République Algérienne Démocratique et Populaire

Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

UNIVERSITÉ MOHAMED KHIDER, BISKRA

FACULTÉ des SCIENCES EXACTES et des SCIENCES de la NATURE et de la VIE

DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES

Mémoire présenté en vue de l'obtention du Diplôme **:**

MASTER en Mathématiques

Option : **Probabilité**

Par

Laib Sihem

Titre :

Existence du contrôle optimal pour les EDSR linéaires

Membres du Comité d'Examen :

Dr.	**Berrouis Nassima**	UMKB	Encadreur
Dr.	**Khalfalah Nabil**	UMKB	Président
Dr.	**Tabet Moufida**	UMKB	Examinateur

Juin 2019

Dédicace

par le soin d'Allah et tout le courage et patience qu'il m'a apporté de ces années d'étude que j'arrive aujourd'hui àvoir le fruit de mon travail ce modest mémoire.

Je dédie la présent mémoire à mes chéres aimés parents que dieu luis accorde une langue vie.

A toutes mes soeurs et mon frére.

A mes chers amis et mes collégues

A la famille Laib

Je dédie aussi tous mes respectes et toutes mes apparéciations ceux qui mont aidé pendant toute ma carriére.

Vous étiez tous grand soutien pour moi Merci infiniment

REMERCIEMENTS

Je tiens à remercier et glorifier en premier, Dieu le tout puissant pour m'avoir donné le force et la possibilité d'accomplir ce travail.

Tous le respect et les mots de remercies à mon encadreur "Nassima Berrouis", pour ses aides, ses conseils directifs, et ses suivis durant la réalisation de cette étude.

Je remercie également les membres du jury pour accepté d'évalure et de juger ce modeste travail et de l'enrichir par leurs propositions.

je remercie également le chef de département Pr. "HAFAYED Mokhtar".

L'amour et le soutien de mes parents restent un port de sécurité et de sérénité dans ma vie dans les meilleurs moments et dans les pires qu'ils trouvent dans ces quelques lignes l'expression de sincéres gratitudes et reconaissances

Je voudrais égalment remercier mes proches et mes amis pour leur écoute, leur présence et leur confiance ainsi que tous ceus et celles qui ont permis l'élaboration de ce travail en me livrant leur témoignage et leur expérience.

Table des matières

Introduction

Les équations différentielles stochastiques rétrogrades (EDSRs en abrégé) furent introduites pour la première fois (la forme linéaire) en 1973 dans les travaux de J. Bismut lorsqu' il étudiait l'équation adjointe associée au principe du maximum stochastique en contrôle optimal.

Cependant, il a fallu attendre les années 1990 pour voir une théorie plus générale sur les EDSRs. Elle fut initiée par Peng et Pardoux qui ont introduit une nouvelle forme

$$Y_t = \xi + \int_t^T f(s, Y_s, Z_s)\, ds - \int_t^T Z_s dW_s, \quad t \in [0, T],$$

Résoudre une EDSR revient à déterminer un couple de processus noté $(Y_t, Z_t)_{t \geq 0}$ *qui ne dépend que l'information connue jusqu'à l'instant* t *c'est à dire, on dit que les processus sont adaptés à la filltration Brownienne* avec W *est un mouvement Brownien definie sur un espace de probabilité* $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ *et la condition terminal* $Y_T = \xi$ *,où* ξ *est une variable aléatoire de carré integrable.*

Nous intéressons au problème d'éxistence de contrôle optimal stochastique.où le système est gouvernés par une équations différentielles stochastique rétrogrades linéaire de la forme suivante :

$$Y_t = \xi + \int_t^T \{a_s Y_s + b_s Z_s + c_s u_s\}\, ds - \int_t^T Z_s dW_s, \quad t \in [0, T].$$

Notre objective est de minimiser sur l'ensemble des contrôles admissibles une fonction de coût donnée par :

$$J(u) = \mathbb{E}\left[g(Y_0) + \int_0^T h(t, Y_t, Z_t, u_t)\, dt\right]$$

où

$h : \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^{k\times d} \times U \longrightarrow \mathbb{R}$

$g : \mathbb{R}^k \longrightarrow \mathbb{R}$,

sont des fonctions déterministes données.Un contrôle u est dit optimal s'il vérifie

$$J(\bar{u}) = \inf_{u\in U_{ad}} J(u) ..$$

Le plan de travail est comme suit :

Chapitre 1 :Rappel sur le calcul stochastique

Dans ce chapitre, nous allons expliquer la théorie du calcul stochastique, en donnant les définitions et les propriétés des processus continues ainsi que leurs résultats principaux qui nous permettre de définir d'intégrale stochastique et la formule d'Itô.

Chapitre 2 :Equations différentielles stochastique rétrogrades

Dans ce chapitre nous allons montrer un premier résultat d'existence et d'unicité de la solution d'une EDSR, ce résultat est du à E.Pardoux et S.Peng et c'est le premier résultat d'existence et d'unicité pour les équations différentielles stochastique rétrogrades (EDSR) dans le cas ou le générateur non linéaire sous des hypothèses lipschitiziennes en (Y, Z).

Chapitre 3 :Existence du contrôle optimal pour les EDSR linéaires

Dans ce chapitre nous démontrons l'existence du contrôle optimal strict pour les équations diférentielles stochastiques rétrogrades linéaires. On suppose ici, que le domaine de contrôle est convexe ainsi que les fonctions h et g (de fonctionnel de coût) sont convexe. La preuve est basée sur les techniques de convergence forte et le théorème de Mazur.

Chapitre 1

Rappel sur le calcul stochastique

Le calcul stochastique est une extension du calcul différentiel et intégrale classique, dans laquelle les processus à temps continus remplaçant les fonctions, et les martingales jouent le rôle des constantes.
Le but de ce chapitre est consacré à donner des définitions de base et des résultats principaux pour les utiliser aux prochains chapitres.$(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}, P)$

1.1 *Processus stochastiques*

Définition 1.1 (Processus Stochastique) *Soit T un ensemble. On appelle processus stochastique sur un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ indexé par T et à valeurs dans $\mathbb{R}^d$, une famille $(X_t)_{t\in T}$ d'applications mesurables de $(\Omega, \mathcal{F})$ dans $(R^d, \beta(R^d))$; pour tout $t \in T$, X_t soit une variable aléatoire.*

Remarque 1.1 *Les fonctions $t \curvearrowright X_t(\omega)$ sont appelées les trajectoires du processus stochastique X_t.*

Définition 1.2 *On appelle filtration $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ de $(\Omega, \mathcal{F})$, une famille croissante de sous tribus de $\mathcal{F}$ .i.e $\mathcal{F}_s \subset \mathcal{F}_t \subset \mathcal{F}, \forall s \leq t$.*

Remarque 1.2 *Un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ muni d'une filtration $(\mathcal{F}_t)_{t\in T}$ est satisfait les conditions habituelles si :*

i) Les ensembles négligeables sont contenus dans $\mathcal{F}_0$.

ii) La filtration est continue à droite i.e. $\mathcal{F}_t = \cap_{s>t}\mathcal{F}_s \quad \forall t$.

La famille croissante de sous tribus $G_t = \sigma(X_s, s \leq t)$ s'appelle la filtration naturelle du processus stochastique X . Mais G_0 ne contient pas nécessairement les ensembles négligeables (N), c'est pour cela on introduit la filtration naturelle augmentée de X définie par $\mathcal{F}_t = \sigma(N \cup G_t)$. Lorsque nous parlerons de filtration naturelle, il s'agira toujours de la filtration naturelle augmentée.

Définition 1.3 (Processus adapté) *Un processus stochastique $(X_t)_{t\in T}$ est adapté par rapport à la filtration $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ si $\forall t \geq 0, X_t \in \mathcal{F}_t$ i.e. X_t est $\mathcal{F}_t-$mesurable pour tout t.*

Définition 1.4 (Modification d'un processus indistinguables) *Soient $(X_t)_{t\geq 0}$ et $(Y_t)_{t\geq 0}$ deux processus stochastiques définis sur même espace $(\Omega, \mathcal{F}, P)$*
(i) X est une modification (ou une version) de Y si : pour tout $t \geq 0$, les variables X_t et Y_t sont égales

$$P - p.s.\forall t \quad P(X_t = Y_t) = 1$$

(ii) X et Y sont indistinguables si $P - p.s$, les trajectoires de X et Y sont les mêmes i.e.

$$P(X_t = Y_t, \forall t \geq 0) = 1.$$

Définition 1.5 (Processus progresivement mesurable) *Un processus stochastique $(X_t)_{t\geq 0}$ est progressivement mesurable par rapport à $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$, si l'application $(s, \omega) \longrightarrow X_s(\omega)$ de $[0, t] \times \Omega$ dans $\mathbb{R}^d$ est mesurable par rapport à $\beta([0, t]) \otimes \mathcal{F}_t$ et $\beta(\mathbb{R}^d)$.*

Remarque 1.3 *Un processus progressivement mesurable est mesurable et adapté. On note aussi que si X est processus mesurable et adapté alors il possède une modification progressivement mesurable.*

