



Université Mohamed Khider de Biskra  
Faculté des Sciences et de la Technologie  
Département de Génie Civil et d'Hydraulique

# MÉMOIRE DE MASTER

Sciences et Technologies  
Génie civil  
Structure

Réf. : S68

---

Présenté et soutenu par :  
MASMOUDI Amina

Le : samedi 23 juin 2018

## **Effet de la température sur les fréquences propres des plaques stratifiées en matériaux composite par la méthode des éléments finis**

---

### **Jury :**

Dr.	HAMADI Djamel	Pr	Université de Biskra	Président
Dr.	BELARBI Mohamed Ouajdi	MCB	Université de Biskra	Examineur
Dr.	TATI Abdelouahab	Pr	Université de Biskra	Rapporteur

Année universitaire : 2017 - 2018



*Dédicace*

*Je dédie ce travail à :*

*Mes chers parents : Mohamed et Rachida Mes frères : Toufik et*

*Nassim*

*Mes proches : Assia, Hana, Iman et Fatima Mes professeurs*

*Mes collègues*

*Merci à tous et toutes.*

## **Remerciements**

*Tout d'abord, je tiens à remercier le bon Dieu le tout Puissant de m'avoir donné la force et le courage de mener à bien ce modeste travail, également je remercie infiniment mes parents, qui m'ont encouragé et aidé à arriver à ce stade de ma formation.*

*Mes remerciements vont à professeur TATI Abdelouahab mon encadreur pour m'avoir guidé pour la réalisation de ce travail.*

*Je tiens à présenter toute ma gratitude à monsieur ABDEDDAIM Mahdi, BELARBI Mohamed Ouajdi et KHACHAI Abdelhak pour leurs aides et conseils.*

*Mes remerciements s'adressent également, au membre du jury qui a bien voulu accepté de juger ce travail.*

*J'exprime ma profonde gratitude et remerciements à tous les enseignants de l'institut de Génie Civil de l'Université de Biskra qui ont été pour beaucoup dans mon cursus .*

*Enfin, j'adresse mes plus sincères remerciements à tous mes proches et amis, qui m'ont toujours soutenus et encouragés au cours de la réalisation de ce mémoire.*

## Résumé

Le travail présenté dans ce mémoire a pour but d'étudier l'effet de la température sur les fréquences propre des plaques composites stratifiées en utilisant un élément fini rectangulaire à quatre nœuds avec cinq degré de liberté basé sur la théorie du premier ordre de cisaillement transverse . Les résultats obtenus, à travers une série d'exemples, sont comparés avec les solutions analytiques et ceux obtenus via des modèles d'éléments finis disponibles dans la littérature. Cette comparaison a montré la bonne performance et la précision de l'élément utilisé.

Ce travail a été achevé par une étude paramétrique qui a pour but de mettre en évidence les effets de différents paramètres sur la variation de fréquence propres des plaques stratifiées soumises à un chargement de température.

**Mots clé :** plaques composites stratifiées, effet de température, théorie du premier ordre, élément fini, fréquence propre.

## ملخص

يهدف العمل المقدم في هذه المذكرة إلى دراسة تأثير الحرارة على التوترات الذاتية لصفائح مركبة باستعمال عنصر محدد مستطيل يحتوي على أربعة ذو خمس درجات من الحرية استنادا على نظرية القص من الدرجة الأولى. النتائج المتحصل عليها, بإجراء سلسلة من الأمثلة و التي قورنت بحلول دقيقة و كذا بعض العناصر المحدودة المتاحة في المراجع أظهرت الأداء الجيد و دقة النموذج المستعمل .

تم الانتهاء من هذا العمل بدراسة لإظهار تأثير مختلف العوامل على تغيرات التوترات الذاتية .

الكلمات المفتاحية :

صفائح مركبة مغلقة , تأثير الحرارة, نظرية الدرجة الأولى, عنصر محدد, توتر ذاتي

## **Abstract**

In this memoir a set of examples has been considered to study the effect of temperature on the natural frequency of laminated composites plates, using a rectangular finite element with 4 nodes and five degree of freedom per node, based on the first order shear theory. The obtained results compared with analytic solutions and those obtained by other finite element models available in the literature, showed the good performance and the accuracy of the used model.

This work has been completed by a parametric study to show the effect of different parameters on the natural frequency's variation of laminated plates under thermal loading.

### **Key words:**

Laminated composites plates, effect of temperature, first order theory, finite element, natural frequency.

# Sommaire

Introduction générale

## CHAPITRE I : Généralité sur les matériaux composites.

I.1/Introduction.....	1
I.2/Définition.....	2
I.3/Eléments constituant d'un composite.....	2
I.3.1 / La matrice	2
I.3.2 / Le renfort	3
I.4/Classification des matériaux composites .....	4
I.5/Composites stratifiés.....	4
I.5.1/Désignation des matériaux stratifiés .....	4
I.5.2/Les avantages et les inconvénients des matériaux composites .....	5
I.6/Théorie Classique des Stratifiés (CLT).....	6
I.7/La théorie des plaques du premier ordre (FSDT).....	8
I.7.1/Calcul des caractéristiques mécaniques d'une couche composite.....	9
I.7.1.1/Module de Young longitudinale $E_L$ .....	9
I.7.1.2/Module de Young transversal $E_T$ .....	10
I.7.1.3/Coefficient de poisson.....	11
I.7.1.4Module de cisaillement .....	12
I.7.2/Comportement mécanique des composites stratifiés .....	13
I.7.2.1/Loi de Hooke généralisée.....	13
I.7.2.2/Loi de comportement d'une couche stratifiée (pli) .....	14
I.7.2.3/Relation contrainte-déformation planes.....	16
I.7.2.4/Relation contrainte déformation dans le plan du matériau.....	17
I.7.3/Champ des déplacements .....	17



I.7.4/Champ des déformations.....	18
I.7.5/Champ de contrainte .....	20
I.7.5 /Les efforts résultants .....	20
I.7.5.1 /Résultantes en membrane.....	20
I.7.5.2 /Résultantes en cisaillement .....	22
I.7.5.3 / Moments de flexion-torsion .....	23
I.7.5.4 /Equation constitutive.....	24

## **CHAPITRE II :**

### **Analyse théorique du comportement vibratoire des plaques.**

II.1/Recherche bibliographique .....	26
II.1.1 /Introduction	26
II.1.2 /Revue sur la vibration des plaques.....	26
II.1.3 /Revue sur vibration et charge thermique.....	26
II.2/Comportement dynamique des plaques stratifiées .....	28
II.2.1 /Relation fondamentale de la dynamique .....	28
II.2.2 / Relation fondamentale de la dynamique appliquée à un élément de plaque.....	28
II.2.2.1 /Relation fondamentale relatives aux résultantes de membrane .....	28
II.2.2.2 / Relation fondamentale relatives aux résultantes de cisaillement .....	30
II.2.2.3 / Relation fondamentale relatives aux moments .....	31
II.2.3 /Formulation énergétique de la théorie des stratifiés.....	34
II.2.3.1 /Energie de déformation d'un stratifié.....	34
II.2.3.2 /Energie cinétique d'un stratifié .....	35
II.2.3.3 /Travail des forces .....	36
II.2.3.4 /Equation d'équilibre dynamique .....	36

## **CHAPITRE III : Présentation de formulation de l'élément finis et validation.**

III.1/Introduction .....	39
Définition .....	39
III.2/Présentation de l'élément fini utilisé.....	39
III.2.1 /Champ des Déplacements et cinématique.....	40
III.2.2 /Relation cinématique.....	40
III.2.3 /Interpolation des Déplacements (fonctions de formes).....	41
III.2.4 /Relations déplacement-déformation de l'élément.....	43
III.2.5 /Les équations constitutive .....	44
III.2.6 /Energie potentielle totale.....	45
III.2.7 /Vibrations libres d'une plaque soumise aux contraintes thermiques .....	47
III.3/Présentation du programme .....	48
III.3.1/Description les sous-routines du programme .....	49
III.4/Validation de l'élément fini .....	50
III.4.1/Vibration libre des plaques.....	50
III.4.1.1/Plaques isotrope .....	50
III.4.1.2/Plaque composite stratifiée .....	52
III.4.2/Température critique .....	54
III.4.2.1/Plaque isotrope simplement appuyé.....	54
III.4.3/Vibration libre d'une plaque soumise à une charge thermique.....	56

## **CHAPITRE IV : Etude paramétrique.**

IV.1/Introduction.....	58
IV.2/ Effet de rapport d'anisotropie $E_{11}/E_{22}$ .....	58
IV.3/Effet du nombre de couches .....	62
IV.4/ Effet de l'angle d'orientation des fibres.....	66
IV.5/Effet de rapport d'épaisseur $a/h$ .....	69

IV.6/ Effet de rapport d'aspect (a/b) .....	73
IV. 7/Effet du rapport des coefficients de dilatation thermique .....	76
Conclusion	
Référence bibliographique Annexe	

# Liste des figures :

## CHAPITRE I : Généralité sur les matériaux composites.

<b>Fig (I.1) :</b> Matériau composite .....	2
<b>Fig (I.2) :</b> Type de matrices.....	3
<b>Fig (I.3):</b> Type de renfort .....	3
<b>Fig (I.4):</b> constitution d'un stratifié.....	4
<b>Fig (I.5):</b> Désignations du stratifié .....	5
<b>Fig (I.6) :</b> Schématisation des déformations dans le cas de la théorie classique des stratifiés.....	7
<b>Fig (I.7) :</b> Géométries déformées et non déformées d'un bord d'une plaque sous l'hypothèse de Reissner-Mindlin.....	8
<b>Fig (I.8):</b> Schéma simplifié d'une traction longitudinale.....	9
<b>Fig (I.9):</b> Schématisation par couches d'un composite unidirectionnel.....	10
<b>Fig (I.10):</b> Schéma par couches d'une traction .....	11
<b>Fig (I.11):</b> Schéma par couches d'un essai cisaillement longitudinal .....	12
<b>Fig (I.12):</b> Déformations en cisaillement de la matrice et de la fibre.....	12
<b>Fig (I.13):</b> Axes principaux et axes de référence d'une couche stratifiée .....	15
<b>Fig (I.14) :</b> Représentation des résultantes en membrane des actions exercées sur un élément de plaque stratifiée .....	21
<b>Figure (I.15):</b> Représentation des résultantes en cisaillement.....	22
<b>Fig (I.16):</b> Schématisation des résultantes des moments de flexion et de torsion.....	24

### CHAPITRE III : Présentation de formulation de l'élément finis et validation.

<b>Fig (III.1):</b> géométrie et variables nodales de l'élément.....	40
<b>Fig (III.2):</b> Convergence de la fréquence fondamentale d'une plaque isotrope simplement appuyée (SSSS), en fonction de nombre des éléments.....	51
<b>Fig (III.3):</b> Convergence de la fréquence fondamentale d'une plaque isotrope encastree (EEEE), en fonction de nombre des éléments .....	52
<b>Fig (III.4):</b> Convergence de la fréquence fondamentale d'une plaque stratifiée simplement appuyée en fonction de nombre des éléments .....	53
<b>Fig (III.5):</b> Convergence de température critique de plaque isotrope simplement appuyée.....	54
<b>Fig (III.6):</b> Convergence de température critique de plaque stratifiée simplement appuyée .....	55
<b>Fig (III.7):</b> Convergence de fréquence propre de plaque stratifiée (0°/90°/0°) simplement appuyée sous l'effet de température .....	57

### CHAPITRE IV : Etude paramétrique.

<b>Fig (IV.1)</b> variation de fréquence au carré de plaque simplement appuyé en fonction de température $T_0/T_{cr}$ avec variation du rapport de l'anisotropie .....	59
<b>Fig (IV.2) :</b> variation de fréquence de plaque simplement appuyé en fonction de rapport $\alpha$ l'anisotropie.....	60
<b>Fig (IV.3) :</b> variation de fréquence au carré de plaque simplement appuyé en fonction de température $T_0/T_{cr}$ avec variation du rapport de l'anisotropie .....	61
<b>Fig (IV.4) :</b> variation de fréquence de plaque encastree en fonction de rapport de l'anisotropie.	

**Fig (IV.5) :** variation de fréquence au carré de plaque simplement appuyé en fonction de



<b>Fig (IV.6) :</b> variation de fréquence de plaque simplement appuyé en fonction du nombre de couches.....	63
<b>Fig (IV.7) :</b> variation de fréquence au carré de plaque encastré en fonction de température $T_0/T_{cr}$ avec variation du nombre des couches.....	64
<b>Fig (IV.8) :</b> variation de fréquence de plaque encastrée en fonction nombre de couche .....	65
<b>Fig(IV.9) :</b> variation de fréquence au carré de plaque simplement appuyé en fonction de température $T_0/T_{cr}$ avec variation d'orientation des fibres.....	67
<b>Fig(IV.10) :</b> variation de fréquence de plaque simplement appuyé en fonction d'orientation des fibres.....	67
<b>Fig(IV.11) :</b> variation de fréquence au carré de plaque encastré en fonction de température $T_0/T_{cr}$ avec variation d'orientation des fibres. ....	68
<b>Fig(IV.12) :</b> variation de fréquence de plaque encastrée en fonction d'orientation des fibres.....	69
<b>Fig (IV.13) :</b> variation de fréquence au carré de plaque simplement appuyé en fonction de température $T_0/T_{cr}$ avec variation du rapport d'épaisseur .....	70
<b>Fig (IV.14) :</b> variation de fréquence de plaque simplement appuyé en fonction du rapport d'épaisseur.....	71
<b>Fig (IV.15) :</b> variation de fréquence au carré de plaque encastré en fonction de température $T_0/T_{cr}$ avec variation du rapport d'épaisseur. ....	72
<b>Fig (IV.16) :</b> variation de fréquence de plaque encastrée en fonction du rapport d'épaisseur.....	72
<b>Fig (IV.17) :</b> variation de fréquence au carré de plaque simplement appuyée en fonction de température $T_0/T_{cr}$ avec variation du rapport d'aspect. ....	74
<b>Fig (IV.18) :</b> variation de fréquence de plaque simplement appuyé en fonction du rapport d'aspect (a/b). ....	74

**Fig (IV.19)** : variation de fréquence au carré de plaque encastree en fonction de température  $T_0/T_{cr}$  avec variation du rapport d'aspect. .... 75

**Fig (IV.20)** : variation de fréquence de plaque encastree en fonction du rapport d'aspect (a/b)...76

**Fig (IV.21)** : variation de fréquence au carré de plaque simplement appuyée en fonction de température  $T_0/T_{cr}$  avec variation du coefficient de dilatation. .... 77

**Fig (IV.22)** : variation de fréquence de plaque simplement appuyé en fonction du rapport de coefficient de dilatation. .... 78

**Fig (IV.23)** : variation de fréquence au carré de plaque encastree en fonction de température  $T_0/T_{cr}$  avec variation du coefficient de dilatation. .... 79

**Fig (IV.24)** : variation de fréquence de plaque encastree en fonction du rapport de coefficient de dilatation. .... 79



# Liste des Tableaux

## CHAPITRE III : Présentation de formulation de l'élément finis et validation.

Tab (III.1) La fréquence fondamentale d'une plaque isotrope simplement appuyé .....	51
Tab (III.2) La fréquence fondamentale d'une plaque isotrope encastéré .....	52
Tab (III.3) La fréquence fondamentale d'une plaque stratifiée (0/90/0) simplement appuyé .....	53
Tab (III.4): Température critique de plaque isotrope simplement appuyée .....	54
Tab (III.5): Température critique de plaque isotrope stratifiée simplement appuyée .....	55
Tab (III.6): Effet de température sur les fréquences propres d'une plaque stratifiée (0°/90°/0°) simplement appuyée .....	57

## CHAPITRE IV : Etude paramétrique.

Tab (IV.1) : l'effet de rapport de l'anisotropie sur la fréquence de plaques stratifiée simplement appuyé .....	59
Tab (IV.2) : l'effet de rapport de l'anisotropie sur les fréquences des plaques stratifiées encastéré. ....	60
Tab (IV.3) : l'effet du nombre des couches sur la fréquence de plaque stratifiée simplement appuyé .....	62
Tab (IV.4) l'effet du nombre des couches sur la fréquence de plaque stratifiée encastéré	64
Tab (IV.5) : l'effet d'orientation des fibres sur la fréquence de plaque stratifiée simplement appuyé .....	66
Tab (IV.6) : l'effet d'orientation des fibres sur la fréquence de plaque stratifiée encastéré .....	68
Tab (IV.7) : l'effet du rapport d'épaisseur sur la fréquence de plaque stratifiée simplement appuyé.	



<b>Tab (IV.8) : l'effet du rapport d'épaisseur sur la fréquence de plaque stratifiée encasté .....</b>	<b>71</b>
<b>Tab (IV.9) : l'effet du rapport d'aspect (a/b) sur la fréquence de plaque stratifiée simplement appuyé .....</b>	<b>73</b>
<b>Tab (IV.10) : l'effet du rapport d'aspect (a/b) sur la fréquence de plaque stratifiée encastée .....</b>	<b>75</b>
<b>Tab (IV.11) : l'effet du rapport de coefficient de dilatation sur la fréquence de plaque stratifiée simplement appuyé .....</b>	<b>77</b>
<b>Tab (IV.12) : l'effet du rapport de coefficient de dilatation sur la fréquence de plaque stratifiée encastée.....</b>	<b>78</b>

# Introduction générale

De nos jours les matériaux composites sont devenus incontournables et commencent peu à peu à être une alternative aux matériaux classique, grâce aux avantages qu'ils présentent. En effet, leur résistances et leur rigidité spécifiques rend leur utilisation prendre de l'ampleur dans presque tous les domaines de construction et de l'industrie. Cependant ce type de matériaux possède des comportements très complexes dus à leur hétérogénéité et leur anisotropie prononcé.

La description du comportement dynamique des plaques et la connaissance préalables des fréquences propres des plaques sont indispensables lors de leur conception. En général l'analyse dynamique de ce type d'éléments de structure s'effectue pour un environnement sévère qui influe sur leur comportement général et spécialement sur leurs fréquences propres.

**L'objectif de ce travail** est l'analyse vibratoire des plaques stratifiées en matériaux composites sous l'effet de température basée sur la théorie de premier ordre en utilisant la méthode des éléments finis.

Notre mémoire est devisé en quatre chapitres :

**Le premier chapitre** contient deux parties :

- **La première partie** présente une bibliographie qui comporte des généralités sur les matériaux composites ainsi que des spécificités sur les plaques stratifiées.
- **La deuxième partie** présente le comportement mécanique des plaques stratifiées en matériaux composites selon la théorie de premier ordre de cisaillement traverse.

**Le deuxième chapitre** aussi contient deux parties :

- **La première partie** concerne une revue bibliographique sur des études récentes sur la vibration des plaques en matériaux composite
- **La deuxième partie** a été consacrée à l'analyse théorique de la dynamique des plaques selon la théorie de premier ordre.

**Le troisième chapitre** a été consacré à la présentation de la formulation de l'élément finis utilisé et programmation, suivi par la validation de l'élément à partir d'une comparaison des résultats avec les résultats obtenus de la littérature.

**Le quatrième chapitre** comportera une étude paramétrique pour mettre en évidence les effets de certains paramètres sur la variation de fréquences propres des plaques soumises à un chargement du à la température..

# Chapitre I

# CHAPITRE I :

## Généralité sur les matériaux composites.

### I.1/Introduction :

Les matériaux composites sont largement utilisés dans les constructions civiles, mécaniques, aéronautiques, et notamment aérospatiales. Les matériaux composites ne sont pas récents mais ils ont été connus depuis longtemps. En effet, le bois était le premier matériau composite naturel utilisé par l'homme, ensuite le torchis qui est le mélange d'argile, d'eau et de fibres naturelles (paille, foin, crin de chevaux)

Aussi Parmi les premiers composites fabriqués par l'Homme, on trouve également les arcs mongols (2 000 ans av. J.-C.) ; leur âme en bois était contrecollée de tendon au dos et de corne sur sa face interne.

En 1823 : Charles Macintosh crée l'imperméable avec du caoutchouc sur des tissus comme le coton. Ensuite 1892 : François Hennebique dépose le brevet du béton armé (le composite utilisé en construction) avec le béton qui forme la matrice et l'acier qui forme le renfort. [1]

De nos jours, les matériaux composites fibreux sont de plus en plus utilisés comme alternative aux matériaux conventionnels, principalement en raison de leur haute résistance et rigidité spécifiques, mais aussi à cause de leurs propriétés mécaniques ajustables dans des grandes proportions. Cependant, leur emploi nécessite une maîtrise de leurs comportements mécaniques, et plus particulièrement leur comportement dynamique

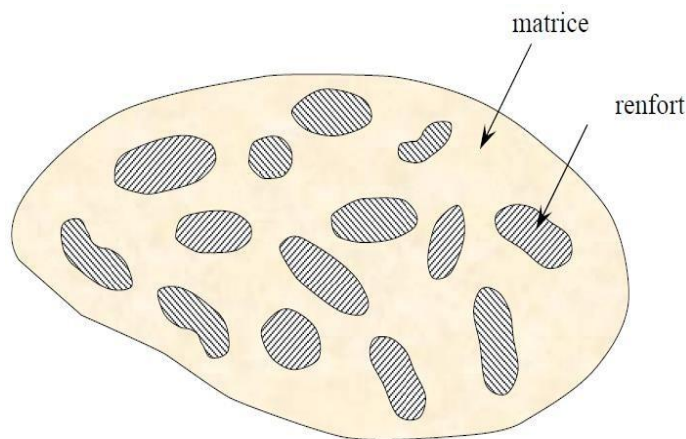
Il existe de nombreuses théories utilisées pour décrire le comportement mécanique des matériaux multicouches. On peut citer la théorie classique des stratifiés (CPT), la théorie de déformation de cisaillement de premier ordre (FSDT) , la théorie de déformation de cisaillement à l'ordre supérieur , les modèles multi particuliers de matériaux multicouches et la théorie d'élasticité à trois dimensions qui est assez précise pour les plaques anisotropes. [2]

**I.2/Définition :**

Un matériau composite est constitué de l'assemblage de deux matériaux de natures différentes, se complétant et permettant d'obtenir un matériau dont l'ensemble des performances est supérieur à celui des composants pris séparément.[3]

Un matériau composite est constitué de différentes phases nommées **renforts** et **matrice**. Lorsque le matériau composite est non endommagé, les renforts et la matrice sont parfaitement liés et il ne peut pas y avoir ni glissement ni séparation entre les différentes phases. Les renforts se présentent sous forme de fibres continues ou discontinues. Le rôle du renfort est d'assurer la fonction de résistance mécanique aux efforts. La matrice assure quant à elle la cohésion entre les renforts de manière à répartir les sollicitations mécaniques. L'arrangement des fibres, leur orientation permettent de renforcer les propriétés mécaniques de la structure.[4].

La liaison entre les fibres et la matrice est créée pendant la phase de fabrication du matériau composite. Ceci a l'influence fondamentale sur les propriétés mécaniques du matériau.[Gay]



**Figure (I.1) :** Matériau composite.[3]

**I.3/Éléments constitutifs d'un composite :I.3.1/ La matrice :**

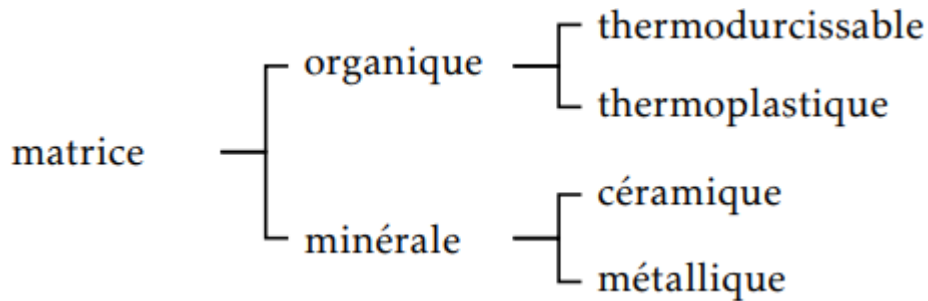
La matrice est constituée de résine mélangée. Son rôle est d'assurer le lien entre les fibres et de transmettre les sollicitations.

Elle assure la résistance du matériau dans le sens transverse du renfort, ainsi qu'une protection physico-chimique des fibres contre les agents nocifs de l'environnement. De plus elle conditionne



directement la tenue thermique, et la résistance à la compression et au cisaillement inter-laminaire.[5]

La classification des types de matrices couramment rencontrées est donnée sur **la figure** [4]



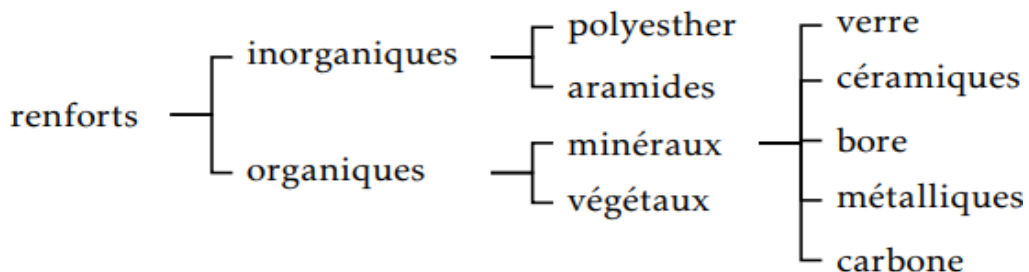
**Figure (I.2) :** Type de matrices [4]

### I.3.2/ Le renfort :

Les renforts représentent les principales composantes porteuses des matériaux composites, en lui apportant ses hautes performances (rigidité, résistance à la rupture, etc.)

Les qualités recherchées pour le renfort sont surtout des caractéristiques mécaniques élevées, une masse volumique faible, une bonne compatibilité avec la résine ainsi qu'une facilité de mise en œuvre et un faible coût. La concentration du renfort est un paramètre déterminant pour les propriétés du matériau composite.[5]

La classification des types de renforts couramment rencontrés est indiquée sur la figure (I.3) [4]



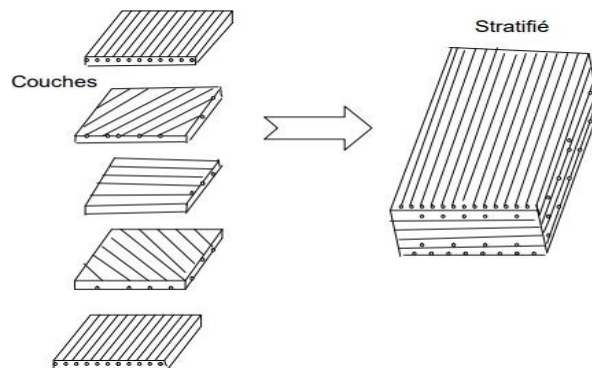
**Figure( I.3):** Type de renfort[4]

#### I.4/Classification des matériaux composites :

Différentes classifications des matériaux composites sont rencontrées dans la littérature scientifique. Ces matériaux peuvent être classés selon **(1) la morphologie des agents de renforcement** (les fibres ou particules) ou selon **(2) ses composantes structurelles** (les plis stratifiés) (SOUZA, 2003; PEREIRA Jr., 2004). La deuxième classification subdivise les composites en **composites structuraux**, qui à leur tour, sont subdivisés en **composites sandwichs** et **composites stratifiés**. [6]

#### I.5/Composites stratifiés :

Un stratifié est constitué d'un empilement de monocouches ayant chacune une orientation propre par rapport à un référentiel commun aux couches, et désigné comme le repère des axes de symétrie du matériau. Selon la disposition des couches par rapport au plan moyen, on distingue les stratifiés symétriques et antisymétriques. [7]

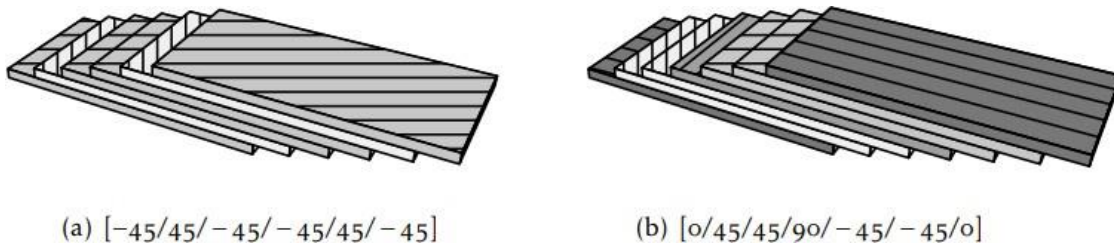


**Figure (I.4):** constitution d'un stratifié [7]

#### I.5.1/Désignation des matériaux stratifiés :

La désignation des stratifiées est délicate car il faut préciser les axes de référence. Un stratifié est codifié de la façon suivante

- ✚ Chaque couche est désignée par un nombre indiquant la valeur en degré de l'angle que fait la direction des fibres avec l'axe de référence x. Sur la **figure**, les couches sont représentées décalées les unes par rapport aux autres. La structure stratifiée est décrite de bas en haut.
- ✚ Les couches sont nommées successivement entre crochet en allant de la face inférieure à la face supérieure. Les couches successives sont séparées par le symbole « / » comme l'exemple de la **figure**  $[-45/45/-45/-45/45/-45]$ .
- ✚ Les couches successives d'un même matériau et de même orientation sont désignées par un indice numérique, comme sur **Figure I.5**  $[0/45/45/90/-45/-45/0]$ .
- ✚ En cas de stratification hybride (différents matériaux dans un même stratifié), il faut préciser par un indice la nature de la couche.
- ✚ En cas de matériau symétriques, la moitié est codifiée et le symbole s indique la symétrie[4]



**Figure( I.5):** Désignations du stratifié. [4]

### I.5.2/Les avantages et les inconvénients des matériaux composites :

L'usage des matériaux composites ne cesse de croître dans différents domaines : automobile, naval, pétrolier, aéronautique et aérospatial. En effet, ces matériaux présentent de nombreux avantages :

- Importantes rigidités et résistances spécifiques afin de concevoir des structures hautes performances tout en réalisant des gains de masse par rapport aux solutions métalliques précédentes.
- Faible sensibilité à la fatigue.
- Faible sensibilité à la corrosion.
- Possibilité de réaliser des structures de formes complexes « one shot » réduisant ainsi les coûts d'assemblages.
- Possibilité de dimensionner les structures « au juste besoin » avec des propriétés élevées uniquement dans les axes de chargement.

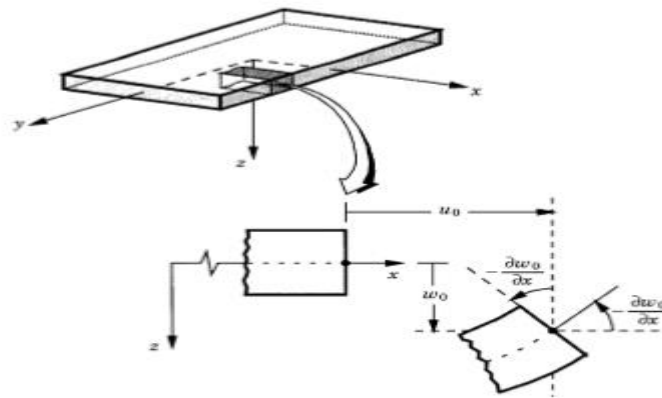
- Possibilité de fabriquer des matériaux avec des propriétés particulières (coefficient de Poisson négatif, dilatation quasi-nulle...).

Toutefois, un certain nombre de désavantages sont associés aux matériaux composites :

- Coût important du passage matériau métallique à matériau composite, prenant en compte le coût matériau (des constituants) et le coût associé au procédé de fabrication.
- Dispersion matériau plus importante que les matériaux métalliques induisant un surcoût des campagnes de qualification matériau due aux nombres de répétitions d'essais imposées.
- Forte sensibilité aux singularités géométriques (de type trou, entaille...) constituant des maillons faibles au sein de la structure.
- Faible tenue à l'impact pour les stratifiés d'unidirectionnels ou de tissés 2D, ce qui constitue en revanche l'atout majeur des tissés 3D.
- Sensibilité à l'environnement des matrices organiques entraînant une perte de propriétés mécaniques notables après vieillissement thermique ou hydrique ...
- Faible conductivité électrique des composites à matrice organique, ce qui constitue un problème important pour la résistance aux impacts de foudres des fuselages composites.

