)e^{-j2\pi f t_0} \leftrightarrow X(f - f_0) \quad (\text{I. 16})$$

$$x(at) \leftrightarrow |a|^{-1} X(f/a) \quad (\text{I. 17})$$

I.5 Signaux aléatoires

Par définition, un signal aléatoire ne peut pas être décrit par une loi mathématique qui prédit sa valeur à chaque instant, car cette valeur n'est pas prédictible analytiquement. En revanche, on peut décrire ses propriétés à l'aide de probabilités et de statistiques.

Mathématiquement, un signal aléatoire sera considéré comme la réalisation d'un processus aléatoire (random process), et la valeur prise à un instant t_i comme une variable aléatoire. [5]

I.5.1 Processus aléatoire

Définition

Un processus aléatoire (ou stochastique) est une famille de fonctions $x(t)$, réelles ou complexes, définies dans un espace de probabilité, c'est-à-dire dépendant de deux variables, dont l'une est le temps t (usuellement, mais cela peut être l'espace pour des images), et dont l'autre est la variable ζ de l'espace des épreuves Ω .

Selon que les variables sont continués ou discrètes, on parle de processus aléatoires continus ou discrets.

Si le temps est discret en raison d'un échantillonnage, on a une suite aléatoire. Si le temps est discontinu et que le signal apparaît à des instants aléatoires, on parle de processus ponctuel. [5]

I.5.2 Caractéristiques importantes

I.5.2.1 Stationnarité

La stationnarité est une propriété particulièrement importante pour l'analyse des signaux aléatoires.

Définition

On dit qu'un signal aléatoire est stationnaire si ses propriétés statistiques sont invariantes par translation dans le temps.

En ce qui concerne la description complète, ceci se traduit par

$$P_{X(t_1),X(t_2),\dots,X(t_k)} = P_{X(t_1-\tau),X(t_2-\tau),\dots,X(t_k-\tau)} \quad (\text{I. 18})$$

et si $t_k = \tau$,

$$P_{X(t_1),X(t_2),\dots,X(t_k)} = P_{X(t_1-\tau),X(t_2-\tau),\dots,X(0)} \quad (\text{I. 19})$$

La distribution conjointe ne dépend plus alors que de $k-1$ paramètres, au lieu des k paramètres initiaux. Ceci va se prolonger à la description partielle : les moments, qui dépendent dans le cas général de l'instant considéré, deviennent dans le cas stationnaire des quantités indépendantes du temps. La fonction de covariance $C_X(t_1, t_2)$ devient quant-à-elle une quantité dépendant uniquement de l'écart entre t_1 et t_2 . Pour la description partielle à un instant, on a ainsi :

$$P_{X(t_1)} = P_{X(t_1-\tau)} = \dots = P_{X(0)} \quad (\text{I. 20})$$

Toutes les variables $X(t_1, w)$ possèdent ainsi la même loi à un instant. Par suite,

$$E\{X(t_1)^n\} = E\{X(t_1 - \tau)^n\} = \dots = m_X^{(n)} \quad (\text{I. 21})$$

On en déduit donc que tous les moments sont indépendants du temps.

À deux instants, la distribution conjointe ne dépend que de l'écart entre les deux instants et non des instants eux-mêmes :

$$P_{X(t_1), X(t_2)} = P_{X(t_1-\tau), X(0)} \quad (\text{I. 22})$$

On en déduit donc que

$$\begin{aligned} C_X(t_1 t_2) &= E\{X(t_1)X(t_2)^*\} = E\{X(t_1 - t_2)X(t_2)^*\} = E\{X(t_2)X(t_1 - t_2)^*\} \\ &= E\{X(t)X(t - \tau)^*\} \end{aligned} \quad (\text{I. 23})$$

Avec t quelconque et $\tau = t_1 - t_2$. La covariance devient une fonction de corrélation, qui ne dépend que de l'écart de temps. On pose

$$R_X(\tau) = E\{X(t)X(t - \tau)^*\} \quad (\text{I. 24})$$

On peut vérifier la stationnarité en calculant tous les moments, à tous les ordres. Ceci n'est pas forcément utilisable, et on se contentera souvent d'étudier une stationnarité au sens faible (par opposition à la stationnarité stricte), en définissant une stationnarité à l'ordre 1

— le moment d'ordre 1 est indépendant du temps, et une stationnarité à l'ordre 2—moment d'ordre 1 et fonction de covariance invariants par translation dans le temps.[9]

I.5.2.2 Ergodisme

L'ergodicité est une propriété importante, qui pour un processus stationnaire X permet d'estimer de façon satisfaisante des grandeurs de la forme $\mathbb{E}[\phi(X_{t_1}; \dots; X_{t_n})]$ à partir de l'observation d'une trajectoire unique du processus.[10]

Définition

Un processus $X = X(t), t \in \mathbb{R}$ est strictement ergodique si pour toute grandeur aléatoire de la forme $Y_t = \phi(X_{t_1+t}; \dots; X_{t_n+t})$, la valeur de $\lim_{\tau \rightarrow \infty} (2\tau)^{-1} \int_{-\tau}^{\tau} Y_t dt$ où l'intégrale est définie par rapport aux trajectoires de X , est lorsqu'elle existe presque sûrement indépendante de la trajectoire de X considérée.

Cette définition suppose, bien entendu, que presque toutes les trajectoires de Y_t soient des fonctions mesurables de la variable t .

Pour un processus stationnaire continu strictement ergodique, il apparaît alors que

$$\lim_{\tau \rightarrow \infty} \int_{-\tau}^{\tau} \phi(X_{t_1+t}; \dots; X_{t_n+t}) dt = \mathbb{E}[\phi(X_{t_1+t}; \dots; X_{t_n+t})] \quad (\text{I.25})$$

En d'autres termes, l'ensemble des trajectoires du processus pour lesquelles la convergence de l'intégrale vers $\mathbb{E}[\phi(X_{t_1+t}; \dots; X_{t_n+t})]$ n'est pas assurée est de probabilité nulle.

Cette propriété, connue sous le nom de théorème de Birkhoff-Von Neumann, se traduit dans le cas d'un processus stationnaire discret par des relations du type

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{l=-N}^N \phi(X_{l_1+l}; \dots; X_{l_n+l}) = \mathbb{E}[\phi(X_{l_1}; \dots; X_{l_n})] \quad (\text{I.26})$$

Ainsi, un processus SSL valeurs réelles $X = (X_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ est ergodique au second ordre si :

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{-N}^N X_{n+n_1} = \mathbb{E}[X_n] \quad (\text{I.27})$$

Et

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{-N}^N X_{n+n_1} X_{n+n_2} = \mathbb{E}[X_{n_1} X_{n_2}] \quad (I.28)$$

I.5.2.3 La densité spectrale de puissance

En théorie du signal, les spectres sont associés à la transformée de Fourier.

Dans le cas de signaux déterministes, c'est une façon de représenter les signaux comme une superposition d'exponentielles. Pour les signaux aléatoires, il s'agit principalement d'étudier la transformée des moyennes. [7]

Définition puissance

On définit la puissance moyenne d'un processus stochastique stationnaire au sens large par :

- Cas continu $X(t)$:

$$p = E\{X(t)X(t)'\} \quad (I.29)$$

- Cas discret X_n :

$$p = \lim_{N \rightarrow +\infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{-N}^N x_N^2 \quad (I.30)$$

$X(t)$: processus aléatoire

Définition densité spectrale de puissance

La densité spectrale de puissance $P_X(\omega)$ du processus stochastique $x(t)$ est définie comme la transformation de Fourier, si elle existe, la corrélation $R_X(\tau)$:

$$P_X(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} R_X(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau \quad (I.31)$$

Réciproquement,

$$R_X(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} P_X(\omega) e^{-j\omega\tau} d\omega \quad (I.32)$$

Les deux relations précédentes sont connues sous le nom de formules de Wiener-Khinchin. [7,11,12]

I.5.2.4 Indépendance et décorrélation

Il est possible d'étendre les notions d'indépendance et de décorrélation aux processus stochastiques.[7]

Définition indépendance

Soient $x_1(t), x_2(t)$ deux processus stochastiques. Alors $v_1(t), v_2(t)$ sont dits indépendants si $\{x_1(t_1), x_1(t_2), \dots, x_1(t_l)\}$ et $\{x_2(t'_1), x_2(t'_2), \dots, x_2(t'_m)\}$ sont des ensembles indépendants de vecteurs aléatoires pour tous les $t_1, t_2, \dots, t_l, t'_1, t'_2, \dots, t'_m$ et pour tout m et l .

Définition décorrélation

$x(t), y(t)$ sont dits décorrélés si $x(t_1)$ et $y(t_2)$ sont des vecteurs aléatoires décorrélés pour tous les t_1, t_2 .

$x(t), y(t)$ sont deux processus stochastiques décorrélés si :

$$R_{xy}(t_1, t_2) = 0, \quad \forall t_1, t_2 \quad (\text{I.33})$$

Définition orthogonalité

$x(t), y(t)$ sont deux processus stochastiques orthogonaux si

$$R_{xy}(t_1, t_2) = 0, \quad \forall t_1, t_2 \quad (\text{I.34})$$

I.6 Processus particuliers importants

I.6.1 Processus gaussien

Les processus gaussiens sont des processus très importants du fait qu'on les rencontre très souvent en pratique et du fait que de nombreux processus physiques sont approximativement gaussiens. Ceci est la conséquence du théorème de la limite centrale. Sans entrer dans les détails, le théorème de la limite centrale établit que si l'on considère la somme:

$$x = x_1 + \dots + x_n \quad (\text{I.35})$$

Ou x_i sont des variables aléatoires indépendantes, alors sous certaines conditions, la distribution de probabilité de x approche la distribution gaussienne quand $n \rightarrow \infty$.

Définition

Le processus stochastique $x(t)$ est gaussien si pour toute partition $\{t_1, t_2, \dots, t_n\}$ de T , le vecteur des variables aléatoires $\{x(t_1), \dots, x(t_n)\}$ est gaussien.

La loi de distribution d'un vecteur gaussien est entièrement déterminée par la connaissance des moments du premier ordre (moyenne et covariance) qui, eux-mêmes, ne nécessitent pour leur calcul que les fonctions densité de probabilité du premier et du second ordre $p_x(\alpha, t), p_x(\alpha, t, \beta, \tau)$. Il s'agit donc bien d'un processus du second ordre. Noter que la fonction du premier ordre peut être calculée à partir de celle du second ordre par la fonction marginale :[7]

$$p_x(\alpha, t) = \int_{-\infty}^{+\infty} p_x(\alpha, t, \beta, \tau) d\beta \tag{I.36}$$

I.6.2 Mouvement brownien

Définition

Un mouvement brownien (encore appelé processus de Wiener) issu de $t = 0$ est un processus B à accroissements orthogonaux tel que les variables aléatoires $B_t - B_{t'} (t' < t)$ ont des lois gaussiennes centrées et de variance $\sigma^2 = t - t'$.

Cette définition caractérise un modèle simple de la trajectoire d'une particule dans un liquide, pour laquelle on suppose, outre la continuité de la trajectoire, que la particule subit de nombreux chocs et possède une inertie négligeable (le processus est à accroissements orthogonaux) et que les propriétés du milieu, supposé homogène, n'évoluent pas au cours du temps (la loi de $B_{t+\tau} - B_{t'+\tau}$ ne dépend pas de τ).

Comme $\|B_{t+h} - B_t\|^2 = \sigma^2 h$, il est clair que les trajectoires de B sont continues en moyenne quadratique, mais nulle part différentiables en moyenne quadratique.[10]

I.6.3 Bruit blanc

Définition Un bruit blanc est un processus stationnaire au second ordre qui possède une mesure spectrale à densité et dont la DSP est une fonction constante.

Dans le cas d'un processus à indice discret, on vérifie aisément que cela signifie que le processus est constitué d'une suite de variables aléatoires décorrélées, de même moyenne et de même variance.

Le cas continu est plus délicat à traiter. En effet, la DSP d'un bruit blanc à indice continu est une fonction constante sur \mathbb{R} . Donc, l'intégrale de la densité spectrale n'est pas définie, ce qui signifie que pour un bruit blanc U on a $\|U\|^2 = +\infty$; U n'est donc pas un processus du second ordre.[1,10]

I.7 Modélisation des signaux paramétrique

I.7.1 Généralité

La plupart des techniques de l'identification qui ont été développées en « Automatique » et en « Traitement de signal » utilisent des modèles de transmission entrée-sortie. Ces derniers exigent des paramètres. Le modèle ARMA (autorégressif à moyenne ajustée) comme exemple. La plupart des signaux discrétisés en traitement du signal peuvent être représentés par les modèles ARMA, AR ou MA.

On a le système suivant :

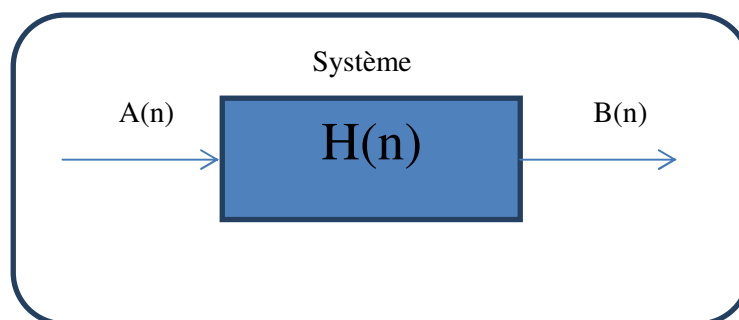


Fig.I.2. Représentation des systèmes

Sa fonction de transfert est :

$$H(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} h(n)z^{-n} \quad (\text{I.37})$$

Ou le :

$$H(z) = \frac{B(z)}{A(z)} = \frac{\sum_{i=0}^N b_i z^{-i}}{1 + \sum_{j=1}^M a_j z^{-j}} \quad (\text{I. 38})$$

I.7.2 Les modèles paramétriques des signaux[13,14]

I.7.2.1 Modélisation MA

Les modèles de production d'un signal est appelé moyenne ajustée (MA), tous zéros, ou encore à réponse impulsionnelle finie (RIF) si :

$$H(z) = B(z) = \sum_{i=0}^N b_i z^{-i} \quad (\text{I. 39})$$

Dans le domaine temporel, on peut écrire l'équation récurrente suivante :

$$y(n) = \sum_{k=0}^N b(k)x(n-k) \quad (\text{I. 40})$$

Donc $y(n)$ est un signal MA.

I.7.2.2 Modélisation AR

Les modèles de production d'un signal est appelé autorégressif, récursif, tous pôles, ou encore à réponse impulsionnelle infinie (RII), si :

$$H(z) = \frac{1}{A(z)} = \frac{1}{1 + \sum_{j=1}^M a_j z^{-j}} \quad (\text{I. 41})$$

Dans le domaine temporel, on peut écrire l'équation récurrente suivante :

$$y(n) = x(n) - \sum_{j=0}^M a(j)y(n-j) \quad (\text{I. 42})$$

I.7.2.3 Modélisation ARMA

La transmittance devient alors celle d'un modèle ARMA :

$$H(z) = \frac{B(z)}{A(z)} = \frac{\sum_{i=0}^N b_i z^{-i}}{1 + \sum_{i=1}^M a_i z^{-i}} \quad (\text{I. 43})$$

Où $A(z)$ est la partie AR et $B(z)$ représente la partie MA.

Dans le domaine temporel, on peut écrire l'équation récurrente suivante :

$$y(n) = \sum_{k=0}^N b(k)x(n-k) - \sum_{j=0}^M a(j)y(n-j) \quad (\text{I. 44})$$

I.8 Conclusion

Avant d'entamer n'importe quel traitement sur un signal quelconque il faut tout d'abord savoir le classer selon les modèles cités, car les techniques d'analyses et de synthèses l'exigent.

La classification des signaux est une phase importante dans le choix de la méthode de calcul. Dans le cas par exemple des signaux à énergie finie, le calcul de la transformée de Fourier, la corrélation et la convolution se diffère par rapport à celui des signaux de la classe puissance moyenne finie non nulle.

La modélisation des systèmes et des signaux est nécessaire surtout si on veut les caractérisés par des paramètres. Ces derniers sont utiles dans la commande des systèmes. Si on prend par exemple comme signal physique la voix, ce dernier est issu d'un système biologique humain qui doit être modélisé soit par AR ou dans le cas complexe ARMA.

II.1 Introduction

La représentation du signal sous la forme temporel $x(t)$ est une démarche naturelle mais elle ne correspond pas forcément à la meilleure représentation physique des signaux rencontrés. En effet, l'individu ou les systèmes électroniques sont souvent plus sensibles à la puissance, à la fréquence des signaux et la représentation du signal sous la forme de sa répartition de puissance en fonction de la fréquence, permet dans bien des cas, d'extraire de manière plus immédiate l'information qui réside dans ce dernier. Le signal est alors représenté par une fonction densité spectrale de puissance (DSP). Le passage de $x(t)$ à la DSP constitue l'analyse spectrale.

II.2 Notion de corrélation et la densité spectrale

La corrélation réalise une comparaison entre le signal lui-même ou un autre signal avec un retard. Alors on distingue deux types de corrélation :

- L'autocorrélation
- L'intercorrélation

II.2.1 L'autocorrélation

L'autocorrélation réalise une comparaison entre un signal $x(t)$ et ses copies retardées.[11,12,13]

- *Les signaux à énergie finie :*

Soient $x(t)$ un signal à énergie finie, on appelle fonction d'autocorrélation de $x(t)$ la fonction notée R_{xx} définie par :

$$R_{xx}(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) x^*(t - \tau) dt \quad (\text{II. 1})$$

En raison de la symétrie hermitienne, on a la relation :

$$R_{xx}(\tau) = R_{xx}^*(-\tau) \quad (\text{II. 2})$$

- *Les signaux à puissance moyenne finie non nulle*

Soit $x(t)$ un signal à **puissance moyenne finie non nulle**, on appelle fonction d'autocorrélation de $x(t)$ la fonction notée R_{xx} définie par :

$$R_{xx}(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{+\frac{T}{2}} x(t) x^*(t - \tau) dt \quad (\text{II. 3})$$

II.2.2 L'intercorrélation

L'intercorrélation réalise une comparaison entre un signal $x(t)$ avec un autre signal $y(t)$ retardé. [5,11]

- *Les signaux à énergie finie :*

Soient $x(t)$ et $y(t)$ deux signaux à énergie finie, on appelle fonction d'intercorrélation entre $x(t)$ et $y(t)$ la fonction notée R_{xy} définie par :

$$R_{xy}(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) y^*(t - \tau) dt \quad (\text{II. 4})$$

En raison de la symétrie hermitienne, on a la relation :

$$R_{xy}(\tau) = R_{yx}^*(-\tau) \quad (\text{II. 5})$$

- *Les signaux à puissance moyenne finie non nulle*

Soient $x(t)$ et $y(t)$ deux signaux à **puissance moyenne finie non nulle**, on appelle fonction d'intercorrélation entre $x(t)$ et $y(t)$ la fonction notée R_{xy} définie par :

$$R_{xy}(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{+\frac{T}{2}} x(t) y^*(t - \tau) dt \quad (\text{II. 6})$$

II.2.3 La densité spectrale

La densité spectrale c'est la transformation de Fourier de la fonction de corrélation. On distingue alors deux type de densités : [1, 9,12]

- Densité spectrale d'énergie
- Densité Inter spectrale d'énergie

- **Densités spectrale d'énergie :**

Soit $x(t)$ un signal à énergie finie et $R_{xx}(\tau)$ sa fonction d'autocorrélation, on appelle densité spectrale d'énergie la fonction notée $E_x(f)$, transformée de Fourier de $R_{xx}(\tau)$:

$$E_x(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} R_{xx}(\tau) e^{-j2\pi f\tau} d\tau \quad (\text{II. 7})$$

En utilisant l'expression de l'autocorrélation, on a :

$$R_{xx}(\tau) = x(\tau) * x^*(-\tau) \quad (\text{II. 8})$$

Donc :

$$E_x(f) = f\{x(\tau) * x^*(-\tau)\} \quad (\text{II. 9})$$

$$E_x(f) = f\{x(\tau)\}f\{x^*(-\tau)\} \quad (\text{II. 10})$$

$$E_x(f) = X(f)X^*(f) \quad (\text{II. 11})$$

D'où le résultat :

$$E_x(f) = |X(f)|^2 \quad (\text{II. 12})$$

Cette expression montre que $E(f)$ est l'énergie du signal à la fréquence f , d'où le nom de densité spectrale d'énergie.