Proposition 1.1 *Si X est un processus stochastique dont les trajectoires sont continues à droite (ou à gauche), alors X est mesurable et progressivement mesurables s'il est de plus adapté.*

1.2 *Esperance conditionelle*

Définition 1.6 *Soit $X \in L^1(\Omega, P)$ et G une sous tribu de $\mathcal{F}$ On définit l'espérance conditionnelle de X sachant G, l'unique variable aléatoire $\mathbb{E}(X \mid G)G-$mesurable sur Ω telle que :*

$$\int_B X dP = \int_B \mathbb{E}(X \mid \mathcal{G}) dP, \quad \forall B \in \mathcal{G}.$$

1.2.1 *Quelque Propriétés dé l'espérance conditionnelle*

Soient $X, Y \in L^1_{\mathcal{F}}(\Omega, P)$ et G une sous tribu de $\mathcal{F}$, presque sûrement on a :

1. *Linéarité :Soit a et b deux constantes*

$$\mathbb{E}(aX + bY \mid \mathcal{G}) = a\mathbb{E}(X \mid \mathcal{G}) + b\mathbb{E}(Y \mid \mathcal{G}).$$

2. *Croissance : Soit X et Y deux v.a telles que*

$$X \leq Y$$

.Alors

$$\mathbb{E}(X \mid \mathcal{G}) \leq \mathbb{E}(Y \mid \mathcal{G}),$$

3. *Si X est $\mathcal{G}-$mesurable alors :*

$$\mathbb{E}(X \mid \mathcal{G}) = X.$$

4. *Soit (X, Y) un couple de variables aléatoires, si Y est $\mathcal{G}-$mesurable alors :*

$$\mathbb{E}(XY \mid \mathcal{G}) = Y\mathbb{E}(X \mid \mathcal{G})$$

5. *Si X est indépendante de $\mathcal{G}$ alors :*

$$\mathbb{E}(X \mid \mathcal{G}) = \mathbb{E}(X)$$

6. *Si $\mathcal{G}$ et $\mathcal{H}$ sont deux tribus telles que $\mathcal{H} \subset \mathcal{G}$ alors*

$$\mathbb{E}(X \mid \mathcal{H}) = \mathbb{E}(\mathbb{E}(X \mid \mathcal{H})|\mathcal{G}) = \mathbb{E}(\mathbb{E}(X \mid \mathcal{G})|\mathcal{H})$$

. On note souvent

$$\mathbb{E}(\mathbb{E}(X \mid \mathcal{H})|\mathcal{G}) = \mathbb{E}(X \mid \mathcal{H}| \mathcal{G})$$

1.3 *Martingales*

Définition 1.7 *Un processus $(M_t)_{t\geq 0}$ est dit martingale si :*

(i) Pour tout $t \geq 0, M_t$ est $\mathcal{F}_t-$ mesurable ;

(ii) Pour tout $t \geq 0, M_t$ est intégrable i.e. $\mathbb{E}(|M_t|) < \infty$;

(iii) Pour tout $\forall t \geq s \geq 0,\ \ \mathbb{E}(M_t \mid \mathcal{F}_s) = M_s.P - p.s.$

On définit de manière similaire une sous-martingale si (iii) est remplacé par

$$\mathbb{E}(M_t \mid \mathcal{F}_s) \geq M_s\ P -\ p.s.$$

Et sur-martingale si (iii) est remplacé par $(\mathbb{E}(M_t \mid \mathcal{F}_s) \leq M_s).P - p.s,\ \ \forall t \geq s \geq 0.$

Définition 1.8 (Temps d'arrêt) *Une variable aléatoire $T : \Omega \to [0, \infty]$ est un temps d'arrêt si l'évènement $\{T \leq t\} \in \mathcal{F}_t, \forall t,\ \ 0 \leq t < \infty$*

Théorème 1.1 (Théorème d'arrêt) *Soit (M_t) est une martingale continue par rapport à $(\mathcal{F}_t)$ et T_1, T_2 deux temps d'arrêts tels que $0 \leq T_1(\omega) \leq T_2(\omega) \leq K < \infty,\ \forall \omega \in \Omega$. Alors*

$$\mathbb{E}(M_{T_2} \mid \mathcal{F}_{T_1}) = M_{T_1}.P - p.s,$$

et donc

$$\mathbb{E}(M_{T_2}) = \mathbb{E}(M_{T_1})$$

En particulier si $0 \leq T(\omega) \leq K, \forall \omega \in \Omega,$ *alors*

$$\mathbb{E}(M_T) = \mathbb{E}(M_0).$$

Le théorème est encore valide pour une sous-martingale et une sur-martingale (avec les inégalités correspondantes).

Théorème 1.2 (Théorème d'arrêt de Doob) *Si* X *est une martingale et si* σ *et* τ *sont deux temps d'arrêt bornés tels que*

$$\sigma \leq \tau, \mathbb{E}[X_\tau \mid \mathcal{F}_\sigma] = X_\sigma \quad P-p.s.$$

Théorème 1.3 (Burkholder-Davis-Gundy "BDG") *Soit* $p \in \,]0, \infty[$ *. Il existe deux constantes* c_p *et* C_p *telles que, pour toute martingale continue* X*, nul en* 0.

$$c_p \mathbb{E}[\langle X, X\rangle_\infty^{\frac{p}{2}}] \leq \mathbb{E}[\sup_{t\geq 0} |X_t|^p] \leq C_p \mathbb{E}[\langle X, X\rangle_\infty^{\frac{p}{2}}].$$

Remarque 1.4 *En particulier, si* $T > 0$,

$$c_p \mathbb{E}[\langle X, X\rangle_T^{\frac{p}{2}}] \leq \mathbb{E}[\sup_{0\leq t\leq T} |X_t|^p] \leq C_p \mathbb{E}[\langle X, X\rangle_T^{\frac{p}{2}}].$$

1.4 *Mouvement Brownien*

Définition 1.9 (Mouvement brownien) *Un processus stochastique* $(W_t, t \geq 0)$ *à valeurs réelles est appelé mouvement brownien (standard) s'il vérifie les quatre propriétés suivantes :*

(i) $W_0 = 0$

(ii)*Pour tout* $s \leq t$*,l'accroissement* $W_t - W_s$ *suit la loi gaussienne centrée de variance* $t - s$.

(iii) si $0 \leq t_1 \leq t_2 \leq ... \leq t_n$*,les accroissements* $W_{t_1}, W_{t_2} - W_{t_1}, ..., W_{t_n} - W_{t_{n-1}}$ *sont indépendants.*

(iv)En dehors d'un ensemble de probabilité nulle, les trajectoires $t \longrightarrow W_t(\omega)$ *sont continues.*

Notons que (i) et (ii) implique que $W_t = W_t - W_0$ *suit la loi gaussienne centrée de variance* t *dont la densité est*

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi t}} e^{-\frac{x^2}{2t}}.$$

Définition 1.10 *Un mouvement brownien est dit standard si* $W_0 = 0\ P - p.s,\ \ \mathbb{E}[W_t] = 0$ *et* $\mathbb{E}[W_t^2] = t$.

Dans la suite si on parlera de mouvement brownien sans précision, il s'agira d'un mouvement brownien standard.

Proposition 1.2 *Soit* $(W_t)_{t \geq 0}$ *un mouvement brownien standard, alors* W_t *est un processus gaussien i.e. pour tout* n *et tous* $0 \leq t_0 \leq t_1 \leq t_2 ..... \leq t_n, (W_{t_1}, ...W_{t_n})$ *est un vecteur gaussien.*

Théorème 1.4 X *est mouvement brownien standard si et seulement si* X *est un processus gaussien continu centré de fonction de covariance*

$$cov(X_s, X_t) = s \wedge t = min(s, t).$$

Proposition 1.3 *Soit* W *un mouvement brownien Standard, on a :*

1- pour tout $T > 0, \{W_{t+T} - W_T\}_{t \geq 0}$ *est un mouvement brownien indépendant de* $\sigma(W_u, u \leq T)$

2- pour tout $c > 0, \{cW_{\frac{t}{c^2}}\}_{t \geq 0}$ *: est un mouvement brownien ;*

3- Le processus défini par $X_0 = 0$ *et* $X_t = tW_{\frac{1}{t}}$ *est un mouvement brownien ;*

Proposition 1.4 *Soit* W *un mouvement brownien on a :*

1- $\forall t, P - p.s, .W_t$ *n'est pas différentiable en aucun point* t.

2- W_t *n'est pas à variation finie en aucun point* t.

Proposition 1.5 *Le mouvement brownien standard* $(W_t, t \geq 0)$ *est une martingale par rapport à sa filtration naturelle* $\mathcal{F}_t^W = \sigma(W_s, 0 \leq s \leq t)$.

Proposition 1.6 *Soit* $(W_t)_{t\geq 0}$ *un mouvement brownien. Les processus suivants sont des martingales par rapport à* $(\mathcal{F}_t^W)$:

(i) $M_t = W_t^2 - t$,

(ii) $N_t = e^{(W_t - \frac{t}{2})}$.