#### **I.6/Théorie Classique des Stratifiés (CLT) :**

La *Théorie Classique des Stratifiés* est basée sur les *hypothèses cinématiques de Kirchhoff*, employées pour l'étude de structures du type plaque, et sur les hypothèses cinématiques de *Kirchhoff-Love*, utilisées pour l'étude de structures du type coques courbes. L'hypothèse principale de la théorie CLPT est que les lignes normales au plan médian avant déformation restent droites et perpendiculaires à la surface moyenne après déformation la figure **(I.6)** .[6]



**Figure (I.6)** : Schématisation des déformations dans le cas de la théorie classique des stratifiés[3]

Selon Reddy (1997) et Mendonça (2005), dans la théorie *CLT* les effets des **déformations de cisaillements transversaux** ( $\gamma_{xz}, \gamma_{yz}$ ) et la **déformation normale transversale** ( $\epsilon_{zz}$ ), ne sont pas considérés. Les autres hypothèses adoptées pour la formulation de la théorie *CLT*, sont:

- ❖ Les plis sont parfaitement liés les uns aux autres, c'est-à-dire que, entre eux il n'existe pas de glissement, ou décollement ;
- ❖ Les déplacements selon des plis sont continus ;
- ❖ Le matériau de chaque pli présente un comportement élastique ;
- ❖ Le stratifié est considéré mince, c'est-à-dire, que les plis de la structure sont relativement minces par rapport aux dimensions planes (largeur et longueur) de la structure ;
- ❖ Les déformations, les déplacements et les rotations sont petits.

Selon [Reddy], le champ de déplacements de la théorie *CLT* est donné par l'expression suivante:

$$\begin{aligned} u(x, y, z) &= u_0(x, y) - z \frac{\partial w_0(x, y)}{\partial x} \\ v(x, y, z) &= v_0(x, y) - z \frac{\partial w_0(x, y)}{\partial y} \end{aligned} \quad (I.1)$$

$$w(x, y, z) = w_0(x, y)$$

$u_0$  et  $v_0$  : sont les déplacements membranaires de la feuille moyenne.

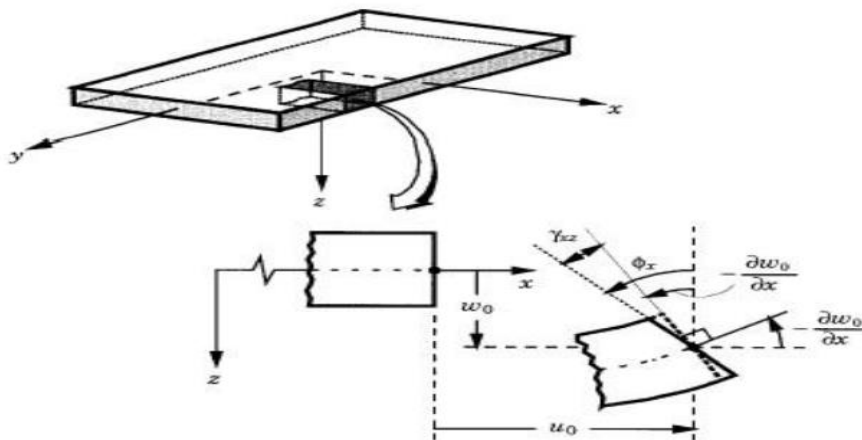
$w_0$  : est le déplacement hors plan de la feuille moyenne de la plaque.

En raison de l'hypothèse de déplacements linéaires et tenant compte du fait que les effets de cisaillement transverse ne sont pas prises en compte, la précision de la théorie *CLT* n'est adéquate que dans l'étude structures minces.

### I.7/La théorie de cisaillement du premier ordre (FSDT) :

Les modèles élaborés selon la théorie de la déformation de cisaillement du premier ordre (FSDT), sont basés sur les hypothèses adoptées dans la théorie des plaques de Reissner-Mindlin, selon lesquelles :

- ❖ une ligne droite et perpendiculaire au plan moyen d'une couche quelconque, reste droite avant la déformation toutefois elle ne reste pas nécessairement normale à ce plan de référence après la déformation de la structure. [6]
- ❖ La composante transversale du déplacement suivant l'épaisseur est constante.
- ❖ La contrainte  $\sigma_z$  est négligeable devant les autres composantes du tenseur des contraintes.
- ❖ Hypothèse d'anisotropie plane pour chaque couche dans le cas d'une plaque composite. Cette hypothèse considère  $z$  comme axe orthotrope de toutes les couches (orthotrope dans le plan  $x,y$ ).



**Figure (I.7) :** Théorie de la déformation de cisaillement du premier ordre.

le champ de déplacements est donné par l'expression suivante:

$$u(x, y, z) = u_0(x, y) + z\varphi_x(x, y)$$

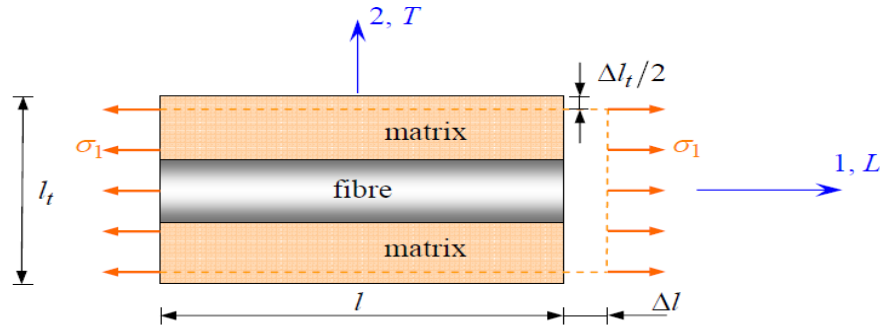
$$v(x, y, z) = v_0(x, y) + z\varphi_y(x, y)$$

$$w(x, y, z) = w_0(x, y)$$

### I.7.1/Calcul des caractéristiques mécaniques d'une couche composite :

#### I.7.1.1/Module de Young longitudinale EL :

Il est déterminé par l'essai de traction longitudinale :



**Figure (I.8):** Schéma simplifié d'une traction longitudinale[3]

La déformation longitudinale est :

$$\varepsilon_1 = \frac{\Delta l}{l} \quad (I.2)$$

Où  $\Delta l$  : l'allongement de la cellule, et  $l$  : est la longueur de la cellule considéré.

La contrainte appliquée sur l'aire de la section transversale du composite :

$$\sigma_1 = E_L \varepsilon_1 \quad (I.3)$$

Sous l'action de la contrainte la matrice et la fibre la même déformation :

$$\varepsilon_1 = \varepsilon_f = \varepsilon_m \quad (I.4)$$

Les contraintes dans la fibre et la contrainte sont exprimé par :

$$\sigma_f = E_f \cdot \varepsilon_f \quad (I.5)$$

$$\sigma_m = E_m \cdot \varepsilon_m \quad (I.6)$$

La charge appliquée dans le sens longitudinale des fibres sera partagée entre les deux constituants du composite :

$$P = \sigma_1 \cdot A = \sigma_f A_f + \sigma_m A_m \quad (I.7)$$

Par égalité :

$$E_L \cdot \varepsilon_1 \cdot A = E_f \cdot \varepsilon_f \cdot A_f + E_m \cdot \varepsilon_m \cdot A_m$$

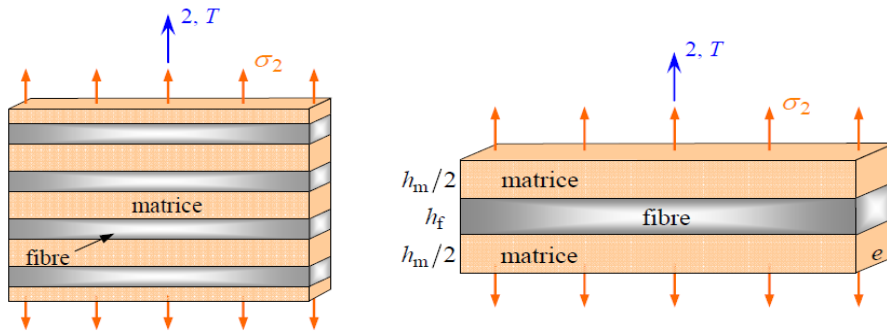
Avec  $\frac{A_f}{A} = V_f$  et  $\frac{A_m}{A} = V_m$

On obtient :

$$E_L = E_f \cdot V_f + E_m \cdot V_m \tag{I.8}$$

**I.7.1.2/Module de Young transversal ET :**

Le module d'Young transversal est déterminé dans un essai de traction transversal où le composite est chargé suivant la direction normale aux fibres :



**Figure (I.9):** Schématisation par couches d'un composite unidirectionnel[3]

La hauteur des couches doit simplement vérifier :

$$V_f = \frac{h_f}{h_f + h_m} \quad \text{avec} \quad 1 - V_f = \frac{h_m}{h_f + h_m}$$

La charge  $F_2$  imposée suivant la direction transversale est transmise intégralement dans la fibre et la matrice, impose des contraintes égales :

$$\begin{aligned} \sigma_m &= \sigma_f = \sigma_2 \\ \sigma_2 &= \varepsilon_2 E_T \end{aligned} \tag{I.9}$$

En résulte que les déformations respectives de la fibre et de la matrice dans la direction transversale s'écrivent :

$$\varepsilon_f = \frac{\sigma_2}{E_f} \quad , \quad \varepsilon_m = \frac{\sigma_2}{E_m} \tag{I.10}$$



L'allongement transversal d'une cellule élémentaire est :

$$\Delta l_2 = \varepsilon_f h_f + \varepsilon_m h_m, \tag{I.11}$$

Où :  $l = h_f + h_m$ .

La déformation transversale s'écrit :

$$\varepsilon_2 = \frac{\Delta l_2}{h_f + h_m} = \varepsilon_f \frac{h_f}{h_f + h_m} + \varepsilon_m \frac{h_m}{h_f + h_m}$$

$$\varepsilon_2 = \varepsilon_f V_f + \varepsilon_m (1 - V_f) \tag{I.12}$$

De (I.9)  $\varepsilon_2 = \frac{1}{E_T} \sigma_2 = \varepsilon_f V_f + \varepsilon_m (1 - V_f) = \frac{1}{E_f} \sigma_2 V_f + \frac{1}{E_m} \sigma_2 (1 - V_f)$

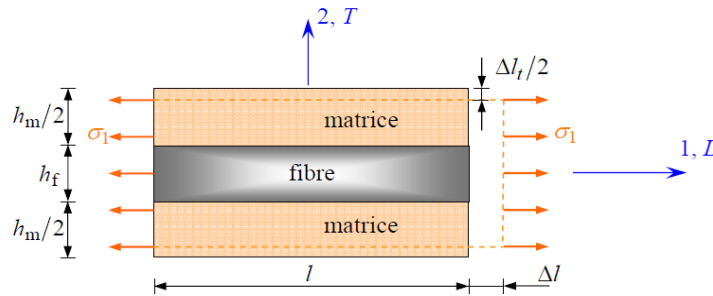
$$\frac{1}{E_T} = \frac{V_f}{E_f} + \frac{(1 - V_f)}{E_m}$$

On obtient :

$$\mathbf{E}_T = \frac{E_f E_m}{E_m V_f + E_f (1 - V_f)} \tag{I.13}$$

**I.7.1.3/Coefficient de poisson :**

Le coefficient de poisson longitudinal est déterminé dans essai de traction longitudinale :



**Figure (I.10):** Schéma par couches d'une traction[3]

Par définition :

$$\vartheta_{12} = -\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} \rightarrow \varepsilon_2 = -\vartheta_{12} \varepsilon_1 \tag{I.14}$$

Les déformations transversales dans la matrice et dans les fibres s'écrivent :

$$\varepsilon_{2m} = -\vartheta_m \varepsilon_1 \quad \varepsilon_{2f} = -\vartheta_f \varepsilon_1 \tag{I.15}$$

L'allongement transversal de la cellule élémentaire est :

$$\Delta l_t = -\vartheta_m \varepsilon_1 h_m - \vartheta_f \varepsilon_1 h_f \tag{I.16}$$

La déformation transversale s'écrit :  $\varepsilon_2 = \frac{\Delta l_t}{h_m+h_f} = -[\vartheta_m V_m + \vartheta_f V_f] \varepsilon_1$

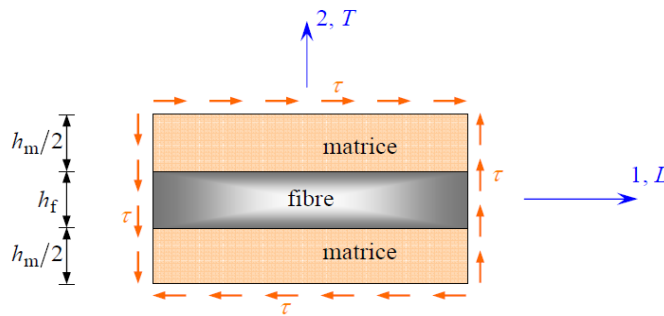
L'expression du coefficient de poisson :

$$\vartheta_{12} = \vartheta_m V_m + \vartheta_f V_f \tag{I.17}$$

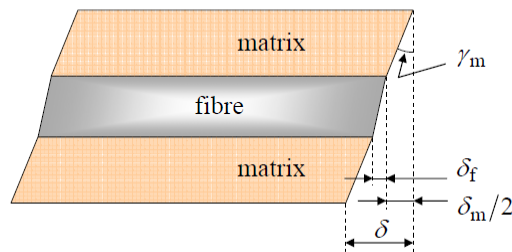
Cette expression est la loi de mélange pour le coefficient de poisson longitudinal.

**I.7.1.4 Module de cisaillement :**

Le module de cisaillement  $G_{LT}$  est déterminé dans essai de cisaillement :



**Figure I.11:** Schéma par couches d'un essai cisaillement longitudinal.[3]



**Figure (I.12):** Déformations en cisaillement de la matrice et de la fibre.[3]

La contrainte de cisaillement est supposé la même pour la matrice et pour renfort :

$$\tau = \tau_m = \tau_f \tag{I.18}$$

Les déformations en cisaillement de la fibre et de la matrice s'expriment donc suivant :

$$\gamma_f = \frac{\tau}{G_f} \qquad \gamma_m = \frac{\tau}{G_m}$$

Les déformations induites dans la fibre et dans la matrice :

$$\delta_f = h_f \gamma_f \qquad \delta_m = h_m \gamma_m$$

La déformation totale de la cellule :

$$\delta = \delta_f + \delta_m = h_f \gamma_f + h_m \gamma_m \qquad (I.19)$$

Et l'angle de cisaillement de la cellule est déterminé par l'expression :

$$\gamma = \frac{\delta}{h_f + h_m} = \gamma_f V_f + \gamma_m V_m \qquad (I.20)$$

Cet angle est lié à la contrainte de cisaillement par le module de cisaillement longitudinal

$G_{LT}$  :

$$\gamma = \frac{\tau}{G_{LT}} = V_f \frac{\tau}{G_f} + V_m \frac{\tau}{G_m}$$

Enfinement :

$$G_{LT} = \frac{G_m G_f}{V_f G_m + V_m G_f} \qquad (I.21)$$

## I.7.2/Comportement mécanique des composites stratifiés :

### I.7.2.1/Loi de Hooke généralisée :

La loi de Hooke généralisée pour un matériau anisotrope est donnée suivant l'une des deux formes:

$$\sigma_i = C_{ij} \varepsilon_j \qquad (I.22)$$

$$\varepsilon_i = S_{ij} \sigma_j \qquad (I.23)$$

$\sigma_i$  et  $\varepsilon_i$  sont les composantes de la contrainte et la déformation dans le système des matériaux (1, 2, 3),  $C_{ij}$  et  $S_{ij}$  sont les coefficients de rigidité et de souplesse respectivement. Sous forme matricielle et explicite on aura :

$$\{\sigma\} = [C]\{\varepsilon\}$$

$$\begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \sigma_4 \\ \sigma_5 \\ \sigma_6 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & C_{14} & C_{15} & C_{16} \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} & C_{24} & C_{25} & C_{26} \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} & C_{34} & C_{35} & C_{36} \\ C_{41} & C_{42} & C_{43} & C_{44} & C_{45} & C_{46} \\ C_{51} & C_{52} & C_{53} & C_{54} & C_{55} & C_{56} \\ C_{61} & C_{62} & C_{63} & C_{64} & C_{65} & C_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \varepsilon_4 \\ \varepsilon_5 \\ \varepsilon_6 \end{Bmatrix} \quad (\text{I.24})$$

Et:

$$\{\varepsilon\} = [S]\{\sigma\}$$

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \varepsilon_4 \\ \varepsilon_5 \\ \varepsilon_6 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{13} & S_{14} & S_{15} & S_{16} \\ S_{21} & S_{22} & S_{23} & S_{24} & S_{25} & S_{26} \\ S_{31} & S_{32} & S_{33} & S_{34} & S_{35} & S_{36} \\ S_{41} & S_{42} & S_{43} & S_{44} & S_{45} & S_{46} \\ S_{51} & S_{52} & S_{53} & S_{54} & S_{55} & S_{56} \\ S_{61} & S_{62} & S_{63} & S_{64} & S_{65} & S_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \sigma_4 \\ \sigma_5 \\ \sigma_6 \end{Bmatrix} \quad (\text{I.25})$$

La relation entre la matrice de rigidité et la matrice de souplesse est :  $C=S^{-1}$

### I.7.2.2/Loi de comportement d'une couche stratifiée (pli) :

Pour étudier le comportement d'un stratifié constitué de plusieurs plis d'orientation différentes, il est nécessaire de connaître le comportement de chacun des plis qui le compose.

En général, *un pli composite* est considéré comme orthotrope, sa loi de comportement mécanique aura donc la forme de :

$$\begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \sigma_4 \\ \sigma_5 \\ \sigma_6 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{22} & C_{23} & 0 & 0 & 0 \\ C_{13} & C_{23} & C_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \varepsilon_4 \\ \varepsilon_5 \\ \varepsilon_6 \end{Bmatrix} \quad (\text{I.26})$$

Et aussi :

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \varepsilon_4 \\ \varepsilon_5 \\ \varepsilon_6 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{13} & 0 & 0 & 0 \\ S_{21} & S_{22} & S_{23} & 0 & 0 & 0 \\ S_{31} & S_{32} & S_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & S_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & S_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & S_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \sigma_4 \\ \sigma_5 \\ \sigma_6 \end{Bmatrix} \quad (\text{I.27})$$

Les coefficients de souplesse sont définis par :

$$S_{11} = \frac{1}{E_1}, \quad S_{22} = \frac{1}{E_2}, \quad S_{33} = \frac{1}{E_3}, \quad S_{44} = \frac{1}{G_{23}}, \quad S_{55} = \frac{1}{G_{13}}, \quad S_{66} = \frac{1}{G_{12}}$$

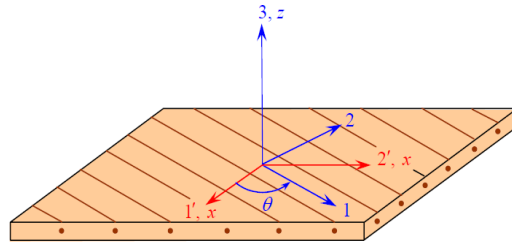
$$S_{12} = \frac{-\nu_{21}}{E_2}, \quad S_{23} = \frac{-\nu_{32}}{E_3}, \quad S_{13} = \frac{-\nu_{31}}{E_3}$$

La matrice de souplesse est symétrique alors :

$$S_{12} = S_{21} \quad \frac{-\nu_{12}}{E_1} = \frac{-\nu_{21}}{E_2}$$

$$S_{23} = S_{32} \quad \frac{-\nu_{23}}{E_2} = \frac{-\nu_{32}}{E_3}$$

$$S_{13} = S_{31} \quad \frac{-\nu_{13}}{E_1} = \frac{-\nu_{31}}{E_3}$$



**Figure (I.13):** Axes principaux et axes de référence d'une couche stratifiée[3]

Les axes principaux de la couche sont (1, 2,3) et les axes de référence de stratifiés sont (1',2',3). Les matrices de rigidité C' et de souplesse S', exprimées dans la base (1',2',3), sont obtenus en appliquant aux matrices de rigidité et de souplesse, rapportées à la base (1, 2,3) les relations de changement de base :

$$\bar{C} = T_{\sigma}^{-1} C T_{\varepsilon} \quad \text{et} \quad \bar{S} = T_{\varepsilon}^{-1} C T_{\sigma}$$

Avec :

$$T_{\sigma} = \begin{bmatrix} \cos^2 \theta & \sin^2 \theta & 0 & 0 & 0 & 2 \sin \theta \cos \theta \\ \sin^2 \theta & \cos^2 \theta & 0 & 0 & 0 & -2 \sin \theta \cos \theta \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ -\sin \theta \cos \theta & \sin \theta \cos \theta & 0 & 0 & 0 & \cos^2 \theta - \sin^2 \theta \end{bmatrix} \quad (I.28)$$

$$T_{\varepsilon} = \begin{bmatrix} \cos^2 \theta & \sin^2 \theta & 0 & 0 & 0 & \sin \theta \cos \theta \\ \sin^2 \theta & \cos^2 \theta & 0 & 0 & 0 & -\sin \theta \cos \theta \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ -2 \sin \theta \cos \theta & 2 \sin \theta \cos \theta & 0 & 0 & 0 & \cos^2 \theta - \sin^2 \theta \end{bmatrix} \quad (I.29)$$

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{zz} \\ \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} \\ \sigma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{C}_{11} & \bar{C}_{12} & \bar{C}_{13} & 0 & 0 & \bar{C}_{16} \\ \bar{C}_{12} & \bar{C}_{22} & \bar{C}_{23} & 0 & 0 & \bar{C}_{26} \\ \bar{C}_{13} & \bar{C}_{23} & \bar{C}_{33} & 0 & 0 & \bar{C}_{36} \\ 0 & 0 & 0 & \bar{C}_{44} & \bar{C}_{45} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \bar{C}_{45} & \bar{C}_{55} & 0 \\ \bar{C}_{16} & \bar{C}_{26} & \bar{C}_{36} & 0 & 0 & \bar{C}_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \varepsilon_{zz} \\ \varepsilon_{yz} \\ \varepsilon_{zx} \\ \varepsilon_{xy} \end{Bmatrix} \quad (\text{I.30})$$

Et :

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \varepsilon_{zz} \\ \varepsilon_{yz} \\ \varepsilon_{zx} \\ \varepsilon_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{S}_{11} & \bar{S}_{12} & \bar{S}_{13} & 0 & 0 & \bar{S}_{16} \\ \bar{S}_{12} & \bar{S}_{22} & \bar{S}_{23} & 0 & 0 & \bar{S}_{26} \\ \bar{S}_{13} & \bar{S}_{23} & \bar{S}_{33} & 0 & 0 & \bar{S}_{36} \\ 0 & 0 & 0 & \bar{S}_{44} & \bar{S}_{45} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \bar{S}_{45} & \bar{S}_{55} & 0 \\ \bar{S}_{16} & \bar{S}_{26} & \bar{S}_{36} & 0 & 0 & \bar{S}_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{zz} \\ \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} \\ \sigma_{xy} \end{Bmatrix} \quad (\text{I.31})$$

### I.7.2.3/Relation contrainte-déformation planes :

En général, les composites stratifiés impliquent un état de contraintes planes. Ce dernier est un état particulier de contraintes à deux dimensions, pour lequel les composantes du tenseur des contraintes sont indépendantes de la coordonnée  $z$ . En conséquence, les relations établies dans le cas général se simplifient. Le tenseur des déformations se réduit à :

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{13} \\ S_{12} & S_{22} & S_{26} \\ S_{16} & S_{26} & S_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \tau_{12} \end{Bmatrix} \quad (\text{I.32})$$

$$S_{11} = \frac{1}{E_1} \quad S_{12} = \frac{-\vartheta_{21}}{E_2} \quad S_{22} = \frac{1}{E_2} \quad S_{66} = \frac{1}{G_{12}} \quad S_{16} = S_{26} = 0$$

Son inverse nous permet d'écrire la matrice de rigidités réduites  $[Q]$  :

$$\begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \tau_{12} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & 0 \\ Q_{12} & Q_{22} & 0 \\ 0 & 0 & Q_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \end{Bmatrix} \quad \begin{Bmatrix} \tau_{13} \\ \tau_{23} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{44} & 0 \\ 0 & C_{55} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \gamma_{13} \\ \gamma_{23} \end{Bmatrix} \quad (\text{I.33})$$

$$Q_{11} = \frac{E_{11}}{1 - \vartheta_{12}\vartheta_{21}} \quad Q_{22} = \frac{E_{22}}{1 - \vartheta_{12}\vartheta_{21}} \quad Q_{12} = Q_{21} = \frac{\vartheta_{12}E_2}{1 - \vartheta_{12}\vartheta_{21}} \quad Q_{66} = G_{12}.$$

### I.7.2.4/Relation contrainte déformation dans le plan du matériau :

Le passage du repère orthotrope au repère cartésien de fait par les matrices de transformation  $[T_1]$  et  $[T_2]$  :

$$[T_1] = \begin{bmatrix} \cos^2 \theta & \sin^2 \theta & \cos \theta \sin \theta \\ \sin^2 \theta & \cos^2 \theta & -\cos \theta \sin \theta \\ -2\cos \theta \sin \theta & 2\cos \theta \sin \theta & \cos^2 \theta - \sin^2 \theta \end{bmatrix}; [T_2] = \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \quad (I.34)$$

Les relations contraintes-déformations, pour une couche  $k$ , exprimées dans le repère global, s'écrivent donc :

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{Q}_{11} & \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{16} \\ \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{22} & \bar{Q}_{26} \\ \bar{Q}_{16} & \bar{Q}_{26} & \bar{Q}_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} \quad \begin{Bmatrix} \tau_{xz} \\ \tau_{yz} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{C}_{44} & \bar{C}_{45} \\ \bar{C}_{45} & \bar{C}_{55} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \end{Bmatrix} \quad (I.35)$$

$$\text{Avec } [\bar{Q}] = [T_1]^{-1}[Q][T_1]$$

$$[\bar{C}] = [T_2]^{-1}[C][T_2]$$

Et les composantes de la matrice s'écrivent :

$$\bar{Q}_{11} = Q_{11} \cos^4 \theta + Q_{22} \sin^4 \theta + 2(Q_{12} + 2Q_{66}) \sin^2 \theta \cos^2 \theta$$

$$\bar{Q}_{12} = (Q_{11} + Q_{22} - 4Q_{66}) \sin^2 \theta \cos^2 \theta + Q_{12}(\sin^4 \theta + \cos^4 \theta)$$

$$\bar{Q}_{16} = (Q_{11} - Q_{12} - 2Q_{66}) \sin \theta \cos^3 \theta + (Q_{12} - Q_{22} + 2Q_{66}) \sin^3 \theta \cos \theta$$

$$\bar{Q}_{22} = Q_{11} \sin^4 \theta + 2(Q_{12} + 2Q_{66}) \sin^2 \theta \cos^2 \theta + Q_{22} \cos^4 \theta$$

$$\bar{Q}_{26} = (Q_{11} - Q_{12} - 2Q_{66}) \sin^3 \theta \cos \theta + (Q_{12} - Q_{22} + 2Q_{66}) \sin \theta \cos^3 \theta$$

$$\bar{Q}_{66} = [Q_{11} + Q_{22} - 2(Q_{12} + Q_{66})] \sin^2 \theta \cos^2 \theta + Q_{66}(\sin^4 \theta + \cos^4 \theta)$$

$$\bar{C}_{44} = C_{44} \cos^2 \theta + C_{55} \sin^2 \theta$$

$$\bar{C}_{45} = (C_{55} - C_{44}) \sin \theta \cos \theta$$

$$\bar{C}_{55} = C_{44} \sin^2 \theta + C_{55} \cos^2 \theta$$

### I.7.3/Champ des déplacements :

Selon la théorie de déformation en cisaillement du premier ordre (FSDT), le champ des déplacements s'écrit comme suit :

$$\begin{aligned}
\mathbf{u}(x, y, z) &= \mathbf{u}_0(x, y) + z\boldsymbol{\varphi}_x(x, y) \\
v(x, y, z) &= v_0(x, y) + z\varphi_y(x, y) \\
w(x, y, z) &= w_0(x, y)
\end{aligned} \tag{I.36}$$

#### I.7.4/Champ des déformations :

Le champ des déformations est déduit du champ des déplacements. Il s'écrit :

$$\begin{aligned}
\varepsilon_{xx} &= \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u_0}{\partial x} + z \frac{\partial \varphi_x}{\partial x} \\
\varepsilon_{yy} &= \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial v_0}{\partial y} + z \frac{\partial \varphi_y}{\partial y} \\
\varepsilon_{zz} &= \frac{\partial w}{\partial z} = \frac{\partial w_0}{\partial z} = 0 \\
\gamma_{xy} &= 2\varepsilon_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = \left( \frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} \right) + z \left( \frac{\partial \varphi_x}{\partial y} + \frac{\partial \varphi_y}{\partial x} \right) \\
\gamma_{yz} &= 2\varepsilon_{yz} = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} = \varphi_y + \frac{\partial w_0}{\partial y} \\
\gamma_{xz} &= 2\varepsilon_{xz} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} = \varphi_x + \frac{\partial w_0}{\partial x}
\end{aligned} \tag{I.37}$$

Le champ des déformations peut être sous-divisé en deux champs :

❖ Le champ des déformations en membrane-flexion :

$$\varepsilon_{mf}(M) = \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} \tag{I.38}$$

❖ Le champ des déformations en cisaillement transverse :

$$\gamma_c(M) = \begin{Bmatrix} \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial w_0}{\partial y} + \varphi_y \\ \frac{\partial w_0}{\partial x} + \varphi_x \end{Bmatrix} \tag{I.39}$$

Le champ des déformations en cisaillement varie a priori d'une couche à l'autre. Dans la théorie des stratifiés avec cisaillement transverse, on admet toutefois que le champ est identique dans



toutes les couches. La première approche consiste à admettre que les déformations en cisaillement sont égales aux déformations moyennes  $\gamma_{yz}^0$  et  $\gamma_{xz}^0$  du stratifié, soit :

$$\gamma_c(M) = \begin{Bmatrix} \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \gamma_{yz}^0 \\ \gamma_{xz}^0 \end{Bmatrix} \quad (\text{I.40})$$

Le champ des déformations en membrane-flexion est la superposition :

❖ Des déformations en membrane :

$$\varepsilon_{mf}(M) = \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx}^0 \\ \varepsilon_{yy}^0 \\ \gamma_{xy}^0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial u_0}{\partial x} \\ \frac{\partial v_0}{\partial y} \\ \frac{\partial u_0}{\partial x} + \frac{\partial v_0}{\partial y} \end{Bmatrix} \quad (\text{I.41})$$

❖ Des déformations en flexion et torsion :

$$\varepsilon_f(M) = \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx}^f \\ \varepsilon_{yy}^f \\ \gamma_{xy}^f \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} z \frac{\partial u_0}{\partial x} \\ z \frac{\partial v_0}{\partial y} \\ z \left( \frac{\partial u_0}{\partial x} + \frac{\partial v_0}{\partial y} \right) \end{Bmatrix} \quad (\text{I.42})$$

Les déformations en flexion et torsion s'expriment en fonction de la matrice des courbures suivant la relation :

$$\varepsilon_f(M) = zK(x, y)$$

Avec :

$$K(x, y) = \begin{Bmatrix} K_x \\ K_y \\ K_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial u_0}{\partial x} \\ \frac{\partial v_0}{\partial y} \\ \left( \frac{\partial u_0}{\partial x} + \frac{\partial v_0}{\partial y} \right) \end{Bmatrix} \quad (\text{I.43})$$

$$\text{Finalement, le champ } \varepsilon_{mf}(M) = \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx}^0 \\ \varepsilon_{yy}^0 \\ \gamma_{xy}^0 \end{Bmatrix} + z \begin{Bmatrix} K_x \\ K_y \\ K_{xy} \end{Bmatrix} \quad (\text{I.44})$$

Le champ de déformation s'écrit sous la forme :

$$\varepsilon_{mf}(M) = \varepsilon_m(x, y) + z K(x, y) \quad (\text{I.45})$$

**I.7.5/Loi de comportement :**

Les contraintes dans une couche k s'expriment suivant :

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \\ \sigma_{yz} \\ \sigma_{xz} \end{Bmatrix}_k = \begin{bmatrix} \bar{Q}_{11} & \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{16} & 0 & 0 \\ \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{22} & \bar{Q}_{26} & 0 & 0 \\ \bar{Q}_{16} & \bar{Q}_{26} & \bar{Q}_{66} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \bar{C}_{44} & \bar{C}_{45} \\ 0 & 0 & 0 & \bar{C}_{45} & \bar{C}_{55} \end{bmatrix}_k \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{yz}^0 \\ \gamma_{xz}^0 \end{Bmatrix} \quad (\text{I.46})$$

Les paramètres  $\bar{Q}_{ij}$  de la couche k sont rapportés aux axes de référence du stratifié.