- **Densité inter spectrale d'énergie (DISE)**

Soient $x(t)$ et $y(t)$ deux signaux à énergie finie, et $R_{xy}(\tau)$ sa fonction d'inter corrélation, on appelle densité inter spectrale d'énergie la fonction notée $E_{xy}(f)$, transformée de Fourier de $R_{xy}(\tau)$:

$$E(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} R_{xy}(\tau) e^{-j2\pi f\tau} d\tau = X(f)Y^*(f) \quad (\text{II. 13})$$

De façon similaire et évidente, on a, en permutant les signaux :

$$E(f) = X(f)Y^*(f) = P_{yx}^*(f) \quad (\text{II. 14})$$

II.3 Notions d'estimation

Le but est d'appliquer la statistique au signal. Le domaine de la statistique fait partie de la théorie de la décision : prendre la décision vis-à-vis d'un paramètre au sens le plus large possible en optimisant un critère à partir des observations. Les paramètres à estimer seront notés x . On supposera de plus disponible un vecteur d'observations y de la forme

$$y = [y_1; y_2; \dots; y_n]^T \quad (\text{II. 15})$$

Le paramètre à estimer peut être aléatoire ou déterministe.

Par exemple : Soit un signal aléatoire sinusoïdal de la forme :

$$s(t) = a \cdot \sin(\omega t) + b(t) \quad (\text{II. 16})$$

Où $b(t)$ est un bruit, ω est la pulsation du signal (supposée connue) et a est une constante inconnue qu'on cherche à estimer à partir des observations de $s(t)$ à des instants t_i .

Comme le montre l'exemple précédent, les observations seront donc toujours considérées comme aléatoires. On notera $\hat{x}(y)$ l'estimée au mieux d'un paramètre x à partir des observations y : L'estimée étant une fonction de la mesure, elle sera donc également considérée comme aléatoire. Cette considération est indépendante de x qui lui peut être aléatoire ou déterministe.

Si \hat{x} est à valeurs continues, on parle d'estimation. Si \hat{x} est à valeurs discrètes on parle alors de détection. C'est le cas du signal radar où on désire une détection de type présence ou absence. [13]

L'erreur d'estimation appelée innovation peut être définie par :

$$\tilde{x} = x - \hat{x} \quad (\text{II. 17})$$

II.3.1 Ce que les estimateurs cherchent à estimer

Le but des estimateurs est donc d'estimer la densité spectrale de puissance d'un signal échantillonné (à temps discret) aléatoire stationnaire ergodique à puissance moyenne finie et de durée infinie. Pour ce faire, on se place dans le cadre des signaux à temps discret et fréquence continue. [15]

II.3.2 Performance d'un estimateur

- **Biais d'un estimateur**

On appelle biais d'un estimateur la quantité $B(x)$ définie par :

$$B(x) = E(\hat{x}) - x \quad (\text{II. 18})$$

Cette quantité caractérise l'écart entre la moyenne des estimées (possibles) et le paramètre à estimer. On recherchera donc généralement un estimateur non-biaisé. [12]

- **Variance de l'estimateur**

La variance de l'estimateur est la quantité qui est généralement minimisée. Elle vaut :

$$\text{var}(\tilde{x}) = E(\tilde{x}^2) \quad (\text{II. 19})$$

$$\text{var}(\tilde{x}) = E((x - \hat{x})^2) \quad (\text{II. 20})$$

$$\text{var}(\tilde{x}) = E(x^2) - 2E(x\hat{x}) + E(\hat{x}^2) \quad (\text{II. 21})$$

Comme nous allons le montrer, \hat{x} sera obtenu par le principe d'orthogonalité, la formule de Pythagore est applicable, on obtient alors : [13]

$$\text{var}(\tilde{x}) = E(x^2) - E(\hat{x}^2) \quad (\text{II. 22})$$

II.3.3 Estimation de la moyenne

Soit N échantillons $[x_0, x_1, \dots, x_{N-1}]$ d'un signal aléatoire. On définit l'estimée \hat{m} de $E[x]$ par :

$$\hat{m} = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} x_k \quad (\text{II. 23})$$

On remarque que \hat{m} est un estimateur de la moyenne empirique. Le résultat de l'estimation est meilleur que le nombre d'expériences est grand. On montre que l'estimateur de la moyenne empirique converge vers l'espérance mathématique. [12]

II.3.4 Estimateur de la fonction d'autocorrélation

Rappelons que dans le cas discret, la fonction d'autocorrélation d'un signal aléatoire x ; supposé ergodique, est définie par [13,15]:

$$R_x(k) = E\{x_n x_{n+k}\} \quad (\text{II. 24})$$

$$= \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{n=-N}^N x_n x_{n+k} \quad (\text{II. 25})$$

Plusieurs estimateurs sont alors possibles :

- Le premier ne tient pas compte du nombre d'échantillons disponibles qui varie avec le pas k :

$$\hat{R}_x(k) = \frac{1}{2N+1} \sum_{n=-N}^N x_n x_{n+k} \quad (\text{II. 26})$$

Dans ce cas, on suppose que l'on dispose de la suite des échantillons du signal de longueur $(2N+1)$:

$$[x_{-N}, x_{-N+1}, \dots, x_0, x_1, \dots, x_{N-1}, x_N] \quad (\text{II. 27})$$

Cet estimateur est évidemment biaisé.

- Un deuxième estimateur prend en compte le nombre des échantillons restant à l'indice k . De plus, sachant que la fonction d'autocorrélation est paire, il suffit de la calculer pour des valeurs de k positives. En supposant disponible la séquence du signal de N points $[x_0, x_1, \dots, x_{N-1}]$:

On écrira alors :

$$\hat{R}_x(k) = \frac{1}{N-k} \sum_{n=0}^{N-k-1} x_n x_{n+k} \quad (\text{II. 28})$$

On montre que cet estimateur est non biaisé. Il suffit pour cela d'écrire :

$$E\{\hat{R}_x(k)\} = \frac{1}{N-k} \sum_{n=0}^{N-k-1} E\{x_n x_{n+k}\} \quad (\text{II. 29})$$

$$= \frac{1}{N-k} \sum_{n=0}^{N-k-1} \hat{R}_x(k) \quad (\text{II. 30})$$

$$= R_x(k) \quad (\text{II. 31})$$

On démontre que la variance de cet estimateur tend vers 0 quand N tend vers l'infini. Cet estimateur est donc consistant.

II.4 Estimation non paramétrique

On peut citer les principales techniques d'estimation non paramétrique des signaux stationnaires ergodiques.

II.4.1 Le périodogramme

La méthode du périodogramme fut introduite par Schuster en 1898. Le périodogramme est une méthode d'estimation de la densité spectrale de puissance d'un signal. La méthode directe de calcul périodogramme utilise la transformée de Fourier rapide (FFT) du signal. [16]

Pour un processus ergodique, la séquence d'autocorrélation peut, en théorie, être déterminée avec une moyenne temporelle:

$$R_x(k) = \lim_{N \rightarrow \infty} \left\{ \frac{1}{2N+1} \sum_{n=-N}^N x(n+k)x^*(n) \right\} \quad (\text{II.32})$$

Cependant, si $x(n)$ est mesurée sur un intervalle fini seulement, alors la fonction d'autocorrélation doit être estimée c'est:

$$\hat{R}_x(k) = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x(n+k)x^*(n) \quad (\text{II.33})$$

En prenant la transformée de Fourier, le périodogramme devient:

$$\hat{P}_{per}(w) = \frac{1}{N} \left| \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)w_r(n) e^{-jwn} \right|^2 \quad (\text{II.34})$$

Pour tronqué le signal, le périodogramme est en fait la multiplication entre le signal et une fenêtre rectangulaire, c'est convolution de spectre du signal avec un sinus cardinal. Le fait de tronquer le signal induit deux phénomènes :

- Elargissement du lobe principal (perte de résolution)
- Une amplitude important des lobes secondaires.

Pour remédier à ces problèmes de troncature, est de remplacer la fenêtre $w_r(n)$ par une fenêtre générale $w(n)$ c'est le principe de le périodogramme modifié [16]:

$$\hat{P}_{per,m}(w) = \frac{1}{NU} \left| \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)w(n) e^{-jwn} \right|^2 \quad (\text{II.35})$$

Où N est la longueur de la fenêtre.

$$U = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} |w(n)|^2 \quad (\text{II.36})$$

U : est une constante introduite pour que le périodogramme modifié soit asymptotiquement non-biaisé. La variance du périodogramme modifié est approximativement la même que celle du périodogramme.

En fait, la fenêtre introduit un compromis entre la résolution spectrale (largeur du lobe principal) et la fuite de spectre (amplitude du lobe adjacent).

II.4.2 La méthode de Bartlett

Pour améliorer les performances de l'estimateur précédent on calcule plusieurs périodogramme sur des signaux indépendants.

La méthode de Bartlett consiste à moyenner le périodogramme. Elle produit un estimateur consistant du spectre. [17]

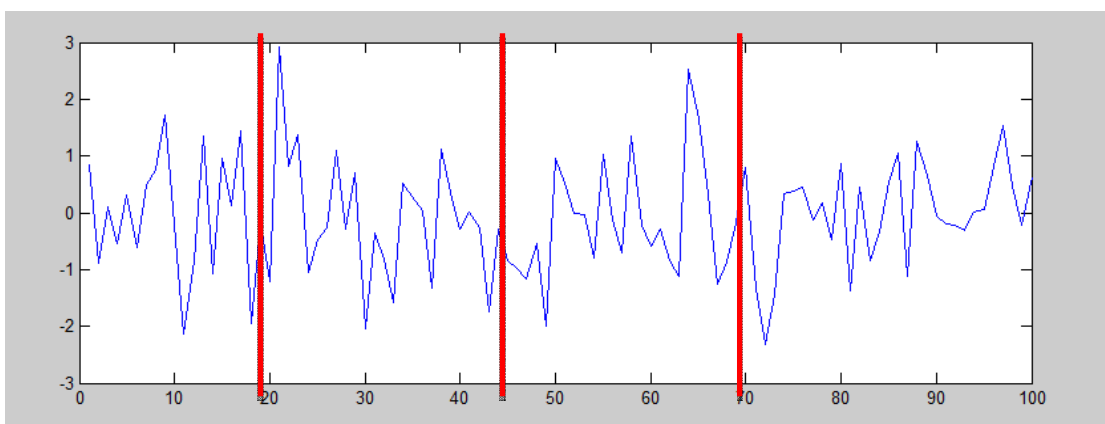


Fig.II.1. Représentation du signal segmenté

Soient $x_i(n), i = 1, 2, \dots, L, L$ réalisations décorréliées d'un processus aléatoire $x(n)$ sur un intervalle $0 \leq n < L$.

$$\hat{S}_{per}^i(w) = \frac{1}{K} \left| \sum_{n=0}^{K-1} x_i(n) w(n) e^{-jwn} \right|^2 \quad (\text{II. 37})$$

$\hat{S}_{per}^i(w)$ est le périodogramme de $x_i(n)$, le moyennage de ces périodogrammes est:

$$\hat{P}_B(w) = \frac{1}{L} \sum_{i=1}^L \hat{S}_{per}^i(w) \quad (\text{II. 38})$$

Finalement, l'estimateur de Bartlett est:

$$\hat{P}_B(w) = \frac{1}{L} \sum_{i=0}^{L-1} \left| \sum_{n=0}^{K-1} x(n + iK) e^{-jwn} \right|^2 \quad (\text{II. 39})$$

Du fait le moyennage des segments, la variance presque divisée sur le nombre des segments (L) qu'on « L » augmente, la variance et diminue, au même temps que les segments étant plus courts, la résolution diminue.

II.4.3 La méthode de Welch

En 1967, Welch proposa deux modifications à la méthode de Bartlett. La première est de permettre aux séquences $x_i(n)$ de se recouvrir et la seconde est de rajouter une fenêtre à chacune de ces séquences, produisant ainsi un ensemble des périodogrammes modifiés qui sont moyennés. [15,18]

En supposant que les séquences successives sont décalées de D ($\leq K$) échantillons et que chacune d'entre elles est de longueur K , la i -th séquence est donnée par:

$$x_i(n) = x(n + iD), n = 0, 1, \dots, K - 1. \quad (\text{II. 40})$$

Ainsi, la quantité de recouvrement (overlap) entre $x_i(n)$ et $x_{i+1}(n)$ est $K - D$ points, et si L séquences couvrent les N données du signal, alors

$$N = K + D(L - 1) \quad (\text{II. 41})$$

Par exemple, sans recouvrement ($D = K$) on a $L=N/K$ sections de longueur K comme dans la méthode de Bartlett. D'un autre côté, si les séquences se recouvrent de 50% ($D = K/2$), alors on peut former :

$$L = \frac{2N}{K} - 1 \quad (\text{II. 42})$$

L sections de longueur K . On peut maintenir la même résolution (longueur de section) que la méthode de Bartlett tout en doublant le nombre de périodogrammes modifiés qui sont moyennés ($K \approx 2N/L$), réduisant ainsi la variance. Cependant, avec 50% de recouvrement, on peut aussi former :

$$L = \frac{N}{K} - 1 \quad (\text{II. 43})$$

L sections de longueur $2K$. On peut donc améliorer la résolution et maintenir la même variance que la méthode de Bartlett. Par conséquent, en permettant les séquences de se recouvrir, il est possible d'augmenter le nombre et/ou la longueur des séquences qui sont moyennées, pour arriver à un compromis entre la réduction de la variance et une meilleure résolution.

La méthode de Welch peut s'écrire directement en fonction de $x(n)$:

$$\hat{P}_B(w) = \frac{1}{NU} \sum_{i=0}^{L-1} \left| \sum_{n=0}^{K-1} x(n+iD)w(n) e^{-jwn} \right|^2 \quad (\text{II. 44})$$

Où N est la longueur de la fenêtre.

$$U = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} |w(n)|^2 \quad (\text{II. 45})$$

II.4.4 La méthode de Blackman-Tukey

Cette technique est directement inspirée du théorème de Wiener-Kintchine. En effet, ce dernier nous dit que la DSP d'un signal est la TF de sa fonction de corrélation. Cette

méthode estime donc tout d'abord la fonction de corrélation R_{xx} du signal discret $x(n)$, puis en réalise la TFD. [20]

Dans la méthode de Blackman-Tukey la variance du périodogramme est réduite en ajoutant une fenêtre à $\hat{R}_{xx}(k)$ afin de réduire la contribution d'estimées peu fiables du périodogramme. La méthode de Blackman-Tukey s'écrit donc:

$$\hat{P}_{BT}(w) = \sum_{k=-M}^M \hat{R}_{xx}(k) e^{-jwk} \quad (\text{II. 46})$$

Avec :

$$\hat{R}_{xx}(k) = R_{xx}(k)w(k) \quad (\text{II. 47})$$

Ou $\hat{R}_{xx}(k)$ est un estimateur de la fonction de corrélation, donnée par :

$$\hat{R}_{xx}(m) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-m-1} x^*(k) x(k+m) \quad (\text{II. 48})$$

$$\hat{R}_{xx}(m) = \frac{1}{N-m} \sum_{k=0}^{N-m-1} x^*(k) x(k+m) \quad (\text{II. 49})$$

L'estimateur de $R_{xx}(m)$ (c'est quoi $R_{xx}(m)$) est biaisé alors que l'estimateur de $R_{xx}(0)$ est non biaisé.

Blackman-Tukey a suggéré de prendre m de l'ordre de 10 % du N . l'application d'une fenêtre est possible pour diminuer la variance sur l'estimation de la fonction de corrélation. [18]

La variance sur $\hat{R}_{xx}(m)$ augmente lorsque m se rapproche de N , c'est pour qu'on n'utilise que m points de corrélation. Néanmoins, quand m diminue, le biais augmente

⇒ Dilemme biais-variance.

II.4.5 La Méthode de Multitaper

L'estimation de la densité spectrale de puissance par périodogramme, est une opération de troncature des données $\{x(n)\}_{n=0}^{N-1}$. Une seule interprétation de cette enregistrement a durée finie est obtenu par la pondération d'une série infinie d'un processus $x(n)$ avec la fenêtre (Taper) rectangulaire. Puisque la variance et le biais de l'estimation par

périodogramme est inacceptable, la réduction de ces phénomènes indésirables se fait par un bon choix des fenêtres de pondérations appliquées au signal tronqué, et cela se fait par le périodogramme moyenné, ou par le périodogramme moyenné modifié (Welch).

En 1982, THOMSON suggère une autre approche d'estimation spectrale qui ressemble à celle de périodogramme. Dans ce dernier une seule fenêtre de pondération est utilisée pour tronquer chaque tranche du signal, par la méthode du Multitaper, un ensemble des fenêtres orthonormées est utilisé pour tronquer de la même tranche et puis par la suite on calcule la moyenne de ces données tronquées. Par conséquent ce moyennage réduit la variance de l'estimation, C'est le principe de multitaper. [19]

THOMSON suggère des fenêtres de pondération basées sur la structure « Discret prolateSphéroïdalSéquence (DPSs) », ou encore fenêtre de Slepian, voir les références [20,21].

Soit l'enregistrement des données $\{x(n)\}_{n=0}^{N-1}$ de longueur N, on considère un ensemble de K fenêtres (Tapers) $\{w_k(n); 0 \leq n \leq N - 1; 0 \leq k \leq K - 1\}$.

Ces fenêtres sont assumés d'être orthonormées :

$$\sum_{n=0}^{N-1} w_k(n)w_l(n) = \begin{cases} 1 & k = l \\ 0 & k \neq l \end{cases} \quad (\text{II. 50})$$

Soit $P_{x,k}(w)$ l'estimateur du périodogramme basé sur k fenêtres :

$$\hat{P}_{x,k}(w) = \frac{1}{N} \left| \sum_{n=0}^{N-1} x(n)w_k(n) e^{-jwn} \right|^2 \quad (\text{II. 51})$$

L'estimation Multitaper moyenné (MTM) est donnée par :

$$\hat{P}_{MTM}(w) = \frac{1}{K} \sum_{k=0}^{K-1} \hat{P}_{x,k}(w) \quad (\text{II. 52})$$

L'estimateur (MTM) est la moyenne des estimateurs directs nommés spectrales propres (eigenspectra), qui utilisent un ensemble des fenêtres orthonormées, Thomson montre l'indépendance de chaque estimateur $\hat{P}_{x,k}(w)$ pour chaque fréquence. Le succès de cette approche repose dans la sélection de K fenêtres orthonormées. Pour comprendre ceci, calculons le biais et la moyenne de $P_{x,k}(w)$.