Théorème 1.5 (Théorème de représentation des martingales) *Soit* $(\mathcal{F}_t)_{0\leq t\leq T}$ *la filtration naturelle du mouvement brownien standard* $(W_t)_{0\leq t\leq T}$. *Soit* M *une martingale continue de carré intégrable par rapport à* $(\mathcal{F}_t)_{0\leq t\leq T}$. *Alors il existe un processus adapté* H *tel que*

$$\mathbb{E}(\int_0^T H_s^2 ds) < \infty,$$

et, pour tout $t \in [0, T]$,

$$M_t = M_0 + \int_0^t H_s dW_s \quad P - p.s$$

1.5 *Calcul d'Itô*

Définition 1.11 (Processus d'Itô) *On appelle processus d'Itô, un processus* X *à valeurs réelles tel que :*

$$\forall 0 \leq t \leq T, \qquad X_t = X_0 + \int_0^t b_s ds + \int_0^t \sigma_s dW_s, \quad P - p.s$$

où X_0 *est* $\mathcal{F}_0-$*mesurable,* b *et* σ *sont deux processus progressivement mesurables vérifiant les conditions*

$$\int_0^t |b_s|\, ds < \infty \quad et \quad \int_0^t \|\sigma_s\|^2\, ds < \infty$$

Le coefficient b *est le drift ou la dérivée,* σ *est le coefficient de diffusion.*

Théorème 1.6 (Formule d'Itô) *Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}$ de classe C^1 par rapport à t, de classe C^2 par rapport à x, à dérivées bornées, on a*

$$f(t, X_t) = f(0, X_0) + \int_0^t f'_x(s, X_s) dX_s + \int_0^t f'_s(s, X_s) ds + \frac{1}{2} \int_0^t f''_{xx}(s, X_s) \sigma_s^2 ds$$

ce qui l'on note

$$\begin{aligned} df(t, X_t) &= [f'_t(t, X_t) + \frac{1}{2} f''_{xx}(t, X_t) \sigma_t^2] dt + f'_x(t, X_t) dX_t \\ &= f'_t(t, X_t) dt + f'_x(t, X_t) dX + \frac{1}{2} f''_{xx}(t, X_t) d\langle X \rangle_t \end{aligned}$$

Proposition 1.7 *La formule d'Itô montre que*

$$d[X_1 X_2](t) = X_1(t) dX_2(t) + X_2(t) dX_1(t) + \sigma_1(t) \sigma_2(t) dt$$

Cette formule est connue sous le nom d'intégration par parties. La quantité $\sigma_1(t)\sigma_2(t)$ correspond au crochet de X_1, X_2 noté $\langle X_1, X_2 \rangle$ est défini comme le processus à variation fini $\langle X_1, X_2 \rangle = \int_0^t \sigma_1(s) \sigma_2(s) ds$.

1.6 *Rappels d'analyse*

Lemme 1.1 (Lemme de Gronwall) *Soit $T > 0$ et soit g une fonction positive mesurable bornee sur l'intervalle $[0, T]$.Supposons qu'il existe deux constantes $a \geq 0, b \geq 0$ telles que pour tout $t \in [0, T]$,*

$$g(t) \leq a + b \int_0^t g(s) ds.$$

Alors ona pour tout $t \in [0, T]$,

$$g(t) \leq a \exp(bt)$$

Théorème 1.7 (Théorème de Mazur) *Si x_n converge faiblement vers x alors il existe* *une suite de combinaisons convexes* c_n *telle que*

$$c_n = \sum_{i \geq 0} \alpha_{in} x^i, ou\ \alpha_i \geq 0 \ \ et \ \sum_{i \geq 0} \alpha_i = 1,$$

qui converge fortement vers x *:*

$$\parallel c_n - x \parallel \rightarrow 0, comme\ n \rightarrow \infty$$

Définition 1.12 (L'ensemble convexe) *Un ensemble* A *est dit convexe lorsque pour tout* x *et* y *de* A*, le segment* $[x; y]$ *est inclu dans* A*, c'est -à-dire*

$$\forall \ x, y \in A\,;\ \forall \lambda \in [0,1] \ ; \lambda x + (1-\lambda)\, y \in A.$$

Définition 1.13 (Fonction convexe) *On dit qu'une fonction* f *définie sur un ensemble convexe non vide* A *et à valeurs dans* $\mathbb{R}$ *est convexe si et seulement si*

$$\forall \ x, y \in A\,;\ \forall \lambda \in [0,1] \ ;\ f\left(\lambda x + (1-\lambda)\, y\right) \leq \lambda f\left(x\right) + (1-\lambda)\, f\left(y\right).$$

De plus, la fonction f *est dite strictement convexe si l'inégalité est stricte lorsque* $x \neq y$ *et* $\lambda \in \left]0,1\right[$.

Définition 1.14 (suite minimisante) *Soit* V *un espace de Banach,i.e., un espace vectoriel muni d'une norme qui est complet (toute suite de Cauchy est convergente dans* V *). Soit* $K \subset V$ *un sous-ensemble non-vide. Soit un fonctionel* $J.V \rightarrow \mathbb{R}$ *On considére* $\inf\limits_{u \in K \subset V} J\left(\nu\right)$*.On dit que* u *est un minimum local du fonctionel* j *sur l'ensemble* K *s'il vérifié :*

$$u \in k \ \ et \ \exists \delta > 0, \forall \parallel \nu - u \parallel < \delta \Longrightarrow J\left(\nu\right) \geq J\left(u\right).$$

.On dit que u *est un minimum global de* J *sur* K *si*

$$u \in K \ \ et \ J\left(\nu\right) \geq J\left(u\right), \forall \nu \in K.$$

Chapitre 2

Equations différentielles stochastiques rétrogrades (EDSR)

Le but de ce chapitre est de présenter brièvement le résultat d'existence et d'unicité d'équation différentielle stochastique rétrograde dont les coefficients sont globalement lipschitziens. Ce résultat a été obtenu par Pardoux et Peng avec le générateur non linéaire et une donnée terminale de carré intégrable.

2.1 *Présentation du problème*

Soient $\left(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}, P\right)$ *un espace probabilisé filtré, et* ξ *une variable aléatoire mesurable par rapport à* $\mathcal{F}_T$, *où* T *désigne un temps terminal.*
On voudrait résoudre l'équation différentielle suivante :

$$\begin{cases} \dfrac{-dY_t}{dt} = f\left(Y_t\right), \quad t \in [0, T], \\ Y_T = \xi, \end{cases}$$

en imposant que, pour tout instant t, Y_t *ne dépende pas du futur après* t *c'est à dire que le processus* Y *soit adapté par rapport à la filtration* $\{\mathcal{F}_t\}_{t\geq 0}$.

Prenons l'exemple le plus simple à savoir $f \equiv 0$, *le candidat naturel est* $Y_t = \xi$ *qui n'est pas adapté si* ξ *n'est pas déterministe.*

La meilleure approximation-disons dans L^2-adaptée est la martingale $Y_t = E(\xi \mid \mathcal{F}_t)$, si on travaille avec la filtration naturelle d'un mouvement brownien, le théorème de représentation des martingales browniennes permet de construire un processus Z de carré integrable et adapté tel que :

$$Y_t = \mathbb{E}(\xi \mid \mathcal{F}_t) = \mathbb{E}[\xi] + \int_0^t Z_t dW_s.$$

Un calcul élémentaire montre :

$$Y_t = \xi - \int_0^t Z_t dW_s, t \in [0,T],$$

ou de façon équivalente

$$\begin{cases} -dY_t = -Z_t dW_t, t \in [0,T], \\ Y_T = \xi. \end{cases}$$

On voit donc apparaître sur l'exemple le plus simple une seconde inconnue qui est le processus Z dont le rôle est de rendre le processus Y adapté.

Par conséquent, comme une seconde variable apparaît, pour obtenir la plus grande généralité, on permet à f dépendre du processus Z ; l'équation devient alors :

$$\begin{cases} -dY_t = f(t, Y_t, Z_t)\, dt - Z_t dW_t, \quad t \in [0,T], \\ Y_T = \xi, \end{cases} \tag{2.1}$$

ou de façon équivalente, sous forme intégrale,

$$Y_t = \xi + \int_t^T f(s, Y_s, Z_s)\, ds - \int_t^T Z_s dW_s, t \in [0,T].$$

2.2 Notations et définition d'une solution

Fixons d'abord quelques notations pour $Y, \acute{Y} \in \mathbb{R}^k$, $\mid Y \mid$ désigne la norme euclidienne et $\langle Y, \acute{Y} \rangle$ le produit scalaire. Une matrice de taille $K \times d$ est considérée comme un élément de

$\mathbb{R}^{K\times d}$*; sa norme euclidienne est donnée par* $\parallel Z \parallel = \sqrt{Trace\,(ZZ^{*})}$.

