République Algérienne Démocratique et Populaire

Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

UNIVERSITÉ MOHAMED KHIDER, BISKRA

FACULTÉ des SCIENCES EXACTES et des SCIENCES de la NATURE et de la VIE

DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES

Mémoire présenté en vue de l'obtention du Diplôme **:**

MASTER en Mathématiques

Option : **Analyse**

Par

MIMOUNE KHAOULA

Titre :

Equations Intégrales Linéaires de Volterra de Seconde Espèce et Méthode de Galerkine

Membres du Comité d'Examen :

Dr.	**CHEMCHAM MADANI**	UMKB	Encadreur
Dr.	**LAADJAL BAYA**	UMKB	Président
Dr.	**LAIADI ABED-ELKADER**	UMKB	Examinateur

Juin 2019

Dédicace

Merci **Allah** de m'avoir donné la capacité de surmonter les difficultés dans ma carrière d'étude.

Je dédie ce travail au symbole de la tendresse, qui s'est sacrifiée pour mon bonheur, pour ma mère "**Aicha",** que Dieu ait pitié d'elle, elle a toujours voulu atteindre et réussir.

A mon père "**Sebti**", qui a été la cause de mon courage et qui a été mon ombre durant toutes les années de mes études.

A mes soeurs : **"Somia, Manel, Loulou et Meriam".**

A mes frères : "**Mohamed et Ahmed".**

Aux filles de ma soeur : **"Nour, Alee, Batul, Layane".**

A mes amies

A tous ceux que j'aime

Je dédie ce travail.

REMERCIEMENTS

Avant toutes choses, je remercie Allah, le tout puissant, pour m'avoir donné la force et la patience

Je tient à remercier particuliément Mr "**CHEMCHAM MADANI** " pour son soutien scientifique, ainsi que pour sa compétence et les bonnes orientations, sesprécieux conseils mais aussi ses encouragements. Je lui exprime toute ma gratitude.

Je remercie messieurs les membres de jury Ms "**LAADJAL BAYA**" et Mr "**LAIADI ABED-ELKADER**".

Je remercie Mr "**Bellagoun Abdelghani**" pour son aide précieuse.

Je voudrais également remercier toute ma famille, et mes amies

Table des matières

Table des figures

Liste des tableaux

Introduction

Les équations intégrales sont une des branches les plus importantes des mathématiques, parmi lesquelles les équations intégrales linéaires de Volterra.

Ces équations jouent un rôle majeur dans divers domaines scientifiques tels que : la biologie, la chimie quantique ou la physique, pour trouver des solutions analytiques ou numériques.Dans ce mémoire on étudie le sujet "Equations intégrales linéaires de Volterra de seconde espèce et méthode de Galerkine". L'objet de ce travail est de présenter des solutions précises pour les équations intégrales linéaires de Volterra ou des solutions approximatives pour cette équation.

Ce travail est divisé en deux chapitres :

Le premier chapitre est consacré à l'étude, l'existence et l'unicité de la solution des équations intégrales linéaires de Volterra de seconde espèce et quelques méthodes analytiques de résolution de ces équations et quelques exemples.

Le deuxième chapitre contient la méthode de Galerkin qui cherche la solution comme une combinaison linéaire finie de polynômes de dégré **N.** il est connu que,

les polynômes orthogonaux possèdent des propriétés intéressantes en approximation, et quelques exemples pour comparer entre la solution exacte et la solution approximative.

Chapitre 1

Equations intégrales linéaires de Volterra de seconde espèce

Dans ce chapitre, on donne des notions et définitions sur des équations intégrales linéaires et leurs types et quelques méthodes analytiques pour résoudre des équations intégrales de Volterra et on introduit quelques exemples.

1.1 Equations intégrales linéaires

1.1.1 Opérateur intégral linéaire

Définition 1.1 (Opérateur intégral linéaire)

Soit E un espace de Banach.L'opérateur A défini par

$$\begin{aligned} A : E &\to E \\ \varphi &\to A\varphi \end{aligned}$$

où

$$\begin{aligned} A\varphi : [a,b] &\to \mathbb{C} \\ x &\to (A\varphi) = \int_{\Omega} k(x,t)\varphi(t)dt \end{aligned}$$

et où Ω est un intervalle fermé borné de $\mathbb{R}(\Omega = [a,b]$ ou $[a,x]),$ est appelé opérateur intégral *linéaire à noyau k.*

Remarque 1.1

L'opérateur A linéaire veut dire

$$\forall\varphi_1,\varphi_2 \quad \forall\alpha,\beta\in\mathbb{C} \qquad A(\alpha\varphi_1+\beta\varphi_2)=\alpha A(\varphi_1)+\beta A(\varphi_1).$$

Le noyau k est une fonction de $[a,b]\times[a,b]$ dans $\mathbb{C}$

Exemple 1.1

L'opérateur S défini par

$$\begin{aligned} S\varphi:[0,1] &\to \mathbb{C} \\ x &\to (S\varphi)=\textstyle\int_a^x (x-t)\varphi(t)dt \end{aligned}$$

est un opérateur intégral linéaire à noyau $k(x,t)=(x-t)$.

Définition 1.2 (Equation intégrale linéaire) *On appelle équation intégrale linéaire, une équation fonctionnelle de la forme :*

$$\varphi(x)=f(x)+\lambda\int_\Omega k(x,t)\varphi(t)dt \tag{1.1}$$

où φ est l'inconnu, $k(x,t)$ appelé le noyau de l'équation intégrale et $f(x)$ sont des fonctions données, $\Omega=([a,b],[a,x])$, λ un paramètre.
Ou sous forme d'opérateurs

$$(I-\lambda A)\varphi(x)=f(x)$$

où I est l'application identité.

1.2 Equations intégrales linéaires types

1.2.1 Les équations intégrales de Fredholm

Définition 1.3 (Les équations intégrales de Fredholm)

La forme standard des équations intégrales linéaires de Fredholm est

$$h(x)\varphi(x) = f(x) + \lambda \int_a^b k(x,t)\varphi(t)dt, \tag{1.2}$$

où les limites de l'intégration sont des constantes.

Si la fonction $h(x) = 0$, alors l'équation (1.2) s'écrit :

$$f(x) + \lambda \int_a^b k(x,t)\varphi(t)dt = 0,$$

cette équation plus simple est appelée l'équation intégrale linéaire de Fredholm de première espèce.

Si la fonction $h(x) = 1$, alors l'équation (1.2) devient tout simplement

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda \int_a^b k(x,t)\varphi(t)dt, \tag{1.3}$$

est s'appelle l'équation intégrale linéaire de Fredholm de seconde espèce.

Exemple 1.2

1. $\frac{1}{2}x^2 - \frac{2}{3}x + \frac{1}{4} = \int_0^1 (x-t)\varphi(t)dt$ est une équation intégrale linéaire de Fredholm de première espèce.
2. $\varphi(x) = \frac{2}{3}x - \frac{1}{3} - \int_0^1 (x-t)\varphi(t)dt$ est une équation intégrale linéaire de Fredholm de seconde espèce.

1.2.2 Les équations intégrales de Volterra

Les équations de Volterra sont des cas particuliers de ceux de Fredholm dans lesquelles le noyau k est tel que :

$$k(x,t) = 0 \qquad \text{pour} \quad t > x$$

avec la limite d'intégration $b = x$.