On a :

$$E\{\hat{P}_{x,k}(w)\} = \frac{1}{2\pi N} \int_{-\pi}^{\pi} P_x(\tau) P_{k,w}(w - \tau) \quad (\text{II. 53})$$

Ou :

$$P_{x,k}(w) = TF\{w_k(n) * w_k(-n)\} = |W_k(w)|^2 \quad (\text{II. 54})$$

$$\Rightarrow E\{\hat{P}_{MTM}(w)\} = \frac{1}{2\pi N} \int_{-\pi}^{\pi} P_x(\tau) \bar{P}_{k,w}(w - \tau) \quad (\text{II. 55})$$

Ou :

$$\bar{P}_w(w) = \frac{1}{K} \sum_{k=0}^{K-1} |W_k(w)|^2 \quad (\text{II. 56})$$

La fonction $\bar{P}_w(w)$ est la fenêtre spectrale de l'estimateur Multitaper (MTM) moyennée qui est obtenu par le moyennage du spectre de fenêtre individuels, pour que $\bar{P}_w(w)$ produit alors moins de leakage, alors toutes les K fenêtres spectrales doivent donner une bonne protection contre le leakage, ce pendant chaque fenêtre doit avoir des faibles lobes secondaires, par conséquent la moyenne des K périodogramme réduit d'avantage la variance $\hat{P}_{MTM}(w)$. La réduction dans la variance est possibles sauf si $\hat{P}_{x,k}(w)$ sont mutuellement décorrélés pour la même variance, de plus, la variance totale est alors réduit par un facteur de $1/K$.

II.4.6 La Méthode de minimum de variance (Capon)

Cette méthode [16] que nous envisageons ne fait pas d'hypothèse sur la fonction de corrélation. Pour la présenter, supposons qu'on filtre le signal $x(n)$ pour obtenir un signal $y(n)$:

$$y(n) = \sum_{k=0}^P a_k x(n - k) \quad (\text{II. 57})$$

Les coefficients a_k du filtre sont choisis de façon à minimiser la puissance du signal en sortie :

$$\sum_{k=0}^P a_k e^{-jwk} = 1 \quad (\text{II. 58})$$

On cherche donc à conserver la puissance à une fréquence f , tout en minimisant les puissances aux autres fréquences. Si donc le signal contient une composante à cette fréquence, cette composante sera rehaussée par rapport au reste qu'on cherche à minimiser. En observant la puissance en sortie du filtre en fonction de f , on constate donc des pics aux fréquences présentes dans le signal $x(n)$. Pour calculer ce filtre, soit $a = [a_0, a_1, \dots, a_P]^T$ le vecteur des coefficients du filtre et notons que :

$$E\{|y(n)|^2\} = a^H R a \quad (\text{II. 59})$$

Avec :

$$R = \begin{pmatrix} R_{xx}(0) & R_{xx}(-1) & \dots & R_{xx}(-P) \\ R_{xx}(1) & R_{xx}(0) & \dots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ R_{xx}(P) & \cdot & \dots & R_{xx}(0) \end{pmatrix} \quad (\text{II. 60})$$

Le problème est donc le suivant : $\min_a a^H R a$ sous contraintes

$$e^H(f) a = 1 \quad (\text{II. 61})$$

Ou

$$e(f) a = [1, e^{jw}, \dots, e^{jwP}]^2 \quad (\text{II. 62})$$

Le vecteur a qui satisfait ces conditions est donné par :

$$a = \frac{R^{-1} e}{e^H R^{-1} e} \quad (\text{II. 63})$$

La puissance en sortie du filtre est prise comme «estimateur spectral» :

$$P_{\text{capon}}(f) = \frac{1}{e^H(f) R^{-1} e(f)} \quad (\text{II. 64})$$

La méthode de capon ne nécessite aucune hypothèse spéciale sur le signal. De plus, elle permet en général d'obtenir une meilleure résolution que le périodogramme, notamment pour de faibles valeurs de N .

II.5 Caractéristique et performance

Dans cette partie on va étudier les caractéristiques de chaque méthode d'estimation spectrale et on compare la qualité de chaque méthode. Le rapport spectre de puissance sur la variance de cette densité mesure la qualité Q_A :

$$Q_A = \frac{\{E[P_{xx}^A]\}^2}{\text{var}[P_{xx}^A(f)]} \quad (\text{II. 65})$$

Où le A : représente la méthode d'estimation spectrale (périodogramme, Blackman-Tukey, welch..)

II.5.1 Les performances de périodogramme

On montre par la suite le calcul du biais et de variance :

$$E[P_m(f)] = \int_{-1/2}^{1/2} \Gamma_{xx}(\theta) W_B(f - \theta) d\theta \quad (\text{II. 66})$$

$$\text{var}[P_{PER}(f)] = \Gamma_{xx}^2(f) \left[1 + \left(\frac{\sin 2\pi f N}{N \sin 2\pi f} \right)^2 \right] \quad (\text{II. 67})$$

Où :

$$W_B(f) = \frac{1}{N} \left(\frac{\sin \pi f N}{\sin \pi f} \right)^2 \quad (\text{II. 68})$$

Lorsque $(N \rightarrow \infty)$,

$$E[P_{xx}(f)] \rightarrow \Gamma_{xx}(f) \int_{-1/2}^{1/2} W_B(\theta) d\theta = w_B(0) \Gamma_{xx}(f) = \Gamma_{xx}(f) \quad (\text{II. 69})$$

$$\text{var}[P_{xx}(f)] \rightarrow \Gamma_{xx}^2(f) \quad (\text{II. 70})$$

Donc l'estimation de la densité spectrale de puissance avec le periodogramme est non biaisé, mais cet estimateur n'est pas consistant parce que la variance n'approche pas de zéro même si on augmente le nombre d'échantillons,

Le periodogramme caractérisé par facteur de qualité égale a 1 :

$$Q_{per} = \frac{\Gamma_{xx}^2(f)}{\Gamma_{xx}^2(f)} = 1 \quad (\text{II. 71})$$

Le facteur de qualité est Q_{per} est fixe et indépendant de N, c'est une autre indication que cette méthode a une mauvaise qualité.

II.5.2 Les performances de la méthode de Bartlett

On montre aussi le calcul de biais et de variance :

$$E[P_{xx}^m(f)] = \int_{-1/2}^{1/2} \Gamma_{xx}(\theta) W_B(f - \theta) d\theta \quad (\text{II. 72})$$

$$var[P_{xx}^m(f)] = \frac{1}{L} \Gamma_{xx}^2(f) \left[1 + \left(\frac{\sin 2\pi f N}{N \sin 2\pi f} \right)^2 \right] \quad (\text{II. 73})$$

$$W_B(f) = \frac{1}{M} \left(\frac{\sin \pi f N}{\sin \pi f} \right)^2 \quad (\text{II. 74})$$

Lorsque $(N \rightarrow \infty)$ et $(M \rightarrow \infty)$, $L = N/M$ fixé,

$$E[P_{xx}^m(f)] = \Gamma_{xx}(f) \int_{-1/2}^{1/2} W_B(f) df = \Gamma_{xx}(f) w_B(0) = \Gamma_{xx}(f) \quad (\text{II. 75})$$

$$var[P_{xx}^m(m)] \rightarrow \frac{1}{L} \Gamma_{xx}^2(f) \quad (\text{II. 76})$$

On observe que l'estimé de la densité spectrale est non biaisé et si L N augmentent, l'estimation est encore consistante. Cette dernière est caractérisée par le facteur de qualité :

$$Q_m = L = \frac{N}{M} \quad (\text{II. 77})$$

La résolution fréquentielle de cette méthode, est mesurée en prenant la longueur du lobe principale de la fenêtre rectangulaire a -3dB

$$\Delta f = \frac{0.9}{M} \quad (\text{II. 78})$$

Donc, $M = 0.9/\Delta f$

Et le facteur de qualité devient :

$$Q_m = \frac{N}{0.9/\Delta f} = 1.1N\Delta f \quad (\text{II. 79})$$

II.5.3 Les performances de la méthode de Welch

La variance de welch de la densité spectral estimé est :

$$E[P_{xx}^m(f)] = \int_{-1/2}^{1/2} \Gamma_{xx}(\theta)W_B(f - \theta)d\theta \quad (\text{II. 80})$$

Ou

$$W(f) = \frac{1}{MU} \left| \sum_{n=0}^{M-1} w(n)e^{-j2\pi fn} \right|^2 \quad (\text{II. 81})$$

Et

$$var[P_{xx}^w(f)] = \begin{cases} \frac{1}{L} \Gamma_{xx}^2(f) & \text{non chevauchement} \\ \frac{9}{8L} \Gamma_{xx}^2(f) & 50\% \text{chevauchement} \end{cases} \quad (\text{II. 82})$$

Ou $(N \rightarrow \infty)$ et $(M \rightarrow \infty)$, la moyenne converge vers :

$$var[P_{xx}^w(f)] \rightarrow \Gamma_{xx}(f) \quad (\text{II. 83})$$

Et la variance converge vers zéro, donc cet estimateur est consistant.

Sous les conditions du facteur de qualité :

$$Q_w = \begin{cases} L = \frac{N}{M} & \text{non chevauchement} \\ \frac{8L}{9} = \frac{16N}{9M} & \text{50\% chevauchement} \end{cases} \quad (\text{II. 84})$$

D'une autre manière, la longueur spectrale de la fenêtre triangulaire a -3dB est :

$$\Delta f = \frac{1.28}{M} \quad (\text{II. 85})$$

Par conséquent, le facteur de qualité :

$$Q_w = \begin{cases} 0.78N\Delta f & \text{non chevauchement} \\ 1.39N\Delta f & \text{50\% chevauchement} \end{cases} \quad (\text{II. 86})$$

II.5.4 Les performances de la méthode de Blackman-Tukey

On montre aussi le calcul du biais et de variance :

$$E[P_{xx}^{BT}(f)] = \int_{-1/2}^{1/2} \Gamma_{xx}(\theta) W_B(f - \theta) d\theta \quad (\text{II. 87})$$

$$\text{var}[P_{xx}^{BT}(f)] = \Gamma_{xx}^2(f) \left[\frac{1}{L} \sum_{M=-(N-1)}^{N-1} w^2(m) \right] \quad (\text{II. 88})$$

Ou $w(m)$ est la fenêtre, séquence utilise pour pondérer la séquence estimée de la fonction de corrélation :

$$\frac{1}{N} \sum_{N=-(M-1)}^{M-1} w^2(n) = \begin{cases} \frac{2M}{N} & \text{fenetre rectangulaire} \\ \frac{2M}{3N} & \text{fenetre triangulaire} \end{cases} \quad (\text{II. 89})$$

Le facteur de qualité de la fenêtre triangulaire est :

$$Q_{BT} = 1.5 \frac{N}{M} \quad (\text{II. 90})$$

Puisque la longeu de fenêtre est $2M-1$, la résolution fréquentielle est mesuré a (-3dB) est :

$$\Delta f = \frac{1.28}{2M} = \frac{0.64}{M} \quad (\text{II. 91})$$

Et d'un autre coté :

$$Q_{BT} = \frac{1.5}{0.64} N \Delta f = 2.34 N \Delta f \quad (\text{II. 92})$$

II.6 Les fenêtres d'apodisation[15]

Les fenêtres d'apodisation (appelées aussi fenêtres de pondération) ont une place primordiale dans l'utilisation des méthodes d'analyse spectrale ayant pour base une stratégie de type Fourier. Leur rôle principal est de mieux contrôler l'influence des lobes secondaires de ces estimateurs spectraux.

Dans les méthodes du type corrélogramme, la fenêtre d'apodisation est appliquée sur la fonction d'autocorrélation. La fenêtre spectrale est la transformée de Fourier de la fenêtre temporelle, d'où le terme d'apodisation linéaire. Tandis que dans les méthodes du type périodogramme, la fenêtre d'apodisation est appliquée sur les données. La fenêtre spectrale est le module carré de la transformée de Fourier de la fenêtre temporelle, d'où le terme d'apodisation quadratique. Cela implique des caractéristiques différentes pour les fenêtres spectrales suivant que l'apodisation soit linéaire ou quadratique. Dans tous les cas, une apodisation dégrade la résolution fréquentielle par rapport à la fenêtre naturelle rectangulaire.

Les fenêtres d'apodisations quadratiques sont bénéfiques pour des spectres de dynamique importante et entraînent une diminution des fuites d'énergie (énergie dissipée dans les lobes secondaires par rapport au lobe principal), et donc du biais, sans améliorer la variance (méthodes reposant sur le principe du périodogramme). Dans ce cas le nombre de points N de la fenêtre peut être quelconque, le maximum de la fenêtre est centré sur $N/2$ et égal à 1, on aura :

$$h(n) = h(N - 1 - n), \text{ pour } : 0 \leq n \leq N - 1 \quad (\text{II. 93})$$

$h(n)$ représentant la fenêtre d'apodisation en temps et :

$$TFD[h(n)] = H(w) = \sum_{n=0}^{N-1} h(n) e^{-jwn} \quad (\text{II. 94})$$

Dans le cas du périodogramme, la fenêtre est appliquée directement aux données :

$$\hat{P}_{per}(w) = \frac{1}{N} \left| \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)h(n) e^{-jwn} \right|^2 \quad (\text{II. 95})$$

La fenêtre spectrale est alors proportionnelle au module carré de la TFD de la fenêtre d'apodisation :

$$Q(w) = |H(w)|^2 \quad (\text{II. 96})$$

Les fenêtres d'apodisations linéaires ont un impact important sur la décroissance de la variance (méthode reposant sur le principe du corrélogramme). Dans ce cas, la fenêtre a (en principe) un nombre impair de points $2M-1$. Si la fenêtre d'apodisation linéaire $g(m)$ est définie pour $-M < m < +M$, son maximum est positionné en $m=0$ et est égal à $g(0)=1$ pour l'ensemble des fenêtres étudiées. La fenêtre est alors symétrique par rapport à l'indice 0 :

$$g(m) = g(-m), \quad \text{pour } -M < m < +M \quad (\text{II. 97})$$

La TFD de la fenêtre est alors définie par :

$$TFD[g(m)] = G(w) = \sum_{m=-M+1}^{M-1} g(m)e^{-jwn} \quad (\text{II. 98})$$

De par cette symétrie, les fenêtres linéaires ont une TFD réelle. La positivité des mesures de densité spectrale n'est assurée que si la fenêtre ne contient pas de lobe négatif.

Dans le cas du corrélogramme (méthode Blackman-Tukey), la fenêtre est appliquée à l'estimateur de la fonction d'autocorrélation :

$$\hat{P}_{per}(w) = TFD[g(m)R_x(m)] \quad (\text{II. 99})$$

La fenêtre spectrale est alors égale à la TFD de la fenêtre d'apodisation :

$$Q(w) = G(w) \quad (\text{II. 100})$$

On présente dans le tableau ci-dessous les principales caractéristiques temporelles et fréquentielles de quelques fenêtres d'apodisation et on peut citer :

- Rectangulaire (ou naturelle),

- Bartlett (ou triangulaire),
- Hanning,
- Hamming,
- Blackman,

Fenêtres	sidelobe dB	$(\Delta f)_{3dB}$
rectangulaire	-13	0.89/N
Bartlett	-27	1.28/N
Hanning	-32	1.44/N
Hamming	-43	1.30/N
Blackman	-58	1.68/N

Tab.II.1. Caractéristiques des fenêtres.

II.7 Conclusion

L'analyse spectrale des signaux nécessite des techniques d'estimation qui se base essentiellement sur les notions élémentaires de probabilité et de statistiques (biais, variance).

Les actions des signaux physiques se manifestent sous forme de puissance et d'énergie, cependant les techniques de détection de cette manifestation sont variées. C'est pour cette raison qu'on a présenté dans ce chapitre les différentes formes d'estimation spectrale dans le but de mieux présenter les signaux physiques bruités.

Différentes techniques ont été présentées dans le but de donner une meilleure estimation de la DSP.

Un facteur de mesure de qualité permet de valoriser une technique par rapport à une autre.

Contents

II.1	Introduction	20
II.2	Notion de corrélation et la densité spectrale	20
II.2.1	L'autocorrélation	20
II.2.2	L'intercorrélation	21
II.2.3	La densité spectrale	22
II.3	Notions d'estimation	23
II.3.1	Ce que les estimateurs cherchent à estimer	24
II.3.2	Performance d'un estimateur	24
II.3.3	Estimation de la moyenne	25
II.3.4	Estimateur de la fonction d'autocorrélation	25
II.4	Estimation non paramétrique	27
II.4.1	Le périodogramme	27
II.4.2	La méthode de Bartlett	28
II.4.3	La méthode de Welch	29
II.4.4	La méthode de Blackman-Tukey	30
II.4.5	La Méthode de Multitaper	31
II.4.6	La Méthode de minimum de variance (Capon)	33
II.5	Caractéristique et performance	35
II.5.1	Les performances de périodogramme	35
II.5.2	Les performances de la méthode de Bartlett	36
II.5.3	Les performances de la méthode de Welch	37
II.5.4	Les performances de la méthode de Blackman-Tukey	38
II.6	Les fenêtres d'apodisation[15]	39
II.7	Conclusion	41

III.1 Introduction

Nous avons apporté de l'estimation de la densité spectrale de puissance d'un point de vue théorique, dans ce chapitre nous allons présenter une étude de simulation des diverses méthodes d'estimation non paramétrique de la densité spectrale de puissance.