On se donne $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ *un espace de probabilité complet et* W *un mouvement brownien (MB) d-dimensionnel sur cet espace. On notera* $\{\mathcal{F}_t\}_{t\geq 0}$ *la filtration naturelle du MB W. On travaillera avec deux espaces de processus :*

- *On note* $S^2(\mathbb{R}^k)$ *: l'espace vectoriel formé des processus* Y*, progressivement mesurables, à valeurs dans* $\mathbb{R}^k$*, tels que :*

$$\|Y\|\,{}^{2}_{S^2} := \mathbb{E}\left[\sup_{0\leq t\leq T} |Y_t|^2\right] < \infty,$$

et $S^{\,2}_{c}(\mathbb{R}^k)$ *le sous espace formé par le processus continus.*

- *En suite* $M^2(\mathbb{R}^{K\times d})$ *celui formé par les processus* Z*, progrssivement mesurables, à valeurs dans* $\mathbb{R}^{k\times d}$*, tels que :*

$$\|Z\|\,{}^{2}_{M^2} := \mathbb{E}\left[\int_0^T \|Z_t\|^2\,dt\right] < \infty,$$

$M^2(\mathbb{R}^{k\times d})$ *désigne l'ensemble des classes d'équivalence de* $M^2(\mathbb{R}^{k\times d})$.

$\mathbb{R}^k$ *et* $\mathbb{R}^{k\times d}$ *seront souvent omis; les espaces* S^2, $S^{\,2}_{c}$ *et* M^2 *sont des espaces de Banach pour les normes définies précédemment. Nous désignerons* B^2 *l'espace de Banach* $S^{\,2}_{c}(\mathbb{R}^K)\times M^2(\mathbb{R}^{K\times d})$.

Dans tout ce chapitre, ainsi que dans le suivant, nous nous donnons une application aléatoire f *définie sur* $[0,T]\times\Omega\times\mathbb{R}^k\times\mathbb{R}^{k\times d}$ *à valeurs dans* $\mathbb{R}^k$ *telle que, pour tout* $(Y,Z)\in\mathbb{R}^k\times\mathbb{R}^{k\times d}$*, le processus* $\{f\,(t,Y,Z)\}_{0\leq t\leq T}$ *soit progressivement mesurable. On considère également une variable aléatoire* ξ*, mesurable par rapport à* $\mathcal{F}_T$ *et à valeurs dans* $\mathbb{R}^k$*.*
La fonction f *s'appelle le générateur et* ξ *la condition terminale.*

On veut résoudre l'équation differentielle stochastique rétrograde (EDSR en abrégé) 2.1
Supposons qu'il existe un processus progressivement mesurable $\left(\bar{f}, 0\leq t\leq T\right)\in M^2$ *à valeurs dans* $\mathbb{R}^+$ *et des constantes* μ *et* $\lambda>0$ *tels que :*

*H*1. $\forall\,(Y,Z)\in\mathbb{R}^k\times\mathbb{R}^{k\times d}$, $f\,(.,y,z)$ *est progressivement mesurable,* *H*2. *On a*

$$\forall t, Y, Z \quad |f(t,Y,Z)| \leq \bar{f}_t + \lambda(|Y| + \|Z\|), P-p.s,$$

*H*3. $f(t,Y,.)$ *est lipschitzienne, i.e.,*

$$\forall t, Y, Z, Z' \quad \left|f(t,Y,Z) - f\left(t,Y,Z'\right)\right| \leq \lambda \left\|Z - Z'\right\|, P-p.s,$$

*H*4. $f(t,.,Z)$ *est monotone, i.e,*

$$\forall t, Y, Y', Z \quad \left(Y - Y', f(t,Y,Z) - f\left(t,Y',Z\right)\right) \leq \mu \left|Y - Y'\right|^2, P-p.s,$$

*H*5. $\forall t, Y, Z \quad f(t,Y,Z)$ *est continue,* $P-p.s.$

Définition 2.1 *Une solution de l'EDSR 2.1 est un couple de processus*

$\{(Y_t, Z_t)\}_{0 \leq t \leq T}$ *vérifiant :*

1. Y *et* Z *sont progressivement mesurables à valeurs recepectivement dans* $\mathbb{R}^k$ *et* $\mathbb{R}^{k \times d}$ *;*
2. *P-p.s. ;*
$$\int_0^T \left\{f(r,Y_r,Z_r) + \|Z_r\|^2\right\} dr < \infty;$$
3. *P-p.s., on a :*

$$Y_t = \xi + \int_t^T f(r,Y_r,Z_r)\,dr - \int_t^T Z_r dW_r, \quad 0 \leq t \leq T.$$

Remarque 2.1 *Il est important de retenir les deux points suivants : tout d'abord, les intégrales de l'équation 2.1 étant bien définies,* Y *est une semi-martingale continue, ensuite, comme le processus* Y *est progressivement mesurable, il est adapté et donc en particulier* Y_0 *est une quantité déterministe.*

Avant de donner un premier théorème d'existence et d'unicité, nous allons montrer, que sous une hypothèse relativement faible sur le générateur f, le processus Y appartient à S^2.

Proposition 2.1 *Supposons qu'il existe un processus $\{f(t,Y,Z)\}_{0\leq t\leq T}$, positif appartenant à $M^2(\mathbb{R}^k)$ et deux constantes positives C et K tels que*

$$\forall (t,Y,Z) \in [0,T]\times\mathbb{R}^k\times\mathbb{R}^{k\times d}, \quad |f(t,Y,Z)| \leq f_t + C|Y| + K\|Z\|.$$

Si $\{(Y_t,Z_t)\}_{0\leq t\leq T}$ est une solution de l'EDSR 2.1 telle que $Z\in M^2$ alors Y appartient à S_c^2.

Preuve. *On a, pour tout $t\in[0,T]$,*

$$Y_t = Y_0 - \int_0^t f(r,Y_r,Z_r)\,dr - \int_0^t Z_r dW_r,$$

et par suit, utilisant l'hypothèse sur f,

$$|Y_t| \leq |Y_0| + \int_0^T (f_r + K\|Z_r\|)\,dr + \sup_{0\leq t\leq T}\left|\int_0^t Z_r dW_r\right| + C\int_0^t |Y_r|\,dr.$$

posons

$$\lambda = |Y_0| + \int_0^T (f_r + K\|Z_r\|)\,dr + \sup_{0\leq t\leq T}\left|\int_0^t Z_r dW_r\right|,$$

par suite on a

$$|Y_t| \leq \lambda + C\int_0^t |Y_r|\,dr.$$

Y étant un processus continu, le lemme de Gronwall fournit l'inégalité :

$$|Y_t| \leq \lambda \exp(Ct),$$

et donc :

$$\sup_{0\leq t\leq T} |Y_t| \leq \lambda \exp(CT),$$

λ est une variable aléatoire de carré intégrable, puisque par hypothèse, Z appartient à M^2 et donc, d'après l'inégalité de Doob, on a

$$\mathbb{E}\left[\sup_{0\leq t\leq T}\left|\int_0^t Z_r dW_r\right|^2\right] \leq 4 \sup_{0\leq t\leq T} \mathbb{E}\left[\int_0^t \|Z_r\|^2 dr\right],$$

ce qui signifie que le troisème terme de λ est de carré intégrable. Il en est de même pour $\{f_t\}_{0\leq t\leq T}$ et Y_0 puisque'il est déterministe donc de carré intégrable.

Ceci montre que Y appartient à S^2. ■

Finissons par un résultat d'intégrabilité qui servira à plusieurs reprise.

Lemme 2.1 *Soient $Y \in S^2(\mathbb{R}^K)$ et $Z \in M^2(\mathbb{R}^{K\times d})$, alors*

$$\left\{\int_0^t Y_s.Z_s dW_s, t \in [0,T]\right\}$$

est une martingale uniformément intégrable.

Preuve. *En appliquant l'inégalité Burkholder-Davis-Gundy, il existe une constante positive C telle que :*

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left[\sup_{0\leq t\leq T}\left|\int_0^t Y_r Z_r dW_r\right|\right] &\leq C\mathbb{E}\left[\left(\int_0^T |Y_r|^2 \|Z_r\|^2 dr\right)^{\frac{1}{2}}\right] \\ &\leq C\mathbb{E}\left[\sup_{0\leq t\leq T}|Y_t|\left(\int_0^T \|Z_r\|^2 dr\right)^{\frac{1}{2}}\right]\end{aligned}$$

et par suite en appliquant linégalité :

$$ab \leq \frac{a^2}{2} + \frac{b^2}{2},$$

on obtient :

$$\mathbb{E}\left[\sup_{0\leq t\leq T}\left|\int_0^t Y_r.Z_r dW_r\right|\right] \leq C'\left(\mathbb{E}\left[\sup_{0\leq t\leq T}|Y_t|^2\right] + \mathbb{E}\left[\int_0^T \|Z_r\|^2 dr\right]\right).$$

Par hypothèse le deuxième membre de cette inégalité est fini, et donc on aura :

$$\mathbb{E}\left[\sup_{0\leq t\leq T}\left|\int_0^t Y_r.Z_r dW_r\right|\right] < \infty,$$

d'où le résultat. ■

2.3 *Existence et unicité des solutions Lipschitz*

2.3.1 *Le résultat de Pardoux-Peng*

Dans cette section, nous allons montrer un premier résultat d'éxistence et d'unicité qui sera généralisé plus tard. Ce résultat est dû à E. PARDOUX et S. PENG [1], c'est le premier résultat d'existence et d'unicité pour les EDSR dans le cas oú le générateur est non-linéaire. Néanmoins dans la démonstration nous suivrons de près Briand [7] et El-Karoui & all [5].