Définition 1.4 (Les équations intégrales de Volterra)

La forme standard des équations intégrales linéaires de Volterra sont de la forme

$$h(x)\varphi(x) = f(x) + \lambda \int_a^x k(x,t)\varphi(t)dt. \tag{1.4}$$

Comme dans les équations de Fredholm, les équations intégrales de Volterra sont de deux types.

Si la fonction $h(x) = 1$, alors l'équation (1.4) devient tout simplement

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda \int_a^x k(x,t)\varphi(t)dt,$$

et s'appelle l'équation intégrale linéaire de Volterra de seconde espèce.

Si la fonction $h(x) = 0$, alors l'équation (1.4) s'écrit :

$$f(x) + \lambda \int_a^x k(x,t)\varphi(t)dt = 0,$$

cette équation est appelée l'équation intégrale linéaire de Volterra de première espèce.

Exemple 1.3

1. $\varphi(x) = \frac{1}{1+x^2} - \int_0^x \frac{t}{1+x^2}\varphi(t)dt$ *est une équation intégrale linéaire de Volterra de seconde espèce.*

2. $x = \int_0^x \exp(x-t)\varphi(t)dt$ est une équation intégrale linéaire de Volterra de première espèce.

1.3 Equation intégrale linéaire de Volterra de seconde espèce

Définition 1.5 (Equation intégrale linéaire de Volterra de seconde espèce)

Une équation intégrale linéaire de Volterra de seconde espèce est donnée par

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda \int_a^x k(x,t)\varphi(t)dt, \tag{1.5}$$

où φ *est la fonction inconnue.*

Si la fonction $f(x) = 0$, *l'équation(1.5) sécrit comme :*

$$\varphi(x) = \lambda \int_a^x k(x,t)\varphi(t)dt,$$

elle est appelée équation homogène de Volterra de seconde espèce.

Exemple 1.4

1. $\varphi(x) = 1 + \int_0^x \varphi(t)dt$ *est une équation intégrale linéaire de Volterra de seconde espèce.*
2. $\varphi(x) = \int_0^x \varphi(t)dt$ *est une équation homogène de Volterra de seconde espèce.*

Théorème 1.1 (d'existence et unicité)

Si $f \in L_2([a,b])$ *et si le noyau* k *vérifie la condition*

$$\int_a^b \int_a^b \mid k(x,t) \mid^2 dxdt < +\infty \tag{1.6}$$

Alors l'équation

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda \int_a^x k(x,t)\varphi(t)dt,$$

admet une solution unique dans $L_2([a,b])$ *pour tout* $\lambda \in \mathbb{C}$.

La solution peut-être écrite sous la forme

$$\varphi(x) = f(x) + \sum_{n\geq 1} \lambda^n \int_a^x k_n(x,t)f(t)dt,$$

où les noyaux $k_n(x,t)$ vérifient la relation de récurrence

$$k_1(x,t) = k(x,t),$$
$$k_n(x,t) = \int_a^x k(x,s) \int_a^x k_{n-1}(s,t)ds, \quad \textit{pour tout } n \geq 2.$$

Proof.

Posons
$$P(x) = \int_a^x \mid k(x,t) \mid^2 dt \qquad \text{et} \qquad Q(t) = \int_t^b \mid k(x,t) \mid^2 dt$$

par (1.6), P et Q sont des fonctions intégrables, et donc il existe une constante N telle que

$$\int_a^b P(x)dx \leq N \quad \text{et} \quad \int_a^b Q(t)dt \leq N.$$

Soit la fonction ω définie sur $[a,b]$ par

$$\omega(x) = \int_a^x P(t)dt.$$

Il est claire que $0 \leq \omega(x) \leq N$ pour tout $x \in [a,b]$. Considérons l'opérateur

$$(T\varphi)(x) = f(x) + \lambda \int_a^x k(x,t)\varphi(t)dt,$$

alors
$$T^n\varphi = f + \sum_{j=1}^{n} \lambda^j L^j f$$

l'opérateur L^j peut-être écrit sous la forme

$$(L^j g)(x) = \int_a^x k_j(x,t)g(t)dt,$$

où les noyaux k_j sont définis ci-dessus.

En effet, pour $j = 2$ nous avons

$$(L^2 g)(x) = \int_a^x k(x,z) \int_a^z k(z,t) g(t) dt dz.$$

Cette intégrale est une intégrale double sur le domaine triangulaire

$$\{(t,z) : \qquad a \leq t \leq z \quad \text{et} \quad a \leq z \leq x\}.$$

Après changement de l'ordre d'intégration, nous obtenons

$$(L^2 g)(x) = \int_a^x \int_t^x k(x,z) k(z,t) dt.$$

Si nous notons

$$k_2(x,t) = \int_t^x k(x,z) k(z,t) dt,$$

alors par le même raisonnement, nous obtenons

$$(L^2 g)(x) = \int_a^x \int_t^x k(x,z) k_2(z,t) dz g(t) dt,$$

et ainsi de suite.

Par l'inégalité de Cauchy-Schwarz et raisonnement par récurrence, nous obtenons

$$\mid k_j(x,t) \mid^2 \leq P(x) Q(x) \frac{(\omega(x) - \omega(t))^{j-2}}{(j-2)!} \qquad \text{pour tout } j \geq 2.$$

Par conséquent,

$$\begin{aligned}
\mid (T^j \varphi_1)(x) - (T^j \varphi_2)(x) \mid \quad & = \mid \lambda \mid^{2j} \mid \textstyle\int_a^x \mid k_j(x,t)(\varphi_1(x) - \varphi_2(x)) dt \mid^2 \\
& \leq \mid \lambda \mid^{2j} \textstyle\int_a^x P(x) Q(t) \frac{(\omega(x)-\omega(t))^{j-2}}{(j-2)!} dt \int_a^x \mid \varphi_1(x) - \varphi_2(x) \mid^2 dt \\
& \leq \tfrac{|\lambda|^{2j} (\omega(x)-\omega(t))^{j-2}}{(j-2)!} \textstyle\int_a^x Q(t) \parallel \varphi_1 - \varphi_2 \parallel^2 \\
& \leq \tfrac{|\lambda|^{2j} (\omega(x)-\omega(t))^{j-2} N}{(j-2)!} \parallel \varphi_1 - \varphi_2 \parallel^2 .
\end{aligned}$$

En intégrant par rapport à x dans $[a, b]$, nous obtenons

$$\| T^j\varphi_1 - T^j\varphi_2 \|^2 \leq \frac{| \lambda |^{2j} N^j}{(j-2)!} \| \varphi_1 - \varphi_2 \|^2 \quad \text{pour tout } j \geq 2.$$

Par conséquent, puisqu'il existe un $n \geq 2$ tel que

$$\frac{| \lambda |^{2n} N^n}{(n-2)!} < 1,$$

T^n est une contraction. D'après le théorème du point fixe de Banach, l'équation (1.5) a une solution unique qui s'érit sous la forme

$$\lim_{n\to+\infty} T^n\varphi = f + \sum_{j\geq 1} \lambda^j L^j f,$$

ou ce qui est équivalent

$$\varphi(x) = f(x) + \sum_{n\geq 1} \lambda^n \int_a^x k_n(x,t) f(t) dt.$$

■

Exemple 1.5 *Soit l'équation intégrale de Volterra*

$$\varphi(x) = 1 + x^2 + \int_0^x \frac{1+x^2}{1+t^2} \varphi(t) dt, \quad 0 \leq t \leq x \leq 1.$$