III.2 L'influence de rapport signal sur bruit sur le spectre

On prend un signal de deux sinus de fréquence $f_1=20$ Hz et $f_2=50$ Hz et d'amplitudes $A_1=1$ et $A_2=0.5$, noyé dans un bruit de rapport signal sur bruit (RSB=0)

```
y1=sin(2*pi*20*t); y2=0.5*sin(2*pi*50*t);
```

```
signal=y1 + y2
```

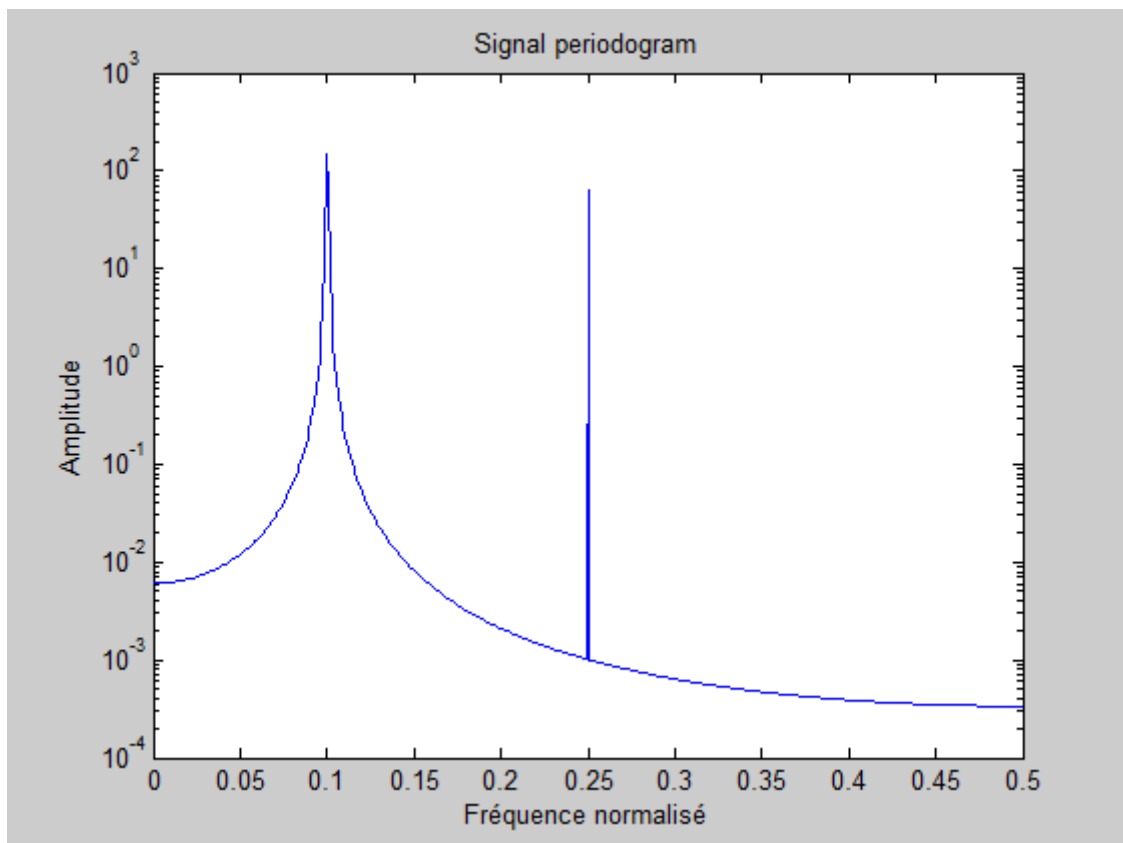


Fig.III.1. La DSP par le periodogramme du « signal »,RSB=0dB

Dans la figure (III.2) on présente le même signal avec RSB=10 dB

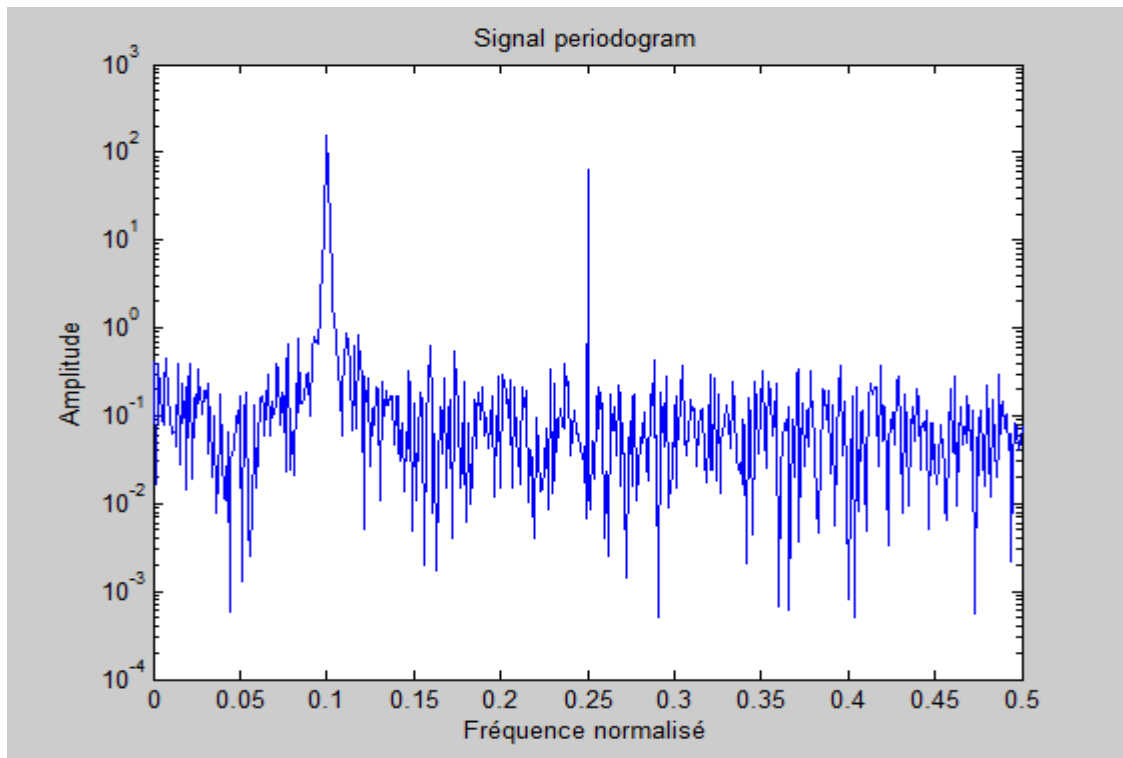


Fig.III.2. La DSP par le periodogramme du « signal »,RSB=10dB

Dans la figure (III.3) on présente le même signal avec RSB=25 dB

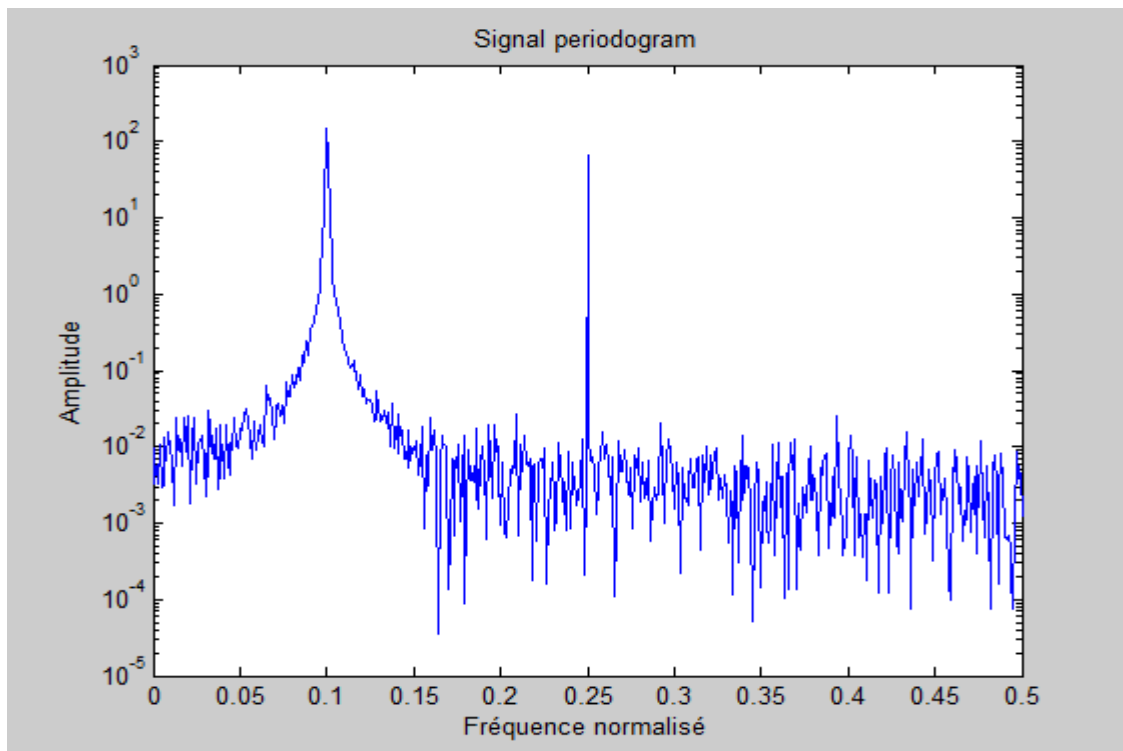


Fig.III.3. La DSP par le periodogramme du « signal »,RSB=25dB

Dans la figure (III.4) on présente le même signal avec $RSB=50$ dB

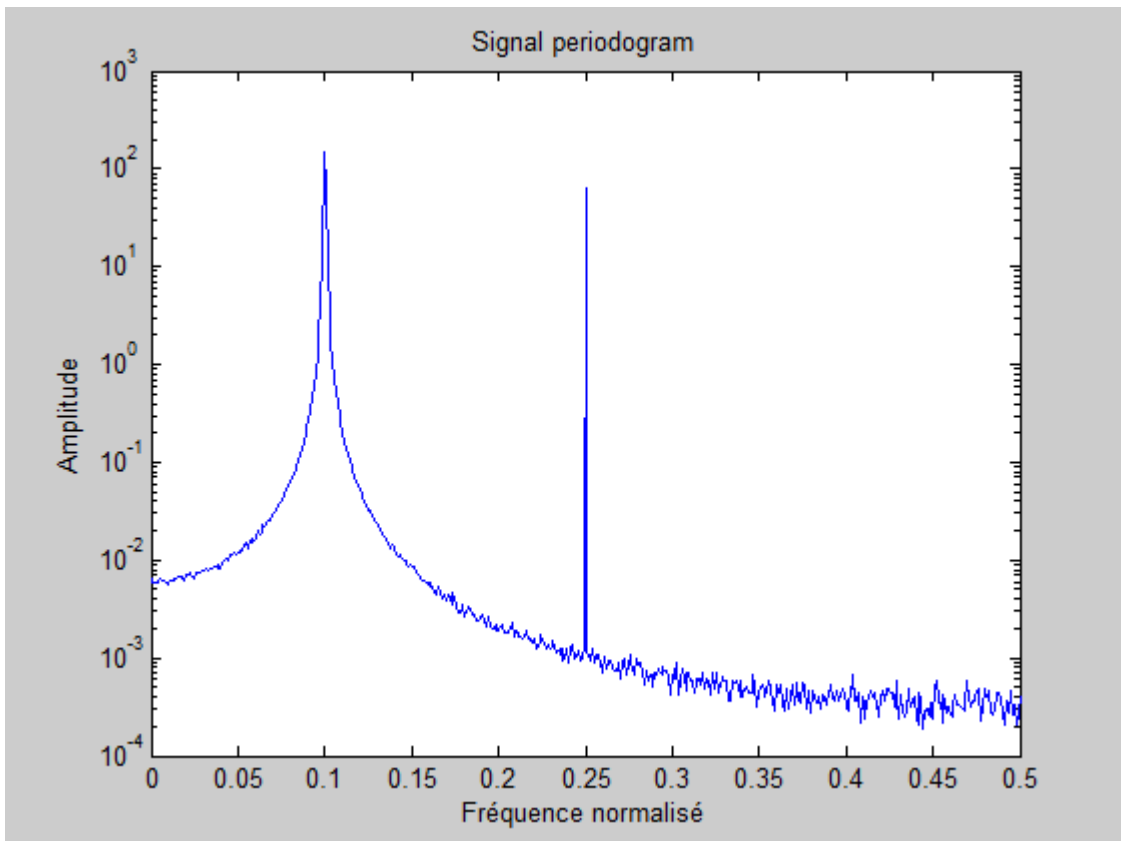


Fig.III.4. La DSP par le periodogramme du « signal », $RSB=50$ dB

III.3 Les techniques d'estimation non paramétrique

✚ La méthode de périodogramme

Il utilise tout simplement l'algorithme de FFT

1. Prendre le signal à analyser.
2. Convolution du signal avec le sinus cardinal (du signal temporel boxcar).
3. Prendre le module carré du spectre du signal résultant.
4. Appliquer un FFT sur le signal tout entier.
5. Prendre le module carré du FFT.
6. Normalisation.

On prend le signal de deux sinus de fréquence $f_1=20$ Hz et $f_2=50$ Hz, et d'amplitude $A_1=1$ et $A_2=0.5$, N (nombre d'échantillons)=1024.

Le signal:

```
N=1024; % changer cette valeur de 1024, 2048 à 4096
```

```
t=0:1/200:(N/200)-1/200;
```

```
variance = 10^(-50/10); % la variance en fonction de RSB 10^(-RSB/10)
```

```
noise = sqrt(variance)*randn(1,N);
```

```
y1=sin(2*pi*20*t); y2=0.5*sin(2*pi*50*t);
```

```
signal=y1 + y2+noise;
```

Le programme en MATLAB qui fait cette opération est :

```
function [Px,frequency] = periodogram(x);
```

```
N = length(x);
```

```
Y = abs(fft(x,N));
```

```
Px=Y.*conj(Y);
```

```
Px= Px/N;
```

```
Px= Px(1:1+N/2);
```

```
frequency=(0:N/2)/N;
```

```
end
```

La figure (III.5) présente la DSP estimé par le périodogramme du signal de longueur 1024 :

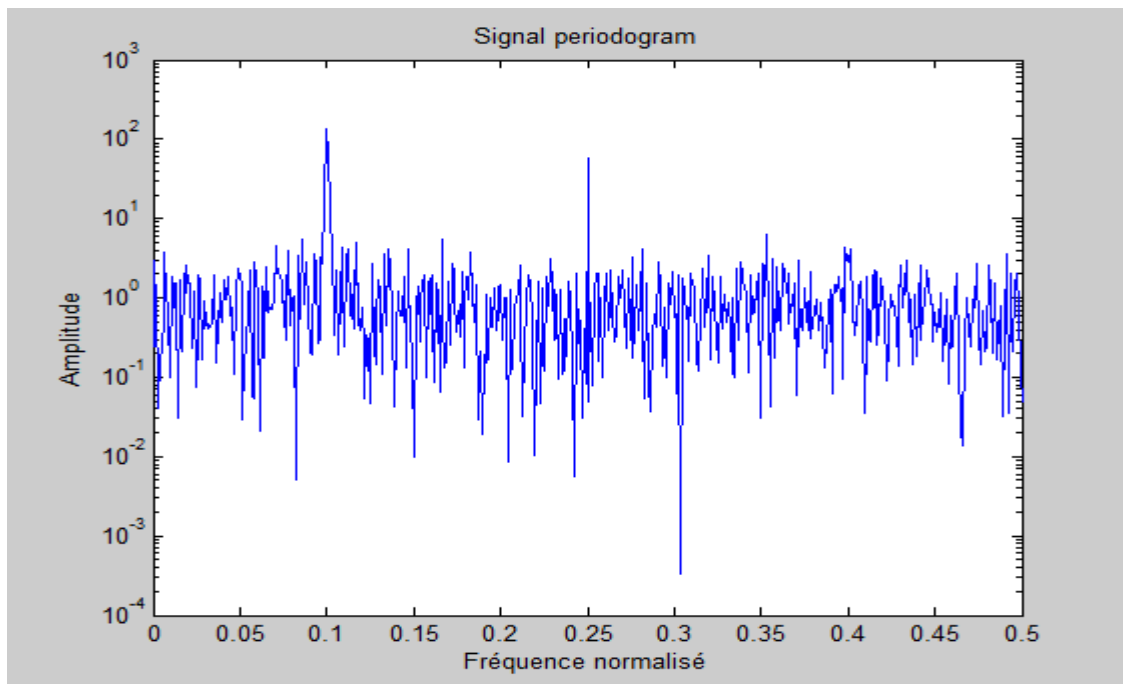


Fig.III.5. L'estimation par périodogramme.

La méthode de Bartlett

Le principe de la méthode de Bartlett peut donc être résumé comme suit :

1. Découper le signal en L blocs de longueur K.
2. Appliquer un FFT sur chacun des blocs.
3. Prendre le module carré de chaque FFT et de le moyenner.
4. Normalisation.

Le programme en MATLAB qui fait cette opération est :

```
function [Px,frequency]= bart(x,K);
N = length(x);
L = (N/K);
Px = 0;
n1 = 0;
for i=1:L
sequence=x(n1+1:n1+K);
n1 = n1 + K;
Y=fft(sequence,K); Px = Px+Y.*conj(Y);
end
Px=Px/(L*K);
Px= Px(1:1+K/2);
frequency = (0:K/2)/K;
end
```

Pour le même signal de la même longueur, on découpe on 4 blocs, chaque bloc est de $K=256$, on obtient :

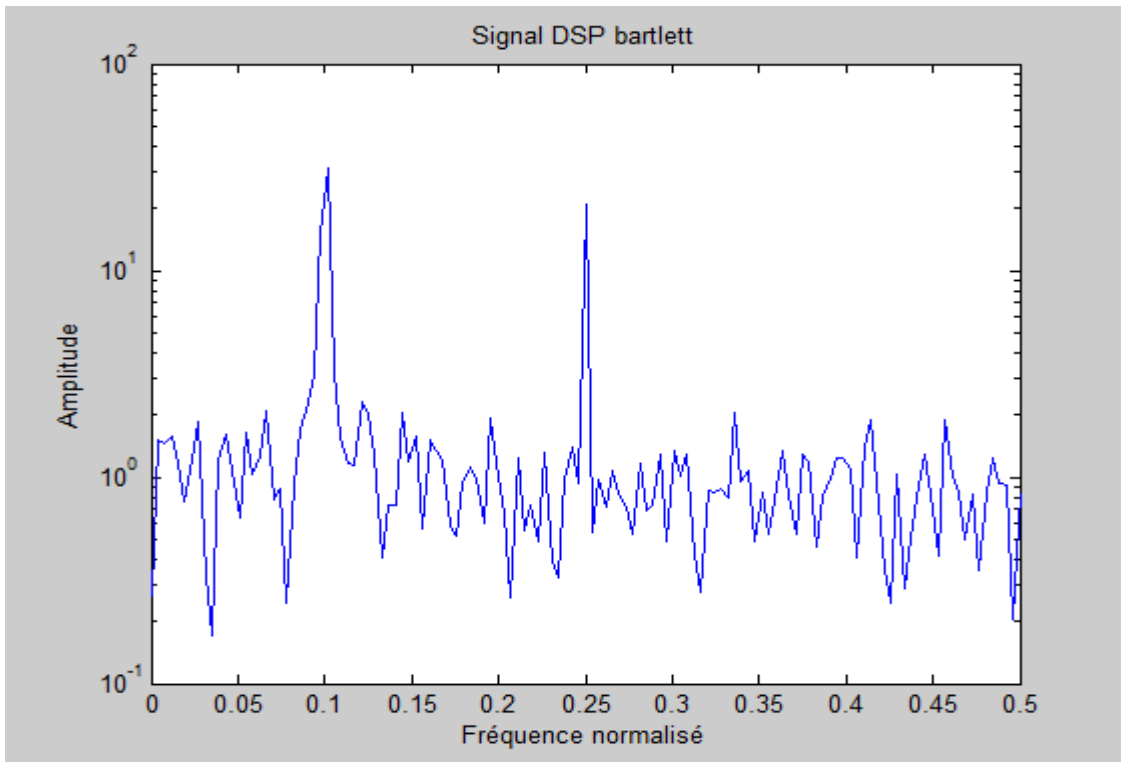


Fig.III.6 :L'estimation de la DSP par la méthode de Bartlett (256)

Pour le même signal de la même longueur, on découpe on 8 blocs, chaque bloc est de $K=128$, on obtient :

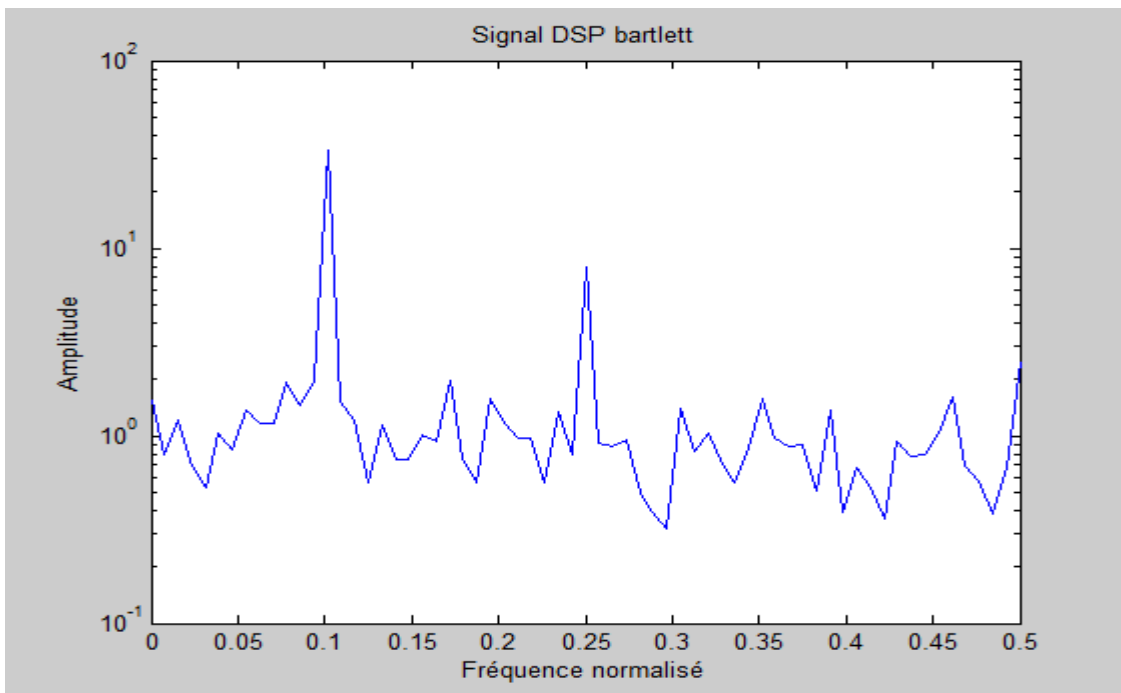


Fig.III.7. L'estimation de la DSP par la méthode de Bartlett (128)

✚ La méthode de Welch

Le principe de la méthode de Welch peut donc être résumé comme suit :

1. Découper le signal en L de longueur K et décalés de $P=K/2$ (chevauché 50%)
2. Apodiser chaque tranche (bloc) avec une fenêtre de pondération $w(n)$
3. Applique le FFT sur chaque bloc pondéré.
4. Prendre le module carré de chaque FFT et le moyenne.
5. Normalisation.