Rappelons pour la dernière fois que f *est définie sur* $[0,T]\times\Omega\times\mathbb{R}^k\times\mathbb{R}^{k\times d}$ *à valeur dans* $\mathbb{R}^k$*, telle que, pour tout* $(Y,Z)\in\mathbb{R}^k\times\mathbb{R}^{k\times d}$*, le processus* $\{f(t,Y,Z)\}_{0\leq t\leq T}$ *soit progressivement mesurable. On considère également* ξ *une variable aléatoire,* $\mathcal{F}_T-$*mesurable,à valeurs dans* $\mathbb{R}^k$.

Voici les hypothèses sous lesquelles nous travailler.

(L) *Il existe une constante* K *telle que* $P-p.s.$,

1. *condition de Lipschitz en* (Y,Z) *: pour tout* t, Y, Y', Z, Z',

$$\left|f(t,Y,Z)-f\left(t,Y',Z'\right)\right|\leq K\left(\left|Y-Y'\right|+\left\|Z-Z'\right\|\right);$$

2. *condition d'intégrabilité :*

$$\mathbb{E}\left[|\xi|^2+\int_0^T|f(r,0,0)|^2\,dr\right]<\infty.$$

Nous commençons par un cas très simple, celui où f ne dépend ni de Y ni de Z i.e. on se donne ξ de carré intégrable et un processus $\{F_t\}_{0\leq t\leq T}$ dans $M^2(\mathbb{R}^k)$ et on veut trouver une solution de l'EDSR

$$Y_t = \xi + \int_t^T F_r dr - \int_t^T Z_r dW_r, \quad 0 \leq t \leq T \tag{2.2}$$

Lemme 2.2 *Soient $\xi \in L^2(\mathcal{F}_T)$ et $\{F_t\}_{0\leq t\leq T} \in M^2(\mathbb{R}^k)$. L'EDSR 2.2 possède une unique solution (Y,Z) telle que $Z \in M^2$.*

Preuve. *Supposons dans un premier temps que (Y,Z) soit une solution vérifiant $Z \in M^2$. Si on prend l'esperance conditionnelle sachant $\mathcal{F}_t$, on a nécessairement,*

$$Y_t = \mathbb{E}\left(\xi + \int_t^T F_r dr \mid \mathcal{F}_t\right).$$

On définit donc Y à l'aid de la formule précédent et il reste à trouver Z . Remarquons que, d'aprés le théoreme de Fubini, comme F est progressivement mesurable

$$\int_0^t F_r dr$$

est un processus adapté à la filtration $\{\mathcal{F}_t\}_{t\in[0,T]}$; en fait dans S_c^2 puisque F est de carré intégrable. On a alors, pour tout $t \in [0,T]$,

$$Y_t = \mathbb{E}\left(\xi + \int_0^T F_r dr \mid \mathcal{F}_t\right) - \int_0^t F_r dr := M_t - \int_0^t F_r dr,$$

où M est une martingale brownienne ; par le théorème de représentation des martingales brownienne on construit un processus Z appartenant à M^2 tel que :

$$Y_t = M_t - \int_0^t F_r dr = M_0 + \int_0^t Z_r dW_r - \int_0^t F_r dr.$$

On vérifie facilement que (Y,Z) ainsi construit est une solution de l'EDSR étudiée puisque *comme* $Y_T = \xi$,

$$Y_t - \xi = M_0 + \int_0^t Z_r dW_r - \int_0^t F_r dr - \left(M_0 + \int_0^T Z_r dW_r - \int_0^T F_r dr \right)$$

finalement, on obtient,

$$Y_t = \int_t^T F_r dr - \int_t^T Z_r dW_r.$$

L'unicité est évidente pour les solution vérifiant $Z \in M^2$. ■

Théorème 2.1 *Pardoux-Peng[1] Sous l'ypothèse* (L), *l'EDSR* 2.1 *possède une unique solution* (Y, Z) *telle que* $Z \in M^2$.

Preuve. *L'idée de la démonstration est basée sur un argument de point fixe sur l'espace de Banach* B^2 *des solutions* (Y, Z). *Ceci en construisant une application* Ψ *de* B^2 *dans lui-même, telle que* (Y, Z) *est solution de l'EDSR* 2.1 *si et seulement si* (Y, Z) *est un point fixe de* Ψ.

Pour (U, V) *élément de* B^2, *on définit* $(Y, Z) = \Psi(U, V)$ *comme étant la solution de l'EDSR :*

$$Y_t = \xi + \int_t^T f(r, U_r, V_r) dr - \int_t^T Z_r dW_r, \qquad 0 \le t \le T.$$

Remarquons que cette derniére EDSR posséde une unique solution qui est dans B^2. *En effet, posons* $F_r = f(r, U_r, V_r)$. *Ce processus appartient à* M^2 *puisque,* f *étant Lipshitz,*

$$|F_r| \le |f(r, 0, 0)| + K |U_r| + K \|V_r\|,$$

et ces trois dernières processus sont de carré intégrable. Par suite, nous pouvons appliquer le Lemme (2.1) pour obtenir une unique solution (Y, Z) *telle que* $Z \in M^2$. (Y, Z) *appartient à* B^2 *: l'intégralité de* Z *est obtenue par construction et, d'aprés la proposition (2.1),* Y *appartient à* S_c^2. *L'application* Ψ *de* B^2*dans lui-même est donc bien définie.*

Soient (U, V) *et* (U', V') *deux élément de* B^2 *et* $(Y, Z) = \Psi(U, V)$,

$\left(Y^{'}, Z^{'}\right) = \Psi\left(U^{'}, V^{'}\right).$

Posons $y = Y - Y^{'}$ *et* $z = Z - Z^{'}$. *On a,* $y_T = 0$ *et*

$$dY_t = -\left\{f\left(t, U_t, V_t\right) - f\left(t, U_t^{'}, V_t^{'}\right)\right\} dt + Z_t dW_t.$$

On applique la formule de Itô à $e^{\alpha t}\left|Y_t\right|^2$ *pour obtenir :*

$$\begin{aligned} d\left(e^{\alpha t}\left|Y_t\right|^2\right) &= \alpha e^{\alpha t}\left|Y_t\right|^2 dt - 2e^{\alpha t}Y_t.\left\{f\left(t, U_t, V_t\right) - f\left(t, U_t^{'}, V_t^{'}\right)\right\} dt \\ &+2e^{\alpha t}Y_t.Z_t dW_t + e^{\alpha t}\left\|Z_t\right\|^2 dt. \end{aligned}$$

Par conséquent, intégrant entre t *et* T, *on obtient*

$$\begin{aligned} e^{\alpha t}\left|Y_t\right|^2 + \int_t^T e^{\alpha r}\left\|Z_r\right\|^2 dr &= \int_t^T e^{\alpha r}\left(-\alpha\left|Y_r\right|^2 + 2y_r.\left\{f\left(r, U_r, V_r\right) - f\left(r, U_r^{'}, V_r^{'}\right)\right\}\right) dr \\ &- \int_t^T 2e^{\alpha r}Y_r.Z_r dW_r, \end{aligned}$$

et, comme f *est Lipshitz, il vient, notant* u *et* v *pour* $U - U^{'}$ *et* $V - V^{'}$ *respectivement,*

$$\begin{aligned} e^{\alpha t}\left|Y_t\right|^2 + \int_t^T e^{\alpha r}\left\|Z_r\right\|^2 dr &\leq \int_t^T e^{\alpha r}\left(-\alpha\left|Y_r\right|^2 + 2K\left|Y_r\right|\left|u_r\right| + 2K\left|y_r\right|\left\|v_r\right\|\right) dr \\ &- \int_t^T 2e^{\alpha r}Y_r.Z_r dW_r. \end{aligned}$$

Pour tout $\varepsilon > 0$, *on a*

$$2ab \leq \frac{a^2}{\varepsilon} + \varepsilon b^2,$$

et donc, l'inégalité précédente donne

$$\begin{aligned} e^{\alpha t}\left|Y_t\right|^2 + \int_t^T e^{\alpha r}\left\|Z_r\right\|^2 dr &\leq \int_t^T e^{\alpha r}\left(-\alpha + \frac{2K^2}{\varepsilon}\right)\left|Y_r\right|^2 dr - \int_t^T 2e_r^{\alpha r}Y_r.Z_r dW_r \\ &+\varepsilon\int_t^T e^{\alpha r}\left(\left|u_r\right|^2 + \left\|v_r\right\|^2\right) dr, \end{aligned}$$

et prenant $\alpha = \dfrac{2K^2}{\varepsilon}$*, on a, notant*

$$R_\varepsilon = \varepsilon \int_0^T e^{\alpha r} \left(|u_r|^2 + \|v_r\|^2 \right) dr,$$

$$\forall t \in [0,T], \qquad e^{\alpha t} |Y_t|^2 + \int_t^T e^{\alpha r} \|Z_r\|^2 dr \leq R_\varepsilon - 2 \int_t^T e^{\alpha r} Y_r . Z_r dW_r. \tag{2.3}$$

D'aprés le lemme (2.1), la martingale locale

$$\left\{ \int_0^T e^{\alpha r} Y_r Z_r dW_r \right\}_{t \in [0.T]},$$

est une martingale uniformément intégrable nulle en 0 puisque Y, Y' *appartiennent à* S^2 *et* Z, Z' *appartiennent à* M^2.