On a $\lambda = 1$ *et*

$$k(x,t) = \frac{1+x^2}{1+t^2}.$$

Calculons

$$\int_0^1 \int_0^1 | k(x,t) |^2 \, dxdt = \int_0^1 \int_0^1 \left(\frac{1+x^2}{1+t^2} \right)^2 dxdt \leq 4 < +\infty.$$

D'où, d'après le théorème, l'équation admet une solution unique

$$\begin{aligned}\varphi(x) &= f(x) + \sum_{n\geq 1} \lambda^n \int_a^x k_n(x,t) f(t) dt \\ &= 1 + x^2 + \int_0^x \frac{1+x^2}{1+t^2} e^{(x-t)} (1+t^2) dt \\ &= 1 + x^2 + (1+x^2) e^x \int_0^x e^{-t} dt = (1+x^2) e^x.\end{aligned}$$

1.4 Résolution analytique des équations intégrales de

Volterra

1.4.1 Liason entre les équations différentielles linéaires et les équations intégrales de Volterra

La résolution de l'équation différentielle linéaire

$$\frac{d^n y}{dx^n} + a_1(x) \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + .. + a_n(x) y = F(x) \tag{1.7}$$

à coefficients continus $a_i(x)\,(i = 1, 2, .., n)$ avec les conditions initiales

$$y(0) = C_0, \quad y'(0) = C_1, ..., y^{(n-1)}(0) = C_{n-1} \tag{1.8}$$

peut être remenée à la résolution d'une équation intégrale de Volterra de seconde espèce . Illustrons notre affirmation sur l'exemple de l'équation differetielle du second ordre

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + a_1(x) \frac{dy}{dx} + a_2(x) y = F(x), \tag{1.9}$$

$$y(0) = C_0, \qquad y'(0) = C_1. \tag{1.10}$$

Posons

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \varphi(x). \tag{1.11}$$

D'où, vu les conditions initiales (1.5), on obtient successivement

$$\frac{dy}{dx} = \int_0^x \varphi(t)\,dt + C_1, \qquad y = \int_0^x (x-t)\,\varphi(t)\,dt + C_1 x + C_0. \tag{1.12}$$

Nous avons utilisé la formule

$$\int_a^x \int_a^x ... \int_a^x f(x)dxdx...dx = \frac{1}{(n-1)!}\int_a^x (x-z)^{n-1} f(z)dz, \tag{1.13}$$

compte tenu de(1.11) et(1.12) mettons l'équation différentielle sous la forme

$$\varphi(t) + \int_0^x a_1(x)\varphi(t)\,dt + C_1 a_1(x)dt + \int_0^x a_2(x)\,(x-t)\,\varphi(t)\,dt + C_1 x a_2(x) + C_0 a_2(x) = F(x), \tag{1.14}$$

où

$$\varphi(t) + \int_0^x [a_1(x) + a_2(x)(x-t)]\,\varphi(t)dt = F(x) - C_1 a_1(x) - C_1 x a_2(x) - C_0 a_1(x). \tag{1.15}$$

Posant

$$k(x,t) = -\left[a_1(x) + a_2(x)(x-t)\right], \tag{1.16}$$

$$f(x) = F(x) - C_1 a_1(x) - C_1 x a_2(x) - C_0 a_1(x), \tag{1.17}$$

nous ramenons l'équation à la forme suivante :

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda \int_a^x k(x,t)\varphi(t)dt, \tag{1.18}$$

c'est-à-dire nous obtenons une équation intégrale de Volterra de seconde espéce.

Exemple 1.6

Former l'équation intégrale correspondante à l'équation différentielle

$$y'' + xy' + y = 0$$

Avec

$$y(0) = 1, \qquad y^{'}(0) = 0,$$

Solution 1

posons

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \varphi\left(x\right), \tag{1.19}$$

Alors

$$\frac{dy}{dx} = \int_0^x \varphi(t)dt + y^{'}(0) = \int_0^x \varphi(t)dt, \quad y = \int_0^x (x-t)\varphi(t)dt + 1. \tag{1.20}$$

Portons (1.19) et (1.20) dans l'équation différentielle donnée, il vient :

$$\varphi(x) = -1 - \int_0^x (2x-t)\varphi(t)dt,$$

1.4.2 Méthode de Résolvante

Soit l'équation intégrale linéaire de Volterra de seconde espèce

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda \int_0^x k(x,t)\varphi(t)dt,$$

où $K(x,t)$ est une fonction continue pour $0 \leq t \leq x \leq a$,et $f(x)$ est continue lorsque $0 \leq x \leq a$.

Cherchons la solution de cette équation sous la forme d'une série entière suivant les puissances λ :

$$\varphi(x) = \varphi_0(x) + \lambda\varphi_1(x) + \lambda^2\varphi_2(x) + ... + \lambda^n\varphi_n(x) + ... \tag{1.21}$$

Portons formellement cette série dans l'équation, il vient

$$\begin{aligned} &\varphi_0(x) + \lambda\varphi_1(x) + \lambda^2\varphi_2(x) + \quad + \lambda^n\varphi_n(x) + ... \\ &= f(x) + \lambda \int_0^x K(x,t)\left[\varphi_0(x) + \lambda\varphi_1(x) + \lambda^2\varphi_2(x) + ... + \lambda^n\varphi_n(x) + ...\right] dt. \end{aligned}$$

En procédant par identification, nous obtenons

$$\begin{aligned}
\varphi_0(x) &= f(x), \qquad (1.22)\\
\varphi_1(x) &= \int_0^x k(x,t)\varphi_0(x)dt = \int_0^x k(x,t)f(t)dt,\\
\varphi_2(x) &= \int_0^x k(x,t)\left[\int_0^t k(t,t_1)f(t_1)dt_1\right]dt,\\
&= \int_0^x f(t_1)dt_1 \int_{t1}^x k(x,t)k(t,t_1)dt,\\
&= \int_0^x k_2(x,t_1)f(t_1)dt_1,
\end{aligned}$$

Où

$$k_2(x,t) = \int_{t1}^x k(x,t)k(t,t_1)dt.$$

On établit de façon analogue qu'en général

$$\varphi_n(x) = \int_0^x k_n(x,t)f(t)dt, n = 1,2,... \qquad (1.23)$$

Les fonctions $K_n(x,t)$ s'appellent noyaux itérés et sont définis, on le montre aisément , par les formules de récurrence

$$k_1(x,t) = k(x,t),$$

$$k_{n+1}(x,t) = \int_t^x k(x,z)k_n(z,t)dz, n = 1,2,... \qquad (1.24)$$

Compte tenu de (1.23) et (1.24) l'égalité (1.21) peut s'écrire

$$\varphi(x) = f(x) + \sum_{\nu=0}^{+\infty} \lambda^\nu \int_0^x k_\nu(x,t)f(t)dt.$$

Une fonction $R(x,t;\lambda)$ définie par la série

$$R(x,t;\lambda) = \sum_{\nu=0}^{+\infty} \lambda^\nu k_{\nu+1}(x,t),$$

est la résolvante de l'équation intégrale de Volterra.

Si le noyau $K(x,t)$ est continu, la série converge absolument et uniformément .

Les noyaux itérés et la résolvante sont indépendants de la limite inférieure de l'intégrale dans l'équation intégrale.

Exemple 1.7

Trouver la résolvante de l'équation intégrale de Volterra à noyau $k(x,t) = 1$.