Le programme on MATLAB qui fait cette opération est :

```
function [Px,frequency]= welch(x,K,over,win);
if (over >= 1) | (over < 0)
error('Overlap est invalide')
end
N = length(x);
n1 = 1;
n0 = (1-over)*K;
L = 1+floor((N-K)/n0);
Px = 0;
for i=1:L
Px = Px +mperiodogram(x(n1:n1+n0),win)/L;
n1 = n1 + n0;
end
k=length(Px)
Px= Px(1:k);
frequency = (0:k-1)/(2*k);
end
```

Pour le même signal cité auparavant et par l'application de fenêtre Hanning(256) est représenté à la figure suivante :

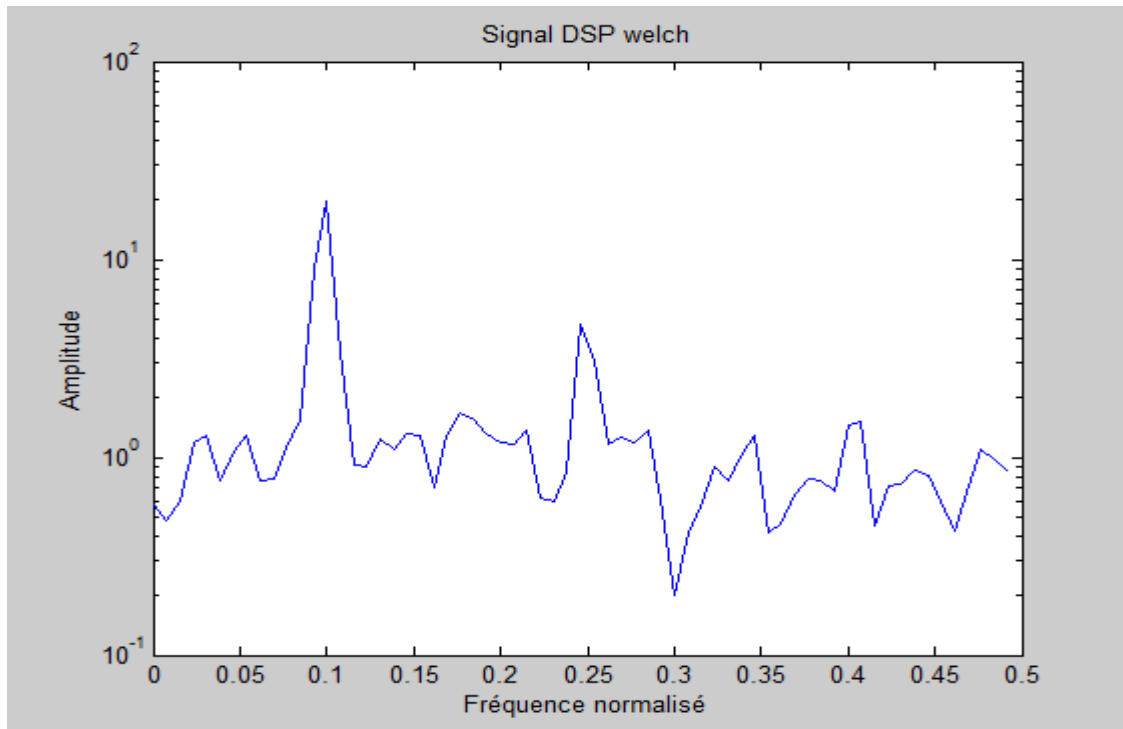


Fig.III.8. L'estimation de la DSP par la méthode de Welch, chevauché 50%, avec la fenêtre Hanning256

Afin d'améliorer plus les performances de cette technique, on utilise des fenêtres de pondération de grandes de tailles, on a pris une fenêtre Hanning de longueur 512.

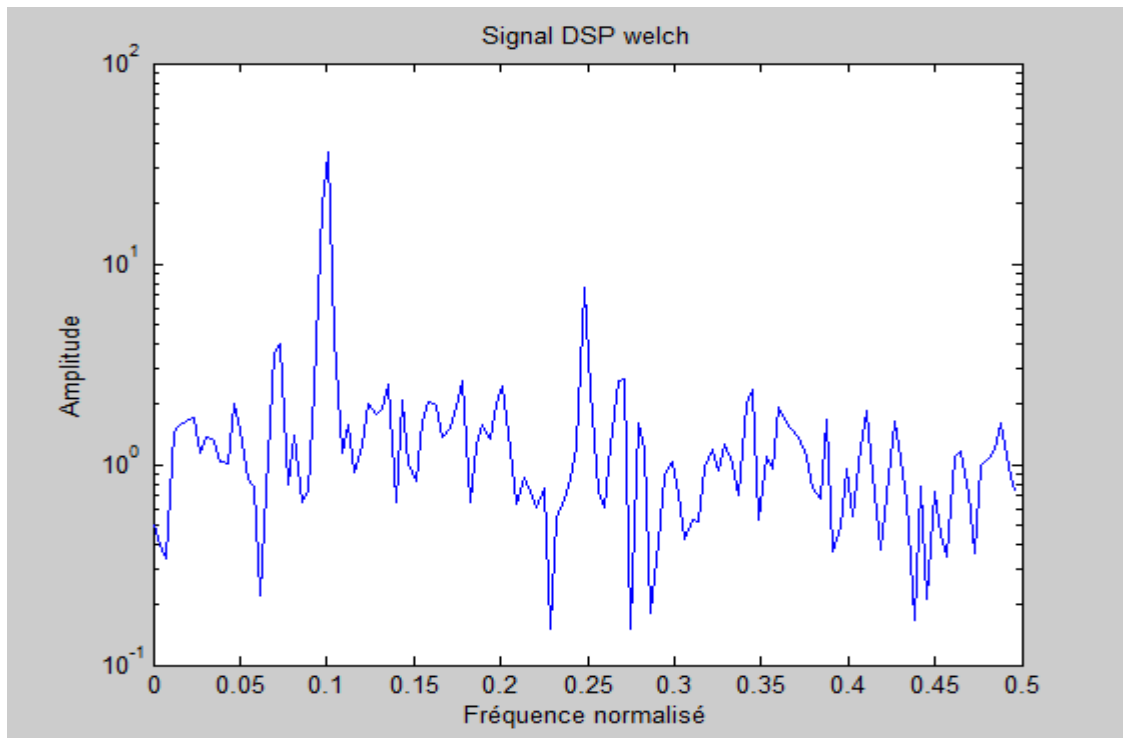


Fig.III.9. L'estimation de la DSP par la méthode de Welch, chevauché 50%, avec la fenêtre Hanning.512

✚ La méthode de Multitaper

Pour le même signal on utilise la méthode de Multitaper de différente NW, ou NW : produit (durée-bande spectrale) « time-bandwidth » de la fenêtre.

Il existe une fonction dans le MATLAB : `pmtm`.

La figure (III.10) présente la DSP estimé par la méthode de Multitaper (MTM) pour $NW=3/2$.

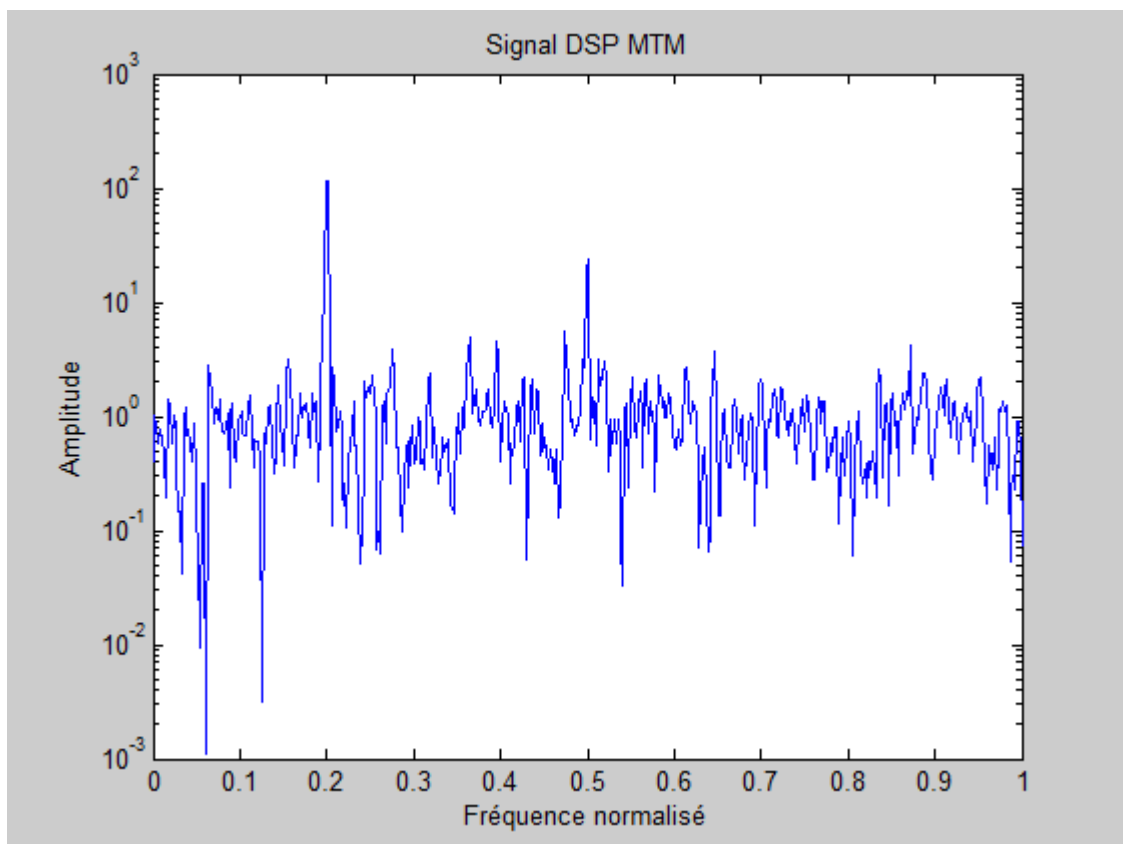


Fig.III.10. L'estimation de la DSP par la méthode de MTM, $NW=3/2$.

La figure (III.11) présente la DSP estimé par la méthode de Multitaper (MTM) pour $NW=2$.

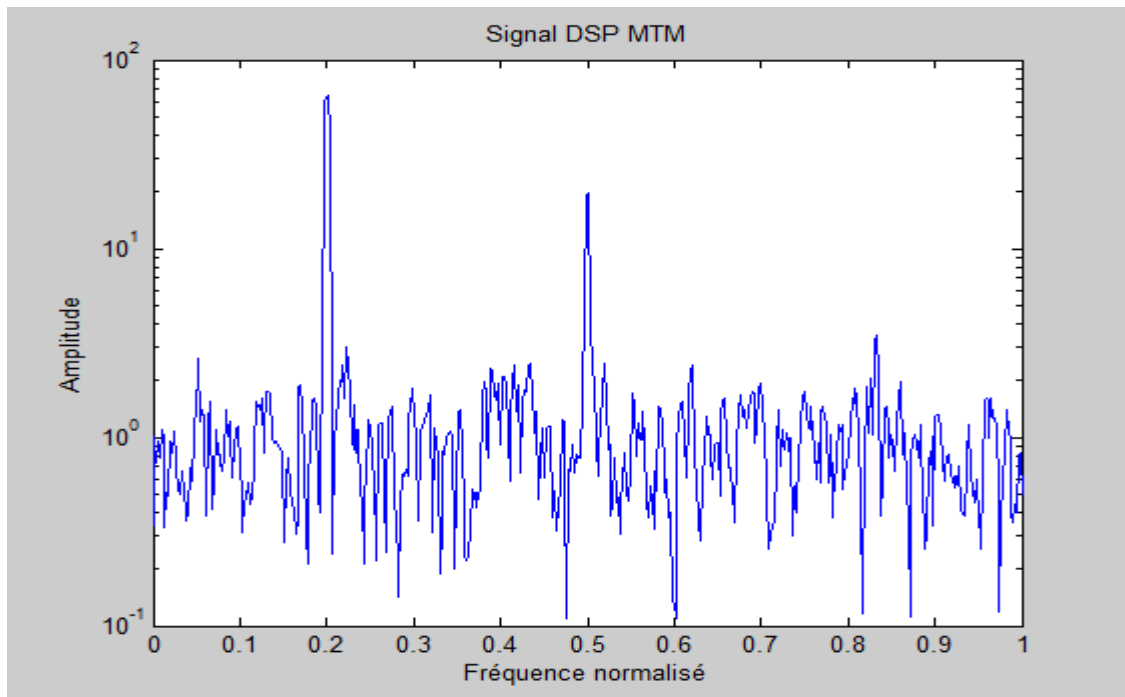


Fig.III.11. L'estimation de la DSP par la méthode de MTM, $NW=2$.

La figure (III.12) présente la DSP estimé par la méthode de Multitaper (MTM) pour $NW=4$.

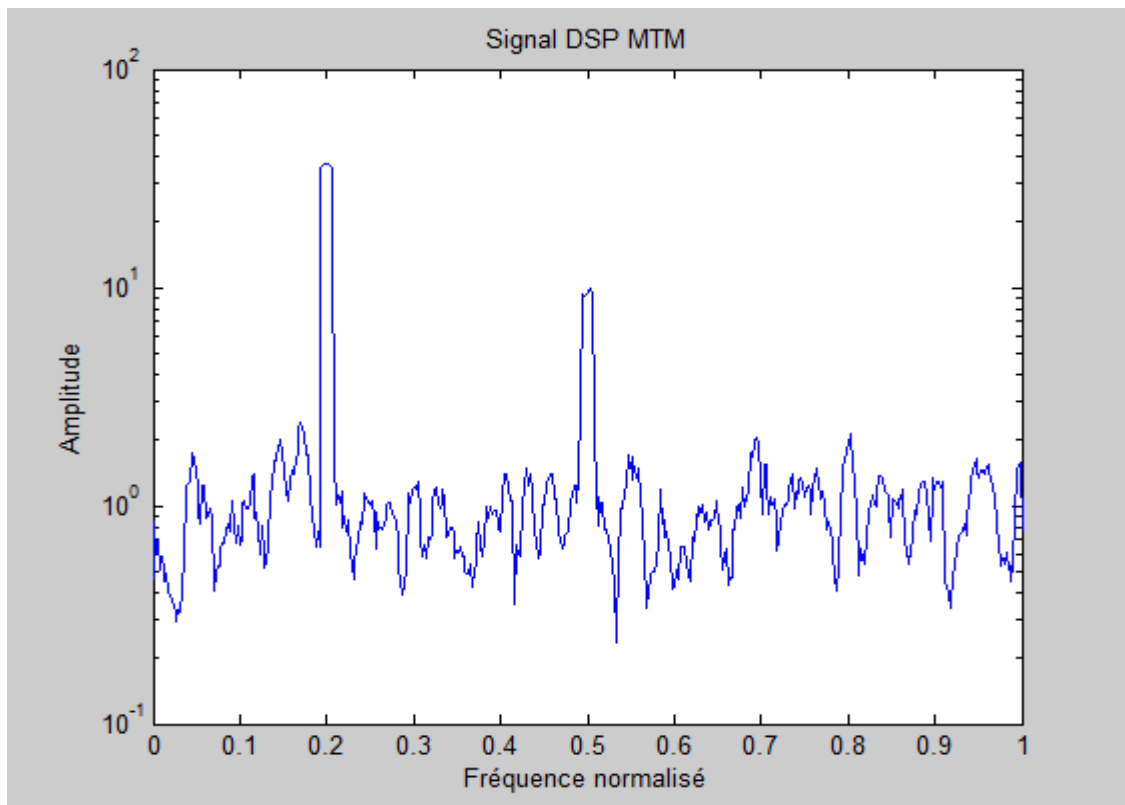


Fig.III.12. L'estimation de la DSP par la méthode de MTM, $NW=4$.

La figure (III.13) présente la DSP estimé par la méthode de Multitaper (MTM) pour $NW=7$.

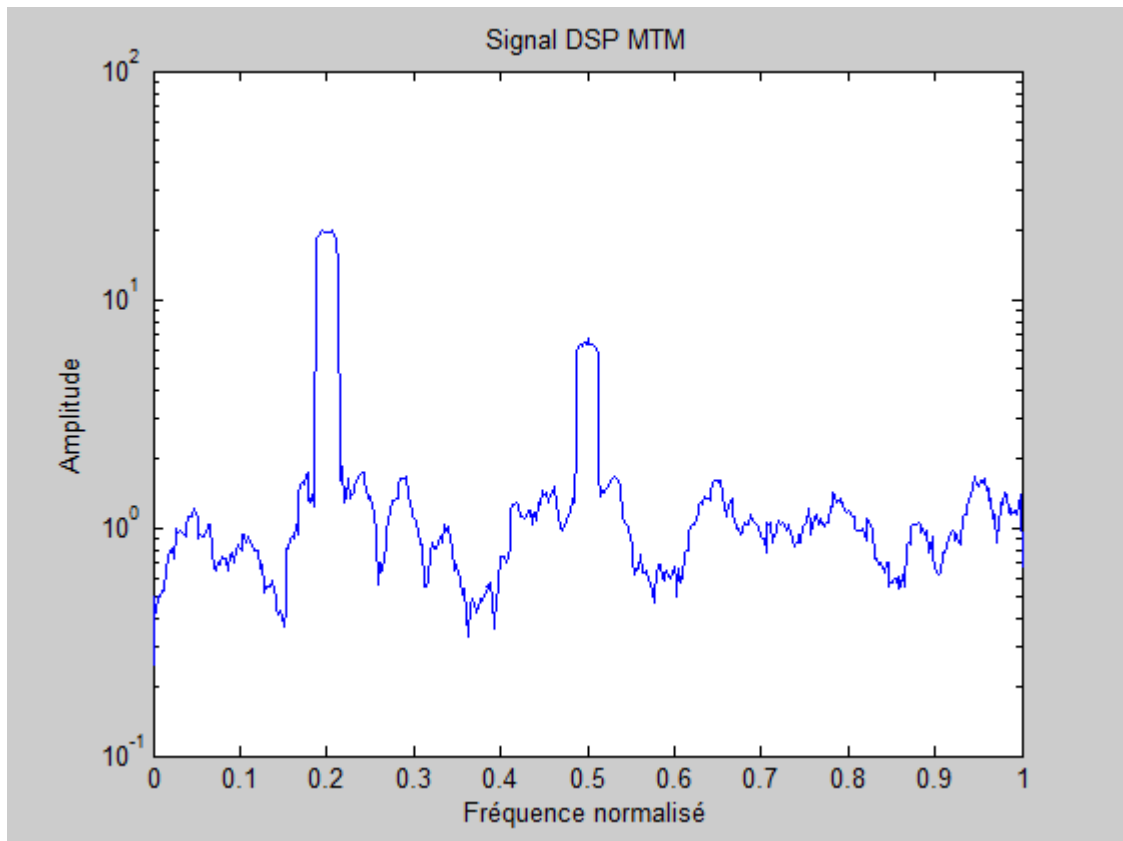


Fig.III.13. L'estimation de la DSP par la méthode de MTM, $NW=7$.