Le champ des contraintes est constitué des contraintes en membrane :  $\sigma_{xx}$ ,  $\sigma_{yy}$ ,  $\sigma_{xy}$  et des contraintes en cisaillement transverse :  $\sigma_{yz}$ ,  $\sigma_{xz}$ . L'expression (I.46) montre que ces deux champs sont découplés.

Les contraintes en *membrane* dans la couche K s'expriment suivant :

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix}_k = \begin{bmatrix} \bar{Q}_{11} & \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{16} \\ \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{22} & \bar{Q}_{26} \\ \bar{Q}_{16} & \bar{Q}_{26} & \bar{Q}_{66} \end{bmatrix}_k \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx}^0 \\ \varepsilon_{yy}^0 \\ \gamma_{xy}^0 \end{Bmatrix} + z \begin{bmatrix} \bar{Q}_{11} & \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{16} \\ \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{22} & \bar{Q}_{26} \\ \bar{Q}_{16} & \bar{Q}_{26} & \bar{Q}_{66} \end{bmatrix}_k \begin{Bmatrix} K_x \\ K_y \\ K_{xy} \end{Bmatrix} \quad (\text{I.47})$$

Ou sous forme contractée :

$$\boldsymbol{\sigma}_k(\mathbf{M}) = \bar{\mathbf{Q}}_k \boldsymbol{\varepsilon}_m(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + z \bar{\mathbf{Q}}_k \mathbf{k}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \quad (\text{I.48})$$

Les contraintes en cisaillement transverse dans la couche k s'expriment suivant :

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{yz} \\ \sigma_{xz} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{C}_{44} & \bar{C}_{45} \\ \bar{C}_{45} & \bar{C}_{55} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \gamma_{yz}^0 \\ \gamma_{xz}^0 \end{Bmatrix} \quad (\text{I.49})$$

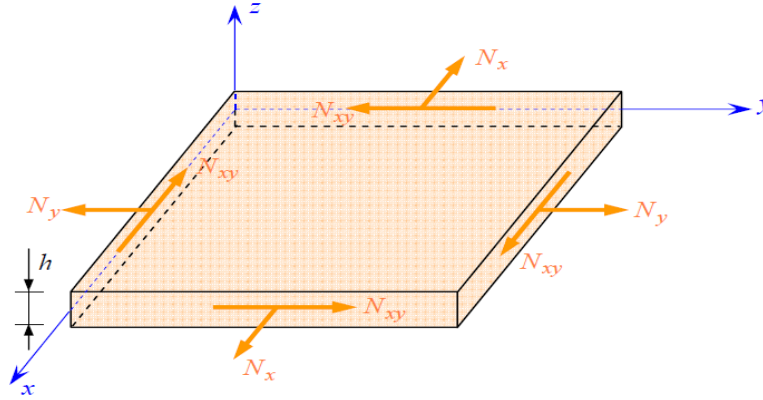
**I.7.5/Les efforts résultants :**

Les efforts résultants sont obtenus par l'intégration des contraintes à travers l'épaisseur du stratifié.

**I.7.5.1/Résultantes en membrane :** Le champ des résultantes en membrane, noté  $\mathbf{N}(\mathbf{x}, \mathbf{y})$  est défini par

$$N(x, y) = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_k(M) dz \quad (\text{I.50})$$

Où  $\sigma_k(M)$  est la matrice des contraintes en membrane  $\sigma_{xx}$ ,  $\sigma_{yy}$ ,  $\sigma_{xy}$  dans la couche k.



**Figure (I.14) :** Représentation des résultantes en membrane des actions exercées sur un élément de plaque stratifiée[3]

Soit :

$$\begin{Bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \end{Bmatrix} = \int_{-h/2}^{h/2} \begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \end{Bmatrix} dz = \sum_{k=1}^n \int_{-h/2}^{h/2} \begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \end{Bmatrix} dz \quad (\text{I.51})$$

$$\begin{aligned} &= \sum_{k=1}^n \int_{h_{k-1}}^{h_k} [\bar{Q}_k \varepsilon_m(x, y) + z \bar{Q}_k k(x, y)] dz \\ &= \sum_{k=1}^n \left[ \bar{Q}_k \varepsilon_m(x, y) \int_{h_{k-1}}^{h_k} dz \right] + \sum_{k=1}^n \left[ \bar{Q}_k k(x, y) \int_{h_{k-1}}^{h_k} dz \right] \\ &= \left[ \sum_{k=1}^n (h_k - h_{k-1}) \bar{Q}_k \right] \varepsilon_m(x, y) + \left[ \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n (h_k^2 - h_{k-1}^2) \bar{Q}_k \right] k(x, y) \end{aligned}$$

Soit, en définitive :

$$N(x, y) = A_{ij} \varepsilon_m(x, y) + B_{ij} k(x, y) \quad (\text{I.52})$$

$$\text{Avec } A_{ij} = \sum_{k=1}^n (h_k - h_{k-1}) [\bar{Q}_{ij}]_k \quad (\text{I.53})$$

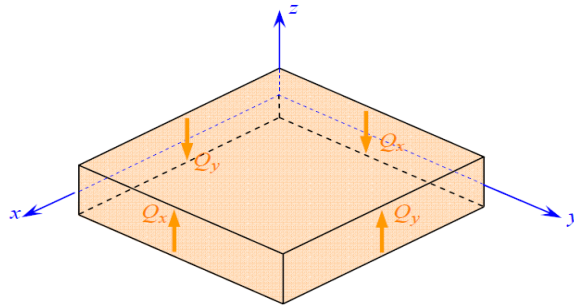
$$B_{ij} = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n (h_k^2 - h_{k-1}^2) [\bar{Q}_{ij}]_k \quad (\text{I.54})$$

**I.7.5.2/Résultantes en cisaillement :**

De la même manière, on définit les résultantes en cisaillement, par unité de longueur, comme suit:

$$Q(x, y) = \begin{Bmatrix} Q_x \\ Q_y \end{Bmatrix} = \int_{h/2}^{h/2} \begin{Bmatrix} \sigma_{xz} \\ \sigma_{yz} \end{Bmatrix} dz = \sum_{k=1}^n \int_{h_{k-1}}^{h_k} \begin{Bmatrix} \sigma_{xz} \\ \sigma_{yz} \end{Bmatrix} dz \quad (\text{I.55})$$

Ces résultantes sont schématisées sur la figure (I.15):



**Figure (I.15):** Représentation des résultantes en cisaillement.[3]

En introduisant la relation (I.49) dans l'expression (I.55), les résultantes en cisaillement s'écrivent:

$$\begin{aligned} Q(x, y) &= \begin{Bmatrix} Q_x \\ Q_y \end{Bmatrix} = \sum_{k=1}^n \int_{h_{k-1}}^{h_k} \begin{bmatrix} \bar{C}_{44} & \bar{C}_{45} \\ \bar{C}_{45} & \bar{C}_{55} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \gamma_{yz}^0 \\ \gamma_{xz}^0 \end{Bmatrix} dz \\ &= \sum_{k=1}^n \int_{h_{k-1}}^{h_k} \begin{bmatrix} \bar{C}_{44} & \bar{C}_{45} \\ \bar{C}_{45} & \bar{C}_{55} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \gamma_{yz}^0 \\ \gamma_{xz}^0 \end{Bmatrix} dz \\ &= \sum_{k=1}^n \begin{bmatrix} \bar{C}_{44} & \bar{C}_{45} \\ \bar{C}_{45} & \bar{C}_{55} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \gamma_{yz}^0 \\ \gamma_{xz}^0 \end{Bmatrix} \int_{h_{k-1}}^{h_k} dz \\ &= \sum_{k=1}^n (h_k - h_{k-1}) \begin{bmatrix} \bar{C}_{44} & \bar{C}_{45} \\ \bar{C}_{45} & \bar{C}_{55} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \gamma_{yz}^0 \\ \gamma_{xz}^0 \end{Bmatrix} \end{aligned} \quad (\text{I.56})$$

Alors :

$$\{Q(x, y)\} = \begin{bmatrix} F_{44} & F_{45} \\ F_{45} & F_{55} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \gamma_{yz}^0 \\ \gamma_{xz}^0 \end{Bmatrix} \quad (\text{I.57})$$

$$F_{ij} = \sum_{k=1}^n (h_k - h_{k-1}) [(\bar{C}_{ij})]_k \quad i, j = 4, 5 \quad (\text{I.58})$$

Les résultantes en cisaillement sont modifiées en remplaçant les coefficients de rigidité  $F_{ij}$  par de nouveaux coefficients de rigidité en cisaillement  $H_{ij}$  du stratifié :

$$\begin{Bmatrix} Q_y \\ Q_x \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} H_{44} & H_{45} \\ H_{45} & H_{55} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \gamma_{yz}^0 \\ \gamma_{xz}^0 \end{Bmatrix} \quad (\text{I.59})$$

Avec  $H_{ij} = K_{ij} F_{ij}$

Les paramètres  $K_{ij}$  sont des facteurs de correction en cisaillement traverse, à déterminer.

### I.7.5.3/ Moments de flexion-torsion :

Les moments de flexion et de torsion exercés sur un stratifié sont définis par :

$$\begin{aligned} M(x, y) &= \begin{Bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{Bmatrix} = \int_{-h/2}^{h/2} \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} z dz = \sum_{k=1}^n \int_{h_{k-1}}^{h_k} \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} z dz \\ M(x, y) &= \sum_{k=1}^n \int_{h_{k-1}}^{h_k} [z \bar{Q}_k \varepsilon_m(x, y) + z^2 \bar{Q}_k k(x, y)] dz \\ &= \sum_{k=1}^n \left[ \bar{Q}_k \varepsilon_m(x, y) \int_{h_{k-1}}^{h_k} z dz \right] + \sum_{k=1}^n \left[ \bar{Q}_k k(x, y) \int_{h_{k-1}}^{h_k} z^2 dz \right] \\ &= \left[ \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n (h_k^2 - h_{k-1}^2) \bar{Q}_k \right] \varepsilon_m(x, y) + \left[ \frac{1}{3} \sum_{k=1}^n (h_k^3 - h_{k-1}^3) \bar{Q}_k \right] k(x, y) \end{aligned} \quad (\text{I.60})$$

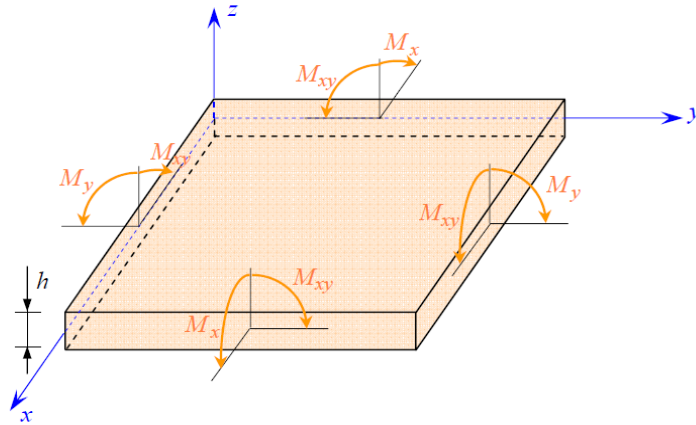
Soit, en définitive :

$$\mathbf{M}(x, y) = \mathbf{B}_{ij} \boldsymbol{\varepsilon}_m(x, y) + \mathbf{D}_{ij} \mathbf{k}(x, y) \quad (\text{I.61})$$

$$\text{Avec } B_{ij} = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n (h_k^2 - h_{k-1}^2) [\bar{Q}_{ij}]_k \quad (\text{I.62})$$

$$D_{ij} = \frac{1}{3} \sum_{k=1}^n (h_k^3 - h_{k-1}^3) [\bar{Q}_{ij}]_k$$

$M_x$  et  $M_y$  sont les moments de flexion et suivant les directions x et y respectivement et  $M_{xy}$  est le moment de torsion. Ils sont schématisés sur la (figure I.16)



**Figure (I.16):** Schématisation des résultantes des moments de flexion et de torsion [3]

**I.7.5.4/Equation constitutive :**

L'équation constitutive des stratifiés avec cisaillement traverse s'écrit en rassemblant les résultantes et les moments sous la forme :

$$\begin{Bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \\ M_x \\ M_y \\ M_{xy} \\ Q_y \\ Q_x \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{16} & B_{11} & B_{12} & B_{16} & 0 & 0 \\ A_{12} & A_{22} & A_{26} & B_{12} & B_{22} & B_{26} & 0 & 0 \\ A_{16} & A_{26} & A_{66} & B_{16} & B_{26} & B_{66} & 0 & 0 \\ B_{11} & B_{12} & B_{16} & D_{11} & D_{12} & D_{16} & 0 & 0 \\ B_{12} & B_{22} & B_{26} & D_{12} & D_{22} & D_{26} & 0 & 0 \\ B_{16} & B_{26} & B_{66} & D_{16} & D_{26} & D_{66} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & H_{44} & H_{45} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & H_{45} & H_{55} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx}^0 \\ \varepsilon_{yy}^0 \\ \gamma_{xy}^0 \\ K_x \\ K_y \\ K_{xy} \\ \gamma_{yz}^0 \\ \gamma_{xz}^0 \end{Bmatrix} \quad (I.63)$$

Avec :

$$\begin{aligned} \varepsilon_{xx}^0 &= \frac{\partial u_0}{\partial x} & \varepsilon_{yy}^0 &= \frac{\partial v_0}{\partial y} & \gamma_{xy}^0 &= \frac{\partial u_0}{\partial x} + \frac{\partial v_0}{\partial y} \\ K_x &= \frac{\partial \varphi_x}{\partial x} & K_y &= \frac{\partial \varphi_y}{\partial y} & K_{xy} &= \frac{\partial \varphi_x}{\partial x} + \frac{\partial \varphi_y}{\partial y} \\ \gamma_{yz}^0 &= \frac{\partial w_0}{\partial y} + \varphi_y & \gamma_{xz}^0 &= \frac{\partial w_0}{\partial x} + \varphi_x \end{aligned}$$

L'équation constitutive peut également être écrite sous forme suivante :

$$\begin{Bmatrix} N \\ M_f \\ Q \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B & 0 \\ B & D & 0 \\ 0 & 0 & H \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_m \\ K \\ \gamma_c \end{Bmatrix} \quad (I.64)$$

Les coefficients des matrices sont exprimés par :

$$A_{ij} = \sum_{k=1}^n (h_k - h_{k-1}) [\bar{Q}_{ij}]_k$$

$$B_{ij} = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n (h_k^2 - h_{k-1}^2) [\bar{Q}_{ij}]_k$$

$$D_{ij} = \frac{1}{3} \sum_{k=1}^n (h_k^3 - h_{k-1}^3) [\bar{Q}_{ij}]_k$$

$$H_{ij} = \sum_{k=1}^n (h_k - h_{k-1}) [\bar{C}_{ij}]_k$$

- La matrice **A** correspond au comportement de *membrane*,
- La matrice **D** correspond au comportement de *flexion*,
- La matrice **B** correspond aux termes de *couplage* entre les phénomènes de *membrane et de flexion*,
- La matrice **H** correspond au comportement de *cisaillement*.

# Chapitre II



## **CHAPITRE II :**

### **Analyse théoriques du comportement vibratoire des plaques.**

#### **II.1/Recherche bibliographique :**

##### **II.1.1/Introduction :**

Les dernières décennies ont vu un grand effort dans l'analyse et la conception des structures en matériaux composites. Des grandes évolutions ont été réalisées pour mieux comprendre le comportement dynamique de plaques composites stratifiées. [8]

Les plaques composites sont souvent appliquées dans un environnement avec température élevée qui causée des changements dans les comportements mécaniques des plaques. Ainsi les études sur les vibrations thermiques et le flambement des plaques composites augmentent considérablement dans les dernières années. [9]

La littérature suivante présente des études récentes sur la vibration et la vibration des plaques sous charge thermique.

##### **II.1.2 /Revue sur la vibration des plaques :**

**Noor en 1973** [10] a utilisé la théorie des plaques composites multicouches tridimensionnelles pour étudier l'effet de nombre des couches, le degré de l'anisotropie et le rapport de l'épaisseur sur les fréquences fondamentales des plaques carrées simplement appuyée.

**Ventkatesan et Kunukkasseril en (1978)** [11] ont étudiés les caractéristiques vibrationnelles libres des plaques stratifiés circulaires. Les équations intégrant la déformation sont développées pour le mouvement asymétrique. Ils ont développé les équations intégrant la déformation de cisaillement et l'inertie rotatoire pour le mouvement asymétrique et ont obtenu des solutions exactes de forme fermée pour le mouvement axisymétrique.

##### **II.1.3 /Revue sur vibration et charge thermique :**

Une solution analytique tridimensionnelle a été proposée par **Noor et Burton** [12] pour étudier la vibration libre et le flambement des plaques composites stratifiées soumis à des contraintes thermiques.

Dans la même année, les auteurs ont présenté autre solution tridimensionnelle pour le flambement thermique des plaques multicouches rectangulaire avec stratification antisymétrique [13]. Ils ont étudié l'effet de déformation de pré-flambement sur la température critique ainsi que l'effet de variation de stratification.

**Bhimaraddi et Chandrashekhara** [14] ont utilisé la théorie de cisaillement parabolique pour étudier l'effet de l'imperfection et des charges de température sur le comportement vibratoire non-linéaire de plaques composites stratifiées symétriques et antisymétriques.

**Park et al en 2004** [15] ont utilisé la théorie du premier ordre pour étudier le comportement vibratoire de flambement thermique des plaques composites renforcées par des fibres à mémoire forme (SMA). Ils ont obtenu les caractéristiques vibratoires de ces plaques dans l'état de pré et post flambement.

**En 2007, Matsunaga** [16] a présenté une théorie de cisaillement traverse d'ordre supérieur pour analyser les fréquences propres et les températures critiques des plaques composites et sandwich stratifiées soumise à un chargement thermique. Il a étudié l'effet de l'orientation des fibres, le rapport d'épaisseur ( $a/h$ ), et la considération ou négligence des déplacement de pré-flambement sur les fréquences fondamentales et les températures critiques.

Récemment **Chen et al.** [17] ont présenté une étude sur le flambement et la vibration des plaques composite avec des propriétés matérielles qui dépend de la température en utilisant la théorie des plaques de Reissner-Mindlin. La distribution de température des plaques est considérée uniforme et linéaire dans la direction traverse. Les résultats de cette étude montrent l'influence de nombre des couches, la précontrainte et les contraintes thermique sur le comportement vibratoire et flambement des plaques avec l'indépendance et la dépendance de propriété matérielle à la température.

**II.2/Comportement dynamique des plaques stratifiées :****II.2.1/Relation fondamentale de la dynamique :**

La relation fondamentale de la dynamique s'écrit sous la forme :

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} \sigma_{xx} + \frac{\partial}{\partial y} \sigma_{xy} + \frac{\partial}{\partial z} \sigma_{xz} + f_x &= \rho \alpha_x \\ \frac{\partial}{\partial y} \sigma_{yy} + \frac{\partial}{\partial z} \sigma_{yz} + \frac{\partial}{\partial x} \sigma_{xy} + f_y &= \rho \alpha_y \\ \frac{\partial}{\partial z} \sigma_{zz} + \frac{\partial}{\partial y} \sigma_{yz} + \frac{\partial}{\partial x} \sigma_{xz} + f_z &= \rho \alpha_z \end{aligned} \quad (\text{II.1})$$

Où  $f_x, f_y, f_z$  sont les composantes des forces volumiques exercées sur un solide ;

$\alpha_x, \alpha_y, \alpha_z$  sont les composantes du vecteur accélération ;

$\rho$  est la masse volumique.

**II.2.2/ Relation fondamentale de la dynamique appliquée à un élément de plaque :****II.2.2.1/Relation fondamentale relatives aux résultantes de membrane :**

L'intégration des équations (II.1), suivant l'épaisseur du stratifié, conduit aux relations fondamentales d'un élément de plaque, relatives aux résultantes. L'intégration des deux premières aboutit aux relations relatives aux résultantes de membrane.

$$\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} dz + \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y} dz + \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial z} dz + \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} f_x dz = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \rho \alpha_x dz \quad (\text{II.2})$$

Le premier terme de cette équation s'écrit :

$$\int_{-h/2}^{h/2} \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} dz = \frac{\partial}{\partial x} \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{xx} dz = \frac{\partial N_x}{\partial x} \quad (\text{II.3})$$

De même :

$$\int_{-h/2}^{h/2} \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y} dz = \frac{\partial N_{xy}}{\partial y} \quad (\text{II.4})$$

Le troisième terme de l'équation (II.2) s'écrit :

$$\int_{-h/2}^{h/2} \frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial z} dz = \sigma_{xz} \left( \frac{h}{2} \right) - \sigma_{xz} \left( -\frac{h}{2} \right)$$

Où les contraintes  $\sigma_{xz} \left( \frac{h}{2} \right)$  et  $\sigma_{xz} \left( -\frac{h}{2} \right)$  sont les contraintes éventuelles de cisaillement exercées sur les faces supérieure et inférieure du stratifié. Ces contraintes sont généralement nulles. Dans le cas où il sera nécessaire d'en tenir compte, nous les noterons :

$$\sigma_{xz} \left( \frac{h}{2} \right) = \tau_{1x} \text{ et } \sigma_{xz} \left( -\frac{h}{2} \right) = \tau_{2x} \quad (\text{II.5})$$

D'où :

$$\int_{-h/2}^{h/2} \frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial z} dz = \tau_{1x} - \tau_{2x} \quad (\text{II.6})$$

Enfin, nous poserons :

$$\int_{-h/2}^{h/2} f_x dz = F_x \quad (\text{II.7})$$

L'intégration du second membre nécessite d'introduire les expressions des déplacements en fonction de x, y, z et du temps t.

$$\begin{aligned} \int_{-h/2}^{h/2} \rho \alpha_x dz &= \int_{-h/2}^{h/2} \rho(x, y, z) \left( \frac{\partial^2 u_0}{\partial t^2} + z \frac{\partial^2 \varphi_x}{\partial t^2} \right) dz \\ &= \frac{\partial^2 u_0}{\partial t^2} \int_{-h/2}^{h/2} \rho dz + \frac{\partial^2 \varphi_x}{\partial t^2} \int_{-h/2}^{h/2} \rho dz \end{aligned}$$

Soit :

$$\int_{-h/2}^{h/2} \rho \alpha_x dz = \rho_s \frac{\partial^2 u_0}{\partial t^2} + R \frac{\partial^2 \varphi_x}{\partial t^2} \quad (\text{II.8})$$

En introduisant :

$$\rho_s = \int_{-h/2}^{h/2} \rho dz \quad (\text{II.9})$$

La masse surfacique au point (x,y) et le grandeur :

$$R = \int_{-h/2}^{h/2} \rho dz \quad (\text{II.10})$$

L'intégration de la première équation (II.1) conduit donc finalement à :

$$\frac{\partial N_x}{\partial x} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial y} + F_x + \tau_{1x} - \tau_{2x} = \rho_s \frac{\partial^2 u_0}{\partial t^2} + R \frac{\partial^2 \varphi_x}{\partial t^2} \quad (\text{II.11})$$

De même, l'intégrale de la deuxième équation (II.1) conduit à :

$$\frac{\partial N_y}{\partial y} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial x} + F_y + \tau_{1y} - \tau_{2y} = \rho_s \frac{\partial^2 v_0}{\partial t^2} + R \frac{\partial^2 \varphi_y}{\partial t^2} \quad (\text{II.12})$$

Où les composantes  $\tau_{1y}$  et  $\tau_{2y}$  tiennent compte des contraintes éventuelles de cisaillement exercées sur les faces :

$$\sigma_{yz} \left( \frac{h}{2} \right) = \tau_{1y} \quad \text{et} \quad \sigma_{yz} \left( -\frac{h}{2} \right) = \tau_{2y}$$

Et en introduisant la composante :

$$F_y = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} f_y dz. \quad (\text{II.13})$$

### II.2.2.2/ Relation fondamentale relatives aux résultantes de cisaillement :

L'intégration suivant l'épaisseur du stratifié de la troisième des équations (1) conduit à :

$$\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} dz + \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \frac{\partial \sigma_{yz}}{\partial y} dz + \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial x} dz + \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} f_z dz = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \rho \alpha_z dz \quad (\text{II.14})$$

Le premier terme s'écrit :

$$\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} dz = \sigma_{zz} \left( \frac{h}{2} \right) - \sigma_{zz} \left( -\frac{h}{2} \right) \quad (\text{II.15})$$

Le deuxième et le troisième :

$$\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \frac{\partial \sigma_{yz}}{\partial y} dz = \frac{\partial}{\partial y} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_{yz} dz = \frac{\partial Q_y}{\partial y} \quad (\text{II.16})$$

$$\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial x} dz = \frac{\partial}{\partial x} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_{xz} dz = \frac{\partial Q_x}{\partial x} \quad (\text{II.17})$$

Où les contraintes  $\sigma_{zz}\left(\frac{h}{2}\right)$  et  $\sigma_{zz}\left(-\frac{h}{2}\right)$  apparaissent comme des composantes de pression exercées sur chaque face de la plaque. Nous notons leur différence :

$$q(x, y) = q = \sigma_{zz}\left(\frac{h}{2}\right) - \sigma_{zz}\left(-\frac{h}{2}\right) \quad (\text{II.18})$$

D'où :

$$\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial x} dz = q \quad (\text{II.19})$$

Enfin :

$$\int_{-h/2}^{h/2} \rho \alpha_z dz = \rho_s \frac{\partial^2 w_0}{\partial t^2} \quad (\text{II.20})$$

L'introduction des équations (II.15) dans l'équation (II.19) conduit finalement à :

$$\frac{\partial Q_x}{\partial x} + \frac{\partial Q_y}{\partial y} + q + F_z = \rho_s \frac{\partial^2 w_0}{\partial t^2} \quad (\text{II.21})$$

En introduisant la composante :

$$F_z = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} f_z dz \quad (\text{II.22})$$

### II.2.2.3/ Relation fondamentale relatives aux moments :

Les relations fondamentales relatives aux moments sont obtenues en multipliant par  $z$  les deux premières équations (II.1), puis en intégrant suivant l'épaisseur :

$$\frac{\partial M_x}{\partial x} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial y} + \int_{-h/2}^{h/2} z \frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial z} dz + \int_{-h/2}^{h/2} z f_x dz = \int_{-h/2}^{h/2} \rho z \alpha_x dz \quad (\text{II.23})$$

En intégrant par parties :

$$\begin{aligned} \int_{-h/2}^{h/2} z \frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial z} dz &= [z \sigma_{xz}]_{-h/2}^{h/2} - \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{xz} dz \\ &= \frac{h}{2} \sigma_{xz}\left(\frac{h}{2}\right) + \frac{h}{2} \sigma_{xz}\left(-\frac{h}{2}\right) - Q_x \end{aligned}$$

Soit :

$$\int_{-h/2}^{h/2} z \frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial z} dz = \frac{h}{2} (\tau_{1x} + \tau_{2x}) - Q_x. \quad (\text{II.24})$$

Le second membre de l'équation (II.23) s'écrit :

$$\begin{aligned} \int_{-h/2}^{h/2} \rho z \alpha_x dz &= \int_{-h/2}^{h/2} \rho z \left( \frac{\partial^2 u_0}{\partial t^2} + z \frac{\partial^2 \varphi_x}{\partial t^2} \right) dz \\ &= \frac{\partial^2 u_0}{\partial t^2} \int_{-h/2}^{h/2} \rho z dz + \frac{\partial^2 \varphi_x}{\partial t^2} \int_{-h/2}^{h/2} \rho z^2 dz \end{aligned}$$

Soit :

$$\int_{-h/2}^{h/2} \rho z \alpha_x dz = R \frac{\partial^2 u_0}{\partial t^2} + I_{xy} \frac{\partial^2 \varphi_x}{\partial t^2} \quad (\text{II.25})$$

En posant :

$$I_{xy} = \int_{-h/2}^{h/2} \rho z^2 dz \quad (\text{II.26})$$

La grandeur est  $I_{xy}$  le moment d'inertie par rapport au plan moyen (Oxy) de l'élément de plaque localisé au point (x, y) et ayant des côtés égaux à l'unité.