On a

$$k_1(x,t) = k(x,t)$$

Conformément aux formules

$$\begin{aligned}
k_2(x,t) &= \int_t^x k(x,z)k_1(z,t)dz \\
&= \int_t^x dz = (x-t), \\
k_3(x,t) &= \int_t^x k(x,z)k_2(z,t)dz \\
&= \int_t^x 1.(z-t)dz = \frac{(x-t)^2}{2!}, \\
k_4(x,t) &= \int_t^x k(x,z)k_3(z,t)dz \\
&= \int_t^x 1.\frac{(z-t)^2}{2!}dz = \frac{(x-t)^3}{3!}, \\
&\vdots \\
k_n(x,t) &= \int_t^x 1 \times k_{n-1}(z,t)dz \\
&= \int_t^x \frac{(z-t)^{n-2}}{(n-2)!}dz = \frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!}
\end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned}
R(x,t;\lambda) &= \sum_{n=0}^{+\infty} \lambda^n k_{n+1}(x,t) \\
&= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\lambda^n (x-t)^n}{n!} = e^{\lambda(x-t)}.
\end{aligned}$$

Exemple 1.8

Résoudre l'équation intégrale de Volterra par la méthode de la résolvante

$$\varphi(x) = 1 + x^2 + \int_0^x \frac{1+x^2}{1+t^2}\varphi(t)dt$$

On a

$$k_1(x,t) = k(x,t) = \frac{1+x^2}{1+t^2}$$

$$\begin{aligned}
k_2(x,t) &= \int_t^x k(x,z)K_1(z,t)dz \\
&= \int_t^x \frac{1+x^2}{1+z^2}\frac{1+z^2}{1+t^2}dz = \frac{1+x^2}{1+t^2}(x-t) \\
k_3(x,t) &= \int_t^x k(x,z)k_2(z,t)dz \\
&= \int_t^x \frac{1+x^2}{1+z^2}\frac{1+z^2}{1+t^2}(z-t)dz = \frac{1+x^2}{1+t^2}\frac{(x-t)^2}{2!} \\
k_4(x,t) &= \int_t^x k(x,z)K_3(z,t)dz \\
&= \int_t^x \frac{1+x^2}{1+z^2}\frac{1+z^2}{1+t^2}\frac{(z-t)^2}{2!}dz = \frac{1+x^2}{1+t^2}\frac{(x-t)^3}{3!} \\
&\vdots \\
k_n(x,t) &= \int_t^x k(x,t)K_{n-1}(z,t)dz \\
&= \int_t^x \frac{1+x^2}{1+z^2}\frac{1+z^2}{1+t^2}\frac{(z-t)^{n-2}}{(n-2)!}dz = \frac{1+x^2}{1+t^2}\frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!}
\end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned}
R(x,t;\lambda) &= \sum_{n=0}^{+\infty} \lambda^n k_{n+1}(x,t) \\
&= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1+x^2}{1+t^2}\frac{(x-t)^n}{n!} = \frac{1+x^2}{1+t^2}e^{(x-t)}
\end{aligned}$$

La solution est

$$\varphi(x) = 1 + x^2 + \int_0^x \frac{1+x^2}{1+t^2}e^{(x-t)}(1+t^2)dt = 1 + x^2 + (1+x^2)e^x\int_0^x e^{-t}dt = (1+x^2)e^x$$

1.4.3 La méthode de décomposition d'Adomian

La méthode de décomposition Adomien consiste à décomposer la fonction inconnue $\varphi(x)$ de toute équation en une somme d'un nombre infini de composantes définies par la série de décomposition.

$$\varphi(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \varphi_n(x), \tag{1.25}$$

En plaçant cette série dans l'équation (1.5), il vient

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \varphi_n(x) = f(x) + \int_0^x k(x,t)(\sum_{n=0}^{+\infty} \varphi_n(t))dt,$$
$$\varphi_0(x) + \varphi_1(x) + ... = f(x) + \int_0^x k(x,t)(\varphi_0(t) + \varphi_1(x) + ...)dt$$

La composante zéro $\varphi_0(x)$ est identifiée par tous les termes qui ne sont pas inclus dans le signe intégral.

Par conséquent, les composantes $\varphi_j(x)$, $j \geq 1$ de la fonction inconnue $\varphi(x)$ sont complètement déterminées en définissant la relation de récurrence :

$$\varphi_0(x) = f(x),$$
$$\varphi_{n+1}(x) = \int_0^x k(x,t)\varphi_n(t)dt, \quad n \geq 0,$$

l'équation (1.5) sous forme de série s'obtient facilement en utilisant l'hypothèse de série décrite en (1.25) On voit clairement que la méthode de décomposition convertissait l'équation intégrale en une détermination élégante de composants calculables.

Exemple 1.9

Résoudre l'équation intégrale de Volterra suivante :

$$\varphi(x) = 1 - \int_0^x \varphi(t)dt. \tag{1.26}$$

Substituer la décomposition série (1.25) sur les deux côtés de (1.26) donne :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \varphi_n(x) = 1 - \int_0^x (\sum_{n=0}^{+\infty} \varphi_n(t))dt$$
$$\varphi_0(x) + \varphi_1(x) + ... = 1 - \int_0^x (\varphi_0(t) + \varphi_1(t) + ...)dt$$

on a :

$$\varphi_0(x) = 1,$$
$$\varphi_{n+1}(x) = -\int_0^x \varphi_n(t)dt, \quad n \geq 0$$

$$\varphi_1(x) = -\int_0^x \varphi_0(t)dt = -\int_0^x 1dt = -x,$$
$$\varphi_2(x) = -\int_0^x \varphi_1(x)dt = -\int_0^x (-t)dt = \frac{1}{2!}x^2,$$
$$\varphi_3(x) = -\int_0^x \varphi_2(x)dt = -\frac{1}{2!}\int_0^x tdt = -\frac{1}{3!}x^3,$$
$$\vdots$$

donc :

$$\varphi(x) = 1 - x + \frac{1}{2!}x^2 - \frac{1}{3!}x^3 + ...$$

et par conséquent la solution exacte est donnée par

$$\varphi(x) = \exp(-x).$$

Exemple 1.10

considérons ici l'équation intégrale de Volterra

$$\varphi(x) = 6x - x^3 + \frac{1}{2}\int_0^x t\varphi(t)dt$$

En appliquant la technique de décomposition décrite précédemment, nous trouvons

$$\begin{aligned}
\varphi_0(x) &= 6x - x^3 \\
\varphi_1(x) &= \frac{1}{2}\int_0^x t\varphi_0(t)dt \\
&= \frac{1}{2}\int_0^x t(6t - t^3)dt = x^3 - \frac{1}{10}x^5 \\
\varphi_2(x) &= \frac{1}{2}\int_0^x t\varphi_1(xt)dt \\
&= \frac{1}{2}\int_0^x t(t^3 - \frac{1}{10}t^5)dt = \frac{1}{10}x^5 - \frac{1}{140}x^7 \\
&\vdots
\end{aligned}$$

d'où la solution de l'équation

$$\begin{aligned}
\varphi(x) &= 6x - x^3 + x^3 - \frac{1}{10}x^5 + \frac{1}{10}x^5 - \frac{1}{140}x^7 + ... \\
&= 6x.
\end{aligned}$$

Chapitre 2

Méthode de BOUBNOV-GALERKINE et résolution numérique des équations intégrales linéaires de VOLTERRA de seconde espèce

Il ya plusieurs méthodes numériques pour résoudre des équations intégrales de Volterra de seconde espèce par exemple (la méthode de Simpson , la méthode des trapèzes ...). Dans ce chapitre on va étudier la méthode de Galerkine.