✚ La méthode de minimum de variance

Pour le même signal on utilise la méthode de minimum de variance.

Le programme on MATLAB qui fait cette opération est :

```
function [Px,frequency] = minvar(x,p);
x=x-mean(x); % eliminer la valeur moyenne afin de preparer l'estimation de la covariance
nfft=length(x)
xc=xcorr(x,p); % calculer la séquence de la covariance
R=toeplitz(xc(p+1:end)); % calculer la matrice de covariance
[v,d]=eig(R);
UI=diag(inv(d)+eps); % extraire les valeurs propres
VI=abs(fft(v,nfft)).^2;
Px=10*log10(p)-10*log10(VI*UI);
Px= Px(1:1+nfft/2);
frequency = (0:nfft/2)/nfft;
end
```

La figure (III.14) présente la DSP estimé par la méthode de minimum de variance pour $p=128$.

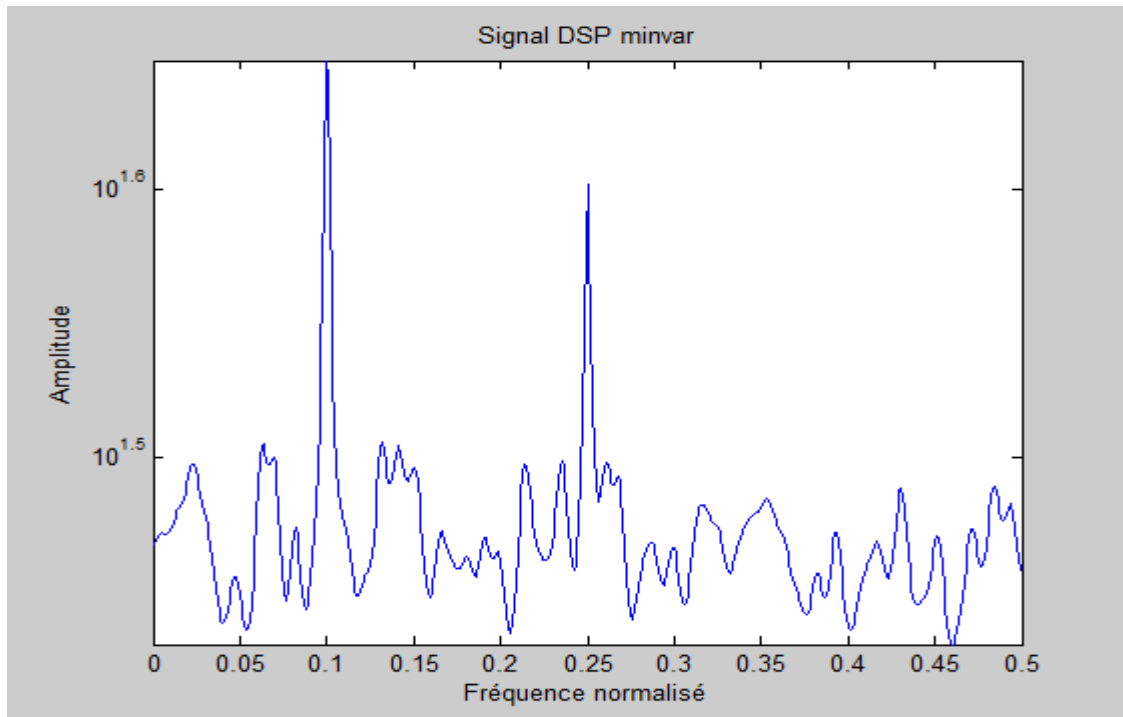


Fig.III.14. L'estimation de la DSP par la méthode de minimum de variance, $p=128$.

La figure (III.15) présente la DSP estimée par la méthode de minimum de variance pour $p=512$.

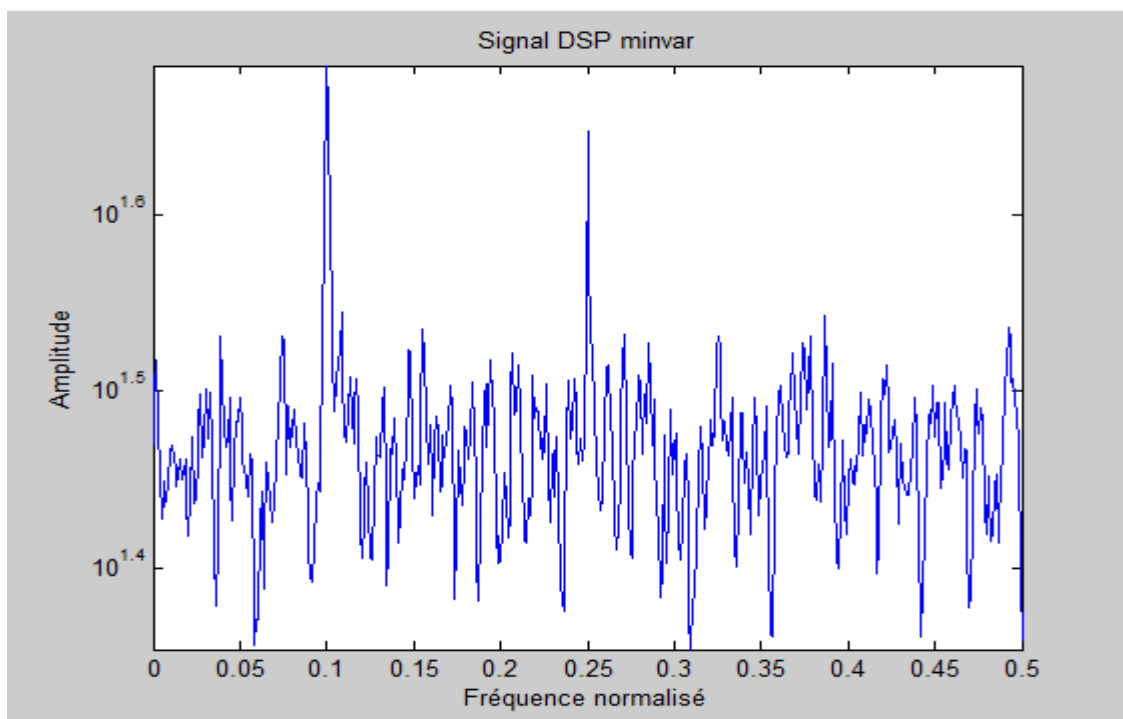


Fig.III.15. L'estimation de la DSP par la méthode de minimum de variance , $p=512$.

III.4 La résolution fréquentielle

Afin de montrer l'importance de chaque technique d'estimation, on prend des composantes fréquentielle très proches par exemple :

Pout un signal de deux sinus de fréquence $f_1=45$ Hz, $f_2=50$ Hz et d'amplitude $A_1=1, A_2=0.5$.

La distinction des composantes, par le périodogramme est montrée dans la figure(III.16).

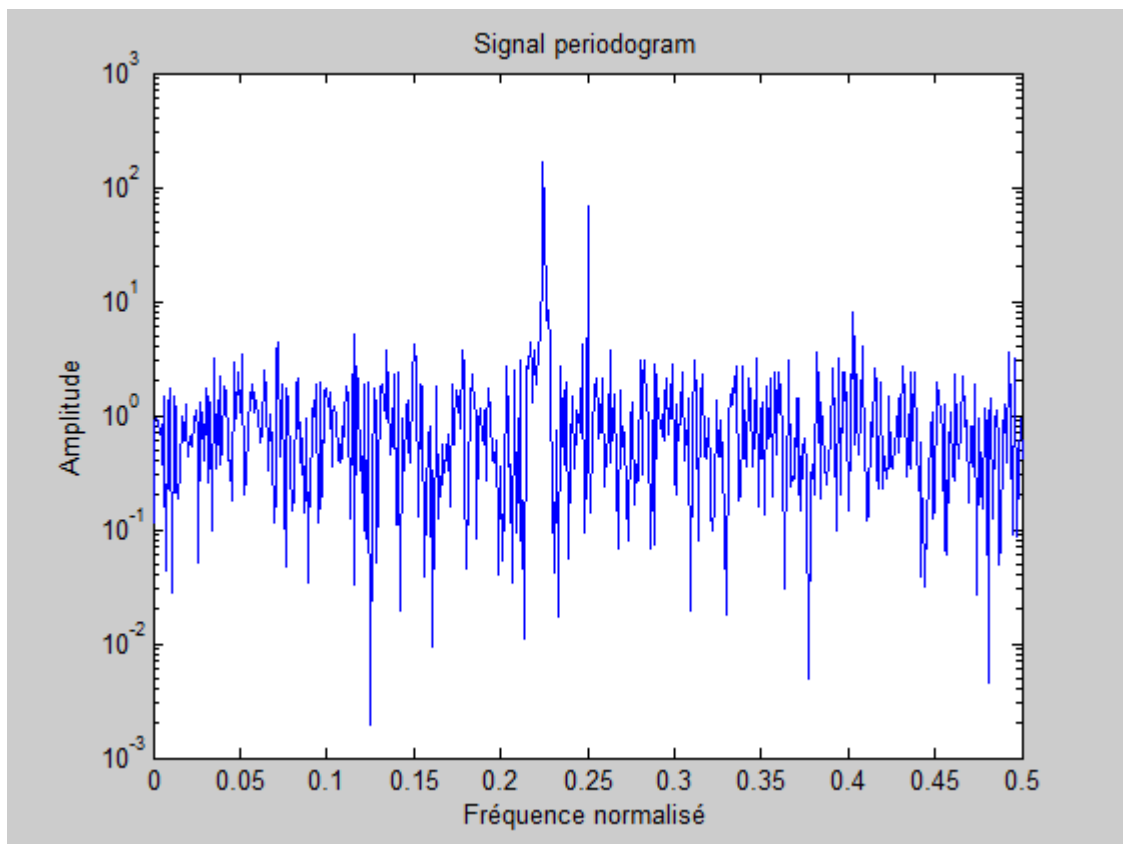


Fig.III.16. L'estimation de la DSP par la méthode de périodogramme.

La distinction des composantes, par la méthode de Bartlett($K=128$) est montrée dans la figure(III.17).

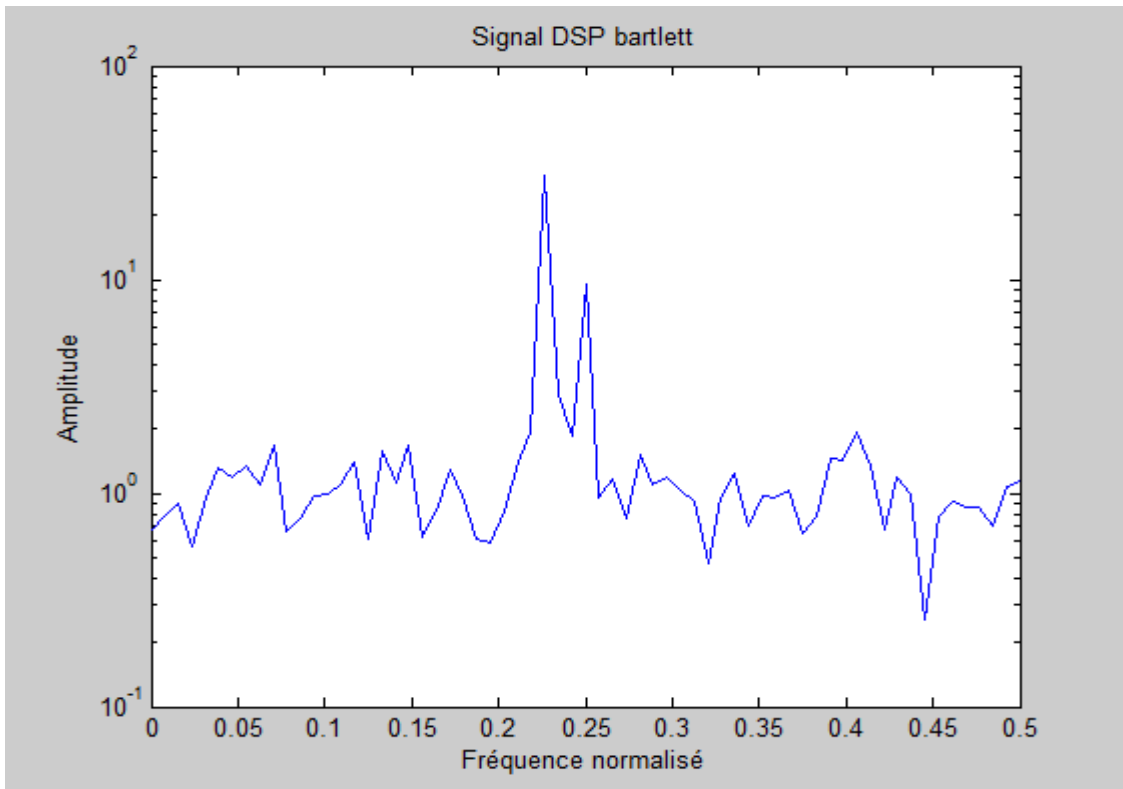


Fig.III.17. L'estimation de la DSP par la méthode de Bartlett(128).

La distinction des composantes, par la méthode de Bartlett(K=256) est montrée dans la figure(III.18).

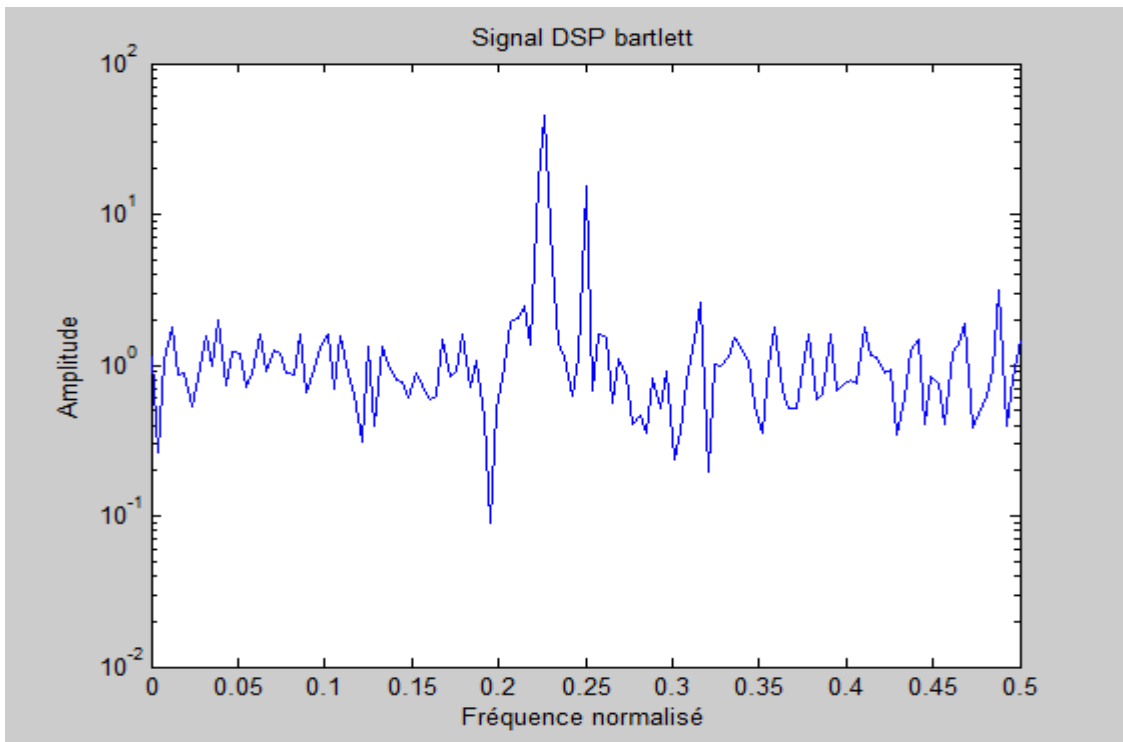


Fig.III.18. L'estimation de la DSP par la méthode de Bartlett(256).

La distinction des composantes, par la méthode de Welch(K=256) chevauché 128 est montrée dans la figure(III.19).

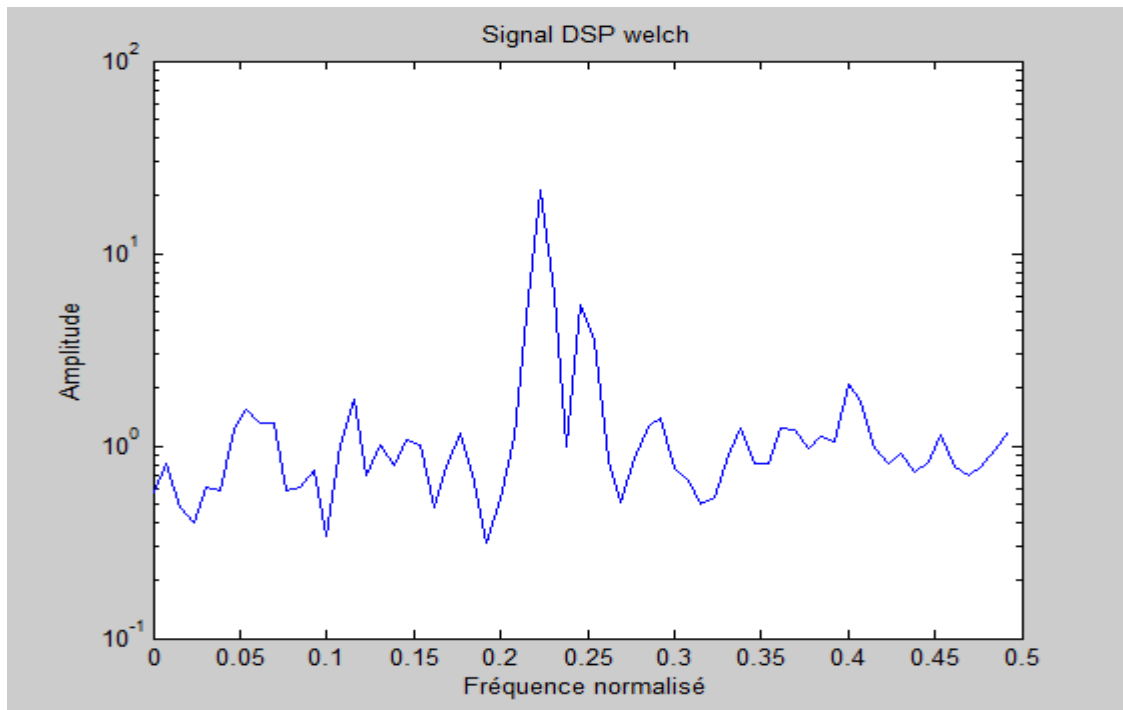


Fig.III.19. L'estimation de la DSP par la méthode de Welch(hanning 256).

La distinction des composantes, par la méthode de Welch(K=512) chevauché 256, est montrée dans la figure(III.20).