La première relation des moments s'écrit donc :

$$\frac{\partial M_x}{\partial x} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial y} + \frac{h}{2} (\tau_{1x} + \tau_{2x}) + P_x - Q_x = R \frac{\partial^2 u_0}{\partial t^2} + I_{xy} \frac{\partial^2 \varphi_x}{\partial t^2} \quad (\text{II.27})$$

De la même manière, nous obtenons l'équation d'équilibre des moments le long de la direction y :

$$\frac{\partial M_y}{\partial y} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial x} + \frac{h}{2} (\tau_{1y} + \tau_{2y}) + P_y - Q_y = R \frac{\partial^2 v_0}{\partial t^2} + I_{xy} \frac{\partial^2 \varphi_y}{\partial t^2} \quad (\text{II.28})$$

Les relations (II.11), (II.12), (II.21), (II.27), et (II.28) constituent les équations d'équilibre :

$$\begin{aligned}\frac{\partial N_x}{\partial x} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial y} + F_x + \tau_{1x} - \tau_{2x} &= \rho_s \frac{\partial^2 u_0}{\partial t^2} + R \frac{\partial^2 \varphi_x}{\partial t^2}. \\ \frac{\partial N_y}{\partial y} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial x} + F_y + \tau_{1y} - \tau_{2y} &= \rho_s \frac{\partial^2 v_0}{\partial t^2} + R \frac{\partial^2 \varphi_y}{\partial t^2}. \\ \frac{\partial Q_x}{\partial x} + \frac{\partial Q_y}{\partial y} + q + F_z &= \rho_s \frac{\partial^2 w_0}{\partial t^2}.\end{aligned}\quad (\text{II.29})$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial M_x}{\partial x} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial y} + \frac{h}{2}(\tau_{1x} + \tau_{2x}) + P_x - Q_x &= R \frac{\partial^2 u_0}{\partial t^2} + I_{xy} \frac{\partial^2 \varphi_x}{\partial t^2}. \\ \frac{\partial M_y}{\partial y} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial x} + \frac{h}{2}(\tau_{1y} + \tau_{2y}) + P_y - Q_y &= R \frac{\partial^2 v_0}{\partial t^2} + I_{xy} \frac{\partial^2 \varphi_y}{\partial t^2}.\end{aligned}$$

Les relations fondamentales des stratifiés :

$$\begin{aligned}A_{11} \frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} + 2A_{16} \frac{\partial^2 u_0}{\partial x \partial y} + A_{66} \frac{\partial^2 u_0}{\partial y^2} + A_{16} \frac{\partial^2 v_0}{\partial x^2} + (A_{12} + A_{66}) \frac{\partial^2 v_0}{\partial x \partial y} + A_{26} \frac{\partial^2 v_0}{\partial y^2} + B_{11} \frac{\partial^2 \varphi_x}{\partial x^2} \\ + B_{11} \frac{\partial^2 \varphi_x}{\partial x^2} + 2B_{16} \frac{\partial^2 \varphi_x}{\partial x \partial y} + B_{66} \frac{\partial^2 \varphi_x}{\partial y^2} + B_{16} \frac{\partial^2 \varphi_y}{\partial x^2} + (B_{12} + B_{66}) \frac{\partial^2 \varphi_y}{\partial x \partial y} \\ + B_{26} \frac{\partial^2 \varphi_y}{\partial y^2} = \rho_s \frac{\partial^2 u_0}{\partial t^2} + R \frac{\partial^2 \varphi_x}{\partial t^2}.\end{aligned}\quad (\text{II.30})$$

$$\begin{aligned}A_{16} \frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} + (A_{12} + A_{66}) \frac{\partial^2 u_0}{\partial x \partial y} + A_{26} \frac{\partial^2 u_0}{\partial y^2} + A_{66} \frac{\partial^2 v_0}{\partial x^2} + 2A_{26} \frac{\partial^2 v_0}{\partial x \partial y} + A_{22} \frac{\partial^2 v_0}{\partial y^2} + B_{16} \frac{\partial^2 \varphi_x}{\partial x^2} \\ + (B_{12} + B_{66}) \frac{\partial^2 \varphi_x}{\partial x \partial y} + B_{26} \frac{\partial^2 \varphi_x}{\partial y^2} + B_{66} \frac{\partial^2 \varphi_y}{\partial x^2} + 2B_{26} \frac{\partial^2 \varphi_y}{\partial x \partial y} + B_{22} \frac{\partial^2 \varphi_y}{\partial y^2} \\ = \rho_s \frac{\partial^2 v_0}{\partial t^2} + R \frac{\partial^2 \varphi_y}{\partial t^2}.\end{aligned}\quad (\text{II.31})$$

$$\begin{aligned}H_{55} \left( \frac{\partial \varphi_x}{\partial x} + \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} \right) + H_{45} \left( \frac{\partial \varphi_x}{\partial y} + \frac{\partial \varphi_y}{\partial x} + 2 \frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} \right) + H_{44} \left( \frac{\partial \varphi_y}{\partial y} + \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} \right) + q \\ = \rho_s \frac{\partial^2 w_0}{\partial t^2}.\end{aligned}\quad (\text{II.32})$$



$$\begin{aligned}
& B_{11} \frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} + 2B_{16} \frac{\partial^2 u_0}{\partial x \partial y} + B_{66} \frac{\partial^2 u_0}{\partial y^2} + B_{16} \frac{\partial^2 v_0}{\partial x^2} + (B_{12} + B_{66}) \frac{\partial^2 v_0}{\partial x \partial y} + B_{26} \frac{\partial^2 v_0}{\partial y^2} + D_{11} \frac{\partial^2 \varphi_x}{\partial x^2} \\
& + 2D_{16} \frac{\partial^2 \varphi_x}{\partial x \partial y} + D_{66} \frac{\partial^2 \varphi_x}{\partial y^2} + D_{16} \frac{\partial^2 \varphi_y}{\partial x^2} + (D_{12} + D_{66}) \frac{\partial^2 \varphi_y}{\partial x \partial y} + D_{26} \frac{\partial^2 \varphi_y}{\partial y^2} \\
& - H_{55} \left( \varphi_x + \frac{\partial w_0}{\partial x} \right) - H_{45} \left( \varphi_y + \frac{\partial w_0}{\partial y} \right) = R \frac{\partial^2 u_0}{\partial t^2} + I_{xy} \frac{\partial^2 \varphi_x}{\partial t^2}. \quad (\text{II.33})
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& B_{16} \frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} + (B_{12} + B_{66}) \frac{\partial^2 u_0}{\partial x \partial y} + B_{26} \frac{\partial^2 u_0}{\partial y^2} + B_{66} \frac{\partial^2 v_0}{\partial x^2} + 2B_{26} \frac{\partial^2 v_0}{\partial x \partial y} + B_{22} \frac{\partial^2 v_0}{\partial y^2} + D_{16} \frac{\partial^2 \varphi_x}{\partial x^2} \\
& + (D_{12} + D_{66}) \frac{\partial^2 \varphi_x}{\partial x \partial y} + D_{26} \frac{\partial^2 \varphi_x}{\partial y^2} + D_{66} \frac{\partial^2 \varphi_y}{\partial x^2} + 2D_{26} \frac{\partial^2 \varphi_y}{\partial x \partial y} + D_{22} \frac{\partial^2 \varphi_y}{\partial y^2} \\
& - H_{45} \left( \varphi_x + \frac{\partial w_0}{\partial x} \right) - H_{44} \left( \varphi_y + \frac{\partial w_0}{\partial y} \right) = R \frac{\partial^2 v_0}{\partial t^2} + I_{xy} \frac{\partial^2 \varphi_y}{\partial t^2}. \quad (\text{II.34})
\end{aligned}$$

Ces cinq équations permettent en principe de déterminer les cinq fonctions solutions  $u_0(x, y, t)$ ,  $v_0(x, y, t)$ ,  $w_0(x, y, t)$ ,  $\varphi_x(x, y, t)$ ,  $\varphi_y(x, y, t)$ . Ces fonctions doivent vérifier en outre les conditions imposées sur les frontières de la structure étudiée. Dans le cas de stratifiée symétrique  $B_{ij} = 0$  et  $R=0$ .

### II.2.3/Formulation énergétique de la théorie des stratifiés :

Les théorèmes de l'énergie peuvent être utilisés pour aboutir à une formulation variationnelle des relations fondamentales des stratifiés .les théorèmes de l'énergie sont également à la base de l'analyse du comportement mécanique des stratifiés à l'aide des éléments finis.

#### II.2.3.1/Energie de déformation d'un stratifié :

L'énergie potentielle de déformation d'un solide élastique s'écrit en coordonnées cartésiennes suivant :

$$U = \frac{1}{2} \int \sigma_{ij} \varepsilon_{ij} dv$$

$$U = \iiint (\sigma_{xx}\varepsilon_{xx} + \sigma_{yy}\varepsilon_{yy} + \sigma_{zz}\varepsilon_{zz} + \sigma_{yz}\varepsilon_{yz} + \sigma_{xz}\varepsilon_{xz} + \sigma_{xy}\varepsilon_{xy})dxdydz. \quad (\text{II.35})$$

En tenant compte des hypothèses de la théorie des stratifiées:  $\sigma_{zz} = 0, \gamma_{xz} = \gamma_{yz} = 0$

$$\begin{aligned} U = \frac{1}{2} \iiint \left\{ A_{11} \left( \frac{\partial u_0}{\partial x} \right)^2 + 2A_{12} \frac{\partial u_0}{\partial x} \frac{\partial v_0}{\partial y} + A_{22} \left( \frac{\partial v_0}{\partial y} \right)^2 + 2 \left( A_{16} \frac{\partial u_0}{\partial x} + A_{26} \frac{\partial v_0}{\partial y} \right) \left( \frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} \right) \right. \\ \left. + A_{66} \left( \frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} \right)^2 + B_{11} \frac{\partial^2 \varphi_x}{\partial x^2} + 2B_{16} \frac{\partial^2 \varphi_x}{\partial x \partial y} + B_{66} \frac{\partial^2 \varphi_x}{\partial y^2} + B_{16} \frac{\partial^2 \varphi_y}{\partial x^2} \right. \\ \left. + (B_{12} + B_{66}) \frac{\partial^2 \varphi_y}{\partial x \partial y} \right. \\ \left. + B_{26} \frac{\partial^2 \varphi_y}{\partial y^2} \right\} dxdy. \quad (\text{II.36}) \end{aligned}$$

Dans le cas de stratifiés symétriques, les termes  $B_{ij}$  de couplage membrane-flexion sont nuls.

### II.2.3.2/Energie cinétique d'un stratifié :

L'énergie cinétique d'un solide en mouvement :

$$T = \frac{1}{2} \iiint \rho \left[ \left( \frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 + \left( \frac{\partial v}{\partial t} \right)^2 + \left( \frac{\partial w}{\partial t} \right)^2 \right] dxdydz \quad (\text{II.37})$$

Où  $\rho$  est la masse volumique en un point et l'intégration est étendue à l'ensemble du solide. Dans le cas de la théorie de premier ordre des stratifiés, le champ des déplacements (I.36) s'écrit :

$$u = u_0 + z \varphi_x$$

$$v = v_0 + z \varphi_y$$

$$w = w_0(x, y)$$

Où  $w_0$  est indépendant de  $z$ . En substituant ces relations dans l'expression (II.37) l'énergie cinétique du stratifié s'écrit :

$$T = \frac{1}{2} \iiint \rho \left[ \left( \frac{\partial u_0}{\partial t} + z \frac{\partial \varphi_x}{\partial t} \right)^2 + \left( \frac{\partial v_0}{\partial t} + z \frac{\partial \varphi_y}{\partial t} \right)^2 + \left( \frac{\partial w_0}{\partial t} \right)^2 \right] dxdydz \quad (\text{II.37})$$

**II.2.3.3/Travail des forces :**

$$w = w_v + w_s \quad (\text{II.38})$$

Travail des forces volumiques :

$$w_v = \int_v f_{vi} u_i dv \quad (\text{II.39})$$

Travail des forces surfaciques :

$$w_s = \int_s f_{si} u_i ds \quad (\text{II.40})$$

**II.2.3.4/Equation d'équilibre dynamique :**

Il existe aussi une manière vibrationnelle d'écrire cet équilibre, c'est le principe de Hamilton qui s'énonce comme suit :

***Principe de Hamilton :***

Si  $T$  est l'énergie cinétique,  $\Pi$  l'énergie potentielle total, entre les temps  $t_1$  et  $t_2$  le mouvement d'un corps élastique conservatif s'effectue de telle manière que la fonctionnelle

$$\int_{t_1}^{t_2} (T - \Pi) dt \text{ soit stationnaire} \Rightarrow \delta \int_{t_1}^{t_2} (T - \Pi) dt = 0 \quad (\text{II.41})$$

L'énergie potentielle totale  $\Pi$  est la somme de l'énergie de déformation  $U$  et de travail conservatives des forces surfaciques et volumiques :

$$\Pi = U - w = U - w_v - w_s . \quad (\text{II.42})$$

La fonction  $T - \Pi$  est appelée lagrangienne, elle est notée  $L$ .

Si  $L$  est une fonction d'espace et du temps sont séparées  $L = L(\dot{u}_i, u_i, t)$

Donc pour les systèmes conservatives, le principe de Hamilton s'énonce alors simplement :

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} L(\dot{u}_i, u_i, t) dt = 0 \quad (\text{II.43})$$

Alors l'équation d'Euler associée à la fonctionnelle s'écrit :

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{u}_i} \right) - \left( \frac{\partial L}{\partial u_i} \right) = 0 \quad (\text{II.44})$$

Ou encore :

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{u}_i} \right) - \frac{\partial T}{\partial u_i} + \frac{\partial \Pi}{\partial u_i} = 0 \quad (\text{II.45})$$

Ou :

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{u}_i} \right) - \frac{\partial T}{\partial u_i} + \frac{\partial U}{\partial u_i} = Q_i \quad (\text{II.46})$$

Avec  $Q_i$  force généralisée correspondant à la coordonnée  $u_i$  et définie par le travail virtuel des forces extérieures :

$$\delta \omega = Q_i \delta u_i$$

(Pour les systèmes non conservatifs, le principe de Hamilton devient :

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} L(\dot{u}_i, u_i, t) dt + \int_{t_1}^{t_2} \delta w^* dt = 0$$

Avec :

$$\delta \omega = Q_i^* \delta u_i$$

Les équations de Lagrange s'écrivent alors :

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{u}_i} \right) - \frac{\partial T}{\partial u_i} - Q_i^* = 0$$

Ou:

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{u}_i} \right) - \frac{\partial T}{\partial u_i} + \frac{\partial U}{\partial u_i} = Q_i + Q_i^* \quad (\text{II.46})$$

**Remarque** : pour les systèmes avec amortissement, le terme additionnel  $-Q_i^*$  représente la force généralisée de dissipation.

Les équations de Lagrange permettent d'obtenir les équations de mouvement du système à partir des expressions des énergies cinétique, potentielle et de dissipation. Les équations de Lagrange d'un système conservative deviennent alors :

$$M\ddot{q} + kq = F(t) \quad (\text{II.47})$$

Dans le cas d'un système avec amortissement visqueuse, il faut ajouter au second membre leur terme additionnel de force de dissipation visqueuse.

$$M\ddot{q} + c\dot{q} + kq = F(t) \quad (\text{II.48})$$

La solution de ce système peut s'obtenir à partir de l'étude des vibrations libres, c'est-à-dire par la superposition de solutions du système sans second membre, soit :

$$M\ddot{q} + kq = 0 \quad (\text{II.49})$$

Les solutions sont harmoniques du type :  $q = qe^{i\omega t}$

$$e^{i\omega t}(k - \omega^2 M)q = 0$$

Le déterminant de l'équation(II.47) doit être nul :

$$\det([k] - \omega^2[M]) = 0$$

On obtient ainsi les n valeurs  $\omega^2(\omega_i, i = 1 \dots \dots n)$  pour une dimension n des matrices  $[k]$  et  $[M]$ .

# Chapitre III

## Chapitre III:

# PRESENTATION DE FORMULATION D'ÉLÉMENTS FINIS ET VALIDATION.

### III.1/Introduction :

Ce chapitre a pour but d'étudier l'effet de la température sur les vibrations des plaques composites stratifiées en utilisant la méthode des éléments finis. La formulation d'éléments finis est basée sur la théorie du premier ordre, et en utilisant le principe de l'énergie potentielle totale on trouve le vecteur force et la matrice de rigidité globale.

#### Définition :

La méthode des éléments finis est l'une des méthodes les plus utilisées aujourd'hui pour résoudre effectivement des équations aux dérivées partielles. Elle est une méthode très générale qui s'applique à la majorité des problèmes rencontrés dans la pratique. Elle consiste à utiliser une approximation simple des variables inconnues pour transformer les équations aux dérivées partielles en équations algébriques.[18]

**Historiquement**, les premières prémices de la méthode des éléments finis ont été proposées par Richard Courant dans les années 1940 mais ce sont les mécaniciens qui ont développé, popularisé et démontré l'efficacité de cette méthode dans les années 1950-1960. Après ces premiers succès pratiques, des mathématiciens appliqués ont considérablement développé les fondations théoriques de la méthode et proposé des améliorations significatives.[19]

### III.2/Présentation de l'élément fini utilisé :

L'élément choisi, dans ce travail, est un élément rectangulaire à 4 nœuds avec cinq degrés de liberté  $(u, v, w, \varphi_x, \varphi_y)$  par nœud (**figure III.1**). Les longueurs  $2a$  et  $2b$  sont les dimensions de l'élément dans les directions  $x$  et  $y$  dans cet ordre.

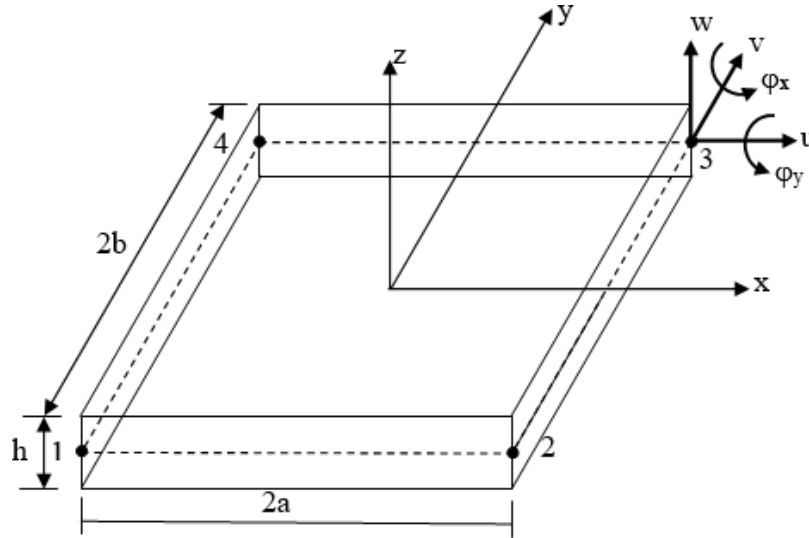


Figure III.1: géométrie et variables nodales de l'élément.

### III.2.1/Champ des Déplacements et cinématique :

Selon la théorie de premier ordre, le déplacement d'un point de coordonnées  $(x, y, z)$  à un instant  $t$  est donnée par :

$$\begin{cases} u \equiv u(x, y, z, t) = u_0(x, y, t) + z\varphi_x(x, y, t) \\ v \equiv v(x, y, z, t) = v_0(x, y, t) + z\varphi_y(x, y, t) \\ w \equiv w(x, y, z, t) = w_0(x, y, t) \end{cases} \quad (\text{III.1})$$

### III.2.2/Relation cinématique :

L'état de déformation à n'importe quel point dans la plaque est donné par les deux vecteurs

$$\begin{aligned} \{\varepsilon\}^T &= \{\varepsilon_x, \varepsilon_y, \gamma_{xy}\} \\ \{\gamma_s\}^T &= \{\gamma_{xz}, \gamma_{yz}\} \end{aligned} \quad (\text{III.2})$$

En utilisant la relation déplacement-déformation de Von Karman, les composantes de vecteur déformation sont donnés par :



$$\left\{ \begin{array}{l} \varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 = \frac{\partial u_0}{\partial x} + z \frac{\partial \varphi_x}{\partial x} + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 = \varepsilon_x^0 + z k_x + \varepsilon_x^{nl} \\ \varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 = \frac{\partial v_0}{\partial y} + z \frac{\partial \varphi_y}{\partial y} + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 = \varepsilon_y^0 + z k_y + \varepsilon_y^{nl} \\ \gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y} = \frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} + z \left( \frac{\partial \varphi_x}{\partial y} + \frac{\partial \varphi_y}{\partial x} \right) + \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y} = \gamma_{xy}^0 + z k_{xy} + \gamma_{xy}^{nl} \end{array} \right. \quad (\text{III.3})$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \gamma_{xz} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} = \varphi_x + \frac{\partial w}{\partial x} \\ \gamma_{yz} = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} = \varphi_y + \frac{\partial w}{\partial y} \end{array} \right.$$

Ou par:

$$\{\varepsilon\} = \{\varepsilon^0\} + z\{k\} + \{\varepsilon^{nl}\}$$

$$\{\gamma_z\} = \left\{ \begin{array}{l} \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \end{array} \right\} \quad (\text{III.4})$$

$$\text{Avec: } \{\varepsilon^0\} = \left\{ \begin{array}{l} \varepsilon_x^0 \\ \varepsilon_y^0 \\ \gamma_{xy}^0 \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial u_0}{\partial x} \\ \frac{\partial v_0}{\partial y} \\ \frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} \end{array} \right\}, \quad (\text{III.5})$$

$$\{k\} = \left\{ \begin{array}{l} k_x \\ k_y \\ k_{xy} \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \varphi_x}{\partial x} \\ \frac{\partial \varphi_y}{\partial y} \\ \frac{\partial \varphi_x}{\partial y} + \frac{\partial \varphi_y}{\partial x} \end{array} \right\} \quad (\text{III.6})$$

$$\{\varepsilon^{nl}\} = \left\{ \begin{array}{l} \varepsilon_x^{nl} \\ \varepsilon_y^{nl} \\ \gamma_{xy}^{nl} \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \\ \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 \\ \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y} \end{array} \right\} \quad (\text{III.7})$$

### III.2.3/Interpolation des Déplacements (fonctions de formes) :

Le champ de déplacements d'un point M(x,y) dans l'élément peut être défini par (figure III.1):

$$\delta_i(x, y) = \sum_{\alpha=1}^4 N_\alpha(x, y) \delta_i^\alpha \quad (i=1,5) \quad (\text{III.14})$$

$\delta_i^\alpha$  vecteur de déplacement

$N_\alpha(x, y)$  les fonctions de forme bilinéaire de Lagrange associé au nœud  $\alpha$ , respectivement.

Avec

$$\delta_i^\alpha = u^\alpha, v^\alpha, w^\alpha, \varphi_x^\alpha, \varphi_y^\alpha \quad (\alpha = 1, 2, 3, 4)$$

$$\left[ \begin{array}{l} u(x, y) = \sum_{\alpha=1}^n N_\alpha u_\alpha \\ v(x, y) = \sum_{\alpha=1}^n N_\alpha v_\alpha \\ w(x, y) = \sum_{\alpha=1}^n N_\alpha w_\alpha \\ \varphi_x(x, y) = \sum_{\alpha=1}^n N_\alpha \varphi_{x\alpha} \\ \varphi_y(x, y) = \sum_{\alpha=1}^n N_\alpha \varphi_{y\alpha} \end{array} \right. \quad \alpha = 1, 4$$

$$\left[ \begin{array}{l} N_1(x, y) = \frac{1}{4ab} (a - x)(b - y) \\ N_2(x, y) = \frac{1}{4ab} (a + x)(b - y) \\ N_3(x, y) = \frac{1}{4ab} (a + x)(b + y) \\ N_4(x, y) = \frac{1}{4ab} (a - x)(b + y) \end{array} \right. \quad (\text{III.15})$$

$$\delta(x, y) = \sum_{\alpha=1}^4 N_\alpha(x, y) q$$

q: vecteur de déplacement nœuds.

Sous forme matricielle:

$$\begin{matrix}
 \begin{matrix} u \\ v \\ w \\ \varphi_x \\ \varphi_y \end{matrix} \\
 \left[ \begin{matrix} N_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & N_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & N_3 & 0 & 0 & 0 & 0 & N_4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & N_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & N_3 & 0 & 0 & 0 & 0 & N_4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & N_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & N_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & N_3 & 0 & 0 & 0 & 0 & N_4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & N_1 & 0 & 0 & 0 & N_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & N_3 & 0 & 0 & 0 & 0 & N_4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & N_1 & 0 & 0 & 0 & N_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & N_3 & 0 & 0 & 0 & 0 & N_4 \end{matrix} \right]
 \end{matrix}
 \begin{matrix}
 \left. \begin{matrix} u_1 \\ v_1 \\ w_1 \\ \varphi_{x1} \\ \varphi_{y1} \\ u_2 \\ v_2 \\ w_2 \\ \varphi_{x2} \\ \varphi_{y2} \\ u_3 \\ v_3 \\ w_3 \\ \varphi_{x3} \\ \varphi_{y3} \\ u_4 \\ v_4 \\ w_4 \\ \varphi_{x4} \\ \varphi_{y4} \end{matrix} \right\}
 \end{matrix}$$

**III.2.4/Relations déplacement-déformation de l'élément :**

*Comportement en membrane :*  $\{\varepsilon_0\} = [B_m]\{q\}$

$$[B_m] = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_1}{\partial x} & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\partial N_2}{\partial x} & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\partial N_3}{\partial x} & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\partial N_4}{\partial x} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial N_1}{\partial x} & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\partial N_2}{\partial x} & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\partial N_3}{\partial x} & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\partial N_4}{\partial x} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\partial N_1}{\partial y} & \frac{\partial N_1}{\partial x} & 0 & 0 & 0 & \frac{\partial N_2}{\partial y} & \frac{\partial N_2}{\partial x} & 0 & 0 & 0 & \frac{\partial N_3}{\partial y} & \frac{\partial N_3}{\partial x} & 0 & 0 & 0 & \frac{\partial N_3}{\partial y} & \frac{\partial N_3}{\partial x} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

*Comportement en flexion :*  $\{k\} = [B_c]\{q\}$

$$[B_f] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \frac{\partial N_1}{\partial x} & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\partial N_2}{\partial x} & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\partial N_3}{\partial x} & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\partial N_4}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial N_1}{\partial x} & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\partial N_2}{\partial x} & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\partial N_3}{\partial x} & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\partial N_4}{\partial x} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\partial N_1}{\partial y} & \frac{\partial N_1}{\partial x} & 0 & 0 & 0 & \frac{\partial N_2}{\partial y} & \frac{\partial N_2}{\partial x} & 0 & 0 & 0 & \frac{\partial N_3}{\partial y} & \frac{\partial N_3}{\partial x} & 0 & 0 & 0 & \frac{\partial N_3}{\partial y} & \frac{\partial N_3}{\partial x} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

*Comportement en cisaillement :*

$$\{\gamma\} = [B_c]\{q\}$$

[B<sub>c</sub>]

$$= \begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{\partial N_1}{\partial x} & N_1 & 0 & 0 & 0 & \frac{\partial N_2}{\partial x} & N_2 & 0 & 0 & 0 & \frac{\partial N_3}{\partial x} & N_3 & 0 & 0 & 0 & \frac{\partial N_4}{\partial x} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial N_1}{\partial y} & 0 & N_1 & 0 & 0 & \frac{\partial N_2}{\partial y} & 0 & N_2 & 0 & 0 & \frac{\partial N_3}{\partial y} & 0 & N_3 & 0 & 0 & \frac{\partial N_4}{\partial y} & 0 & N_4 \end{bmatrix}$$

**III.2.5/Les equations constitutive:**

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x^{(k)} \\ \sigma_y^{(k)} \\ \tau_{xy}^{(k)} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{Q}_{11} & \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{16} \\ \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{22} & \bar{Q}_{26} \\ \bar{Q}_{61} & \bar{Q}_{62} & Q_{66} \end{bmatrix} \left( \begin{Bmatrix} \varepsilon_x^{(k)} \\ \varepsilon_y^{(k)} \\ \gamma_{xy}^{(k)} \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} \alpha_x^{(k)} \\ \alpha_y^{(k)} \\ \alpha_{xy}^{(k)} \end{Bmatrix} \Delta T \right) \quad (\text{III.8})$$

$$\begin{Bmatrix} \tau_{xz}^{(k)} \\ \tau_{yz}^{(k)} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{Q}_{44}^{(k)} & \bar{Q}_{45}^{(k)} \\ \bar{Q}_{54}^{(k)} & Q_{55}^{(k)} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \gamma_{xz}^{(k)} \\ \gamma_{yz}^{(k)} \end{Bmatrix}$$

$\begin{Bmatrix} \alpha_x^{(k)} \\ \alpha_y^{(k)} \\ \alpha_{xy}^{(k)} \end{Bmatrix}$ : Coefficients de dilatation thermique avec :

$$\begin{aligned} \alpha_x^{(k)} &= \alpha_{11}^{(k)} \cos^2 \theta + \alpha_{22}^{(k)} \sin^2 \theta \\ \alpha_y^{(k)} &= \alpha_{22}^{(k)} \cos^2 \theta + \alpha_{11}^{(k)} \sin^2 \theta \end{aligned} \quad (\text{III.9})$$

$$\alpha_{xy}^{(k)} = (\alpha_{11}^{(k)} - \alpha_{11}^{(k)}) \cos \theta \sin \theta$$

Et:

$$\begin{aligned} \bar{Q}_{11}^{(k)} &= Q_{11}^{(k)} \cos^4 \theta + 2(Q_{12}^{(k)} + 2Q_{66}^{(k)}) \sin^2 \theta \cos^2 \theta + Q_{22}^{(k)} \sin^4 \theta \\ \bar{Q}_{22}^{(k)} &= Q_{22}^{(k)} \cos^4 \theta + 2(Q_{12}^{(k)} + 2Q_{66}^{(k)}) \sin^2 \theta \cos^2 \theta + Q_{11}^{(k)} \sin^4 \theta \\ \bar{Q}_{12}^{(k)} &= (Q_{11}^{(k)} + Q_{22}^{(k)} - 4Q_{66}^{(k)}) \sin^2 \theta \cos^2 \theta + Q_{12}^{(k)} (\sin^4 \theta + \cos^4 \theta) \\ \bar{Q}_{16}^{(k)} &= (Q_{11}^{(k)} - Q_{12}^{(k)} - 2Q_{66}^{(k)}) \sin \theta \cos^3 \theta + (Q_{12}^{(k)} - Q_{22}^{(k)} + 2Q_{66}^{(k)}) \sin^3 \theta \cos \theta \\ \bar{Q}_{26}^{(k)} &= (Q_{11}^{(k)} - Q_{12}^{(k)} - 2Q_{66}^{(k)}) \sin^3 \theta \cos \theta + (Q_{12}^{(k)} - Q_{22}^{(k)} + 2Q_{66}^{(k)}) \sin \theta \cos^3 \theta \\ \bar{Q}_{66}^{(k)} &= (Q_{11}^{(k)} + Q_{22}^{(k)} - 2Q_{12}^{(k)} - 2Q_{66}^{(k)}) \sin^2 \theta \cos^2 \theta + Q_{66}^{(k)} (\sin^4 \theta + \cos^4 \theta) \\ \bar{Q}_{44}^{(k)} &= Q_{44}^{(k)} \cos^2 \theta + Q_{55}^{(k)} \sin^2 \theta \end{aligned} \quad (\text{III.10})$$

$$\bar{Q}_{55}^{(k)} = Q_{44}^{(k)} \sin^2 \theta + Q_{55}^{(k)} \cos^2 \theta$$

$$\bar{Q}_{45}^{(k)} = (Q_{44}^{(k)} - Q_{55}^{(k)}) \sin \theta \cos \theta$$

Les efforts d'une plaque et les moments sont liés aux déformations et aux courbures par les expressions suivantes:

$$[N \quad M] = \begin{bmatrix} N_x & M_x \\ N_y & M_y \\ N_{xy} & M_{xy} \end{bmatrix} = \sum_{k=1}^n \int_{z^k}^{z^{k+1}} \begin{bmatrix} \bar{Q}_{11} & \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{16} \\ \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{22} & \bar{Q}_{26} \\ \bar{Q}_{61} & \bar{Q}_{62} & Q_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x^{(k)} \\ \varepsilon_y^{(k)} \\ \gamma_{xy}^{(k)} \end{Bmatrix} \{1 \quad z\} dz \quad (\text{III.11})$$

La résultante de force thermique est définies par:

$$\{N_t\} = \begin{Bmatrix} N_{tx} \\ N_{ty} \\ N_{txy} \end{Bmatrix} = - \sum_{k=1}^n \int_{z^k}^{z^{k+1}} \begin{bmatrix} \bar{Q}_{11} & \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{16} \\ \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{22} & \bar{Q}_{26} \\ \bar{Q}_{61} & \bar{Q}_{62} & Q_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \alpha_x^{(k)} \\ \alpha_y^{(k)} \\ \alpha_{xy}^{(k)} \end{Bmatrix} \Delta T dz \quad (\text{III.12})$$

$$\begin{Bmatrix} \tau_{xz}^{(k)} \\ \tau_{yz}^{(k)} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{Q}_{44}^{(k)} & \bar{Q}_{45}^{(k)} \\ \bar{Q}_{45}^{(k)} & Q_{55}^{(k)} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \gamma'_{xz}{}^{(k)} \\ \gamma'_{yz}{}^{(k)} \end{Bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix} Q_{xz} \\ Q_{yz} \end{Bmatrix} = \sum_{k=1}^n \int_{z_k}^{z_{k+1}} \begin{Bmatrix} \tau_{xz}^k \\ \tau_{yz}^k \end{Bmatrix} dz = \sum_{k=1}^n \int_{z_k}^{z_{k+1}} \begin{bmatrix} \bar{Q}_{44}^{(k)} & \bar{Q}_{45}^{(k)} \\ \bar{Q}_{45}^{(k)} & Q_{55}^{(k)} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \gamma'_{xz}{}^{(k)} \\ \gamma'_{yz}{}^{(k)} \end{Bmatrix} dz \quad (\text{III.13})$$

$$\begin{Bmatrix} N \\ M \\ Q \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} [A] & [B] & 0 \\ [B] & [D] & 0 \\ 0 & 0 & [H] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon^0 \\ k \\ \gamma_z \end{Bmatrix}$$

$$\{N\} = \int \{\sigma\} dz = [A]\{\varepsilon_0\} + [B]\{k\}$$

$$\{M\} = \int \{\sigma\} z dz = [B]\{\varepsilon_0\} + [D]\{k\}$$

$$\{Q\} = \int \{\tau\} dz = [H]\{\gamma\}$$

**III.2.6/Energie potentielle totale :**

L'énergie potentielle totale de l'élément est donné par

$$\pi = U - W \quad (\text{III.16})$$

$U$  est l'énergie potentielle de déformation et  $W$  est le travail des forces extérieures.