La méthode de Galerkine est une méthode très générale. L'idée de la méthode est la suivante : partant d'un problème posé dans un espace de dimension infinie, on procède d'abord à une approximation dans une suite croissante de sous-espaces de dimension finie.

La méthode de Galerkine consiste donc, à chercher une approximation de la solution sur une base d'un espace d'approximation choisi.

2.1 Polynômes orthogonaux

2.1.1 Généralités

Rappelons d'abord que nous travaillons dans l'espace de Hilbert

$$L_2([a,b]) := \left\{ f : [a,b] \to \mathbb{R}/f \text{ mesurable}, \parallel f \parallel_2 = \left(\int_a^b |f(x)|^2 \, dx \right)^{1/2} < +\infty \right\}$$

de norme $\parallel \cdot \parallel_2$induite par le produit scalaire

$$(f,g) = \int_a^b f(x)g(x)dx.$$

2.1.2 Quelque propriétés de l'espace $L_2([a,b])$:

1. $L_2([a,b])$ est un espace vectoriel normé complet dont la norme est issue de produit scalare.
2. l'inégalité de Cauchy-Schwarz :

$$| \ (f,g) \ | \leq \parallel f \parallel \parallel g \parallel .$$

Définition 2.1 (Polynômes orthogonaux)

On dit qu'une suite de polynômes $P_0(x), P_1(x), P_2(x), ...,$ où $P_n(x)$ est de degré n, est othogonale si

$$(P_n, P_m) = \int_a^b P_n(x)P_m(x)dx = 0, \ \ \forall n \neq m.$$

Une telle suite forme évidemment une base orthogonale de l'espace des polynômes et il est bien connu qu'étant donné un produit scalaire fixé, nous pouvons en construire une, en appliquant le procédé de Gram-Schmidt à la base canonique des polynômes, à savoir $\{1, x, x^2, x^3, ...\}$.

2.1.3 Orthogonalité

Définition 2.2 (Orthogonalité)

on dit que la famille de polynômes $(\varphi_i)_{i\geq 0}$ *à coefficients réels est une famille de polynômes orthogonaux sur* $[a,b]$ *si quelque soit* $i \neq j$ *on a*

$$\langle \varphi_i, \varphi_j \rangle = \int_a^b \varphi_i(x)\varphi_j(x)dx = 0$$

généralement on dit que la famille de polynômes $(\varphi_i)_{i\geq 0}$ *est une famille de polynômes orthogonaux sur* $[a,b]$ *avec poids* w *si*

$$\langle \varphi_i, \varphi_j \rangle_w = \int_a^b \varphi_i(x)\varphi_j(x)w(x)dx = 0,\ \forall i \neq j$$

la famille $(\varphi_i)_{i\geq 0}$ *est orthonormale si*

$$\langle \varphi_i, \varphi_j \rangle_w = \begin{cases} 0 \ si \ i \neq j \\ 1 \ si \ i = j \end{cases}.$$

2.2 Polynômes de Tchebychev de première espèce T_n

Les polynômes de Tchebychev de première espèce donnés par la formule suivante

$$T_n(x) = \frac{n}{2}\sum_{m=0}^{[n/2]}(-1)^m \frac{(n-m-1)!}{m!(n-2m)!}(2x)^{n-2m},$$

les premiers polynômes sont

$$T_0(x) = 1,$$

$$T_1(x) = x,$$

$$T_2(x) = 2x^2 - 1,$$

$$T_3(x) = 4x^3 - 3x.$$

2.2.1 Quelques propriétés :

1. T_n satisfait la relation de récurrence

$$\begin{cases} T_{n+1}(x) = 2xT_n(x) - T_{n-1}(x) & \\ T_0(x) = 1 & \forall n \geq 1 \\ T_1(x) = x & \end{cases}$$

2. Equation différentielle

$$(1 - x^2)T_n'' - xT_n' + n^2 T_n = 0.$$

3. Les polynômes T_n orthgonaux sur $L_2(]-1, 1[, w(x)dx)$ avec $w(x)$définie

$$w(x) = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}},$$

et sont normalisés par l'exigence que $T_n(1) = 1$.

2.3 Polynômes de Tchebychev de seconde espèce V_n

Polynômes de Tchebychev de seconde espèce V_n donnés par la formule suivante

$$V_n(x) = \sum_{m=0}^{[n/2]} (-1)^m \frac{(m - n)!}{m!(n - 2m)!} (2x)^{n-2m},$$

les premiers polynômes sont

$$V_0(x) = 1,$$

$$V_1(x) = 2x,$$

$$V_2(x) = 4x^2 - 1,$$

$$V_3(x) = 8x^3 - 4x.$$

2.3.1 Quelques propriétés :

1. V_n satisfait la relation de récurrence

$$\begin{cases} V_{n+1}(x) = 2xV_n(x) - V_{n-1}(x) \\ V_0(x) = 1 & \forall n \geq 1 \\ V_1(x) = 2x \end{cases}$$

2. Equation différentielle

$$(1-x^2)V_n'' - 3xV_n' + n(n+2)V_n = 0$$

3. Les polynômes V_n orthgonaux sur $L_2([-1,1], \sqrt{1-x^2}dx)$.

2.4 Polynômes de Legendre L_n

les Polynômes de Legendre $L_n(x)$ sont donnés par

$$L_n(x) = \frac{(-1)^n}{2^n n!}\frac{d^n}{dx^n}\left\{(1-x^2)^n\right\}.$$

les premiers polynômes sont

$$\begin{aligned} L_0(x) &= 1, \\ L_1(x) &= x, \\ L_2(x) &= \frac{1}{2}(3x^2-1), \\ L_3(x) &= \frac{1}{2}(5x^2-3x). \end{aligned}$$

2.4.1 Quelque propriétés :

1. les polynômes de Legendre satisfont la relation de récurrence

$$(1-x^2)L_n(x) = -nxL_n(x) - nL_{n-1}(x)$$

2. L'équation différentielle

$$(1-x^2)y'' - 2xy' + n(n+1)y = 0$$

3. l'orthogonalité des polynômes de Legendre sur $L_2([1;1];dx)$.

2.5 Polynômes de Laguerre l_n

Les polynômes de Laguerre l_n de degré n sont donnés par

$$\not{l}_n(x) = \frac{\exp(x)}{n!}\frac{d^n}{dx^n}\left[\exp(-x)x^n\right].$$

Les premiers de ces polynômes sont

$$\begin{aligned}
\not{l}_0(x) &= 1, \\
\not{l}_1(x) &= -x+1, \\
\not{l}_0(x) &= \frac{1}{2}(x^2-4x+2), \\
\not{l}_3(x) &= \frac{1}{6}(-x^3+9x^2-18x+6).
\end{aligned}$$

2.5.1 Quelque propriétés :

1. La norme des polynômes Laguerre

$$\| l_n \| = 1.$$

2. L'équation différentielle

$$xl''(x) + (1-x)l'_n(x) + n \, l_n(x) = 0.$$

3. aussi est une base orthonormée sur $L_2([-1,1], dx)$.