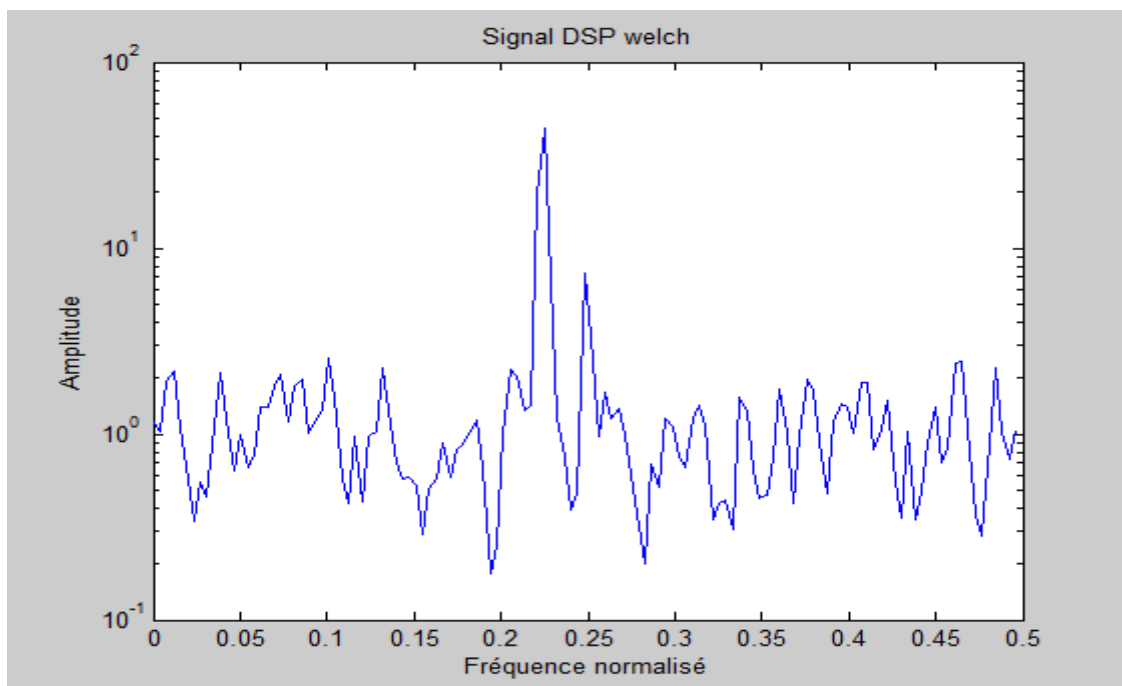


Fig.III.20. L'estimation de la DSP par la méthode de Welch(hanning 512).

La distinction des composantes, par la méthode de Multitaper NW=3/2, est montrée dans la figure (III.21).

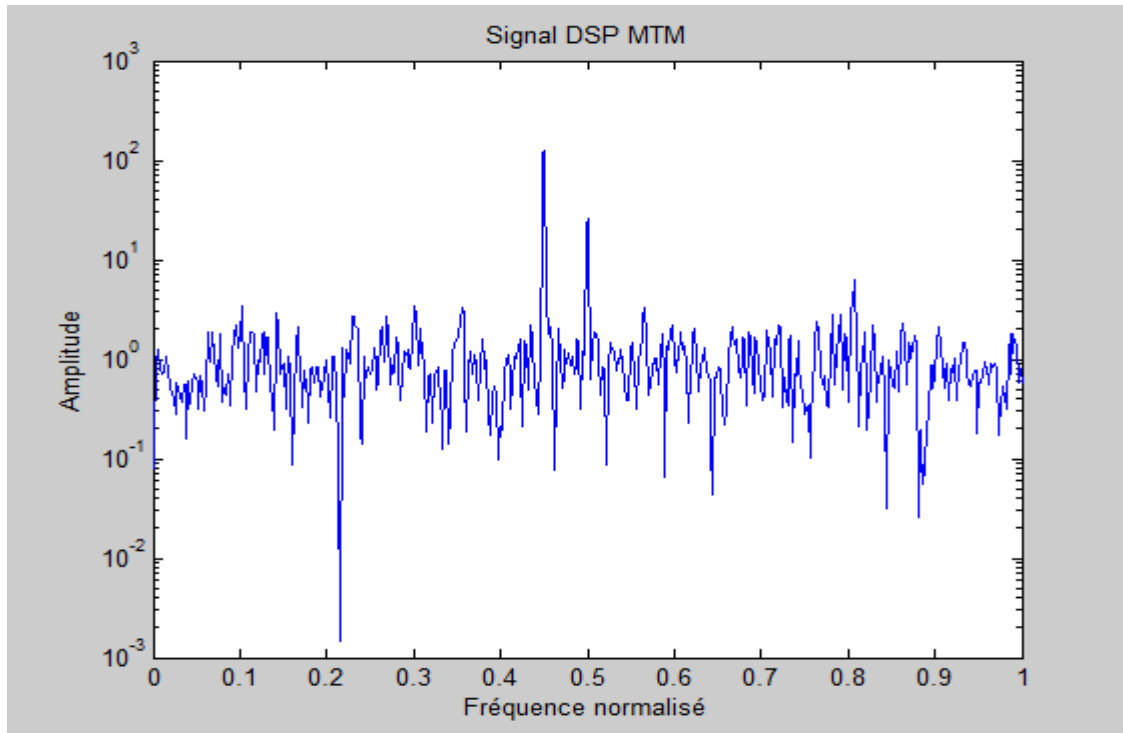


Fig.III.21. L'estimation de la DSP par la méthode de Multitaper NW=3/2

La distinction des composantes, par la méthode de Multitaper NW=4, est montrée dans la figure (III.22).

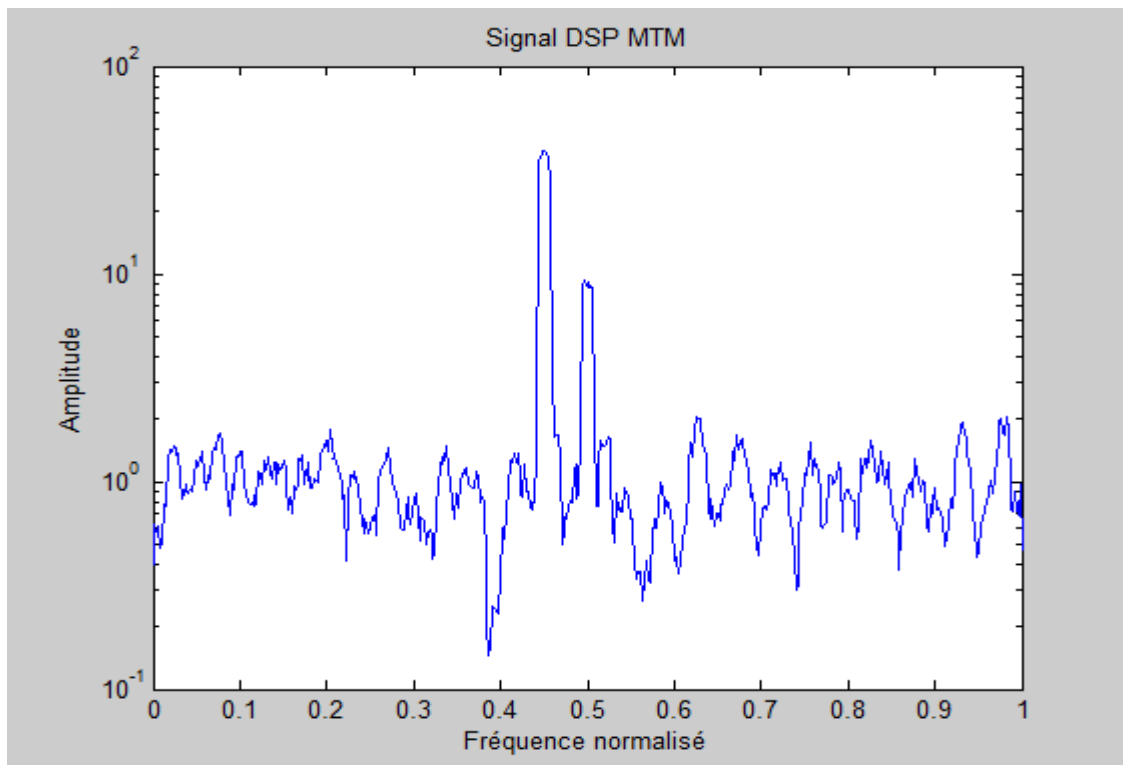


Fig.III.22. L'estimation de la DSP par la méthode de Multitaper NW=4

La distinction des composantes, par la méthode de Multitaper NW=7, est montrée dans la figure (III.23).

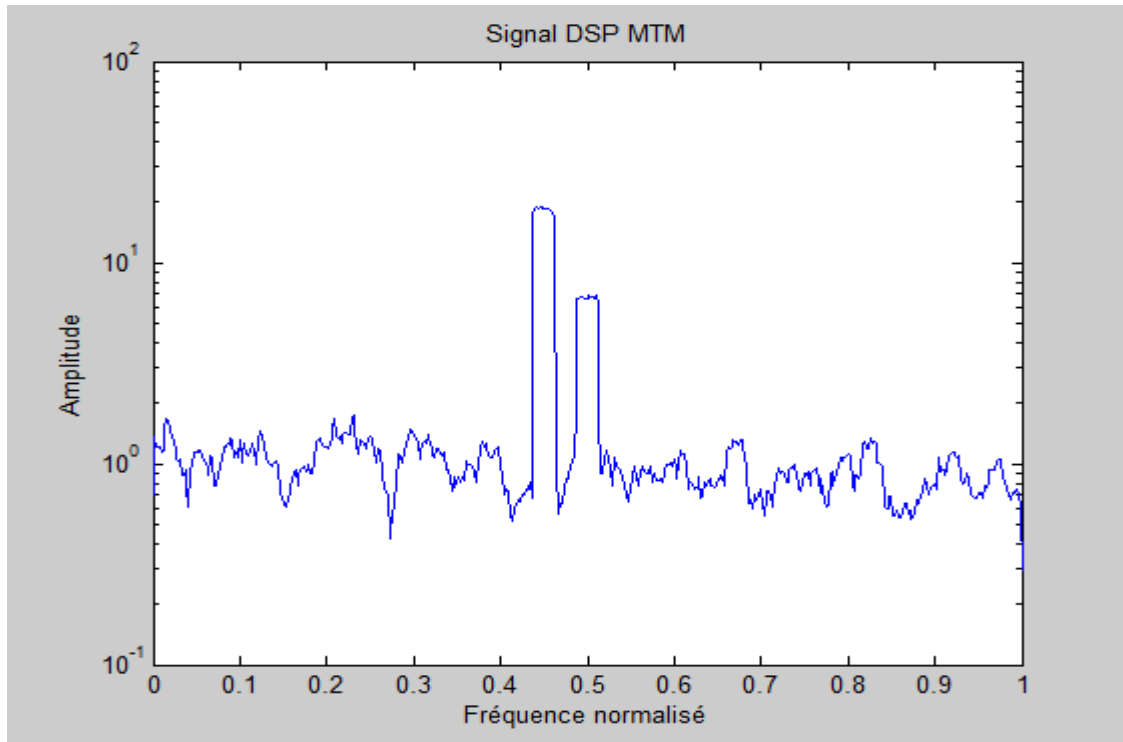


Fig.III.23. L'estimation de la DSP par la méthode de Multitaper NW=7

La distinction des composantes, par la méthode de minimum de variance P=32, est montrée dans la figure (III.24).

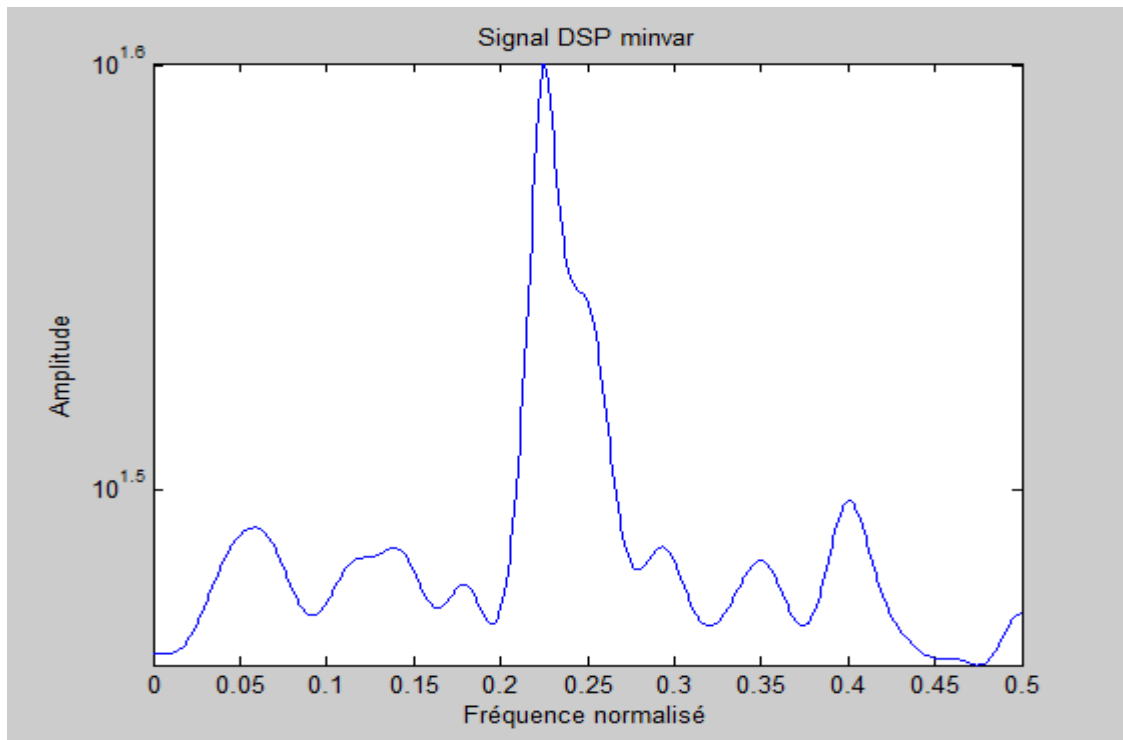


Fig.III.24. L'estimation de la DSP par la méthode de minimum de variance P=32.

La distinction des composantes, par la méthode de minimum de variance $P=64$, est montrée dans la figure(III.25).

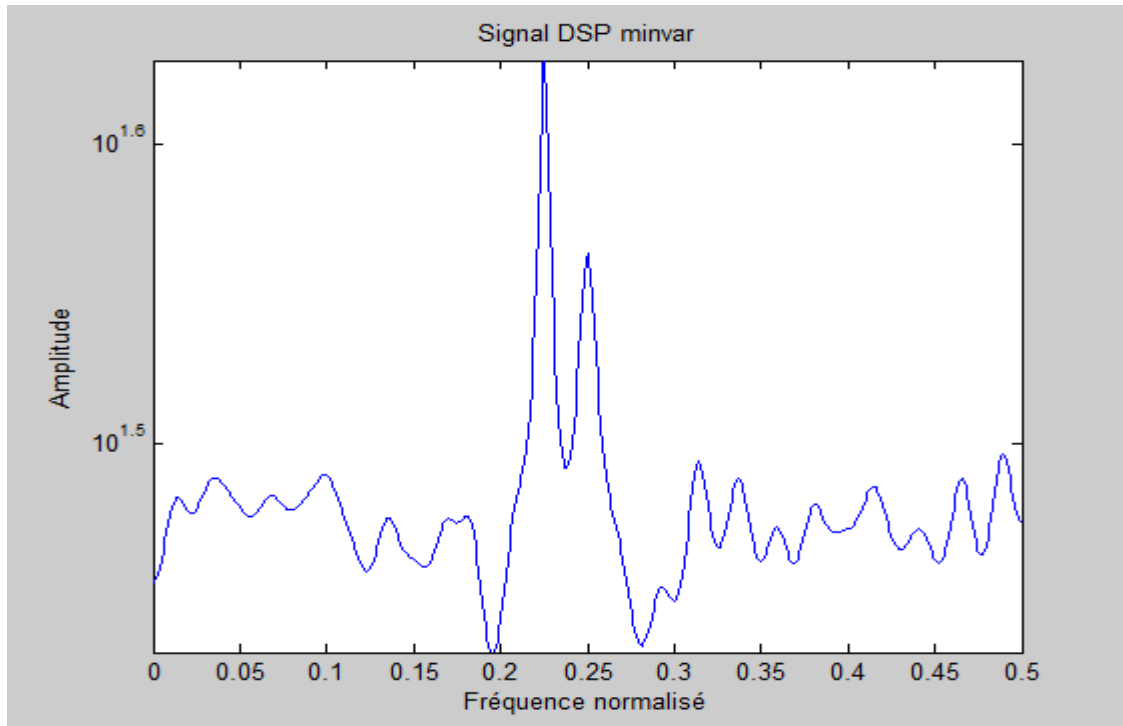


Fig.III.25. L'estimation de la DSP par la méthode de minimum de variance $P=64$.

La distinction des composantes, par la méthode de minimum de variance $P=128$, est montrée dans la figure (III.26).

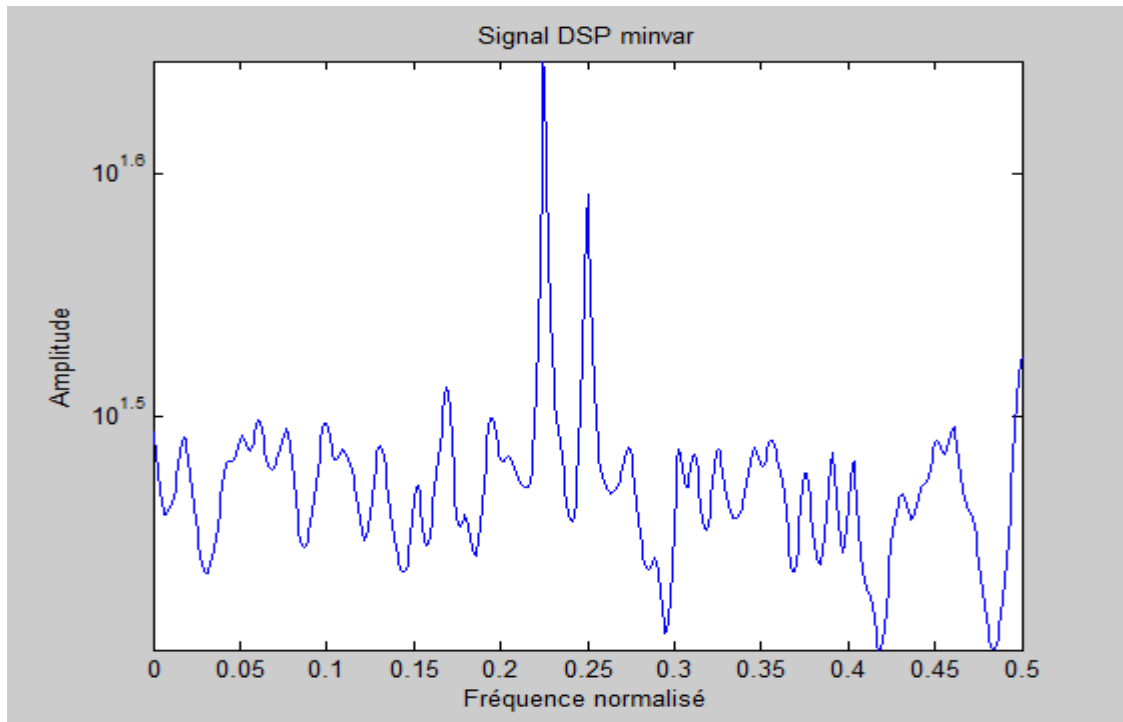


Fig.III.26. L'estimation de la DSP par la méthode de minimum de variance $P=128$.