L'énergie potentielle totale peut être écrite en termes des efforts résultants et les déformations correspondantes comme suit :

$$\pi = \frac{1}{2} \int_A (\{\varepsilon_0\}^T \{N\} + \{k\}^T \{M\} + \{\gamma_z\}^T \{Q\}) dA + \int_A \{\varepsilon_{nl}\}^T \{N_t\} dA \quad (\text{III.17})$$

Où  $A$  est l'air de l'élément.

En utilisant les équations précédentes on aura :

$$\begin{aligned} \pi = & \frac{1}{2} \int_{-b}^b \int_{-a}^a \{q\}^t ([B_m]^T [A] [B_m] + [B_m]^T [B] [B_b] + [B_b]^T [B] [B_m] + [B_b]^T [D] [B_b] \\ & + [B_s]^T [H] [B_s]) \{q\} dx dy + \int_{-b}^b \int_{-a}^a \frac{1}{2} \{q\}^T [G]^T [N_t] [G] \{q\} dx dy \end{aligned} \quad (\text{III.18})$$

Où:

$$[N_t] = \begin{bmatrix} N_{tx} & N_{txy} \\ N_{txy} & N_{ty} \end{bmatrix} \quad (\text{III.19})$$

L'annulation de la seconde variation de l'énergie potentielle totale par rapport à au vecteur des déplacements  $\{q\}$ , on obtient le problème de valeur propre suivant :

$$([K_e] + [K_g^e]) \{q\} = 0 \quad (\text{III.20})$$

En utilisant le facteur de charge  $\lambda$ ,  $[N_t] = \lambda [N_t^0]$

$$\det([K_e] + \lambda [K_{g_0}^e]) = 0 \quad (\text{III.21})$$

Et la temperature critique

$$\Delta T_{cr} = \lambda_{cr} \cdot \Delta T \quad (\text{III.22})$$

Où  $[K_e]$  et  $[K_{g0}^e]$  sont la matrice de rigidité élémentaire et matrice géométrique élémentaire respectivement. la matrice de rigidité élémentaire  $[K_e]$  est la somme de cinq matrices comme suit :

$$[K_e] = [K_e^m] + [K_e^{c1}] + [K_e^{c2}] + [K_e^b] + [K_e^s] \quad (\text{III.23})$$

Où:

$$\begin{aligned} [K_e^m] &= \int_{-b}^b \int_{-a}^a ([B_m]^T [A] [B_m]) dx dy \\ [K_e^{c1}] &= \int_{-b}^b \int_{-a}^a ([B_m]^T [A] [B_b]) dx dy \\ [K_e^{c2}] &= \int_{-b}^b \int_{-a}^a ([B_b]^T [A] [B_m]) dx dy \\ [K_e^b] &= \int_{-b}^b \int_{-a}^a ([B_b]^T [A] [B_b]) dx dy \\ [K_e^s] &= \int_{-b}^b \int_{-a}^a ([B_s]^T [A] [B_s]) dx dy \end{aligned} \quad (\text{III.24})$$

La matrice géométrique élémentaire est donné par :

$$\begin{aligned} [K_{g0}^e] &= \int_{-b}^b \int_{-a}^a ([G]^T [N_t^0] [G]) dx dy \\ [N_t^0] &= \begin{bmatrix} N_{tx}^0 & N_{txy}^0 \\ N_{txy}^0 & N_{ty}^0 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (\text{III.25})$$

### III.2.7/Vibrations libres d'une plaque soumise aux contraintes thermiques

Le principe de Hamilton principale.

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} (\pi - T) dt = 0 \quad (\text{III.26})$$

Où  $\pi$  est l'énergie potentielle totale, T est l'énergie cinétique et  $t_1$  et  $t_2$  sont les instants initiaux et finals respectivement.

En utilisant l'équation de Lagrange, l'équation of mouvement peut être exprimé par :

$$[M]\{\ddot{q}\} + [K_T]\{q\} = 0 \quad (\text{III.27})$$

ou  $[M]$  est la matrice masse et  $[K_T]$  est la matrice de rigidité totale incluant l'effet thermique

$$[K_T] = [K^e] + [K_g^e] \quad (\text{III.28})$$

- **La matrice masse:**

La variation de l'énergie cinétique peut être écrite comme suit :

$$\delta T = \int_V \rho(\dot{u} \cdot \delta u + \dot{v} \cdot \delta v + \dot{w} \cdot \delta w) dV \quad (\text{III.29})$$

ou  $\rho$  et  $V$  sont la densité et le volume de l'élément, respectivement

$$\begin{aligned} \delta T = \int_A & (I_0(\ddot{u}_0 \cdot \delta u_0 + \ddot{v}_0 \cdot \delta v_0 + \ddot{w} \cdot \delta w) + I_1(\ddot{u}_0 \cdot \delta \varphi_x + \ddot{\varphi}_x \cdot \delta u_0 + \ddot{v}_0 \cdot \delta \varphi_y + \ddot{\varphi}_y \cdot \delta v_0 \\ & + I_2(\ddot{\varphi}_x \cdot \delta \varphi_x + \ddot{\varphi}_y \cdot \delta \varphi_y)) dA \end{aligned} \quad (\text{III.30})$$

Où:

$$(I_0, I_1, I_2) = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \rho(1, z, z^2) dz \quad (\text{III.31})$$

La matrice d'inertie est donnée par :

$$[m] = \begin{bmatrix} I_0 & 0 & 0 & I_1 & 0 \\ 0 & I_0 & 0 & 0 & I_1 \\ 0 & 0 & I_0 & 0 & 0 \\ I_1 & 0 & 0 & I_2 & 0 \\ 0 & I_1 & 0 & 0 & I_2 \end{bmatrix} \quad (\text{III.32})$$

La matrice masse est donnée par :

$$[M] = \int_{-b}^b \int_{-a}^a ([N]^T [m] [N]) dx dy \quad (\text{III.33})$$

En substituant  $\{\ddot{q}\}$  par  $-\omega^2\{q\}$  dans l'équation précédant on aura le problème de valeur propre suivant :

$$([K_e] + [K_g^e] - \omega^2[M])\{q\} = 0 \quad (\text{III.34})$$

Où,  $\omega$  est la fréquence naturelle<sup>2</sup>.



**III.3/Présentation du programme :**

Aujourd'hui encore le langage Fortran reste très utilisé, d'une part en raison de la présence de très nombreuses bibliothèques de fonctions utilisables en Fortran, d'autre part parce qu'il existe des compilateurs Fortran performants qui produisent des exécutables très rapides. Dans cette étude on utilise programme en langage **FORTRAN77** et un autre programme en langage **MATLAB**.

### III.3.1 /Description les sous-routines du programme :

Subroutine	FONCTION
<b>Comp5</b>	Création de la matrice d'élasticité du matériau [A] ,[B], [D] et [H].
<b>HICH</b>	Construction du tableau de localisation.
<b>Mindlin</b>	Construction des matrices de rigidité élémentaires.
<b>Force</b>	Création du vecteur forces élémentaires.
<b>Assemb</b>	Assembler les matrices de rigidité élémentaires et le vecteur force élémentaire dans la matrice de rigidité et le vecteur force globaux respectivement.
<b>Limite1</b>	Introduire les conditions aux limites .
<b>Gauss</b>	Résolution du système et calculer des déplacements à partir de l'équation $F=K \cdot \square$
<b>Local</b>	Localiser les matrices élémentaires dans la matrice globale.
<b>Xelem</b>	Réduire la matrice de rigidité élémentaire.
<b>Assemb k</b>	Calcul la matrice géométrique globale.
<b>Limit 1g</b>	Introduire les conditions aux limites dans la matrice de rigidité géométrique.
<b>Limit 1K</b>	Introduire les conditions aux limites dans la matrice de rigidité réduite.
<b>Elimin K</b>	Eliminations les lignes et les colonnes de matrice de rigidité réduite dans les éléments sont nulles.
<b>Elimin g</b>	Eliminations les lignes et les colonnes de la matrice géométrique dans les éléments sont nulles.
<b>Stability</b>	Calcul matrice géométrique élémentaire

**III.4/Validation de l'élément fini :**

Une série d'exemples a été considérés pour la validation d l'élément fini utilisé dans la résolution des problèmes de vibration propre et la température critique des plaques isotropes et composites stratifiés. Les résultats obtenus à l'aide de l'élément présent sont comparés avec des solutions analytiques et ceux obtenus par d'autres modèles d'éléments finis de la littérature.

**III.4.1/Vibration libre des plaques :**

Conditions aux limites	Bord	
	X=0,a	Y=0,a
Simplement appuyée(SSSS)	$w = \varphi_y = 0$	$w = \varphi_x = 0$
Encastrée(EEEE)	$u = v = w = \varphi_x = \varphi_y = 0$	$u = v = w = \varphi_x = \varphi_y = 0$

**III.4.1.1/Plaques isotrope :**

Cet exemple, on considère la convergence de la fréquence d'une plaque carrée isotrope avec un rapport d'épaisseur  $a/h = 10$  .les conditions aux limites sont : simplement supportée et encastrée, dans les quatre côtés.

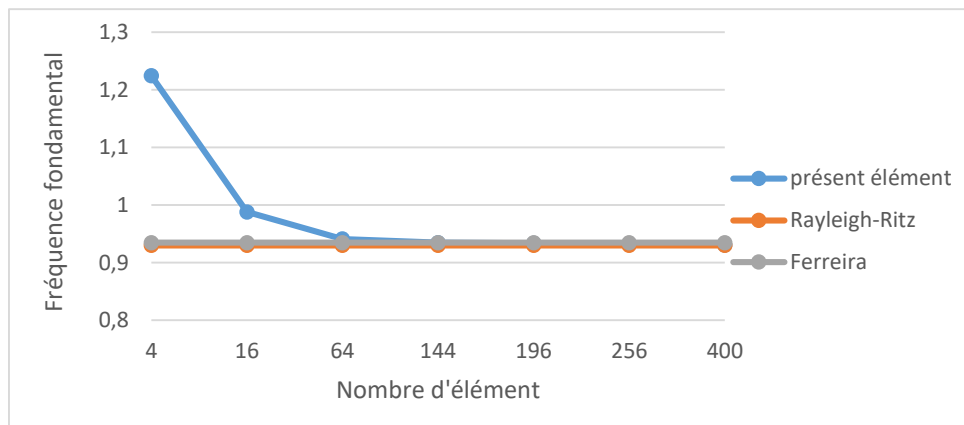
Les caractéristiques du plaque sont :  $E=10.92 \text{ MPa}$  ,  $\nu= 0.3$  ,  $G=4.2 \text{ MPa}$  et  $\rho = 1$

Les tableaux suivants présentent les résultats de la fréquence naturelle normalisés par la formule :

$$\bar{\omega} = \omega a \sqrt{\frac{\rho}{G}} \tag{III.35}$$

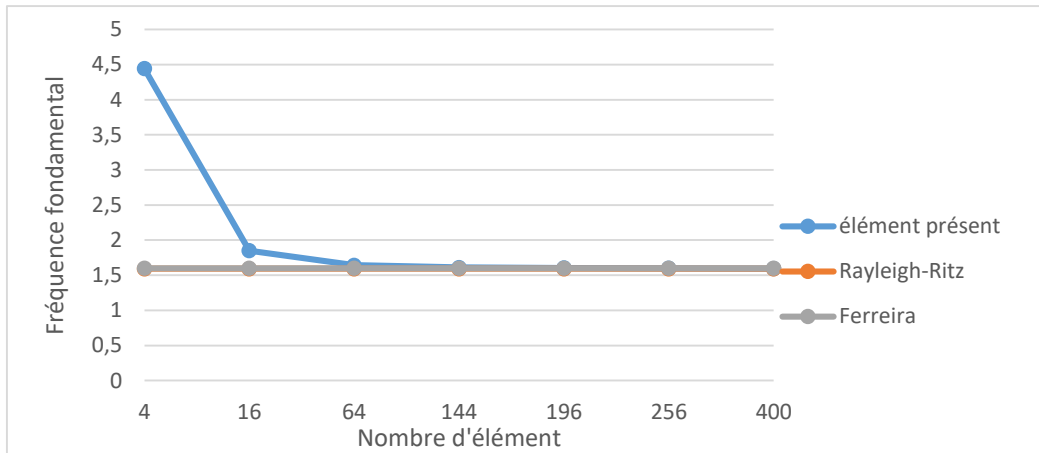
**Tab (III.1)** La fréquence fondamentale d'une plaque isotrope simplement appuyée.

Présent élément :	Fréquence fondamentale :	Erreurs %:
$2 \times 2$	1.2247	31.69
$4 \times 4$	0.9880	6.24
$8 \times 8$	0.9411	1.19
$12 \times 12$	0.9347	0.51
$14 \times 14$	0.9335	0.35
$16 \times 16$	0.9322	0.24
$20 \times 20$	0.9309	0.10
Rayleigh Ritz [18]	0.930	
Ferreira [19]	0.9346	

**Figure III.3:** Convergence de la fréquence fondamentale d'une plaque isotrope simplement appuyée (SSSS), en fonction de nombre des éléments

**Tab (III.2)** La fréquence fondamentale d'une plaque isotrope encastree.

Présent élément :	Fréquence fondamentale :	Erreurs %:
$2 \times 2$	4.4427	178.71
$4 \times 4$	1.8497	16.04
$8 \times 8$	1.6438	3.13
$12 \times 12$	1.6109	1.06
$14 \times 14$	1.6043	0.65
$16 \times 16$	1.5998	0.37
$20 \times 20$	1.5946	0.04
Rayleigh Ritz [18]	1.5940	
Ferreira [19]	1.5996	

**Figure III.4:** Convergence de la fréquence fondamentale d'une plaque isotrope encastree (EEEE), en fonction de nombre des éléments

les figures (III.3) et (III.4) montrent la convergence de la fréquence fondamentale d'une plaque isotrope simplement appuyée et encastree successivement en fonction de nombre des éléments par comparaison à les valeurs de Rayleigh-Ritz et Ferreira. Quand le nombre des éléments augmente, les valeurs s'approche plus à plus.

**III.4.1.2/Plaque composite stratifiée:**

Dans cet exemple, on considère la convergence de la fréquence d'une plaque stratifiée carrée avec un rapport d'épaisseur  $a/h = 5$  et une stratification (0/90/./0). La conditions aux limites est: simplement supportée dans les quatre côtés. Les caractéristiques de chaque couche sont les mêmes :

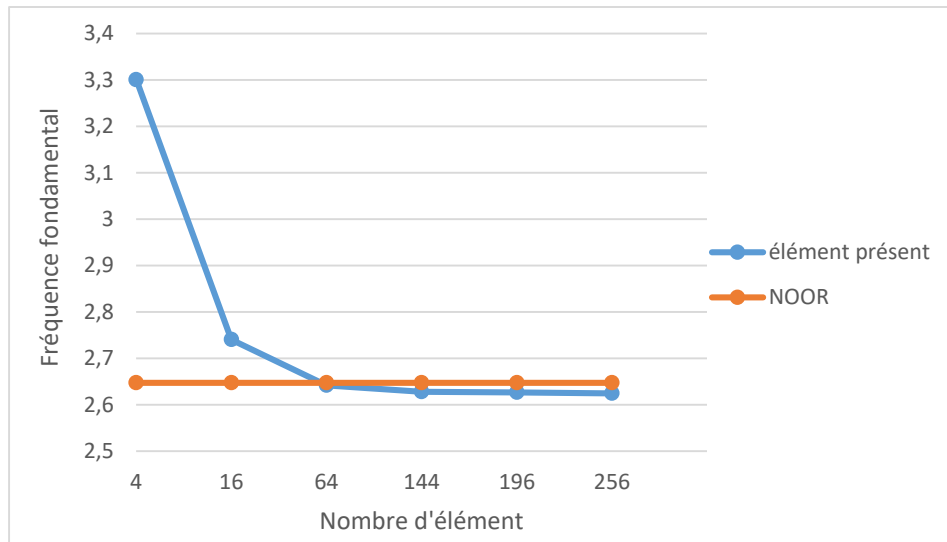
$$\frac{E_{11}}{E_{22}} = 3, \quad \frac{G_{12}}{E_{22}} = \frac{G_{13}}{E_{22}} = 0.6, \quad \frac{G_{23}}{E_{22}} = 0.5, \quad \nu_{12} = 0.25, \quad \rho = 1$$

Les tableaux suivants présentent les résultats de la fréquence naturelle normalisés par la formule (III.36) avec les solutions d'élasticité 3D de NOOR :

$$\bar{\omega} = \omega a h \sqrt{\frac{\rho}{E_{22}}}. \quad (\text{III.36})$$

**Tab (III.3)** La fréquence fondamentale d'une plaque stratifiée (0/90/0) simplement appuyé

Présent élément :	Fréquence fondamentale :	Erreurs %:
<b>2 × 2</b>	3.301	24.68
<b>4 × 4</b>	2.7404	3.51
<b>8 × 8</b>	2.6419	0.21
<b>12 × 12</b>	2.6280	0.71
<b>14 × 14</b>	2.6267	0.78
<b>16 × 16</b>	2.6248	0.85
<b>NOOR[9]</b>	2.6474	



**Figure III.5:** Convergence de la fréquence fondamentale d'une plaque stratifiée simplement appuyée en fonction de nombre des éléments

La figure (III.5) montre la convergence de la fréquence fondamentale d'une plaques stratifiée simplement appuyée par comparaison à la valeur d'élasticité de NOOR, les valeurs s'approchent rapidement et l'erreur est 0.71%.

**III.4.2/Température critique:****III.4.2.1/Plaque isotrope simplement appuyé:**

on considère la convergence de la température critique de flambement d'une plaque isotrope simplement appuyée  $a/h=10$ . Les caractéristiques mécaniques de la plaque sont :

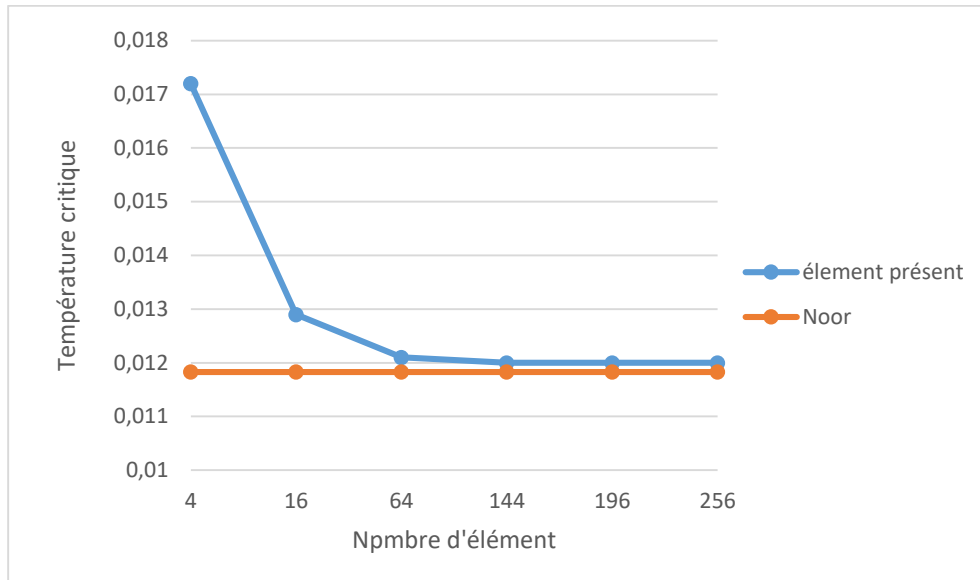
$$E=10.92 \text{ MPa} , \nu= 0.3 , G=4.2 , \rho = 1, \alpha_L = \alpha_T = \alpha_0 = 1.$$

**Tab (III.4):** Température critique de plaque isotrope simplement appuyée

Présent élément :	Température critique :	Erreurs %:
<b>2 × 2</b>	0,0172	45.39
<b>4 × 4</b>	0,0129	9.04
<b>8 × 8</b>	0,0121	2.28
<b>12 × 12</b>	0,0120	1.44
<b>14 × 14</b>	0,0120	1,44
<b>16 × 16</b>	0,0120	1,44
<b>20 × 20</b>	0,0120	1,44
<b>NOOR [12]</b>	0,01183	

La figure (III.6) suivante montre la convergence de la température critique d'une plaque isotrope simplement appuyé et les valeurs sont comparés avec la valeur de NOOR[5] plus que le nombre d'élément augmente les valeurs s'approchent et reste constant à certain valeur.





**Figure (III.6):** Convergence de température critique de plaque isotrope simplement appuyée.

#### III.4.2.2/Plaque stratifiée simplement appuyée:

On présente la convergence de la température critique de flambement d'une plaque stratifiée simplement appuyée. le nombre des couches est 10 couches avec stratification

$[+\theta^\circ/-\theta^\circ/+\theta^\circ/ \dots./-\theta^\circ]$   $\theta=15^\circ$ , et le rapport  $a/h=100$

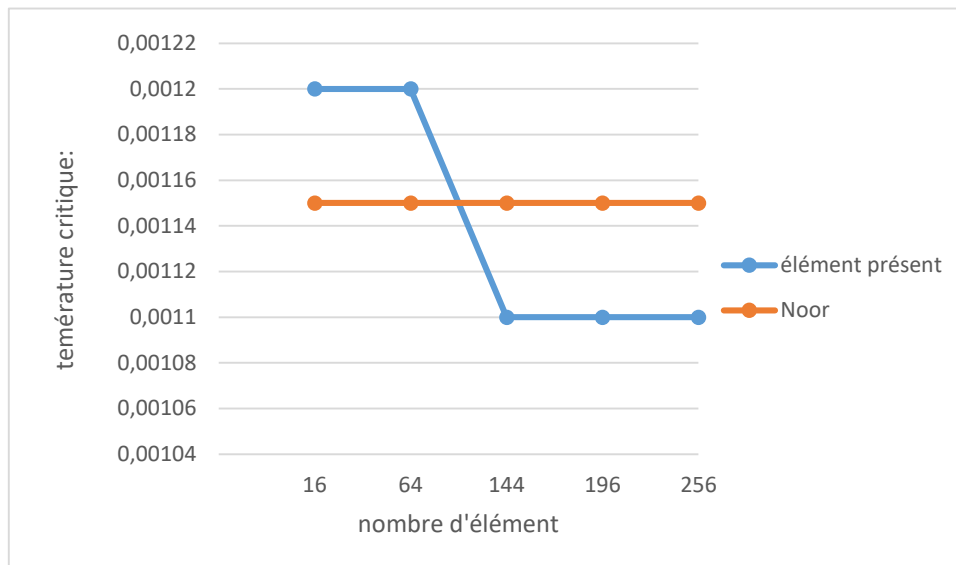
Les caractéristiques mécaniques de la plaque sont :

$$\frac{E_{11}}{E_{22}} = 15, \quad \frac{G_{12}}{E_{22}} = \frac{G_{13}}{E_{22}} = 0.2, \quad \frac{G_{23}}{E_{22}} = 0.3356, \quad \nu_{12} = 0.3,$$

$$\frac{\alpha_L}{\alpha_0} = 0.015, \quad \frac{\alpha_T}{\alpha_0} = 1, \quad \rho = 1.$$

**Tab (III.5):** Température critique de plaque isotrope stratifiée simplement appuyée.

Présent élément :	Température critique :	Erreurs %:
4 × 4	0,0012	7.62
8 × 8	0,0012	7.62
12 × 12	0,0011	1.35
14 × 14	0,0011	1.35
16 × 16	0,0011	1.35
NOOR[12]	0,001115	

**Figure (III.7):** Convergence de température critique de plaque stratifiée simplement appuyée.

La figure III.7 montre la convergence de la température critique de plaque stratifiée simplement appuyée par comparaison avec la valeur de NOOR. Les valeurs convergent avec les premiers nombres d'élément et restent constants qui indique à la stabilité du plaque.

#### III.4.3/Vibration libre soumis à charge thermique:

Dans cet exemple on présente l'effet de variation de température sur les fréquences propres des plaques composites stratifiées. On considère une plaque carrée à trois couche ( $0^\circ/90^\circ/0^\circ$ ) avec le rapport d'épaisseur ( $a/h= 10, 20$ ). Le maillage considéré est de  $16 \times 16$  éléments.

Les conditions aux limites : simplement appuyée :  $u = w = \theta_y = 0$  pour  $x=0,a$

$$v = w = \theta_x = 0 \quad \text{pour } y=0,b.$$

Les caractéristiques mécaniques sont:

$$\frac{E_{11}}{E_{22}} = 40, \quad \frac{G_{12}}{E_{22}} = \frac{G_{13}}{E_{22}} = 0,6, \quad \frac{G_{23}}{E_{22}} = 0,5, \quad \nu_{12} = 0,25,$$

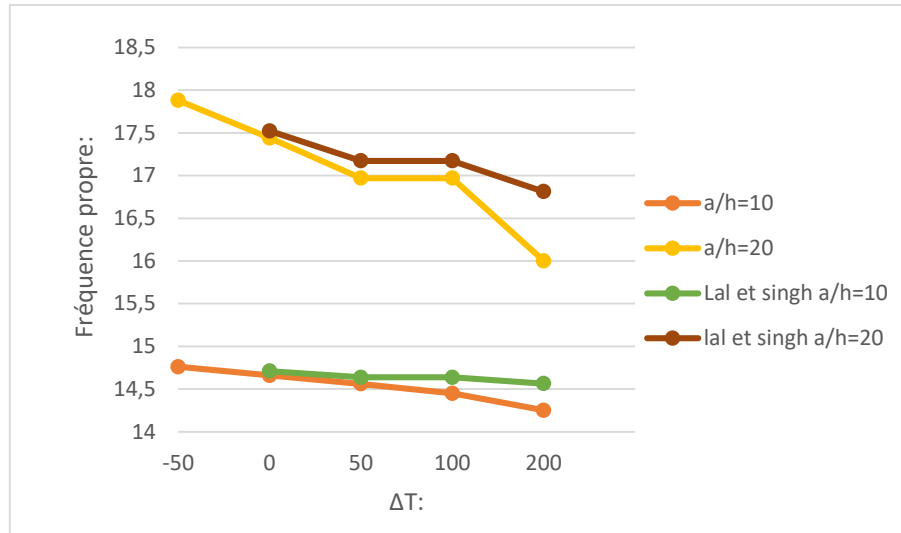
$$\alpha_L = 1,14 \times 10^{-6}, \quad \alpha_T = 11,4 \times 10^{-6}, \quad \rho = 1.$$

Les tableaux suivants présentent les résultats des valeurs propres de fréquence adimensionnelles par la formule:

$$\bar{\omega} = \omega a^2 \sqrt{\frac{\rho}{E_{22} h^2}}. \quad (\text{III.37})$$

**Tab (III.6):** Effet de température sur les fréquences propres d'une plaque stratifiée (0°/90°/0°) simplement appuyée

$\Delta T(\text{C}^\circ)$	$a/h=10$			$a/h=20$		
	Présent élément	Lal et singh [20]	Erreurs (%)	Présent élément	Lal et singh [20]	Erreurs (%)
<b>-50°</b>	14,76	/	/	17,88	/	/
<b>0°</b>	14,66	14,7106	0,34	17,44	17,5231	0,47
<b>50°</b>	14,56	/	/	16,97	/	/
<b>100°</b>	14,45	14,6369	1,28	16,97	17,1715	1,17
<b>200°</b>	14,25	14,5628	2,15	16	16,8127	4,83



**Figure (III.8):** Convergence de fréquence propre de plaque stratifiée ( $0^\circ/90^\circ/0^\circ$ ) simplement appuyée sous l'effet de température.

Les valeurs de fréquence propre de plaque stratifié sous l'effet de température et la variation d'épaisseur sont présentés dans la figure (III.6) comparé par les valeurs de Lal et singh[6].

Les valeurs sont proches et les erreurs sont suffisant acceptables.

# Chapitre IV

## Chapitre IV :

### Etude paramétrique.

#### IV.1/Introduction :

Après la vérification de performance de l'élément, nous allons passer à une étude paramétrique pour voir l'influence de différents paramètres et la température critique sur la vibration des plaques composites stratifiées. Les paramètres considérés sont :

- Le rapport de l'anisotropie.
- Le nombre des couches.
- L'orientation des fibres.
- Le rapport d'épaisseur (a/h).
- Le rapport d'aspect (a/b).
- Les conditions aux limites.

Le maillage adopté pour cette étude est (16×16).

Les valeurs propres de fréquence sont normalisées par la formule :

$$\bar{\omega} = \omega a^2 \sqrt{\frac{\rho}{E_{22} h^2}}. \quad (\text{IV.1})$$

$$\left(\frac{\bar{\omega}_a}{\bar{\omega}_0}\right)^2 = 1 - \frac{T_0}{T_{cr}} \quad [16] \quad (\text{IV.2})$$

#### IV.2/ Effet de rapport de l'anisotropie E11/E22:

Dans ce test, on va étudier l'effet de l'anisotropie et la température sur la vibration des plaques stratifiées carrée de 4 couches (0/90/90/0) avec rapport d'épaisseur a/h=10 et deux cas de conditions limites simplement appuyé et encastéré.