2.6 Polynômes d'Hermite H_n

les Polynômes de base d'Hermite $H_n(x)$ de degré n et sont définis par

$$H_n(x) = (-1)^n \exp(x^2) \frac{d^n}{dx^n}(\exp(-x^2), \qquad n = 0, 1, 2, 3, ...$$

On trouve ainisi les premiers de ces polynômes sur l'intervalle $[-1;1]$

$$H_0(x) = 1,$$

$$H_1(x) = 2x,$$

$$H_2(x) = 4x^2 - 2,$$

$$H_3(x) = 8x^2 - 12.$$

2.6.1 Quelques propriétès :

1. La propriété de la relation de récurrence

$$H_{n+1}(x) = 2xH_n(x) - 2xH_{n-1}(x).$$

2. L'équation différentielle

$$H''_n(x) - 2xH'_n(x) + 2nH_n(x) = 0.$$

3. Aussi est une base orthonormée sur $L_2([-1,1], exp(-x^2)dx)$.

2.7 Méthode de Boubnov-Galerkine

Soit l'équation intégrale de Volterra de seconde espèce

$$\varphi(x) - \lambda \int_a^x k(x,t)\varphi(t)dt = f(x). \tag{2.1}$$

Pour chercher une solution approchée de l'équation intégrale (2.1) par la méthode de Boubnov-Galerkine dans $L^2([a,b])$.

On choisit un système de fonctions, $\{\psi_n(x)\}$ complet dans $L_2([a,b])$ et tel que quelque soit n les fonctions $\{\psi_1(x), \psi_2(x), ...\}$ soient linéairement indépendantes, et on cherche une solution approchée $\tilde{\varphi}(x)$ de la forme

$$\tilde{\varphi}(x) = \sum_{i=1}^{n} c_i \psi_i(x). \tag{2.2}$$

Les coefficients $c_i (i = 1, 2, 3, ...)$ se définissent à partir du système linéaire

$$\left(\tilde{\varphi}(x) - \lambda \int_a^x k(x,t)\tilde{\varphi}(t)dt, \psi_j\right) = (f, \psi_j), \quad j = 1, ..., n \tag{2.3}$$

$$\int_a^b (\tilde{\varphi}(x) - \lambda \int_a^x k(x,t)\tilde{\varphi}(t)dt)\psi_j(x)dx = \int_a^b f(x)\psi_j(x)dx, \quad j = 1, ..., n$$

$$\sum_{i=1}^{n} c_i \left(\int_a^b (\psi_i(x) - \lambda \int_a^x k(x,t)\psi_i(x)dt)\psi_j(x)dx\right) = \int_a^b f(x)\psi_j(x)dx, \quad j = 1, ..., n$$

ou sous forme matricielle

$$MC = B$$

avec

$$M_{ji} = \left(\int_a^b (\psi_i(x) - \lambda \int_a^x k(x,t)\psi_i(x)dt)\psi_j(x)dx\right)$$

$$C =^t (c_1, c_2, ..., c_n)$$

$$B =^t \left(\int_a^b f(x)\psi_1(x)dx, \int_a^b f(x)\psi_2(x)dx, ..., \int_a^b f(x)\psi_3(x)dx\right).$$

Si la valeur de λ dans (2.1) n'est pas un nombre caractéristique ($1/\lambda$)n'est pas valeur propre), alors pour n suffisamment grand, le système (2.3) admet une solution unique, et lorsque $n \to \infty$, la solution approchée $\widetilde{\varphi}(x)$ de (2.2) tend ,dans la métrique de $L_2(a,b)$,vers la solution exacte $\varphi(x)$ de l'équation (2.1).

2.7.1 Equation de Galerkine

soit l'équation intégrale de Volterra de seconde espèce

$$\varphi(x) + \int_0^x K(x,t)\varphi(t)dt = f(x) \tag{2.4}$$

Nous utilisons maintenant la méthode de Galerkine pour trouver une solution approximative de l'équation (2.4).

Soit l'approximant défini en équation (2.2), où $\psi_i(x)$ sont des polynômes orthogonaux de degré i construit , c_i sont les paramètres inconnus à déterminer et n est le nombre de polynômes.

Maintenant , en substituant l'équation (2.2) à l'équation (2.4), nous obtenons

$$\sum_{i=0}^{n} c_i \left[\psi_i(x) + \int_0^x K(x,t)\psi_i(t)dt\right] = f(x), 0 \leq x \leq b \tag{2.5}$$

On obtient l'équation de Galerkine en multipliant les deux côtés de l'équation (2.5) par $\psi_j(x)$, puis en intégrant par rapport à x de 0 à b on obtient

$$\sum_{i=0}^{n} c_i \left[\int_0^b \left[\psi_i(x) + \int_0^x K(x,t)\psi_i(t)dt\right] \psi_j(x)dx\right] = \int_0^b f(x)\psi_j(x)dx, \quad j = 0,1,...,n. \tag{2.6}$$

L'équation (2.6) s'écrit sous forme matricielle

$$AC = B.$$

Où les éléments de A , C et B sont respectivement a_{ij}, c_i et b_j, donnés par

$$a_{ij} = \left[\int_a^b \left[\psi_i(x) + \int_0^x K(x,t)\psi_i(t)dt\right]\psi_j(x)dx\right], i,j = 0...n$$
$$C =^t [c_0, c_1, ..., c_n]$$
$$B =^t [b_0, b_1, ..., b_n] =^t \left[\int_a^b f(x)\psi_0(x)dx, \int_a^b f(x)\psi_1(x)dx, ..., \int_a^b f(x)\psi_n(x)dx\right]$$

Maintenant, les paramètres inconnus sont déterminés avec un solveur, qui dans ce cas est la méthode d'élimination de Gauss, et en substituant ces paramètres dans l'équation (2.2), nous obtenons la solution approximative $\widetilde{\varphi}(x)$ de l'équation intégrale (2.1).

L'erreur absolue pour cette formulation est définie par l'erreur absolue

$$\mid \varphi(x) - \widetilde{\varphi}(x) \mid$$

2.8 Polynômes d'Hermite

$$\tilde{\varphi}(x) = \sum_{i=0}^{n} c_i H_i(x)$$

où c_i sont des paramètres inconnus à déterminer et $H_i(x)$ sont des polynômes Hermite de degré i.

ona

$$\sum_{i=0}^{n} c_i H_i(x) + \sum_{i=0}^{n} c_i \int_0^x k(x,t)H_i(t)dt = f(x), \quad 0 \leq x \leq b$$

alors les équations de Galerkine sont obtenues en multipliant les deux côtés par $H_j(x)_{j=0,1,2,...}$ et en intégrant par rapport à x de a à b nous avons

$$\sum_{i=0}^{n} c_i \left[\int_0^b \left[H_i(x) + \int_0^x K(x,t)H_i(t)dt\right] H_j(x)dx\right] = \int_0^b f(x)H_j(x)dx, \;\; j = 0, 1, ..., n \quad (2.7)$$

L'équation (2.7) est écrite sous forme matricielle

$$AC = B$$

Où les éléments de A , C et B sont respectivement a_{ij}, c_i et b_j, donnés par

$$a_{ji} = \left[\int_0^b \left[H_i(x) + \int_0^x K(x,t)H_i(t)dt\right] H_j(x)dx\right], i, j = 0, 1, 2, ...n \tag{2.8}$$
$$C =^t [c_0, c_1, ..., c_n]$$
$$B =^t [b_0, b_1, ..., b_n] =^t \left[\int_a^b f(x)\psi_0(x)dx, \int_a^b f(x)\psi_1(x)dx, ..., \int_a^b f(x)\psi_n(x)dx\right]$$

les paramètres inconnus c_i sont déterminés en résolvant le système d'équations (2.8) et en substituant ces valeurs de paramètres dans la solution approximative $\tilde{\varphi}(x)$ de l'équation intégrale de Volterra de seconde espèce . L'erreur absolue maximale pour cette formulation est définie par Erreur absolueabsolue maximale.