En prenant l'espérance, il vient que pour $t = 0$:

$$\mathbb{E}\left[\int_0^T e^{\alpha t} \|Z_r\|^2 dr \right] \leq \mathbb{E}\left[R_\varepsilon \right]. \tag{2.4}$$

Revenant à l'inégalité 2.3*, les inégalités Burkholder-Davis-Gundy fournissent fournit*

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\left[\sup_{0 \leq t \leq T} e^{\alpha t} |Y_t|^2 \right] &\leq \mathbb{E}[R_\varepsilon] + \mathbb{E}\left[\left(\int_0^T e^{2\alpha} |Y_r|^2 \|Z_r\|^2 dr \right)^{\frac{1}{2}} \right] \\ &\leq \mathbb{E}[R_\varepsilon] + C\mathbb{E}\left[\sup_{0 \leq t \leq T} e^{\frac{\alpha t}{2}} |Y_t| \left(\int_0^T e^{\alpha r} \|Z_r\|^2 dr \right)^{\frac{1}{2}} \right], \end{aligned}$$

puit, comme $ab \leq \dfrac{a^2}{2} + \dfrac{b^2}{2}$,

$$\mathbb{E}\left[\sup_{0 \leq t \leq T} e^{\alpha t} |Y_t|^2 \right] \leq \mathbb{E}[R_\varepsilon] + \frac{1}{2} \mathbb{E}\left[\sup_{0 \leq t \leq T} e^{\alpha t} |Y_t|^2 \right] + \frac{C^2}{2} \mathbb{E}\left[\int_0^T e^{\alpha r} \|Z_r\|^2 dr \right].$$

Prenant en considération l'inégalité 2.4*, on obtient finalement*

$$\mathbb{E}\left[\sup_{0 \leq t \leq T} e^{\alpha t} |Y_t|^2 + \int_0^T e^{\alpha r} \|Z_r\|^2 dr \right] \leq \left(3 + C^2 \right) \mathbb{E}[R_\varepsilon],$$

et par suite, revenant à la définition de R_ε,

$$\mathbb{E}\left[\sup_{0\le t\le T} e^{\alpha t}\left|Y_t\right|^2+\int_0^T e^{\alpha r}\left\|Z_r\right\|^2 dr\right]\le \varepsilon\left(3+C^2\right)(1\vee T)\,\mathbb{E}\left[\sup_{0\le t\le T} e^{\alpha t}\left|u_t\right|^2+\int_0^T e^{\alpha r}\left\|v_r\right\|^2 dr\right].$$

Prenons ε tel que $\varepsilon\left(3+C^2\right)(1\vee T)=\frac{1}{2}$, de sorte que l'application Ψ est alors une contraction stricte de B^2 dans lui-même si on le munit de la norme

$$\left\|(U,V)\right\|_\alpha=\mathbb{E}\left[\sup_{0\le t\le T} e^{\alpha t}\left|U_t\right|^2+\int_0^T e^{\alpha r}\left\|V_r\right\|^2 dr\right]^{\frac{1}{2}},$$

qui en fait un espace de banach-cette derniére norme étant équivalent à la norme usuelle correspondant au cas $\alpha=0$.
Ψ posséde donc un unique point fixe, ce qui assure l'existence et l'unicité d'une solution de l'EDSR 2.1 dans B^2. ■

2.4 *Une estimation à priori*

Dans ce paragraphe en donnant une premiére estimation sur les EDSR : il s'agit en fait d'étudier la dépendance de la solution de EDSR par rapport aux données qui sont ξ et le processus $\{f(t,0,0)\}_{0\le t\le T}$.

Proposition 2.2 *Supposons que (ξ,f) vérifie (L). Soit (Y,Z) la solution de l'EDSR 2.1 telle que $Z\in M^2$. Alors, il existe une constante C_u universelle telle que*

$$\mathbb{E}\left[\sup_{0\le t\le T} e^{\beta t}\left|Y_t\right|^2+\int_0^T e^{\beta t}\left\|Z_t\right\|^2 dt\right]\le C_u\mathbb{E}\left[e^{\beta T}\left|\xi\right|^2+\int_0^T e^{\beta t}\left|f(t,0,0)\right|^2 dt\right],$$

avec $\beta=1+2K+2K^2$.

Preuve. *On applique la formule de Itô à $e^{\beta t}\left|Y_t\right|^2$ pour obtenir :*

$$\begin{aligned} e^{\beta t}\left|Y_t\right|^2+\int_t^T e^{\beta r}\left\|Z_r\right\|^2 dr &= e^{\beta T}\left|\xi\right|^2+\int_t^T e^{\beta r}\left(-\beta\left|Y_r\right|^2+2Y_r.f(r,Y_r,Z_r)\right)dr \\ &\quad -\int_t^T 2e^{\beta r}Y_r.Z_r dW_r. \end{aligned}$$

Comme f *est K-lipschitz, on a, pour tout* (t, Y, Z),

$$2y.f(t,Y,Z) \leq 2|Y||f(t,0,0)| + 2K|Y|^2 + 2K|Y|\|Z\|,$$

et donc utilisant le fait que $2ab \leq \varepsilon a^2 + \dfrac{b^2}{\varepsilon}$ *pour* $\varepsilon = 1$ *puis* 2,

$$2Y.f(t,Y,Z) \leq \left(1 + 2K + 2K^2\right)|Y|^2 + |f(t,0,0)|^2 + \frac{\|Z\|^2}{2}.$$

Si on prend $\beta = 1 + 2K + 2K^2$ *on obtient, pour tout* $t \in [0, T]$,

$$\begin{aligned} e^{\beta t}|Y_t|^2 + \tfrac{1}{2}\textstyle\int_t^T e^{\beta r}\|Z_r\|^2 dr \quad & \leq e^{\beta T}|\xi|^2 + \textstyle\int_0^T e^{\beta r}|f(r,0,0)|^2 dr \\ & -2\textstyle\int_t^T e^{\beta r} Y_r.Z_r dW_r. \end{aligned} \tag{2.5}$$

En prenant l'espérance, on obtient facilement, pour $t = 0$,

$$\mathbb{E}\left[\int_0^T e^{\beta r}\|Z_r\|^2 dr\right] \leq 2\mathbb{E}\left[e^{\beta T}|\xi|^2 + \int_0^T e^{\beta r}|f(r,0,0)|^2 dr\right].$$

Revenant à l'inégalité 2.5, *les inégalité BDG fournissant,*

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\left[\sup_{0\leq t\leq T} e^{\beta t}|Y_t|^2\right] \quad & \leq \mathbb{E}\left[e^{\beta T}|\xi|^2 + \textstyle\int_0^T e^{\beta r}|f(r,0,0)|^2 dr\right] \\ & +C\mathbb{E}\left[\left(\textstyle\int_0^T e^{2\beta r}|Y_r|^2\|Z_r\|^2 dr\right)^{\frac{1}{2}}\right]. \end{aligned}$$

D'autre part,

$$\begin{aligned} C\mathbb{E}\left[\left(\textstyle\int_0^T e^{2\beta r}|Y_r|^2\|Z_r\|^2 dr\right)^{\frac{1}{2}}\right] \quad & \leq C\mathbb{E}\left[\sup_{0\leq t\leq T} e^{\frac{\beta t}{2}}|Y_t|\left(\textstyle\int_0^T e^{\beta r}\|Z_r\|^2 dr\right)^{\frac{1}{2}}\right] \\ & \leq \tfrac{1}{2}\mathbb{E}\left[\sup_{0\leq t\leq T} e^{\alpha t}|Y_t|^2\right] + \tfrac{C^2}{2}E\left[\textstyle\int_0^T e^{\beta r}\|Z_r\|^2 dr\right]. \end{aligned}$$

Il vient alors,

$$\mathbb{E}\left[\sup_{0\leq t\leq T} e^{\beta t}\left|Y_t\right|^2\right] \leq 2\mathbb{E}\left[e^{\beta T}\left|\xi\right|^2+\int_0^T e^{\beta r}\left|f\left(r,0,0\right)\right|^2 dr\right]$$
$$+C^2\mathbb{E}\left[\int_0^T e^{\beta r}\left\|Z_r\right\|^2 dr\right],$$

et finalement on obtient

$$\mathbb{E}\left[\sup_{0\leq t\leq T} e^{\beta t}\left|Y_t\right|^2+\int_0^T e^{\beta t}\left\|Z_r\right\|^2 dr\right] \leq 2\left(2+C^2\right)\mathbb{E}\left[e^{\beta T}\left|\xi\right|^2+\int_0^T e^{\beta r}\left|f\left(r,0,0\right)\right|^2 dr\right],$$

ce qui termine la preuve de la proposition prenant $C_u = 2\left(2+C^2\right)$. ■

2.5 *Le rôle de* Z

Nous allons voir que le rôle de Z, *plus précisément celui du terme* $\int_t^T Z_r dW_r$ *est de rendre le processus* Y *adapté et que lorsque ceci n'est pas nécessaire* Z *est nul.*

Proposition 2.3 *Soit* (Y,Z) *la solution de l'EDSR* 2.1 *et soit* τ *un temps d'arrêt majoré par* T.