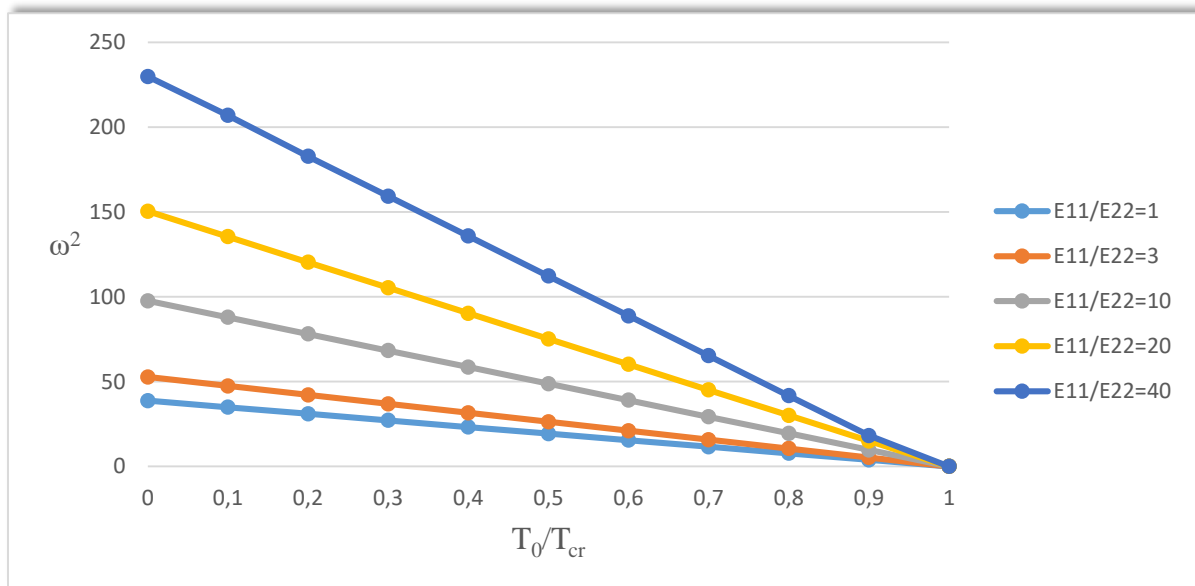
Les caractéristiques mécaniques sont :

$$\frac{E_{11}}{E_{22}} = \text{variable}, \quad \frac{G_{12}}{E_{22}} = \frac{G_{13}}{E_{22}} = 0,6, \quad \frac{G_{23}}{E_{22}} = 0,5, \quad \nu_{12} = 0,25,$$

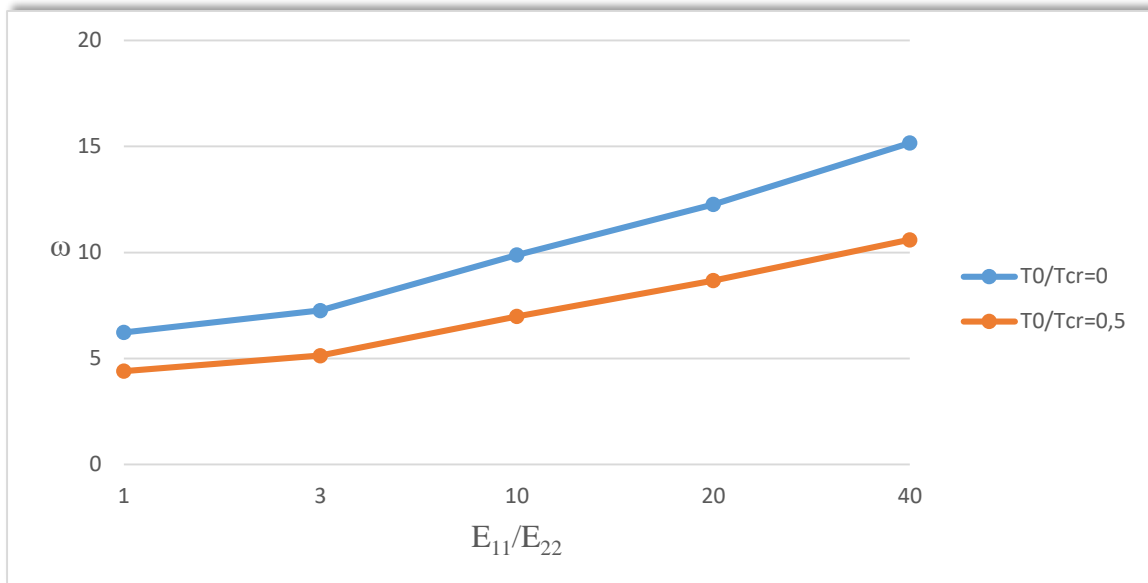
$$\alpha_L = 1,14 \times 10^{-6}, \quad \alpha_T = 11,4 \times 10^{-6}, \quad \rho = 1.$$

**Tab (IV.1) :** l'effet de rapport de l'anisotropie sur la fréquence de plaques stratifiée simplement appuyé.

$\frac{T_0}{T_{Cr}}$	$\frac{E_{11}}{E_{22}} = 1$	$\frac{E_{11}}{E_{22}} = 3$	$\frac{E_{11}}{E_{22}} = 10$	$\frac{E_{11}}{E_{22}} = 20$	$\frac{E_{11}}{E_{22}} = 40$
<b>0</b>	6.2298	7.2657	9.8834	12.2693	15.1646
<b>0.1</b>	5.9101	6.8927	9.3762	11.6397	14.3864
<b>0.2</b>	5.5721	6.4986	8.8399	10.9741	13.5244
<b>0.3</b>	5.2115	6.0789	8.2691	10.2653	12.6247
<b>0.4</b>	4.8249	5.6280	7.6557	9.5038	11.6557
<b>0.5</b>	4.4057	5.1376	6.9886	8.6758	10.5985
<b>0.6</b>	3.94005	4.5953	6.2509	7.7599	9.4234
<b>0.7</b>	3.4117	3.9796	5.4134	6.7203	8.0792
<b>0.8</b>	2.7861	3.2494	4.42004	5.4871	6.4609
<b>0.9</b>	1.9701	2.2976	3.1255	3.8799	4.2681
<b>1</b>	0.00002	0.00002	0.000019	0.00001	0.000001



**Fig (IV.1)** variation de fréquence au carré de plaque simplement appuyé en fonction de température  $T_0/T_{Cr}$  avec variation du rapport de l'anisotropie

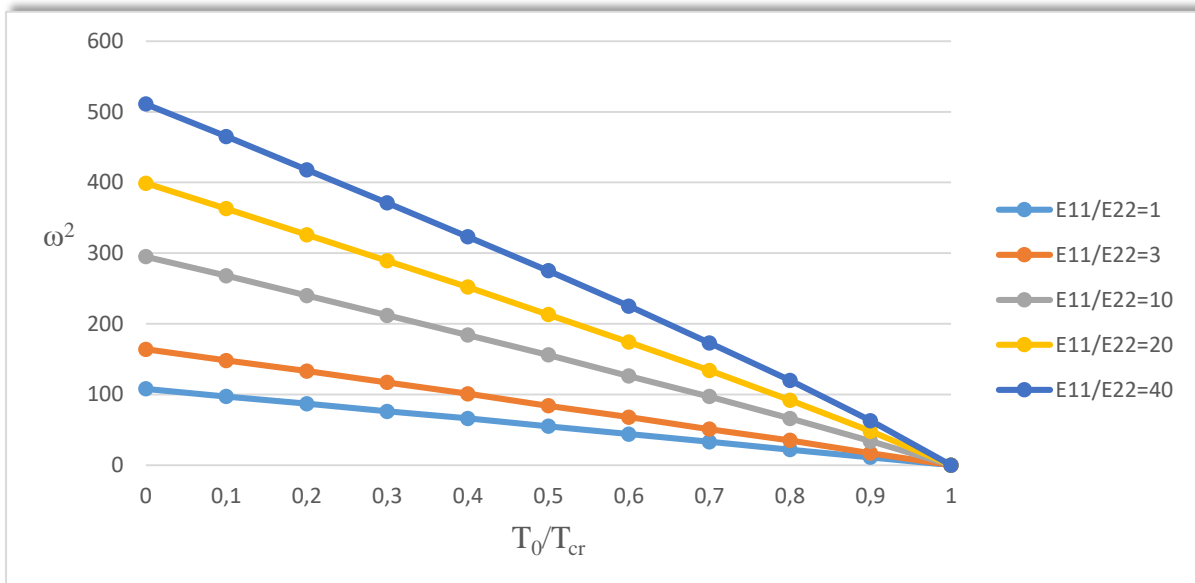


**Fig (IV.2) :** variation de fréquence de plaque simplement appuyé en fonction de rapport de l’anisotropie.

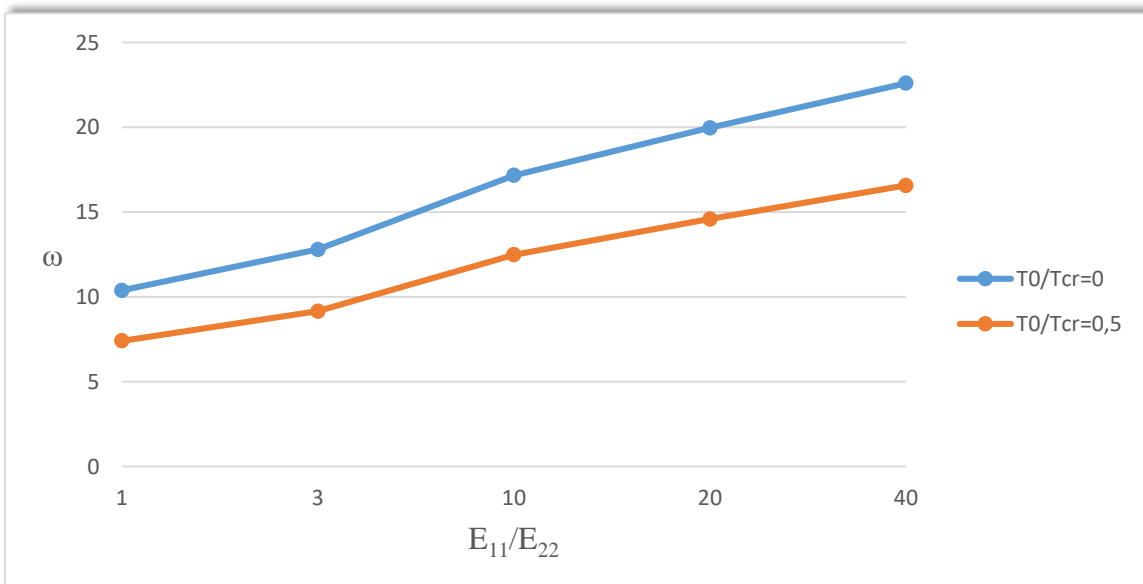
**Tab (IV.2) :** l’effet de rapport de l’anisotropie sur les fréquences des plaques stratifiées encastéré.

$\frac{T_0}{T_{Cr}}$	$\frac{E_{11}}{E_{22}} = 1$	$\frac{E_{11}}{E_{22}} = 3$	$\frac{E_{11}}{E_{22}} = 10$	$\frac{E_{11}}{E_{22}} = 20$	$\frac{E_{11}}{E_{22}} = 40$
<b>0</b>	10.3923	12.8062	17.1755	19.9749	22.6053
<b>0.1</b>	9.8488	12.1655	16.3707	19.0525	21.5638
<b>0.2</b>	9.3273	11.5325	15.4919	18.0557	20.4450
<b>0.3</b>	8.7177	10.8166	14.5602	16.8956	19.2614
<b>0.4</b>	8.1240	10.0498	13.5646	15.8745	17.9722
<b>0.5</b>	7.4161	9.1651	12.4899	14.5945	16.5831
<b>0.6</b>	6.6332	8.24621	11.2249	13.1909	14.9853
<b>0.7</b>	5.7446	7.1414	9.8488	11.5758	13.1529
<b>0.8</b>	4.6904	5.9161	8.1240	9.5916	10.9544
<b>0.9</b>	3.3166	4.12310	5.8309	6.9282	7.9373
<b>1</b>	0.00001	0.00001	0.00001	0.00001	0.00002





**Fig (IV.3) :** variation de fréquence au carré de plaque simplement appuyé en fonction de température  $T_0/T_{cr}$  avec variation du rapport de l'anisotropie



**Fig (IV.4) :** variation de fréquence de plaque encastree en fonction de rapport de l'anisotropie

Les figures (IV.1) et (IV.3) présentent l'effet de température sur les fréquences au carré de plaques stratifiés simplement appuyé et encastree respectivement avec variation de rapport de l'anisotropie. On remarque pour les deux cas de conditions aux limites, les fréquences propres diminuent avec l'augmentation de la température. Lorsque la température donnée est égale à la température critique, les fréquences propres tendent vers zéro.

Les figures (IV.2) et (IV.4) présentent la variation de fréquences de plaque stratifiés simplement appuyé et encasté respectivement en fonction de rapport de l'anisotropie pour deux valeurs de température imposé. On remarque que les fréquences augmentent avec l'augmentation de rapport de l'anisotropie ainsi lorsque le rapport de l'anisotropie est égale à 1 et 3 les fréquences sont proches et croient rapidement quel que soit la condition aux limites.

### IV.3/Effet de nombre des couches :

Cette section nous allons présenter l'effet du nombre des couches et la température sur la fréquence des plaques stratifiées carrée (0/90/.../90/0) avec rapport d'épaisseur a/h=10 et deux cas de conditions limites simplement appuyé et encasté.

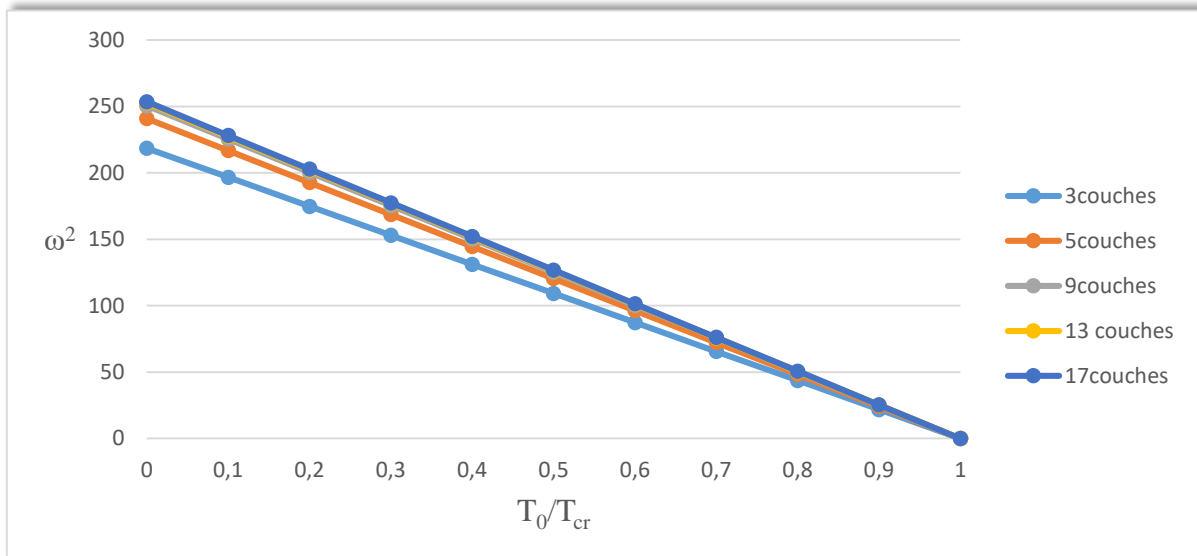
Les caractéristiques mécaniques sont:

$$\frac{E_{11}}{E_{22}} = 40, \quad \frac{G_{12}}{E_{22}} = \frac{G_{13}}{E_{22}} = 0,6, \quad \frac{G_{23}}{E_{22}} = 0,5, \quad \nu_{12} = 0,25, \quad \rho = 1.$$

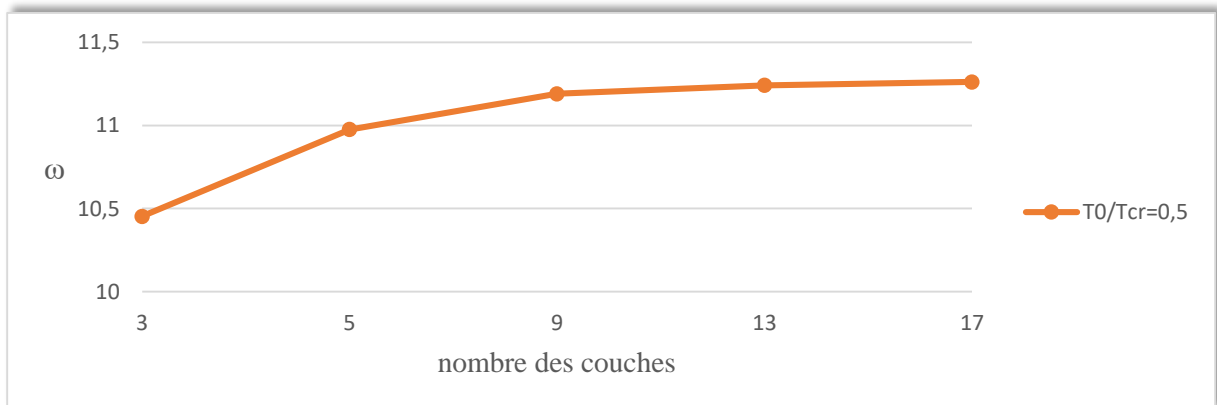
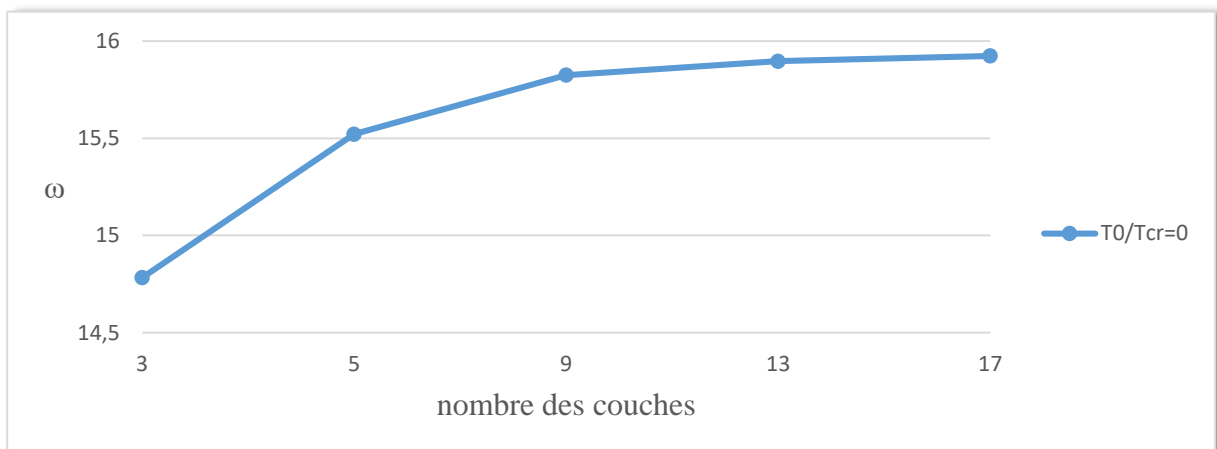
$$\alpha_L = 1,14 \times 10^{-6}, \quad \alpha_T = 11,4 \times 10^{-6}$$

**Tab (IV.3) :** l'effet du nombre des couches sur la fréquence de plaque stratifiée simplement appuyé

$\frac{T_0}{T_{Cr}}$	3	5	9	13	17
0	14.7835	15.5212	15.8244	15.8958	15.9232
0.1	14.0239	14.7248	15.0180	15.0815	15.1064
0.2	13.2219	13.8827	14.1553	14.2184	14.2428
0.3	12.3678	12.98605	13.2411	13.3017	13.3233
0.4	11.4506	12.0228	12.2587	12.3145	12.3354
0.5	10.4529	10.9753	11.1897	11.24105	11.2612
0.6	9.3494	9.8166	10.0088	10.0564	10.0731
0.7	8.0987	8.5014	8.7253	8.7088	8.7247
0.8	6.6111	6.9414	7.0807	7.1103	7.1213
0.9	4.6748	4.9083	5.0087	5.0326	5.0364
1	0.00001	0.00002	0.000002	0.000003	0.0000003



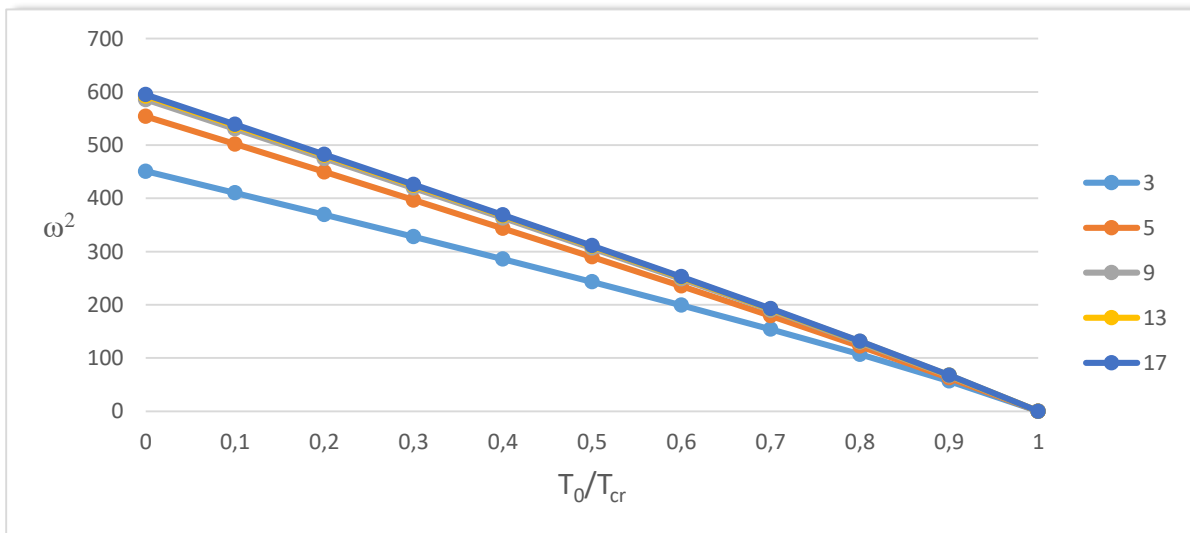
**Fig (IV.5) :** variation de fréquence au carré de plaque simplement appuyé en fonction de température  $T_0/T_{cr}$  avec variation du nombre des couches



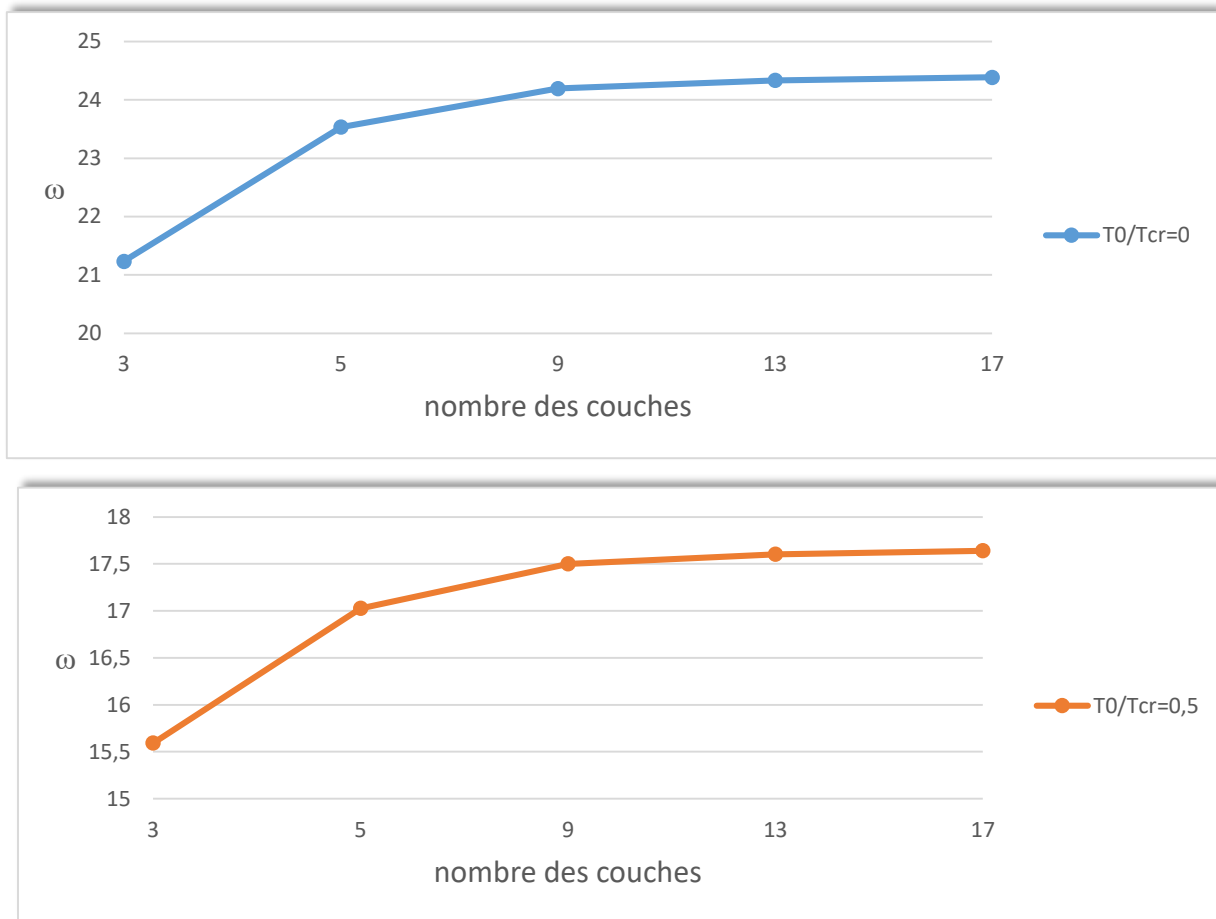
**Fig (IV.6) :** variation de fréquence de plaque simplement appuyé en fonction du nombre des couches.

**Tab (IV.4)** l'effet du nombre des couches sur la fréquence de plaque stratifiée encastré.

$\frac{T_0}{T_{Cr}}$	3	5	9	13	17
0	21.2343	23.5325	24.1952	24.3350	24.3871
0.1	20.2559	22.4009	23.0291	23.1618	23.2121
0.2	19.2182	21.2017	21.7939	21.9193	21.9665
0.3	18.1083	19.9207	20.4757	20.5935	20.6388
0.4	16.9087	18.5383	19.0542	19.1641	19.2059
0.5	15.593	17.0266	17.5005	17.6019	17.6402
0.6	14.1201	15.3387	15.7688	15.8613	15.8976
0.7	12.4189	13.4003	13.7800	13.8636	13.8956
0.8	10.3483	11.0601	11.3822	11.4531	11.4799
0.9	7.5433	7.9283	8.1699	8.2240	8.2445
1	0.000001	0.000001	0.000001	0.000007	0.00002



**Fig (IV.7)** : variation de fréquence au carré de plaque encastré en fonction de température  $T_0/T_{Cr}$  avec variation du nombre des couches.

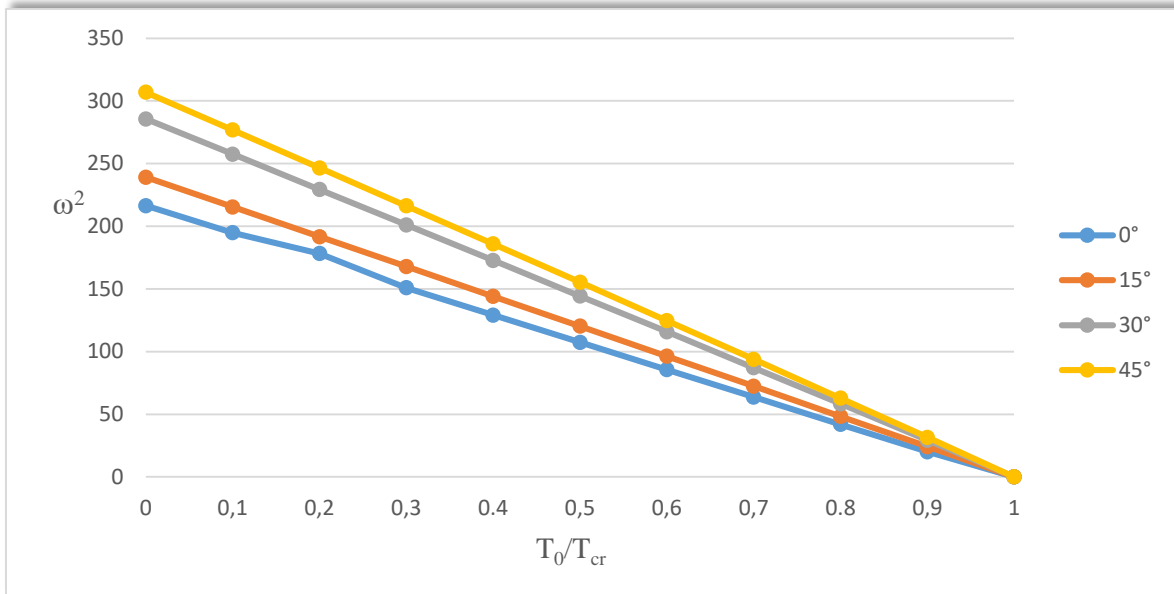


**Fig (IV.8) :** variation de fréquence de plaque encastrée en fonction nombre de couche.

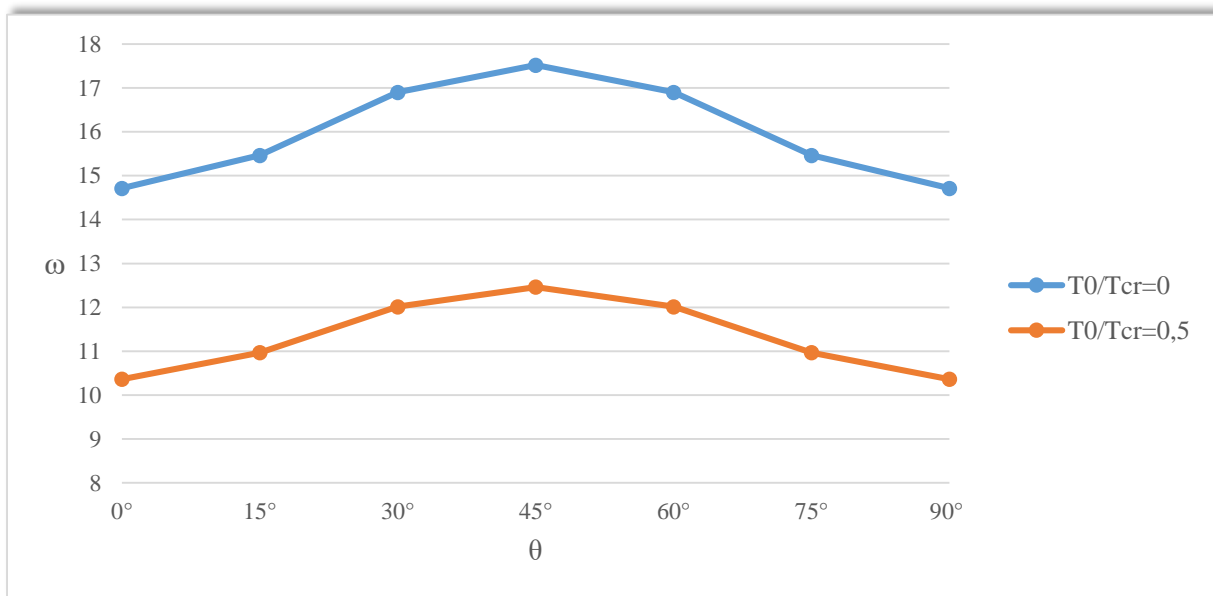
Les figures (IV.5) et (IV.7) présentent l'effet de température sur les fréquences au carré de plaques stratifiés simplement appuyé et encastré respectivement avec variation du nombre des couches. On remarque pour les deux cas de conditions aux limites, les fréquences propres diminuent avec l'augmentation de la température. Lorsque la température donnée est égale à la température critique, les fréquences propres tendent vers zéro.

Les figures (IV.6) et (IV.8) présentent la variation de fréquence de plaque simplement appuyé et encastré respectivement en fonction du nombre des couches avec température imposé. On remarque que les valeurs de fréquence augmentent en augmentant du nombre des couches jusqu'à le nombre de couches est égale à 9.





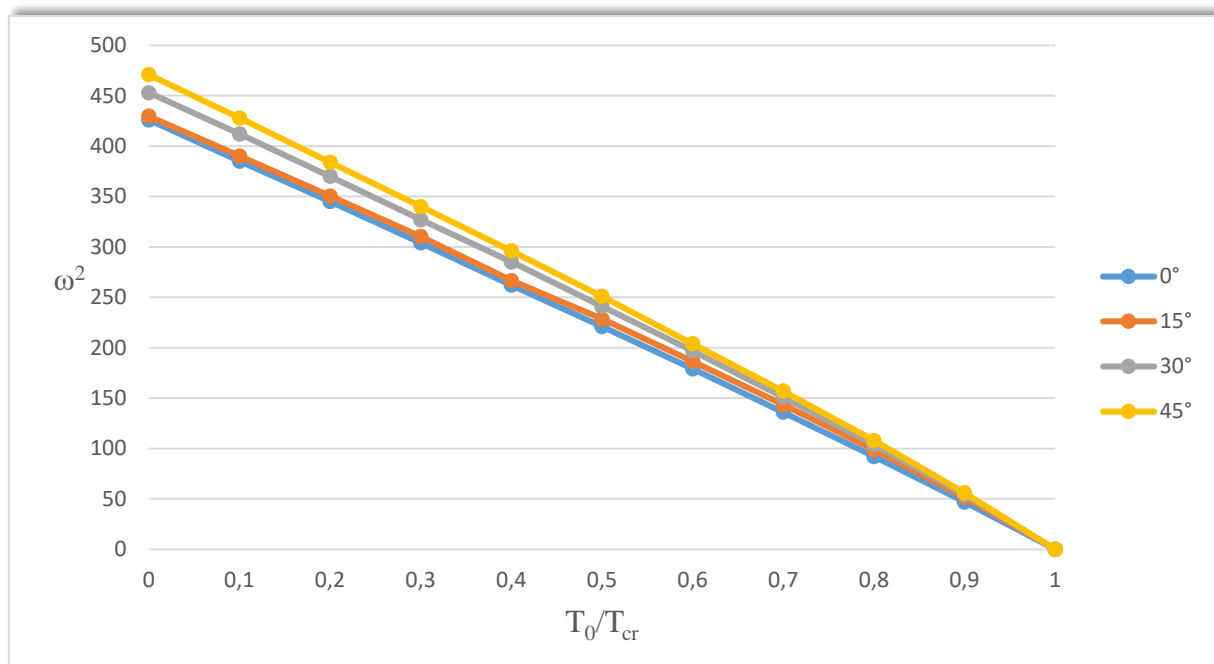
**Fig(IV.9) :** variation de fréquence au carré de plaque simplement appuyé en fonction de température  $T_0/T_{cr}$  avec variation d'orientation des fibres.