III.5 Comparaison des méthodes

✚ La méthode de périodogramme

Parmi les inconvénients de cette méthode :

- Résolution en $1/N \Rightarrow$ difficulté à retrouver deux raies très proches pour des signaux de courte durée.
- Difficulté à retrouver des signaux faibles par rapport à des signaux forts.
- Une grande variance.
- Estimation non consistante de la Densité spectrale de puissance.

Parmi les avantages de cette méthode :

- Algorithmes très rapides et peu coûteux en calcul(FFT).
- Spectre estimé proportionnel à la puissance.
- Comportement robuste sur un large éventail des signaux.

✚ La méthode périodogramme moyenné

Parmi les inconvénients de cette méthode :

- Les tranches étant plus courtes, la résolution diminue.

Parmi les avantages de cette méthode :

- Du fait des L moyennages, la variance est presque divisée par L (nombre de blocs).

✚ La méthode de périodogramme moyenné modifiée par welch

Parmi les inconvénients de cette méthode :

- Lobes secondaires et spectres négatifs dus au fenêtrage.

Parmi les avantages de cette méthode :

- La variance diminue jusqu'à zéro pour des fenêtres de grandes tailles.

La méthode de Multitaper(MTM)

Parmi les inconvénients de cette méthode :

- Le biais croit lorsqu'on augmente le nombre des fenêtres utilisées.

Parmi les avantages de cette méthode :

- La variance diminue.
- Elle a une grande résolution et elle peut distinguer deux raies très proches.

III.6 Conclusion

Le choix d'une fenêtre résulte essentiellement du compromis entre largeur du lobe principal et hauteur des lobes secondaires.

Par exemple, si l'on veut discerner deux raies très proches, on intérêt à avoir un lobe principal très étroit. Par contre, si on a un signal et une interférence de puissance élevée, mais pas très proche en fréquence, il faudra choisir une fenêtre avec de très faibles lobes secondaires. Comme on le constate, les méthodes classiques font en fait l'hypothèse que la fonction d'autocorrélation est nulle en dehors d'une certaines fenêtres : ceci conduit à une perte de résolution.

Le périodogramme est une méthode simple d'estimation de la densité spectrale de puissance d'un signal stationnaire. Cet estimateur présente des défauts (biais, variance) qui peuvent être gênants selon l'utilisation que l'on en fait.

Il est possible de réduire le biais en utilisant la méthode de Welch par multiplication temporelle entre le signal et une fenêtre glissante.

Il est possible de réduire la variance en moyennant plusieurs périodogrammes de différents échantillons du même signal. Ou par l'utilisation de la méthode de Multitaper qui a beaucoup de performances, selon la réduction de la variance et le biais, et cela se fait par le bon choix de NW, ou lorsqu'on le diminue on obtient une bonne résolution.

Pour la résolution fréquentielle, on a pris deux sinus très proches et on a essayé de détecter les raies. Pour le périodogramme on arrive pas à les détecter, aussi pour le périodogramme moyenné, mais pour Welch la résolution a une relation avec la longueur de fenêtre, est plus meilleure quand la fenêtre est de grande taille.

Le corrélogramme est une version indirecte du calcul de la DSP, il a presque les mêmes performances du périodogramme mais son calcul se fait d'une façon linéaire, contrairement au périodogramme qui calcule la DSP d'une façon quadratique.

Par l'estimation MTM, on constate que la résolution NW joue un rôle important dans la discrimination des composantes spectrales voisines. Plus NW faible plus la discrimination entre ces composantes est meilleure mais au détriment de la variance importante, donc réduction du biais.

Afin de réduire la variance, il faut alors augmenter NW ce qui fait augmenter le biais (Dilemme biais- variance).

Contents

III.1	Introduction	42
III.2	L'influence de rapport signal sur bruit sur le spectre	42
III.3	Les techniques d'estimation non paramétrique	44
III.4	La résolution fréquentielle	54
III.5	Comparaison des méthodes	60
III.6	Conclusion	61

Conclusion générale

Nous avons présenté dans notre mémoire des techniques d'estimations non paramétriques qui consistent à présenter les signaux par leurs composantes spectrales.

Les techniques d'estimations paramétriques ne font pas partie de notre mémoire.

L'avantage de l'étude non paramétrique est que ces techniques n'exigent aucune condition sur les signaux et travaillent seulement sur des données pratiques des signaux physiques.

La limitation des séquences des signaux veut dire implicitement troncature par fenêtre rectangulaire, ceci réduit la résolution fréquentielle dans la représentation spectrale des signaux, ce qui induit des erreurs, ces erreurs se manifestent par deux paramètres essentiels (biais et variance).

La première idée qui vient à l'utilisateur est de prendre une partie du signal et par la suite, il détermine sa puissance, ceci se fait directement par le classique périodogramme. La fonction d'autocorrélation joue un rôle important dans la comparaison et la détection des signaux et d'après le théorème Winner-Kintchine elle peut être utilisée pour déterminer la densité spectrale de puissance(DSP) du signal.

Afin d'améliorer la détection des composantes spectrales, des versions inspirées du périodogramme sont exploitées réduisant le biais ou la variance comme le périodogramme moyenné et le périodogramme moyenné modifié.

Une autre amélioration vient de la méthode MTM qui réduit d'avantage le biais et la variance par rapport aux précédents.

Celle de Capon qui utilise une autre philosophie différente de celle de la FFT, en se basant sur le principe de minimum de variance n'a pas été développée, elle est laissée parmi les perspectives qu'on propose dans l'étude de l'estimation non paramétriques.

Les applications dans les techniques d'estimation non paramétriques nous permettent aussi de trouver leurs applications dans l'estimation de la réponse fréquentielle des systèmes linéaires.

Une remarque à faire est que cette étude concerne essentiellement les signaux physiques de type stationnaires ergodiques car la mesure de ces signaux se fait sur une seule réalisation dont on considère que la moyenne temporelle (ergodicité l'exige).

Concernant les techniques d'estimations :

1. périodogramme :

Le biais est nulle et la variance indépendante de N (nombre d'échantillons) et proportionnelle au spectre.

2. périodogramme moyenné :

La variance est presque divisée par le nombre d'échantillons, le biais augmente par rapport au périodogramme.

Les tranches augmentent \longrightarrow la résolution diminue

3. Welch :

La variance très faible par rapport aux autres, le biais augmente

Ou $N \longrightarrow \infty$ ET $M \longrightarrow \infty$ La variance converge vers zéro.

Donc cet estimateur est consistant. Le chevauchement réduit davantage la variance.

4. Corrélogramme :

Par rapport au périodogramme, la variance est réduite, le biais augmente 5.

Multitaper (MTM) :

NW augmente \longrightarrow biais augmente \longrightarrow variance diminue

Finalement le meilleur choix de ces méthodes étudiées est MTM en manipulant sur NW.

Dans notre exemple, pour discerner les fréquences proches, les méthodes étudiées sont classées comme suit :

A. MTM \longrightarrow NW faible

B. Welch \longrightarrow grandes fenêtres.

C. périodogramme

Liste des Tableaux

<i>Tab.II.1. Caractéristiques des fenêtres.</i>	41
---	----

Liste des Figures

<i>Fig.I.1. Classification morphologique des signaux.</i>	8
<i>Fig.I.2. Représentation des systèmes</i>	17
<i>Fig.II.1. Représentation du signal segmenté</i>	28
<i>Fig.III.1. La DSP par le periodogramme du « signal »,RSB=0dB</i>	42
<i>Fig.III.2. La DSP par le periodogramme du « signal »,RSB=10dB</i>	43
<i>Fig.III.3. La DSP par le periodogramme du « signal »,RSB=25dB</i>	43
<i>Fig.III.4. La DSP par le periodogramme du « signal »,RSB=50 dB</i>	44
<i>Fig.III.5. L'estimation par périodogramme.</i>	45
<i>Fig.III.6. L'estimation de la DSP par la méthode de Bartlett (256)</i>	47
<i>Fig.III.7. L'estimation de la DSP par la méthode de Bartlett (128)</i>	47
<i>Fig.III.8. L'estimation de la DSP par la méthode de Welch, chevauché 50%, avec la fenêtre Hanning 256.</i>	49
<i>Fig.III.9. L'estimation de la DSP par la méthode de Welch, chevauché 50%, avec la fenêtre Hanning. 512.</i>	49
<i>Fig.III.10. L'estimation de la DSP par la méthode de MTM,NW=3/2.</i>	50
<i>Fig.III.11. L'estimation de la DSP par la méthode de MTM,NW=2.</i>	51
<i>Fig.III.12. L'estimation de la DSP par la méthode de MTM,NW=4.</i>	51
<i>Fig.III.13. L'estimation de la DSP par la méthode de MTM,NW=7.</i>	52
<i>Fig.III.14. L'estimation de la DSP par la méthode de minimum de variance, p=128.</i>	53
<i>Fig.III.15. L'estimation de la DSP par la méthode de minimum de variance , p=512.</i>	53
<i>Fig.III.16. L'estimation de la DSP par la méthode de périodogramme.</i>	54
<i>Fig.III.17. L'estimation de la DSP par la méthode de Bartlett(128).</i>	55
<i>Fig.III.18. L'estimation de la DSP par la méthode de Bartlett(256).</i>	55
<i>Fig.III.19. L'estimation de la DSP par la méthode de Welch(hanning 256).</i>	56
<i>Fig.III.20. L'estimation de la DSP par la méthode de Welch(hanning 512).</i>	56
<i>Fig.III.21. L'estimation de la DSP par la méthode de Multitaper NW=3/2</i>	57
<i>Fig.III.22. L'estimation de la DSP par la méthode de Multitaper NW=4</i>	57

<i>Fig.III.23. L'estimation de la DSP par la méthode de Multitaper $NW=4$</i>	<i>58</i>
<i>Fig.III.24. L'estimation de la DSP par la méthode de minimum de variance $P=32$.</i>	<i>58</i>
<i>Fig.III.25. L'estimation de la DSP par la méthode de minimum de variance $P=64$.</i>	<i>59</i>
<i>Fig.III.26. L'estimation de la DSP par la méthode de minimum de variance $P=128$.</i>	<i>59</i>

Introduction générale

L'analyse de Fourier des signaux montre qu'ils sont composés de superposition des éléments sinusoïdaux. Dans la théorie la forme exacte de cette décomposition (Spectre) dépend essentiellement sur le modèle assigné. Dans la pratique on a seulement des segments finis des signaux sont disponibles, cependant, on ne peut pas obtenir une description complète du modèle du signal, alors on peut seulement calculer l'approximé du spectre (Estimation) du modèle du signal. Une erreur sur le choix du modèle de signal induit une erreur totale sur l'estimation. L'estimation non paramétrique n'exige pas de modèle ce qui nous fait éviter le problème de ce choix.

Comme on a signalé, la durée des signaux physique est limitée, ce qui induit des erreurs d'estimations de leurs propriétés spectrales, donc on doit faire appel à des techniques d'estimation spectrale qui réduit davantage ces erreurs en fonctions de quelques paramètres exigés par chaque méthode

Dans le premier chapitre on présente une généralité sur le traitement du signal avec les classes des signaux.

Dans le deuxième chapitre: on définit les notions de corrélation et la densité spectrale de puissances, la notion d'estimation, on présente l'estimation non paramétrique,

Et dans le dernier chapitre: application des méthodes non paramétriques sur un signal a composantes sinusoïdales noyé dans un bruit, pour comparer les performances de ces méthodes.

Les méthodes appliquées au signal test utilisées sont :

- Le périodogramme
- La méthode de Bartlett
- La méthode de Welch
- La méthode de Blackman-Tukey
- La méthode Multitaper
- La méthode de Capon

A la fin on présente une conclusion générale sur le travail.

Liste des abréviations

RSB : Rapport signal sur bruit.

AR : Autorégressive.

MA : Moyenne ajustée.

ARMA : Autorégressive à moyenne ajustée.

TF : Transformée de Fourier.

TFTD : Transformée de Fourier à temps discret.

DSP : Densité spectrale de puissance.

MTM : La méthode de Multitaper.

Liste des symboles

m_x : La moyenne du signal.

$\text{Var}(x)$: La variance d'un processus.

σ_x : L'écart type d'un processus.

E : L'énergie de signal.

P : La puissance de signal.

$x(t)$: Signal continue.

f : La fréquence.

w : La pulsation.

$\delta(t)$: L'impulsion de Dirac.

y_{xx} : La fonction d'autocorrélation

y_{xy} : La fonction d'intercorrélation.

\hat{m} : Estimation de La moyenne.

$B(x)$: Le biais d'un estimateur.

$R_x(\tau)$: La fonction de corrélation d'un signal.

$\hat{R}_x(\tau)$: L'estimation de la fonction de corrélation d'un signal.

$P_x(f)$: La densité spectrale de puissance.

$\hat{P}_x(f)$: L'estimation de la densité spectrale de puissance.

الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية
République Algérienne Démocratique et Populaire
وزارة التعليم العالي و البحث العلمي
Ministère de l'enseignement Supérieur et de la Recherche scientifique



Université Mohamed Khider Biskra
Faculté des Sciences et de la Technologie
Département de Génie Electrique
Filière : Electronique
Option : Télécommunication

Réf:.....

**Mémoire de Fin d'Etudes
En vue de l'obtention du diplôme:**

MASTER

Thème

Estimation spectrale des signaux
par les méthodes non paramétrique

Présenté par :
YAHIAOUI Imad Eddine
Soutenu le : 04 Juin 2014

Devant le jury compose de :

Mrs : HAMAIZIA Zahra
Mr : BEKHOUCHE Khaled
Mr : SBAA Salim

M.C.A
M.C.B
M.C.A

President
Examination
Encadreur

Année universitaire : 2013 / 2014

الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية
République Algérienne Démocratique et Populaire
وزارة التعليم العالي و البحث العلمي
Ministère de l'enseignement Supérieur et de la recherche scientifique



Université Mohamed Khider Biskra
Faculté des Sciences et de la Technologie
Département de Génie Electrique
Filière : Electronique
Option : Télécommunication

Mémoire de Fin d'Etudes
En vue de l'obtention du diplôme:

MASTER

Thème

Estimation spectrale des signaux
par les méthodes non paramétrique

Présenté par :

YAHIAOUI Imad Eddine

Avis favorable de l'encadreur :

Avis favorable du Président du Jury

Cachet et signature

الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية
République Algérienne Démocratique et Populaire
وزارة التعليم العالي و البحث العلمي
Ministère de l'enseignement Supérieur et de la Recherche scientifique



Université Mohamed Khider Biskra
Faculté des Sciences et de la Technologie
Département de Génie Electrique
Filière : Electronique
Option : Télécommunication

Thème :

Estimation spectrale des signaux par les méthodes non paramétrique

Proposé par : YAHIAOUI Imad Eddine

Dirigé par : SBAA Salim

RESUME

Les signaux sont de natures complexes ils portent l'information en tachée par le bruit. Leur séquence sont à durée limitée. Pour discerner l'information utile du bruit on doit les décomposer en éléments spectraux simples.

Des techniques d'estimation de ces composants sont variées, et on a choisi d'étudier les techniques d'estimation non paramétrique qui n'exigent aucune connaissance préalable sur le modèle du signal.

ملخص

الاشارات هي الطبيعة المعقدة التي تحمل معلومات ولكنها مرتبطة بالضوضاء حيث انها متسلسلة في فترة زمنية محدودة ولنستشف معلومات مفيدة من الضوضاء يجب تقسيمها الى عناصر بسيطة طيفة .
وتتنوع اساليب تقدير هذه المكونات ولقد اخترنا لدراسة تقنيات تقدير اللامعلمية التي تحتاج الى معرفة مسبقة عن نموذج الاشارة.

Remerciements

En tout premier lieu, Nous remercions du plus profond de nos cœurs à dieu, tout puissant, qui nous a éclairé le bon chemin et qui nous a aidés à réaliser ce travail dans les meilleures conditions.

Nous remercions particulièrement notre encadreur Mr SBAA SALIM qui nous a guidé avec patience et nous a fait profiter de sa expérience ainsi que de ses précieuses remarques qui ont grandement contribué à améliorer la qualité de ce mémoire. Qu'elle soit ici assurée de nos très grands respects.

Nous remercions également le président et les membres du jury qui nous ont fait l'honneur d'accepter de juger notre mémoire.

Sans oublier bien entendu tous les enseignants qui nous ont prodigués tout au long de ce parcours leur savoir, leur science et leur encouragement.

Nous remercions tous ce qui de près ou de loin, directement ou indirectement, nous ont apporté conseils, assistance et soutien.

Dédicace

Je tiens a dédie ce modeste travail

A

Ma famille, je suis arrivé au bout de mes réussites grâce à eux.

Que dieu les protèges.

A

*Nous remercions tous ce qui de près ou de loin, directement ou indirectement,
nous ont apporté conseils, assistance et soutien.*

A

Tous mes camarades de promotion -2013/2014-.

Résumé

Les signaux sont de natures complexes ils portent l'information en tachée par le bruit. Leur séquence sont a durée limitée. Pour discerner l'information utile du bruit on doit les décomposer en éléments spectraux simples,

Des techniques d'estimation de ces composants sont variées, et on a choisi d'étudier les techniques d'estimation non paramétrique qui n'exigent aucune connaissance préalable sur le modèle du signal.

ملخص

الإشارات هي الطبيعة المعقدة التي تحمل معلومات ولكنها مرتبطة بالضوضاء حيث انها متسلسلة في فترة زمنية محدودة ولنستشف معلومات مفيدة من الضوضاء يجب تقسيمها الى عناصر بسطة طيفة .

وتتنوع اساليب تقدير هذه المكونات ولقد اخترنا لدراسة تقنيات تقدير اللامعلمية التي تحتاج الى معرفة مسبقة عن نموذج الإشارة.

I.7.1	Généralité.....	17
I.7.2	Les modèles paramétriques des signaux[13,14].....	18
I.7.2.1	Modélisation MA.....	18
I.7.2.2	Modélisation AR.....	18
I.7.2.3	Modélisation ARMA.....	19
I.8	Conclusion.....	19

Chapitre II

Analyse spectrale

II.1	Introduction.....	20
II.2	Notion de corrélation et la densité spectrale.....	20
II.2.1	L'autocorrélation.....	20
II.2.2	L'intercorrélation.....	21
II.2.3	La densité spectrale.....	22
II.3	Notions d'estimation.....	23
II.3.1	Ce que les estimateurs cherchent à estimer.....	24
II.3.2	Performance d'un estimateur.....	24
II.3.3	Estimation de la moyenne.....	25
II.3.4	Estimateur de la fonction d'autocorrélation.....	25
II.4	Estimation non paramétrique.....	27
II.4.1	Le périodogramme.....	27
II.4.2	La méthode de Bartlett.....	28
II.4.3	La méthode de Welch.....	29
II.4.4	La méthode de Blackman-Tukey.....	30
II.4.5	La Méthode de Multitaper.....	31
II.4.6	La Méthode de minimum de variance (Capon).....	33
II.5	Caractéristique et performance.....	35
II.5.1	Les performances de périodogramme.....	35
II.5.2	Les performances de la méthode de Bartlett.....	36
II.5.3	Les performances de la méthode de Welch.....	37
II.5.4	Les performances de la méthode de Blackman-Tukey.....	38
II.6	Les fenêtres d'apodisation[15].....	39
II.7	Conclusion.....	41

Chapitre III

Simulation

III.1	Introduction	42
III.2	L'influence de rapport signal sur bruit sur le spectre	42
III.3	Les techniques d'estimation non paramétrique	44
III.4	La résolution fréquentielle.....	54
III.5	Comparaison des méthodes	61
III.6	Conclusion.....	62
	Conclusion générale	63
	Bibliographie	65