On suppose, outre l'hypothèse (L), *que* ξ *est* $\mathcal{F}_\tau$*-mesurable et que* $f\left(t,Y,Z\right)=0$ *dés que* $t\geq\tau$.
Alors

$$Y_t = Y_{t\wedge\tau} \text{ et } Z_t = 0 \quad \text{si } \ t\geq\tau.$$

Preuve. *Ona P-p.s,*

$$Y_t = \xi+\int_t^T f\left(r,Y_r,Z_r\right)dr-\int_t^T Z_r dW_r, \qquad 0\leq t\leq T,$$

et donc, pour $t = \tau$, *comme* $f(t, Y, Z) = 0$ *dés que* $t \geq \tau$,

$$Y_\tau = \xi + \int_\tau^T f(r, Y_r, Z_r)\, dr - \int_\tau^T Z_r dW_r = \xi - \int_\tau^T Z_r dW_r.$$

Il vient alors $Y_\tau = E(\tau \mid \mathcal{F}_\tau) = \xi$ *et par suite* $\int_\tau^T Z_r dW_r \ = 0$ *d'où l'on tire que*

$$\mathbb{E}\left[\left(\int_\tau^T Z_r dW_r\right)^2\right] = \mathbb{E}\left[\int_\tau^T \|Z_r\|^2\, dr\right] = 0,$$

et finalement que $Z_r.1_{r \geq \tau} = 0$.

Il s'en suit immédiatement que, si $t \geq \tau, Y_t = Y_\tau$, *puisque par hypothèse,*

$$Y_\tau = Y_t + \int_\tau^T f(r, Y_r, Z_r)\, dr - \int_\tau^T Z_r dW_r = Y_t + 0 - 0,$$

ce qui termine la preuve. ■

Notons que dans le cas où ξ *et* f *sont déterministes alors* Z *est nul et* Y *est la solution de l'équation différentielle*

$$\frac{dY_t}{dt} = f(t, Y_t, 0) \qquad\qquad Y_T = \xi.$$

2.6 *EDSR linéaires*

Dans ce paragraphe nous étudions le cas particulier des EDSR linéaire pour lesquelles nous allons donner une formule plus ou moins explicite.

On se place dans le cas $k = 1$; Y *est donc réel et* Z *est une matrice de taille* $1 \times d$ *c'est à dire vecteur ligne de dimension* d.

Proposition 2.4 *Soit* $\{(a_t, b_t)\}_{t \in T}$ *un processus à valeurs dans* $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^d$, *progressivement mesurable et borné. Soient* $\{(c_t)\}_{t \in [0,T]}$ *un élément de* $M^2(\mathbb{R})$*et* ξ *une variable aléatoire,* $\mathcal{F}_T-$*mesurable, de carré intégrable, à valeurs réelles.*

L'EDSR linéaire

$$Y_t = \xi + \int_t^T \{a_r Y_r + Z_r b_r + c_r\} \, dr - \int_t^T Z_r dW_r,$$

possède une unique solution qui vérifie :

$$\forall t \in [0,T], \qquad Y_t = \Gamma^{-1}\mathbb{E}\left(\xi\Gamma_T + \int_t^T c_r\Gamma_r dr \mid \mathcal{F}_t\right),$$

avec, pour tout $t \in [0,T]$,

$$\Gamma_t = \exp\left\{\int_0^t b_r.dW_r - \frac{1}{2}\int_0^t |b_r|^2 \, dr + \int_0^t a_r dr\right\}.$$

Preuve. *Commençons par remarquer que le processus* Γ *vérifier :*

$$d\Gamma_t = \Gamma_t \left(a_t dt + b_t.dW_t\right), \qquad \Gamma_0 = 1.$$

D'autre part, comme b *est borné, l'inégalité de Doob montre que* Γ *appartient à* S^2.
De plus, les hypothèses de cette proposition assure l'existence d'une unique solution (Y, Z) *à l'EDSR linéaire ; il suffit de poser* $f(t, Y, Z) = a_t Y + Z b_t + c_t$ *et de vérifier que* (L) *est satisfaite.* Y *appartient à* S^2*par la proposition* (2.1).
La formule d'intégration par parties donne

$$\begin{aligned} d\Gamma_t Y_t &= \Gamma_t dY_t + Y_t d\Gamma_t + d\langle \Gamma, Y\rangle_t \\ &= -\Gamma_t c_t dt + \Gamma_t Z_t dW_t + \Gamma_t Y_t b_t.dW_t, \end{aligned}$$

ce qui montre que le processus $\Gamma_t Y_t + \int_0^t c_r \Gamma_r dr$ *est une martingale locale qui est en fait une martingale car* $c \in M^2$ *et* Γ, Y *sont dans* S^2. *Par suite,*

$$\Gamma_t Y_t + \int_0^t c_r\Gamma_r dr = \mathbb{E}\left(\Gamma_T Y_T + \int_0^T c_r\Gamma_r dr \mid \mathcal{F}_t\right),$$

ce qui donne la formule annoncée. ■

Remarque 2.2 *Notons que si* $\xi \geq 0$ *et si* $c_t \geq 0$ *alors la solution de l'EDSR linéaire vérifier* $Y_t \geq 0$.

Cette remarque va nous permettre d'obtenir le théorème de comparaison au paragraphe suivant.

Pour illustrer ce résultat prenons le cas où a *et* c *est nuls. On a alors*

$$Y_t = \mathbb{E}\left(\xi \exp\left\{\int_t^T b_r.dW_r - \frac{1}{2}\int_t^T |b_r|^2 \, dr\right\} \mid \mathcal{F}_t\right) = \mathbb{E}^*\left(\xi \mid \mathcal{F}_t\right),$$

où P^* *est la mesure de densité par rapport à* P

$$L_T = \exp\left\{\int_0^T b_r.dW_r - \frac{1}{2}\int_0^T |b_r|^2 \, dr\right\}.$$

Une autre façon de voire cela, plus dans l'esprit «probabilité risque neutre », est de regarder l'EDSR sous P^*.

En effet, sous P^*, $B_t = W_t - \int_0^t b_r dr$ *est un MB - c'est le théorème de Girsanov. Or l'équation peut s'écrire*

$$-dY_t = Z_t b_t dt - Z_t dW_t = -Z_t dB_t, \qquad Y_T = \xi.$$

Donc, sous P^*, Y *est une martingale, ce qui montre aussi la formule.*

On retrouve ainsi les changements de mesure de probabilité du type «transformation de Girsanov».

Chapitre 3

Existence du contrôle optimal pour les EDSR linéaires

3.1 *Préliminaires*

Soit $W = (W_t)_{t\in[0,T]}$ *un mouvement Brownien de dimension* r *définie sur un espace probabilisé filtré* $\left(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t\in[0,T]}, P\right)$*, On suppose que* $(\mathcal{F}_t)_{t\in[0,T]} = \sigma(W(s), 0 \leq s \leq t)$ *est la filtration naturelle du mouvement Brownien , soit* ξ *est une variable aléatoire* $\mathcal{F}_T$ *mesurable telle que*

$$\mathbb{E}\left[|\xi|^2\right] < \infty,$$

soient a, b *et* c *sont bornées et progressivement mesurables par rapport à la filtration* $\mathcal{F}_t$*, on considére le problème de contrôle optimal gouvernés par l'EDSR linéaire*

$$Y_t = \xi + \int_t^T \{a_s Y_s + b_s Z_s + c_s u_s\} ds - \int_t^T Z_s dW_s, \tag{3.1}$$

Définition 3.1 *On appelle contrôle admissible tout processus* $u = \left(u(t)_{0\leq t\leq T}\right)$ *progressivement mesurable à valeurs dans* U *de* $\mathbb{R}^k$.

On note par U_{ad} *l'ensemble de tous les contrôles admissibles.*

Pour tout $u \in U_{ad}$

Soit maintenant la fonction coût définit par

$$J(u) = \mathbb{E}\left[g(Y_0) + \int_0^T h(t, Y_t, Z_t, u_t)\, dt\right]; \tag{3.2}$$

où

$h : \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^{k\times d} \times U \longrightarrow \mathbb{R}$

$g : \mathbb{R}^k \longrightarrow \mathbb{R},$

sont des fonctions déterministes données.