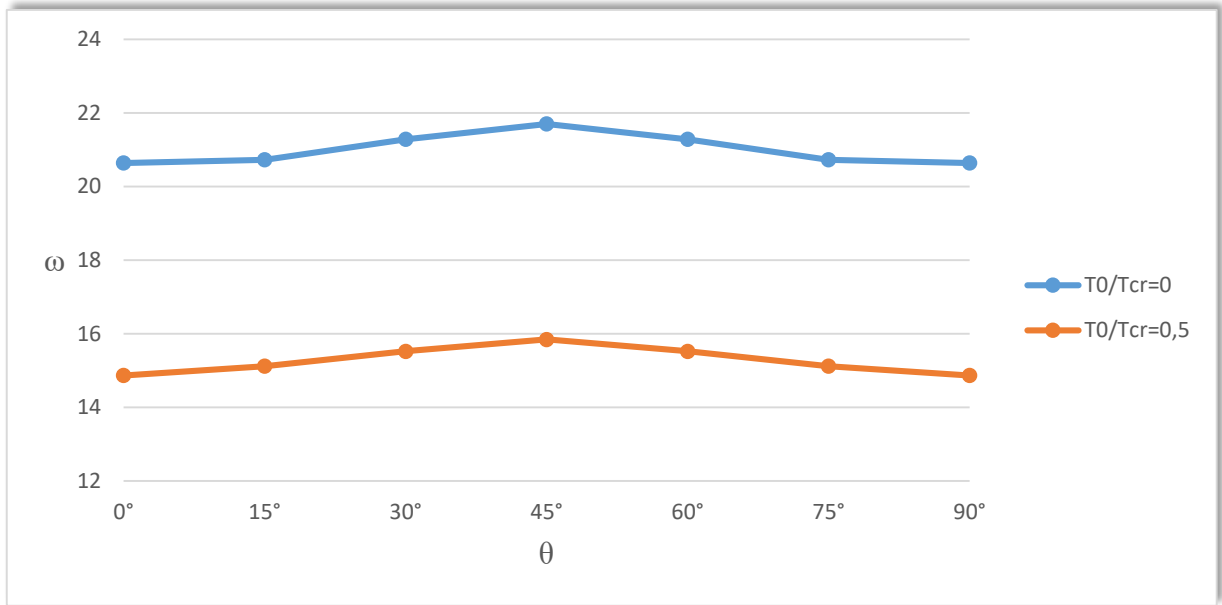
**Fig(IV.10) :** variation de fréquence de plaque simplement appuyé en fonction d'orientation des fibres.

**Tab (IV.6) :** l'effet d'orientation des fibres sur la fréquence de plaque stratifiée encasté.

$\frac{T_0}{T_{Cr}}$	0°	15°	30°	45°
0	20.6398	20.7294	21.2838	21.7025
0.1	19.6214	19.7538	20.2978	20.6882
0.2	18.5742	18.7199	19.2353	19.5959
0.3	17.4355	17.6154	18.0831	18.4391
0.4	16.1864	16.3314	16.8819	17.2046
0.5	14.8660	15.1175	15.5242	15.8429
0.6	13.3791	13.6589	14.0356	14.2829
0.7	11.6619	11.9785	12.2882	12.5299
0.8	9.5916	9.9382	10.1980	10.3923
0.9	6.8556	7.1770	7.3484	7.4833
1	0.000001	0.000001	0.00002	0.00002

**Fig(IV.11) :** variation de fréquence au carré de plaque encasté en fonction de température  $T_0/T_{cr}$  avec variation d'orientation des fibres.





**Fig(IV.12) :** variation de fréquence de plaque encastree en fonction d'orientation des fibres.

Les figures (IV.9) et (IV.11) présentent l'effet de température sur les fréquences au carré de plaques stratifiées simplement appuyé et encastree respectivement avec variation d'orientation des fibres. On remarque pour les deux cas de conditions aux limites, les fréquences propres diminuent avec l'augmentation de la température. Lorsque la température donnée est égale à la température critique, les fréquences propres tendent vers zéro.

Les figures (IV.10) et (IV.12) présentent variation de fréquences de plaque simplement appuyé et encastree respectivement en fonction d'orientation des fibres. On note que les fréquences augmentent dans l'intervalle  $[0^\circ-45^\circ]$  pour atteindre la valeur maximale à  $\theta=45^\circ$  et diminuent symétriquement dans l'intervalle  $[45^\circ-90^\circ]$ .

#### IV.5/Effet de rapport d'épaisseur $a/h$ :

Dans ce test, on va étudier l'effet de rapport d'épaisseur et la température sur la vibration des plaques stratifiées carrée de 4 couches (0/90/90/0) avec deux cas de conditions limites simplement appuyé et encastree.

Les caractéristiques mécaniques sont :

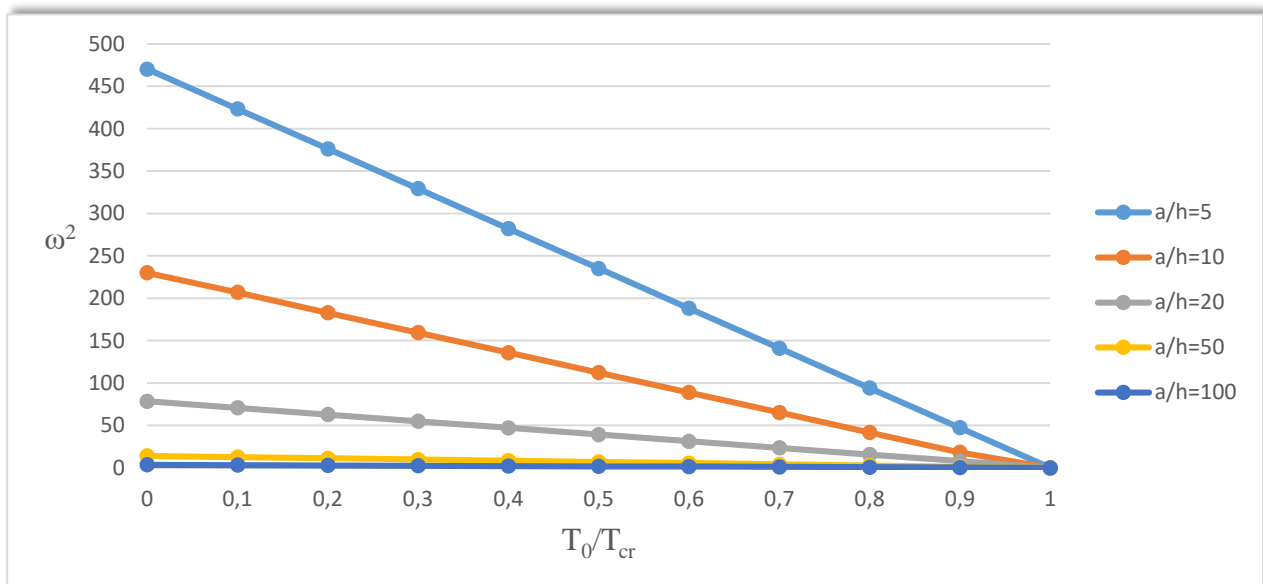
$$\frac{E_{11}}{E_{22}} = 40, \quad \frac{G_{12}}{E_{22}} = \frac{G_{13}}{E_{22}} = 0,6, \quad \frac{G_{23}}{E_{22}} = 0,5, \quad \nu_{12} = 0,25,$$

$$\alpha_L = 1,14 \times 10^{-6}, \quad \alpha_T = 11,4 \times 10^{-6}, \quad \rho = 1.$$

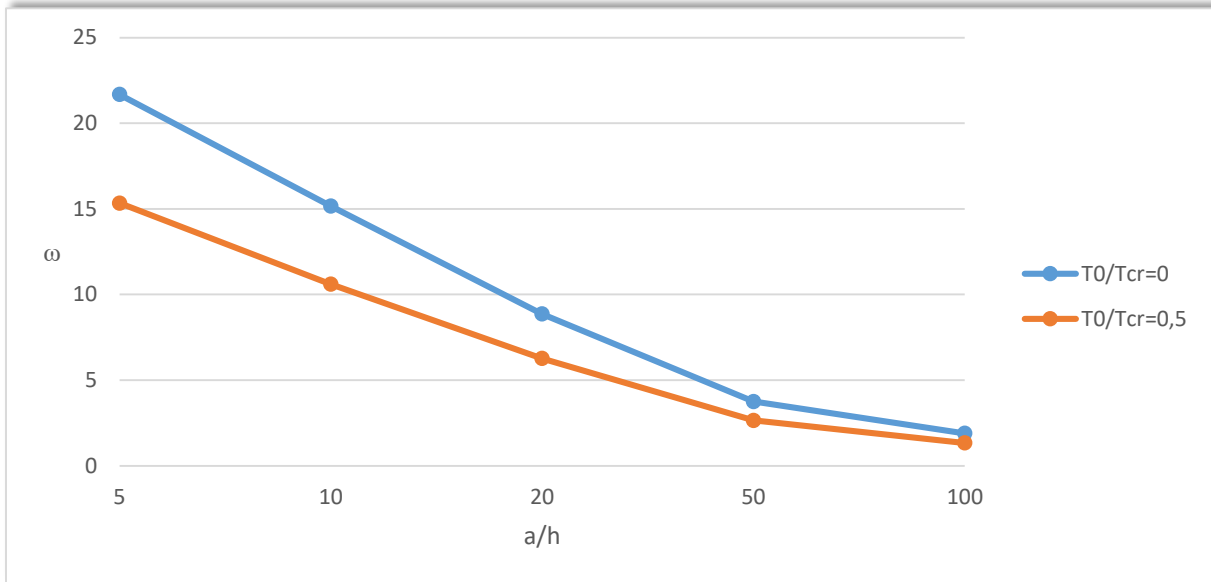
Avec rapport d'épaisseur a/h=variable

**Tab (IV.7) :** l'effet du rapport d'épaisseur sur la fréquence de plaque stratifiée simplement appuyé.

$\frac{T_0}{T_{Cr}}$	a/h=5	a/h=10	a/h=20	a/h=50	a/h=100
0	21.6840	15.1646	8.8611	3.7518	1.8925
0.1	20.5717	14.3864	8.4064	3.5593	1.7954
0.2	19.3956	13.5244	7.9256	3.3557	1.6927
0.3	18.1432	12.6247	7.4138	3.1390	1.5834
0.4	16.7978	11.6557	6.8638	2.9061	1.4659
0.5	15.3344	10.5985	6.2658	2.6529	1.3381
0.6	13.7158	9.4234	5.6043	2.3728	1.1969
0.7	11.8785	8.0792	4.8534	2.0549	1.0366
0.8	9.6989	6.4609	3.9628	1.6778	0.8465
0.9	6.8824	4.2681	2.8021	1.18640	0.5985
1	0.00001	0.00001	0.000003	0.000002	0.000001



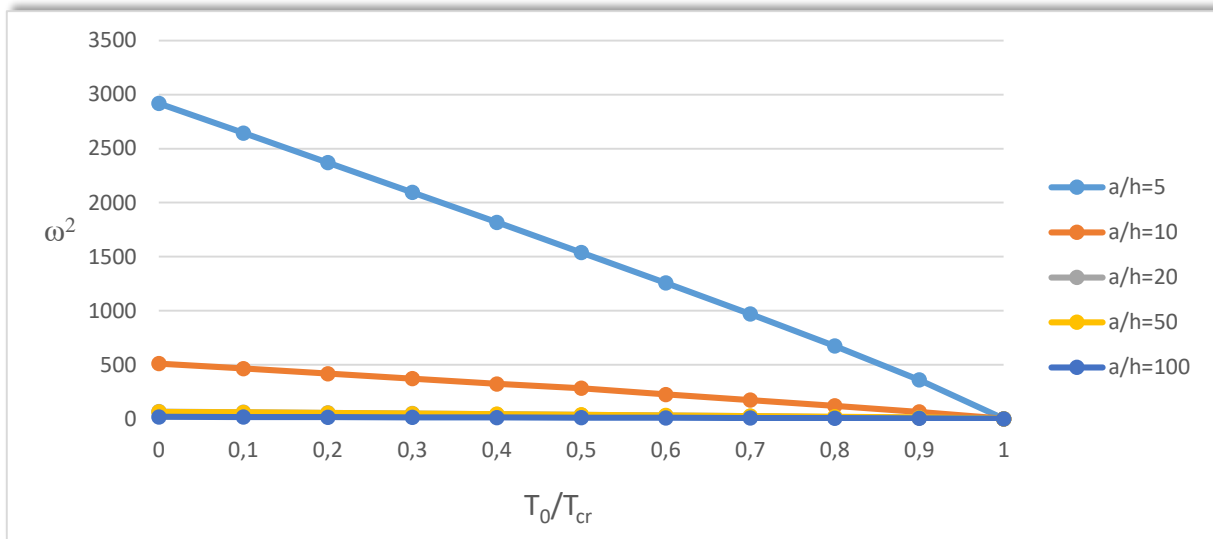
**Fig (IV.13) :** variation de fréquence au carré de plaque simplement appuyé en fonction de température  $T_0/T_{cr}$  avec variation du rapport d'épaisseur.



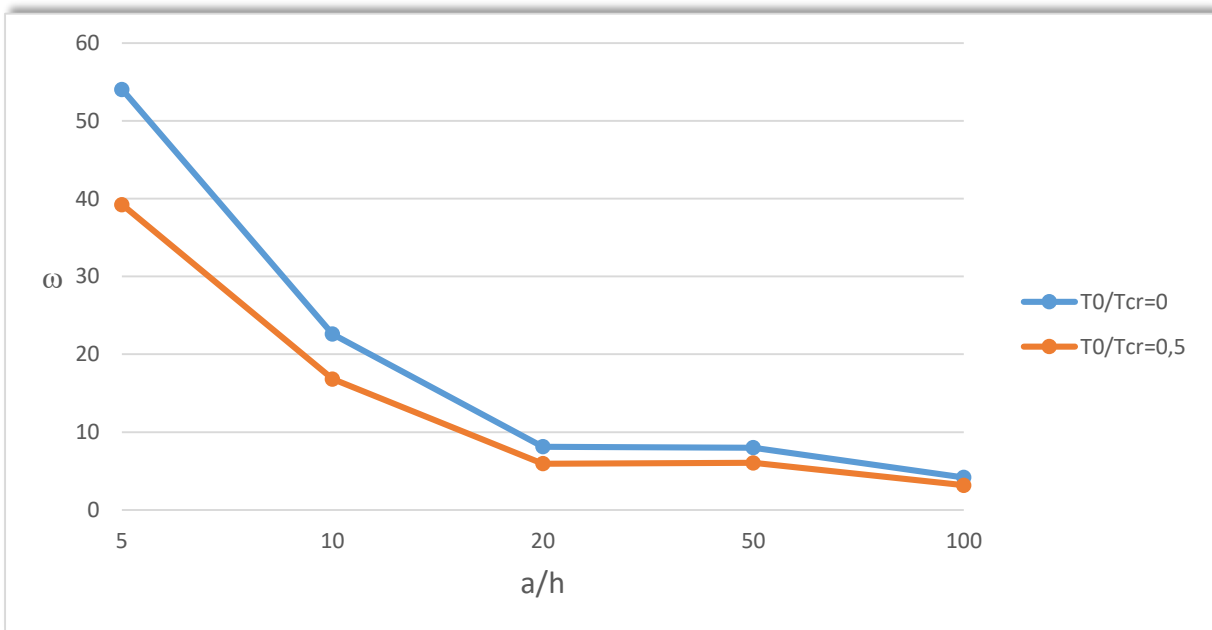
**Fig (IV.14) :** variation de fréquence de plaque simplement appuyé en fonction du rapport d'épaisseur.

**Tab (IV.8) :** l'effet du rapport d'épaisseur sur la fréquence de plaque stratifiée encastéré.

$\frac{T_0}{T_{Cr}}$	a/h=5	a/h=10	a/h=20	a/h=50	a/h=100
<b>0</b>	54.0277	22.6053	8.1240	8.0115	4.1720
<b>0.1</b>	51.4295	21.5638	7.74596	7.6679	3.9885
<b>0.2</b>	48.6929	20.4450	7.3484	7.3047	3.8083
<b>0.3</b>	45.7711	19.2614	6.9282	6.9175	3.6096
<b>0.4</b>	42.6380	17.9722	6.4807	6.5016	3.3966
<b>0.5</b>	39.2301	16.5831	5.9514	6.0494	3.1656
<b>0.6</b>	35.4541	14.9962	5.3852	5.5499	2.9112
<b>0.7</b>	31.1448	13.1529	4.7958	4.9853	2.6249
<b>0.8</b>	25.9615	10.9544	3.8523	4.3239	2.2918
<b>0.9</b>	18.9736	7.9373	2.8716	3.4996	1.8814
<b>1</b>	0.00003	0.00003	0.00003	0.00002	0.000002



**Fig (IV.15) :** variation de fréquence au carré de plaque encadré en fonction de température  $T_0/T_{cr}$  avec variation du rapport d'épaisseur.



**Fig (IV.16) :** variation de fréquence de plaque encadrée en fonction du rapport d'épaisseur.

Les figures (IV.13) et (IV.15) présentent l'effet de température sur les fréquences au carré de plaques stratifiés simplement appuyé et encadré respectivement avec variation du rapport d'épaisseur. On remarque pour les deux cas de conditions aux limites, les fréquences propres diminuent avec l'augmentation de la température. Lorsque la température donnée est égale à la température critique, les fréquences propres tendent vers zéro.

Les figures (IV.14) et (IV.16) présentent variation de fréquences de plaque simplement appuyé et encastré respectivement en fonction du rapport d'épaisseur. On observe que les fréquences décroissent avec l'accroissement du rapport d'épaisseur

#### IV.6/ Effet de rapport d'aspect (a/b) :

Dans cette section, nous allons présenter l'effet du rapport d'aspect (a/b) et la température sur les fréquences des plaques stratifiées de 4 couches (0/90/90/0) avec rapport d'épaisseur a/h=10 et deux cas de conditions limites simplement appuyé et encastré.

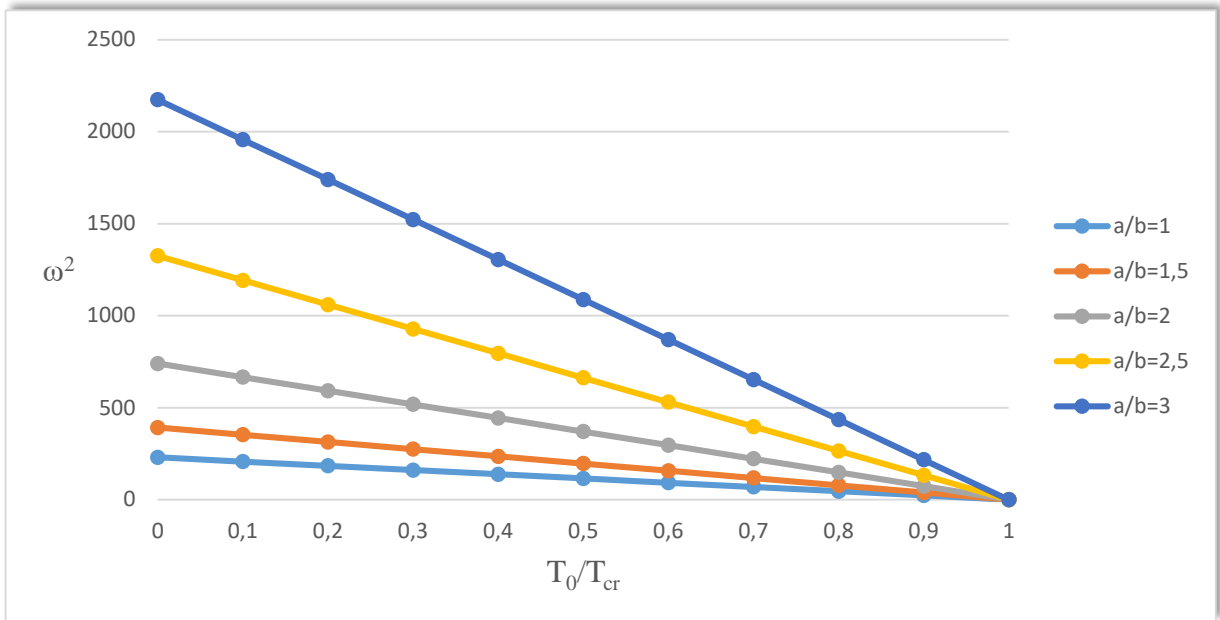
Les caractéristiques mécaniques sont:

$$\frac{E_{11}}{E_{22}} = 40, \quad \frac{G_{12}}{E_{22}} = \frac{G_{13}}{E_{22}} = 0,6, \quad \frac{G_{23}}{E_{22}} = 0,5, \quad \nu_{12} = 0,25,$$

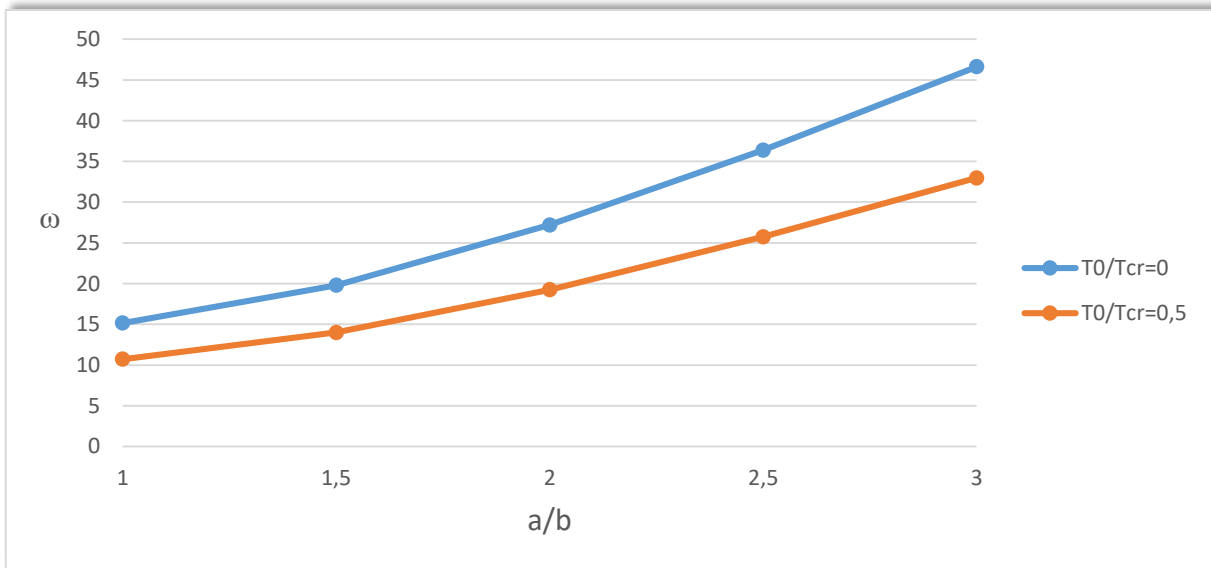
$$\alpha_L = 1,14 \times 10^{-6}, \quad \alpha_T = 11,4 \times 10^{-6}, \quad \rho = 1$$

**Tab (IV.9) :** l'effet du rapport d'aspect (a/b) sur la fréquence de plaque stratifiée simplement appuyé.

$\frac{T_0}{T_{Cr}}$	1	1.5	2	2.5	3
0	15.1646	19.7998	27.2015	36.3974	46.6251
0.1	14.386	18,7838	25.8059	34.5301	44.2336
0.2	13.5637	17.7096	24.3302	32.5559	41.7049
0.3	12.6877	16.5659	22.75903	30.4538	39.0125
0.4	11.7465	153371	21.0709	28.1952	36.1195
0.5	10.7231	14.0009	19.2352	25.7390	32.9734
0.6	9.5910	12.5228	17.2047	23.0221	29.4931
0.7	8.3061	10.8451	14.8998	19.9381	25.5426
0.8	6.7819	8.8550	12.1657	16.2797	20.8561
0.9	4.7955	6.2615	8.6026	11.5117	14.7479
1	0.000018	0.000027	0.00002	0.00005	0.000005



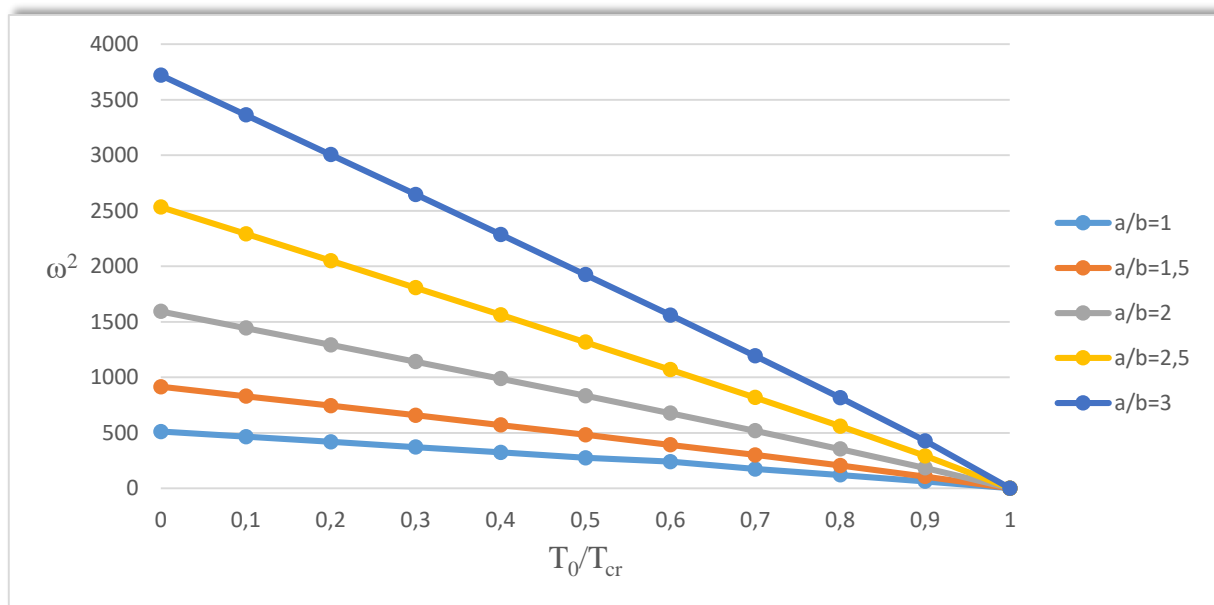
**Fig (IV.17) :** variation de fréquence au carré de plaque simplement appuyée en fonction de température  $T_0/T_{cr}$  avec variation du rapport d'aspect.



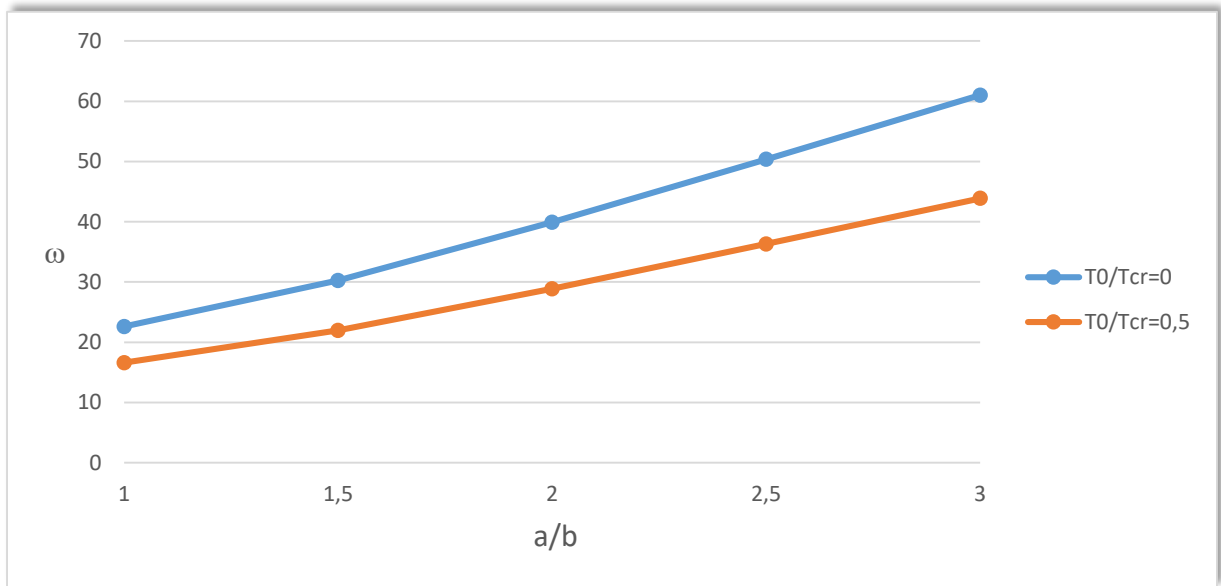
**Fig (IV.18) :** variation de fréquence de plaque simplement appuyé en fonction du rapport d'aspect ( $a/b$ ).

**Tab (IV.10) :** l'effet du rapport d'aspect (a/b) sur la fréquence de plaque stratifiée encastree.

$\frac{T_0}{T_{Cr}}$	1	1.5	2	2.5	3
0	22.6053	30.2486	39.9213	50.3376	61.0038
0.1	21.5638	28.8043	37.9904	47.8785	57.9997
0.2	20.445	27.2739	35.9475	45.2789	54.8256
0.3	19.2614	25.63971	33.7694	42.5108	51.4479
0.4	17.9722	23.8763	31.4243	39.5349	47.8205
0.5	16.5831	21.9469	28.8651	36.2942	43.8755
0.6	15.4756	19.7938	26.0180	32.6986	39.5074
0.7	13.1529	17.3179	22.7559	28.5927	34.5337
0.8	10.9544	14.3226	18.8242	23.6639	28.5861
0.9	7.9373	10.2971	13.5529	17.0753	20.6682
1	0.00002	0.000008	0.00014	0.000024	0.0000203



**Fig (IV.19) :** variation de fréquence au carré de plaque encastree en fonction de température  $T_0/T_{Cr}$  avec variation du rapport d'aspect.



**Fig (IV.20)** : variation de fréquence de plaque encastree en fonction du rapport d'aspect (a/b).

Les figures (IV.17) et (IV.19) présentent l'effet de température sur les fréquences au carré de plaques stratifiées simplement appuyé et encastree respectivement avec variation du rapport d'aspect a/b. On remarque pour les deux cas de conditions aux limites, les fréquences propres diminuent avec l'augmentation de la température. Lorsque la température donnée est égale à la température critique, les fréquences propres tendent vers zéro.

Les figures (IV.18) et (IV.20) présentent variation de fréquences de plaque simplement appuyé et encastree respectivement en fonction du rapport d'aspect a/b. On remarque que les fréquences croissent avec la variation du rapport d'aspect a/b.

#### IV.7/Rapport du coefficient de dilatation $\frac{\alpha_T}{\alpha_L}$ :

Dans cette section, nous allons présenter l'effet du coefficient de dilatation et la température sur les fréquences des plaques stratifiées carrée de 4 couches (0/90/90/0) avec rapport d'épaisseur a/h=10 et deux cas de conditions limites simplement appuyé et encastree.