2.8.1 Quelques exemples illustratifs

Exemple 2.1 ***Exemple 2.2***

Considérons l'équation intégrale linéaire de Volterra

$$\varphi(x) = \exp(x) + \int_0^x \varphi(t)dt, 0 \leq x \leq 1 \tag{2.9}$$

on a

$$f(x) = \exp(x) \in L_2([a, b])$$

et

$$\int_0^1 \int_0^1 \mid k(x,t) \mid^2 dxdt = \int_0^1 \int_0^1 \mid 1 \mid^2 dxdt = 1 < +\infty$$

D'après le théorème (d'existence et d'unicité) l'équation (2.9) admet une solution unique.

La solution exacte est $\varphi(x) = \exp(x)(1 + x)$.

La solution approchée $\tilde{\varphi}(x)$ *de la solution exacte* $\varphi(x)$ *est obtenue par la méthode de Boubnov-*

Galerkine avec la base de polynômes d'Hermite

Valeurs de x	Solution exacte	Solution approché	erreur
0.1	1.2156880	1.2195241	3.1554644×10^{-3}
0.2	1.4656833	1.4751065	6.4292004×10^{-3}
0.3	1.7548164	1.7588963	2.3249705×10^{-3}
0.4	2.0885546	2.0851736	2.0851736×10^{-3}
0.5	2.4730819	2.4657102	2.9807812×10^{-3}
0.6	2.9153901	2.9097705	1.9275531×10^{-3}
0.7	3.4233796	3.4241110	2.1363950×10^{-4}
0.8	4.0059737	4.0129802	1.7490223×10^{-3}
0.9	4.6732459	4.6781190	1.0427730×10^{-3}
1.0	5.4365637	4.6781190	3.2747089×10^{-3}

TAB. 2.1 – Comparaison entre la solution approchée et la solution exacte de exemple (1) pour n=4

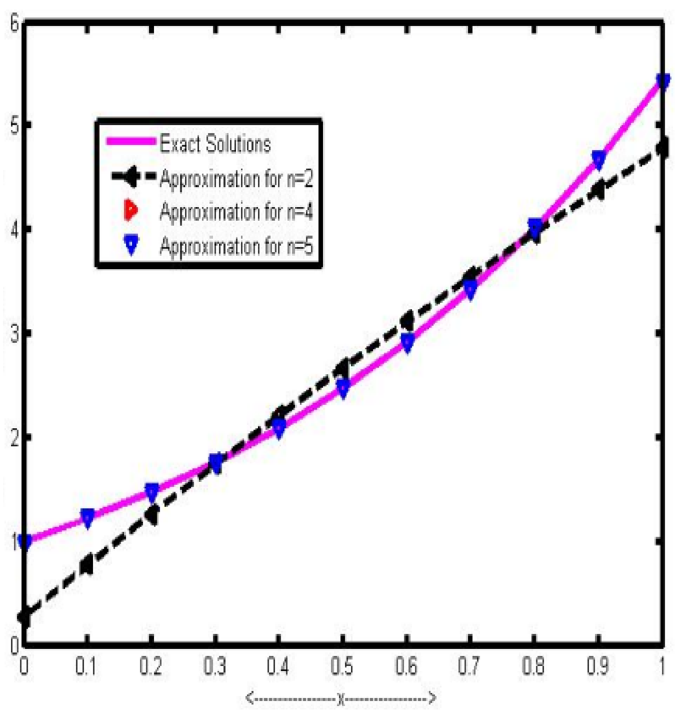

FIG. 2.1 – Comparaison entre la solution exacte et la solution approchée de l'équation (2.9)

Exemple 2.3 ***Exemple 2.4***

Soit l'équation de Volterra suivante

$$\varphi(x) + 4\int_0^x (x-t)\varphi(t)dt = \sin(x) \tag{2.10}$$

on a

$$f(x) = \sin(x) \in L_2([a,b])$$

et

$$\begin{aligned} \int_0^1 \int_0^1 \mid k(x,t) \mid^2 dxdt = \int_0^1 \int_0^1 \mid (x-t) \mid^2 dxdt \quad &\leq \int_0^1 \int_0^1 (\mid x \mid + \mid t \mid)^2 dxdt \\ &\leq \int_0^1 \int_0^1 (1+1)^2 dxdt = 4 < +\infty \end{aligned}$$

D'après le théorème (d'existence et d'unicité) l'équation (2.10) admet une solution.unique.

La solution exacte de cette équation est $\varphi(x) = -\frac{\sin(x)}{3} + 2\frac{\sin(2x)}{3}$.

La solution approchée $\widetilde{\varphi}$ *de la solution exacte* $\varphi(x)$ *est obtenue par la solution du système d'équations linéaires pour* $n = 10$.

Valeurs de x	Solution exacte	Solution approchée	erreur
0.0	0.000000	-0.000080	8.00000×10^{-5}
0.1	0.401172	0.401110	6.250784×10^{-5}
0.2	0.325708	0.325790	8.229998×10^{-5}
0.3	-0.238418	-0.238494	7.529785×10^{-5}
0.4	-0.807634	-0.807616	1.838216×10^{-5}
0.5	-0.838774	-0.838693	8.027353×10^{-5}
0.6	-0.233317	-0.233450	1.332026×10^{-4}
0.7	0.554919	0.555063	1.444095×10^{-4}
0.8	0.911840	0.911721	1.189399×10^{-4}
0.9	0.600589	0.600698	1.093523×10^{-4}

Tab. 2.2 – Comparaison entre la solution approchée et la solution exacte de exemple (2)

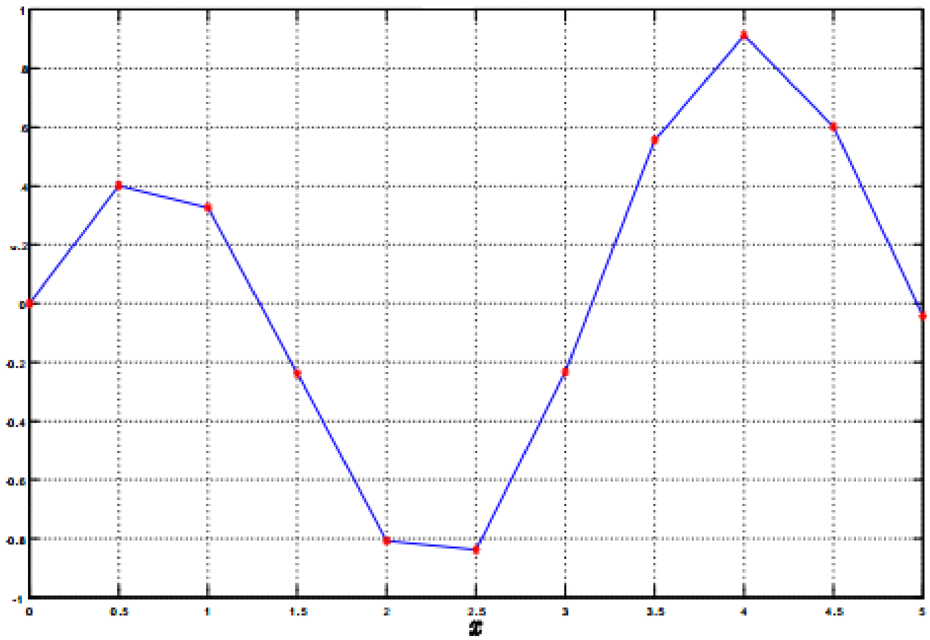

FIG. 2.2 – Comparaison entre la solution exacte et la solution approchée de l'équation (2.10) telque, les points représent la solution approchée.