Les caractéristiques mécaniques sont:

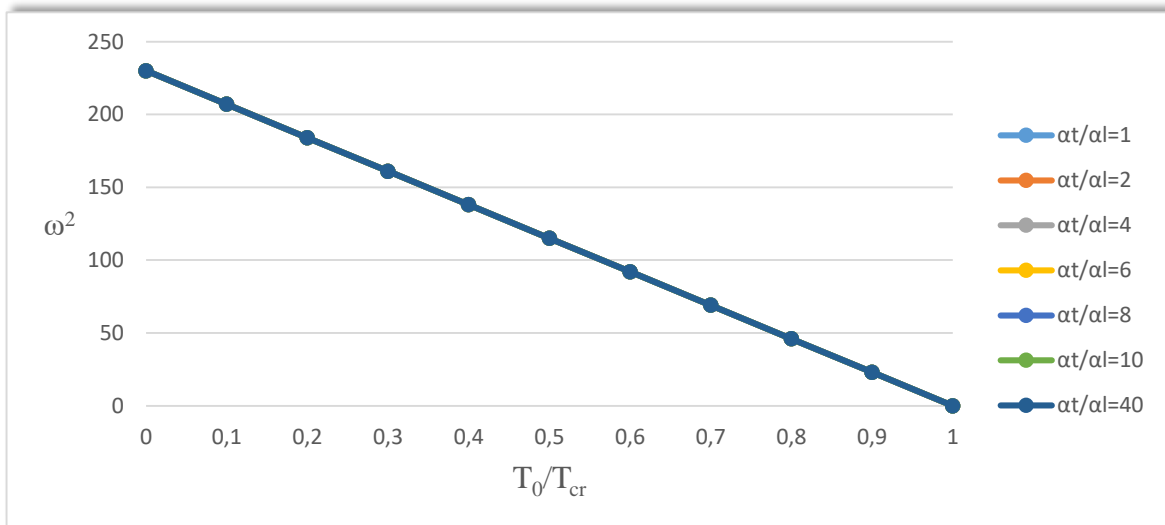
$$\frac{E_{11}}{E_{22}} = 40, \quad \frac{G_{12}}{E_{22}} = \frac{G_{13}}{E_{22}} = 0,6, \quad \frac{G_{23}}{E_{22}} = 0,5, \quad \vartheta_{12} = 0,25,$$

$$\frac{\alpha_T}{\alpha_L} = \text{variable}, \quad \rho = 1.$$



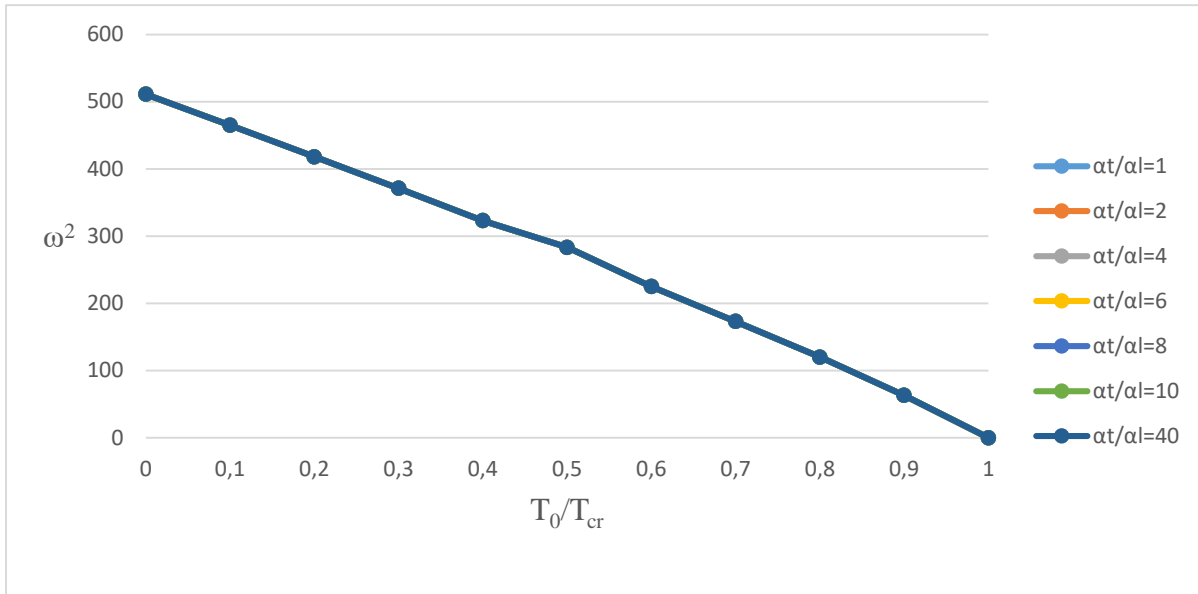
**Tab (IV.11) :** l'effet du rapport de coefficient de dilatation sur la fréquence de plaque stratifiée simplement appuyée.

$\frac{T_0}{T_{Cr}}$	1	2	4	6	8	10	40
0	15.1648	15.1648	15.1648	15.1648	15.1648	15.1648	15.1648
0.1	14.3864	14.3864	14.3864	14.3864	14.3864	14.3864	14.3864
0.2	13.5636	13.5636	13.5636	13.5636	13.5636	13.5636	13.5636
0.3	12.6877	12.6877	12.6877	12.6877	12.6877	12.6877	12.6877
0.4	11.7465	11.7465	11.7465	11.7465	11.7465	11.7465	11.7465
0.5	10.7230	10.7230	10.7230	10.7230	10.7230	10.7230	10.7230
0.6	9.5909	9.5909	9.5909	9.5909	9.5909	9.5909	9.5909
0.7	8.3059	8.3059	8.3059	8.3059	8.3059	8.3059	8.3059
0.8	6.7817	6.7817	6.7817	6.7817	6.7817	6.7817	6.7817
0.9	4.7953	4.7953	4.7953	4.7953	4.7953	4.7953	4.7953
1	0.00002	0.00002	0.00002	0.00002	0.00002	0.00002	0.00002

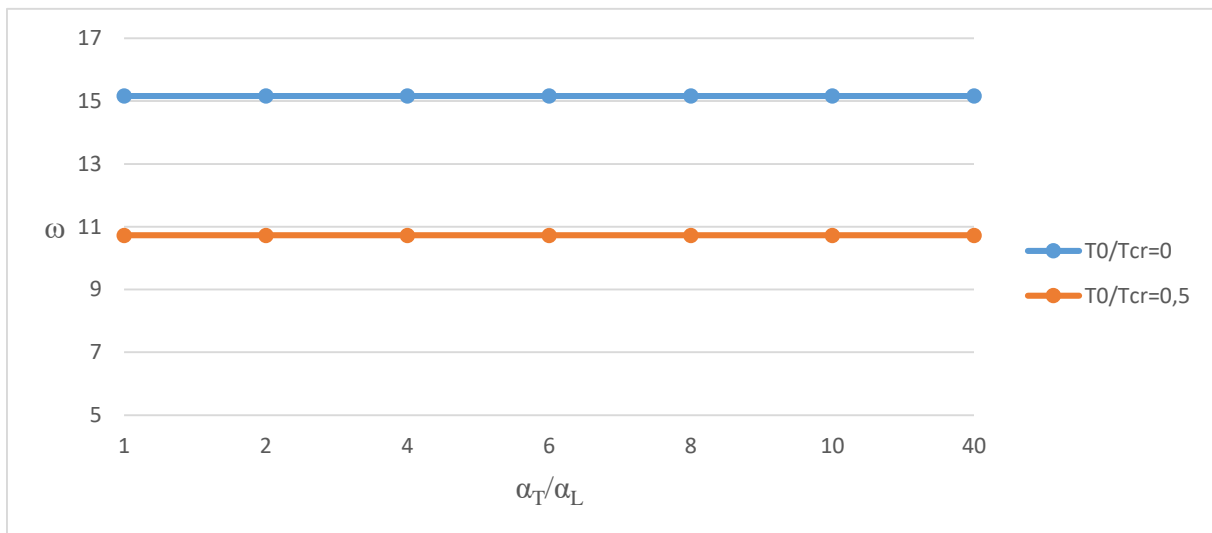


**Fig (IV.21) :** variation de fréquence au carré de plaque simplement appuyée en fonction de température  $T_0/T_{Cr}$  avec variation du coefficient de dilatation.





**Fig (IV.23) :** variation de fréquence au carré de plaque encastree en fonction de température  $T_0/T_{cr}$  avec variation du coefficient de dilatation.



**Fig (IV.24) :** variation de fréquence de plaque encastree en fonction du rapport de coefficient de dilatation.

Les figures (IV.21) et (IV.23) présentent l'effet de température sur les fréquences au carré de plaques stratifiés simplement appuyé et encastree respectivement avec variation du rapport de coefficient de dilatation. On remarque pour les deux cas de conditions aux limites, les fréquences propres diminuent avec l'augmentation de la température. Lorsque la température donnée est

égale à la température critique, les fréquences propres tendent vers zéro, aussi les courbes sont supposées parce que les valeurs sont constantes.

Les figures (IV.22) et (IV.24) présentent variation de fréquences de plaque simplement appuyé et encasté respectivement en fonction du rapport du coefficient de dilatation. On remarque qu'avec l'augmentation du rapport les fréquences sont constantes quel que soit la condition aux limites.

## Conclusion générale

Dans ce travail nous avons présenté une analyse numérique afin de déterminer les fréquences propres des plaques stratifiées en matériaux composites soumises à un chargement thermique. Nous avons en premier lieu présenté des généralités sur les matériaux composites et des lois de comportement des stratifiés, selon la théorie de premier ordre de cisaillement, suivi d'une revue de littérature sur les études récentes des vibrations libres des plaques stratifiées. Ensuite nous avons présenté une formulation d'élément finis rectangulaire à 4 nœuds et 20 degré de liberté, utilisé dans cette étude suivi de la présentation du code informatique avec lequel nous avons effectué nos calcul.

Par ailleurs, on a procédé à une étude comparative des fréquences naturelles et de la variation de température critique des plaques isotropes et stratifiées avec des résultats obtenus de la littérature. On aussi considéré les fréquences propres des plaques soumis à chargement thermique. Cette étude nous a permis de montrer la bonne performance de l'élément utilisé.

Après la validation de l'élément, nous avons procédé à une étude paramétrique pour mettre en évidence l'effet des différents paramètres comme le rapport d'anisotropie, l'orientation des fibres, le nombre de couches et les conditions aux limites etc., sur les fréquences naturelles des plaques stratifiées.

Cette analyse nous a permis de tirer les remarques suivantes :

Quel que soit le paramètre étudié les fréquences propres de vibration diminuent avec l'augmentation de la température et s'annulent lorsque la température atteint température critique.

- Plus le rapport de l'anisotropie ( $E_1/E_2$ ) est élevée, les valeurs de fréquences sont élevées quel que soit la température appliquée ou le type de conditions aux limites imposées.
- En augmentant le nombre des couches les valeurs de la fréquence croient jusqu'à 9 couches pour rester pratiquement inchangées dans les deux cas de conditions aux limites et quel que soit la température.
- Les valeurs de fréquence augmentent avec la variation de l'orientation des fibres et ont une symétrie par rapport à l'orientation  $45^\circ$ .

- Pour une augmentation du rapport d'épaisseur ( $a/h$ ) les valeurs de la fréquence diminuent dans deux cas de conditions aux limites.
- Plus que le rapport d'aspect ( $a/b$ ) est élevé, plus les fréquences propres sont élevés.
- On remarque que la variation du rapport des coefficients de dilatation n'a pratiquement aucun effet sur les valeurs de fréquence pour tous les cas de conditions aux limites ou la variation de température.

## Référence bibliographique

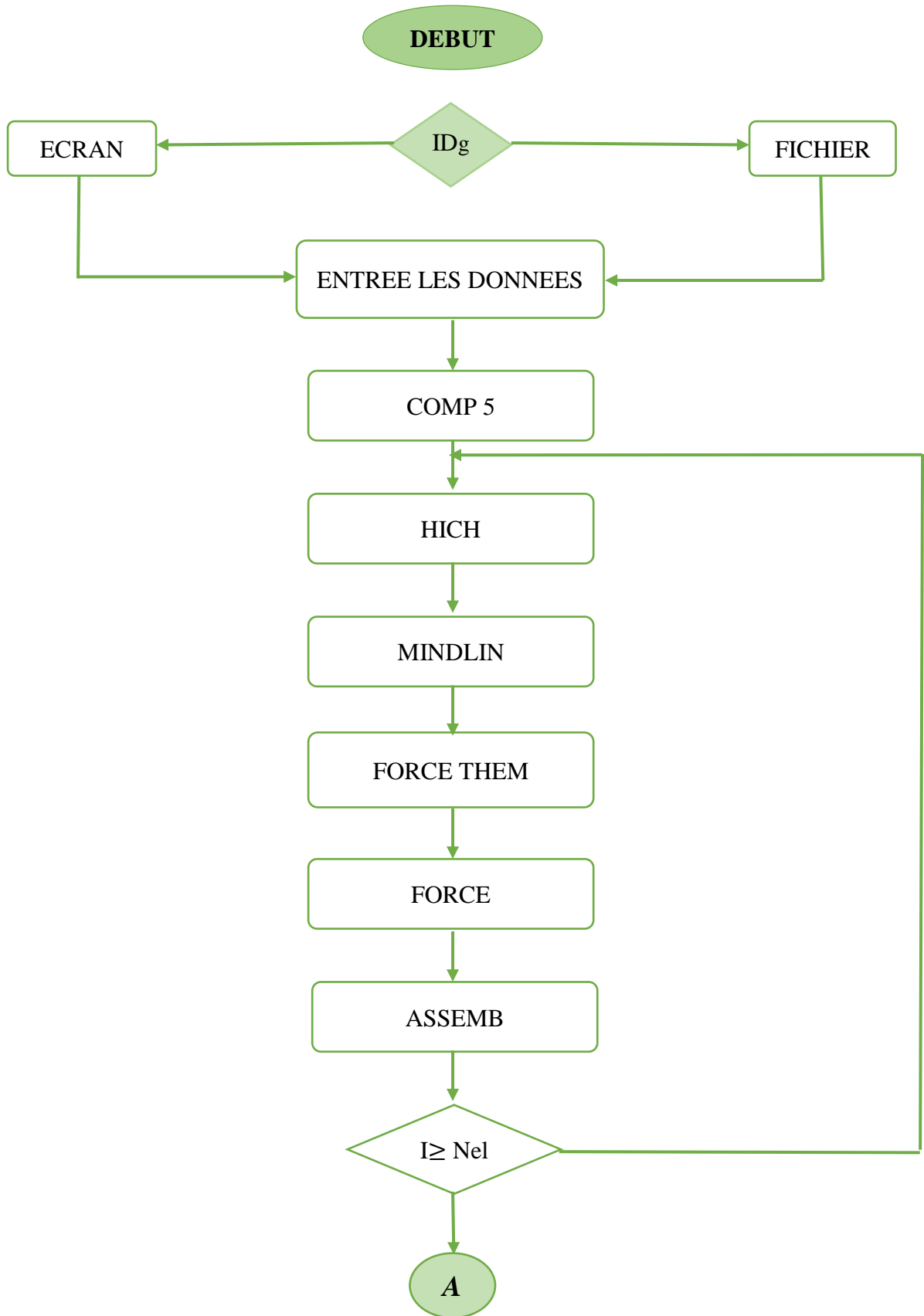
1. Pierre, A. *Les matériaux composites*. Available from: [https://www.academia.edu/8738626/Les\\_mat%C3%A9riaux\\_composites](https://www.academia.edu/8738626/Les_mat%C3%A9riaux_composites).
2. BOUYAYA, L. and F. MILI, *Étude théorique et numérique du comportement dynamique d'un stratifié composite unidirectionnel*. 21ème Congrès Français de Mécanique, 26 au 30 août 2013, Bordeaux, France (FR), 2013.
3. Berthelot, J.-M., *Matériaux composites*. Edition TEC et DOC, Paris, 1999.
4. Gornet, L., *Généralités sur les matériaux composites*. 2008.
5. Kallel Kamoun, I., *Analyse mécanique de l'essai de flexion par flambement post-critique*, 1999, Ecole centrale de Lyon.
6. Faria, A.W., *Modélisation par éléments finis de plaques composites: contribution à l'étude de l'amortissement, endommagement et prise en compte d'incertitudes (PhD thesis)*. Uberlândia: Universidade Federal de Uberlândia. Portuguese.[Links], 2010.
7. Bourouis FAIROUZ, Etude du comportement mécanique des structures sandwich à différents matériaux de revêtements. Mémoire de magistère, Université de Constantine, 2010.
8. Sharma, A.K. and N. Mittal, *Review on stress and vibration analysis of composite plates*. Journal of Applied Sciences(Faisalabad), 2010. **10**(23): p. 3156-3166.
9. Chen, C.-S., W.-R. Chen, and H.-W. Lin, *Thermally induced stability and vibration of initially stressed laminated composite plates*. Mechanics, 2016. **22**(1): p. 51-58.
10. Noor, A.K., *Free vibrations of multilayered composite plates*. AIAA journal, 1973. **11**(7): p. 1038-1039.
11. Venkatesan, S. and V. Kunukkasseril, *Free vibration of layered circular plates*. Journal of Sound and Vibration, 1978. **60**(4): p. 511-534.
12. Noor, A.K. and W.S. Burton, *Three-dimensional solutions for the free vibrations and buckling of thermally stressed multilayered angle-ply composite plates*. Journal of Applied Mechanics, 1992. **59**(4): p. 868-877.
13. Noor, A.K. and W.S. Burton, *Three-dimensional solutions for thermal buckling of multilayered anisotropic plates*. Journal of engineering mechanics, 1992. **118**(4): p. 683- 701.

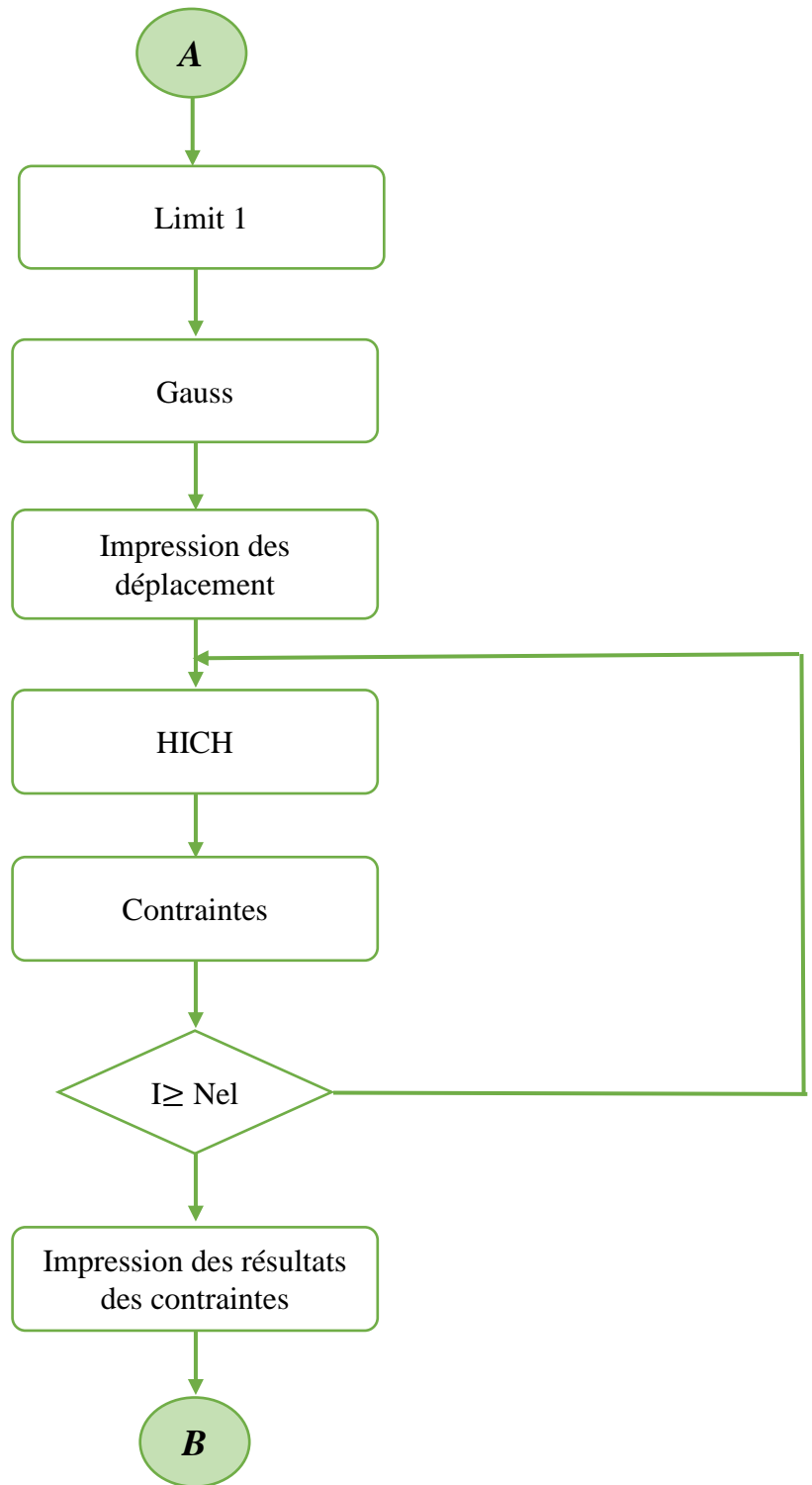
14. Bhimaraddi, A. and K. Chandrashekhara, *Nonlinear vibrations of heated antisymmetric angle-ply laminated plates*. International journal of solids and structures, 1993. **30**(9): p. 1255-1268.
15. Park, J.-S., J.-H. Kim, and S.-H. Moon, *Vibration of thermally post-buckled composite plates embedded with shape memory alloy fibers*. Composite Structures, 2004. **63**(2): p. 179-188.
16. Matsunaga, H., *Free vibration and stability of angle-ply laminated composite and sandwich plates under thermal loading*. Composite Structures, 2007. **77**(2): p. 249-262.
17. Chen, C.-S., et al., *Thermally induced vibration and stability of laminated composite plates with temperature-dependent properties*. Meccanica, 2013. **48**(9): p. 2311-2323.
18. Dhatt, G. and G. Touzot, *Une présentation de la méthode des éléments finis* 1981: Presses Université Laval.
19. Christian, D., *Méthode des éléments finis*. Université de Cergy Pontoise France, memoire de fin d'étude en mathematique, 2006: p. 94.
20. Dawe, D. and O. Roufaeil, *Rayleigh-Ritz vibration analysis of Mindlin plates*. Journal of Sound and Vibration, 1980. **69**(3): p. 345-359.
21. Ferreira, A.J., *MATLAB codes for finite element analysis: solids and structures*. Vol. 157. 2008: Springer Science & Business Media.
22. Lal, A. and B. Singh, *Stochastic free vibration of laminated composite plates in thermal environments*. Journal of Thermoplastic Composite Materials, 2010. **23**(1): p. 57-77.

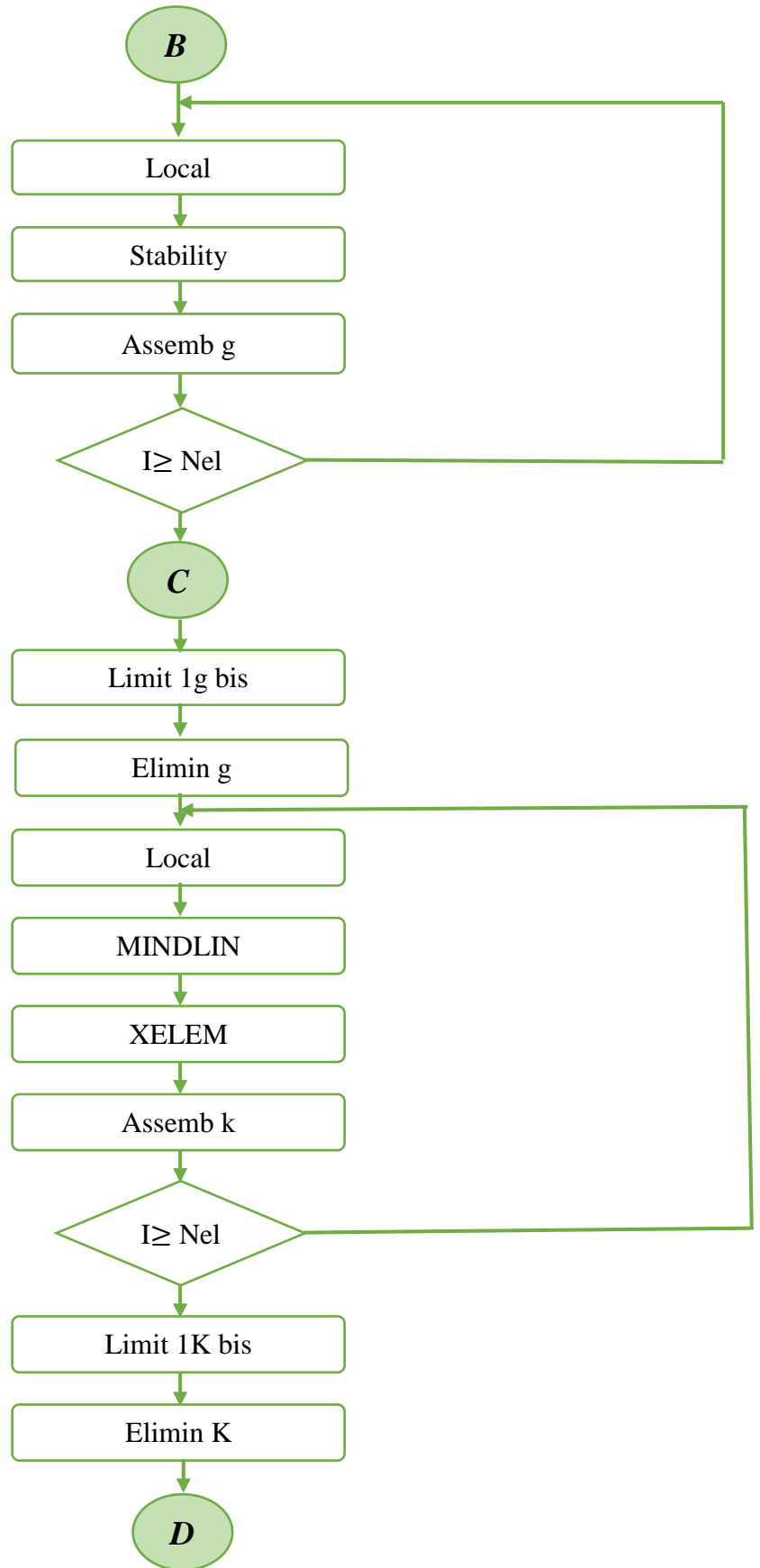


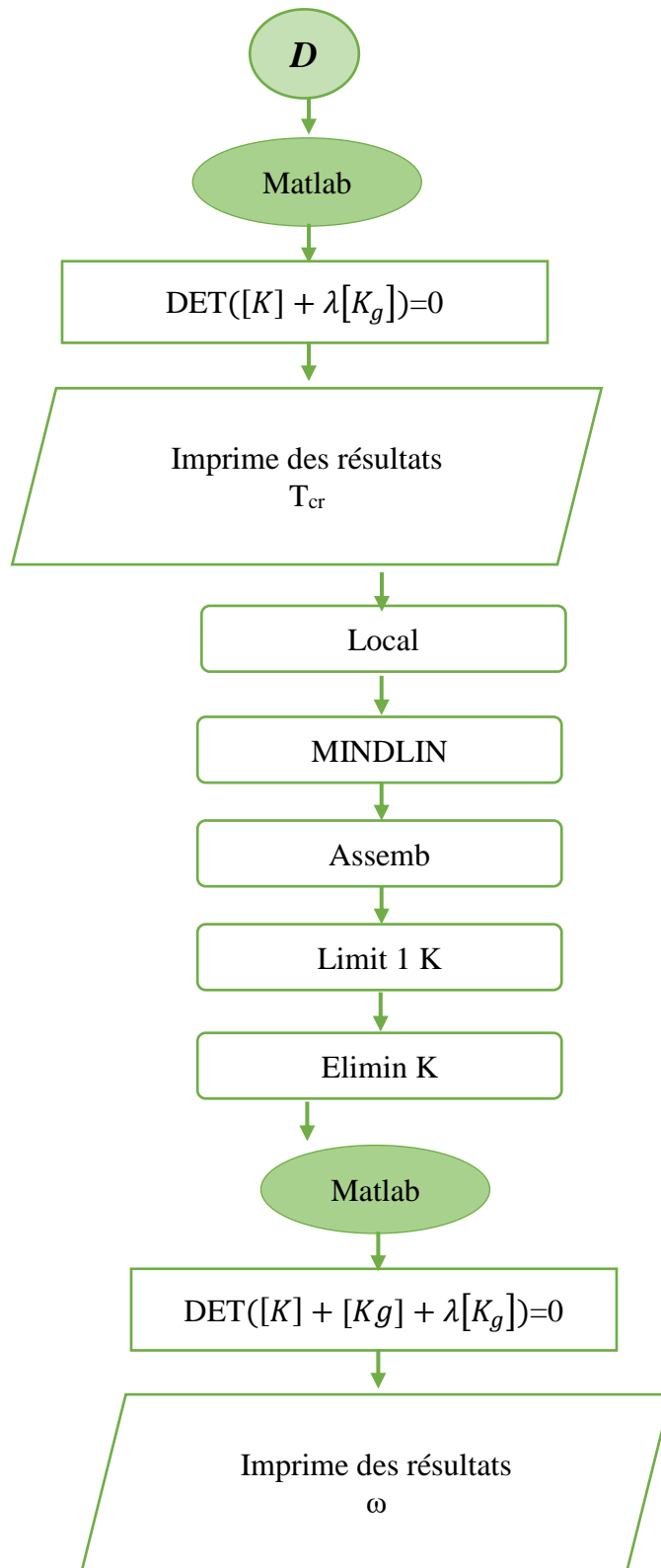
# Annexe

**Annexe**









## 2/Variation de température critique en fonction de différents paramètres :

Tableau 1 :Variation de température en fonction de rapport d'anisotropie :

$\frac{E_{11}}{E_{22}}$	<b>1</b>	<b>3</b>	<b>10</b>	<b>20</b>	<b>40</b>
<b>Simplement appuyé</b>	2384.2041	2953.99	38833.4032	4019.8812	3895.9212
<b>Encastré</b>	5457.3114	7547.2536	9497.0612	9021.40844	7344.1809

Tableau2 : Variation de température en fonction du nombre des couches :

<b>N.couches</b>	<b>3</b>	<b>5</b>	<b>9</b>	<b>13</b>	<b>17</b>
<b>Simplement appuyé</b>	3703.665	4079.2544	4238.6101	4276.6521	4291.2861
<b>Encastré</b>	6379.9626	8380.6682	8942.1022	9061.6812	9106.699

Tableau 3 : Variation de température en fonction d'orientation des fibres :

<b><math>\theta</math></b>	<b>0°</b>	<b>15°</b>	<b>30°</b>	<b>45°</b>	<b>60°</b>	<b>75°</b>	<b>90°</b>
<b>Simplement appuyé</b>	3700.095	3978.492	4675.131	5014.124	4675.131	3978.492	3700.095
<b>Encastré</b>	6517.751	6296.781	6557.512	6784.571	6557.512	6296.781	6517.751

Tableau 4 :Variation de température en fonction du rapport d'épaisseur :

<b>a/h</b>	<b>5</b>	<b>10</b>	<b>20</b>	<b>50</b>	<b>100</b>
<b>Simplement appuyé</b>	8028.5521	3895.9212	1322.3247	236.3863	60.1171
<b>Encastré</b>	11356.5051	7344.1809	3495.3254	744.7301	196.2215

Tableau 5 : Variation de température en fonction du rapport d'aspect (a/b) :

<b>a/b</b>	<b>1</b>	<b>1.5</b>	<b>2</b>	<b>2.5</b>	<b>3</b>
<b>Simplement appuyé</b>	3895.92917	4109.39728	5056.56044	6266.2542	7461.1511
<b>Encastré</b>	7344.1809	8484.7329	9887.842	11052.4102	11920.64996

Tableau 6 :Variation de température en fonction du rapport du coefficient de dilatation :

$\frac{\alpha_T}{\alpha_L}$	<b>1</b>	<b>2</b>	<b>4</b>	<b>6</b>	<b>8</b>	<b>10</b>	<b>40</b>
<b>Simplement appuyé</b>	4952.055	4807.260	4540.926	4303.17	4180.31	3895.92917	2276.749
<b>Encastré</b>	9335.076	9062.12	8561.45	8113.21	7709.566	7344.1809	4292.584