Exemple 2.5

Considére l'équation intégrale de Volterra

$$\varphi(x) = x + \int_0^x (t-x)\varphi(t)dt \tag{2.11}$$

on a

$$f(x) = x \in L_2([a,b])$$

et

$$\begin{aligned} \int_0^1 \int_0^1 \mid k(x,t) \mid^2 dxdt = \int_0^1 \int_0^1 \mid (t-x) \mid^2 dxdt \quad &\leq \int_0^1 \int_0^1 (\mid t \mid + \mid x \mid)^2 dxdt \\ &\leq \int_0^1 \int_0^1 (1+1)^2 dxdt = 4 < +\infty \end{aligned}$$

D'après le théorème (d'existence et d'unicité) l'équation (2.11) admet une solution.unique.

La solution exacte est $\varphi(x) = \sin(x)$.

En prenant différentes valeurs de n, *les solutions numériques sont présentées dans le tableau (3)*

Il a été observé que si nous augmentons le degré de frontière à Tchebychev, l'erreur sera réduite .

Valeurs de x	$n = 3$	$n = 6$	$n = 20$	$n = 30$	$n = 50$
0	1.88×10^{-3}	1.06×10^{-6}	1.49×10^{-28}	5.13×10^{-47}	7.19×10^{-88}
1	7.23×10^{-4}	8.57×10^{-8}	0.00×10^{0}	0.00×10^{0}	1.00×10^{-11}
2	1.21×10^{-4}	2.68×10^{-8}	0.00×10^{0}	0.00×10^{0}	1.00×10^{-10}
3	1.06×10^{-4}	9.70×10^{-9}	0.00×10^{0}	0.00×10^{0}	0.00×10^{0}
4	1.25×10^{-4}	1.41×10^{-8}	0.00×10^{0}	0.00×10^{0}	1.00×10^{-10}
5	6.91×10^{-5}	2.28×10^{-8}	0.00×10^{0}	0.00×10^{0}	1.00×10^{-10}
6	3.19×10^{-5}	2.28×10^{-8}	0.00×10^{0}	0.00×10^{0}	0.00×10^{0}
7	6.15×10^{-5}	2.69×10^{-8}	0.00×10^{0}	0.00×10^{0}	0.00×10^{0}
8	1.48×10^{-4}	3.57×10^{-8}	0.00×10^{0}	0.00×10^{0}	0.00×10^{0}

TAB. 2.3 – L'erreur absolue de exemple (3) pour n=3, n=6, n=20, n=30, n=50

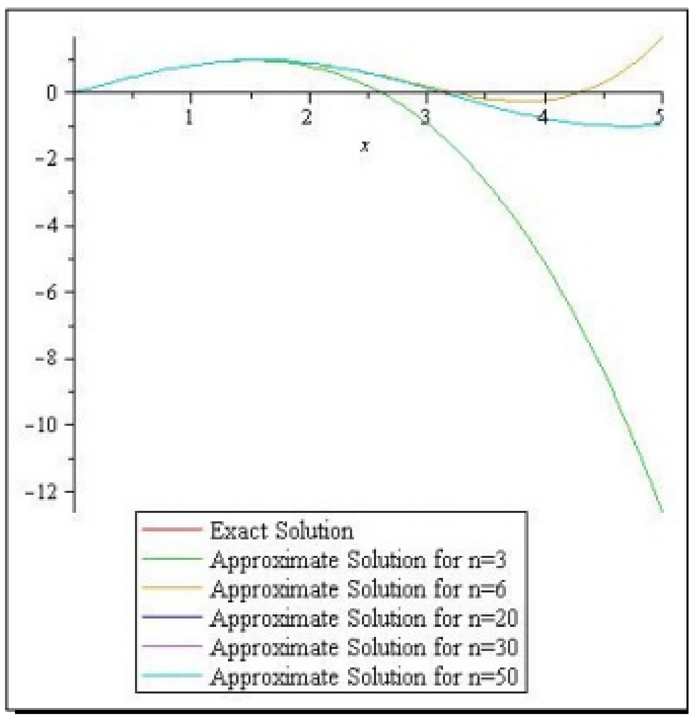

FIG. 2.3 – Comparaison entre la solution exacte et la solution approchée de l'équation (2.11)

Conclusion

Dans ce travail nous avons traité la méthode de Galerkine pour résoudre des équations intégrales de Volterra. Le but de ce travail est de voir la performance de cette méthode en approximation de la solution exacte par des polynômes orthogonaux.

Nous avons présenté quelques méthodes analytiques pour résoudre les équations intégrales linéaires de Volterra de seconde espèce .

Nous avons utilisé une méthode numérique de Galerkine en utilisant les polynômes orthogonaux comme (polynômes d'Hermite, polynômes de Legendre ...).

Bibliographie

[1] A-M WazWaz, A First Course In Integrals,Saint Xavier University, USA.

[2] M. KRASNOV., A. KISSELEV., G. MAKARENKO, EQUATIONS INTEGRALES PROMLEMES ET EXERCICES,MIR MOSCOU.

[3] M. DILMI, Sur la convergence des méthodes spectrales pour les équations intégrales, Thèse de Doctorat,Université de M'sila, 2018.

[4] V. Ludovic, Généralités sur les polynômes orthogonaux, DEA Polynômes orthogonaux, 2000.

[5] F. Aliouane, Fonctions spéciales pour les équations différentielles, Polycopié de cours, Université de Jijel, $2017 - 2018$.

[6] A. Mumtaz, T.Bushra, A Novel Approach to Estimate Solution of Volterra Integral Equations, University of Sargodha, Pakistan, 2018.

[7] B. Lakehali, Sur les Equations Intégrales Singulières, Thèse de Doctorat, Université de Biskra, 2016.

[8] I. Sehili, Méthodes spectrales pour les problèmes aux limites, Thèse de Doctorat, Université de Biskra, 2018.

[9] James E. Mamadu, Ignatius N. Njoseh, Numerical solutions of Volterra Integral Equations using Galerkin Method With Certain Orthogonal Polynomials,University of Ilorin,Ilorin,Nigeria,2016.

[10] M.M.Rahman, Numerical Solutions of Volterra Integral Equations Using Galerkin method With Hermite Polynomials, Islamic University Kuchita ,Bangladesh, 2013.

[11] S.Halmat., A. Hachana.,N. Houili, Equations intégrales linéaires de Volterra de seconde espèce, Mémoire de Licence, Université de Biskra 2014.

Annexe A :Abréviations et Notations

A	opérateur intégral
$L_2(a,b)$	l'ensemble de toutes les fonctions de carré intégrable sur $[a,b]$
$\varphi(x)$	une fonction de la variable x
λ	paramètre numérique
$k(x,t)$	noyau de l'équation intégrale de Volterra
$R(x,t;\lambda)$	résolvante de l'équation intégrale de Volterra
exp	expanontiel
$\tilde{\varphi}(x)$	solution approchée
(P_n, P_m)	produit scalaire de P_n et P_m
$\mathbb{N}$	ensemble des entiers naturels
$T_n(x)$	polynômes de Tchebychev de première espèce
$V_n(x)$	polynômes de Tchebychev de seconde espèce
$L_n(x)$	polynômes de Legendre
$l_n(x)$	polynômes de Laguerre
$H_n(x)$	polynômes de Hermite