Le problème de contrôle optimal est de minimiser le coût J *sur l'ensemble des contrôles admissibles.*

On suppose que

(A_1) $U \subseteq \mathbb{R}^k$ *est convexe et compact.*

(A_2) h *et* g *sont continues et convexes.*

On note par

$L^2_{\mathcal{F}}\left(0, T; \mathbb{R}^k\right) := \left\{ f(t, w) \text{ est adapté telle que} : \|f\|_T = \mathbb{E}\int_0^T f(t, w)^2\, dt < \infty \right\}.$

$U_{ad} := \left\{ u \in L^2_{\mathcal{F}}\left(\mathbb{R}^d\right); u_t \in U, \forall t \in [0, T], P.p.s \right\}$ *avec* $U \subseteq \mathbb{R}^k$.

Notez que nous avons une contrainte supllémentaire qu'un contrôle doit être carré-intégrable juste pour assurer l'existence des solutions 3.1 *par* u.

Le problème de contrôle optimal peut être enoncé comme suit

Problème :

Minimize 3.2 *sur l'ensemble* U_{ad}. *Quand* (A_1) *et* (A_2) *sont supposés, le problème s'appelle habituellement un problème de contrôle optimal stochastique linéaire-convexe, puisque le système contrôlé est linéaire et le coût fonctionnel est convexe.*

3.2 Existence d'un contrôle optimal strict

Le résultat principal de cette section est

Théorème 3.1 *Si* (A_1) *et* (A_2) *sont assurez, alors il existe un processus* $\left(\bar{Y}_t, \bar{Z}_t, \bar{u}_t\right)$ *adapté par rapport à la filtration* $\mathcal{F}_t$ *telle que,*

(i) $\left(\bar{Y}_t, \bar{Z}_t\right)$ *est la solution unique de l'EDSR* 3.1.

(ii) $\bar{u}$ *minimiser J.*

Supposons d'abord que (A_1) *et* (A_2) *sont verifieès ,*

Soit (Y^j, Z^j, u^j) *une suite minimisante, i.e*

$$\lim_{j \longrightarrow \infty} J\left(u^j\right) = \inf_{u \in U_{ad}} J(u) \quad \text{comme } j \longrightarrow \infty.$$

Puisque U *est compact alors, il existe un constant positive* k *telle que*

$$\mathbb{E}\left[\int_0^T \left|u_t^j\right|^2 dt\right] < k, \quad \forall j \geq 0,$$

ainsi, il y a une sous suite notée par u^j *telle que*

$$u^j \longrightarrow \bar{u} \quad \text{faiblement dans } L^2_{\mathcal{F}}\left(0, T; \mathbb{R}^k\right).$$

Par le théorème de Mazur, la suite de combinaisons convexe,

$$\tilde{u}^j = \sum_{i \geq 0} \alpha_{ij} u^{i+j} \quad avec \ \ \alpha_{ij} \geq 0, et \ \sum_{i \geq 0} \alpha_{ij} = 1,$$

satisfait

$$\tilde{u}^j \longrightarrow \bar{u} \quad \text{fortement dans } L^2_{\mathcal{F}}\left(0, T; \mathbb{R}^k\right). \tag{3.3}$$

Puisque l'ensemble $U \subseteq \mathbb{R}^k$ *est convexe et compact, alors* $\bar{u} \in U_{ad}$

Théorème 3.2 *Soit* $\left(\tilde{Y}^j, \tilde{Z}^j, \tilde{u}^j\right)$ *est la solution unique de l'EDSR suivante*

$$\tilde{Y}_t^j = \xi + \int_t^T \left(a_s \tilde{Y}_s^j + \tilde{Z}^j b_s + c_s \tilde{u}_s^j\right) ds - \int_t^T \tilde{Z}_s^j dW_s, \tag{3.4}$$

et $\left(\bar{Y}, \bar{Z}, \bar{u}\right)$ *est la solution unique de l'EDSR suivante*

$$\bar{Y}_t = \xi + \int_t^T \left(a_s \bar{Y}_s + \bar{Z}_s b_s + c_s \bar{u}_s\right) ds - \int_t^T \bar{Z}_s dW_s, \tag{3.5}$$

alors

$$\tilde{Y}_t^j \longrightarrow \bar{Y}_t \quad \textit{fortement dans } C_{\mathcal{F}}\left(0, T; \mathbb{R}^k\right), \tag{3.6}$$

et

$$\int_t^T \tilde{Z}_s^j dW_s \longrightarrow \int_t^T \bar{Z}_s dW_s \quad \textit{fortement dans } L_{\mathcal{F}}^2\left(0, T; \mathbb{R}^k\right). \tag{3.7}$$

Preuve. *La preuve de 3.6.*

On a

$$\begin{aligned}
\tilde{Y}_t^j &= \xi + \int_t^T \left(a_s \tilde{Y}_s^j + \tilde{Z}^j b_s + c_s \tilde{u}_s^j\right) ds - \int_t^T \tilde{Z}_s^j dW_s, \\
\bar{Y}_t &= \xi + \int_t^T \left(a_s \bar{Y}_s + \bar{Z}_s b_s + c_s \bar{u}_s\right) ds - \int_t^T \bar{Z}_s dW_s, \\
\left(\tilde{Y}_t^j - \bar{Y}_t\right) &= \int_t^T \left[a_s\left(\tilde{Y}_s^j - \bar{Y}_s\right) + b_s\left(\tilde{Z}_s^j - \bar{Z}_s\right) + c_s\left(\tilde{u}_s^j - \bar{u}_s\right)\right] ds - \int_t^T \left(\tilde{Z}_s^j - \bar{Z}_s\right) dW_s \\
d\left(\tilde{Y}_t^j - \bar{Y}_t\right) &= -\left[a_t\left(\tilde{Y}_t^j - \bar{Y}_t\right) + b_t\left(\tilde{Z}_t^j - \bar{Z}_t\right) + c_t\left(\tilde{u}_t^j - \bar{u}_t\right)\right] dt + \left(\tilde{Z}_t^j - \bar{Z}_t\right) dW_t,
\end{aligned}$$

on appliquent la formule d'ito à $\left|\tilde{Y}_t^j - \bar{Y}_t\right|^2$, *on obtient*

$$\begin{aligned}
d\left|\tilde{Y}_t^j - \bar{Y}_t\right|^2 &= 2\left|\tilde{Y}_t^j - \bar{Y}_t\right| d\left|\tilde{Y}_t^j - \bar{Y}_t\right| + \left\langle \tilde{Y}_t^j - \bar{Y}_t, \tilde{Y}_t^j - \bar{Y}_t\right\rangle \\
&= 2\left|\tilde{Y}_t^j - \bar{Y}_t\right| \left[-a_t\left(\tilde{Y}_t^j - \bar{Y}_t\right) - b_t\left(\tilde{Z}_t^j - \bar{Z}_t\right) - c_t\left(\tilde{u}_t^j - \bar{u}_t\right) dt\right] + \\
&\quad 2\left|\tilde{Y}_t^j - \bar{Y}_t\right| \left|\tilde{Z}_t^j - \bar{Z}_t\right| dW_t + \left\|\tilde{Z}_t^j - \bar{Z}_t\right\|^2 dt,
\end{aligned}$$

passant à l'integrale , ona

$$\left|\tilde{Y}_t^j-\bar{Y}_t\right|^2=2\int_t^T\left\langle \tilde{Y}_s^j-\bar{Y}_s,a_s\left(\tilde{Y}_s^j-\bar{Y}_s\right)+b_s\left(\tilde{Z}_s^j-\bar{Z}_s\right)+c_s\left(\tilde{u}_s^j-\bar{u}_s\right)\right\rangle ds$$
$$-2\int_t^T\left\langle \tilde{Y}_s^j-\bar{Y}_s,\tilde{Z}_s^j-\bar{Z}_s\right\rangle dW_s-\int_t^T\left\|\tilde{Z}_s^j-\bar{Z}_s\right\|^2 ds,$$

donc

$$\left|\tilde{Y}_t^j-\bar{Y}_t\right|^2+\int_t^T\left\|\tilde{Z}_t^j-\bar{Z}_t\right\|^2 ds=2\int_t^T\left\langle \tilde{Y}_s^j-\bar{Y}_s,a_s\left(\tilde{Y}_s^j-\bar{Y}_s\right)+b_s\left(\tilde{Z}_s^j-\bar{Z}_s\right)+c_s\left(\tilde{u}_s^j-\bar{u}_s\right)\right\rangle ds-$$
$$2\int_t^T\left\langle \tilde{Y}_s^j-\bar{Y}_s,\tilde{Z}_s^j-\bar{Z}_s\right\rangle dW_s.$$

Ona l'integrale suivante $\int_t^T\left\langle \tilde{Y}_s^j-\bar{Y}_s,\tilde{Z}_s^j-\bar{Z}_s\right\rangle dW_s$ *est une martingale de carret integrable nulle on* 0

alors

$$\mathbb{E}\left[\sup_{t\in[0.T]}\left|\tilde{Y}_t^j-\bar{Y}_t\right|^2\right]+\mathbb{E}\left[\int_0^T\left\|\tilde{Z}_t^j-\bar{Z}_t\right\|^2 ds\right]\leq 2\mathbb{E}\left[\int_0^T|a_s|\left|\tilde{Y}_t^j-\bar{Y}_t\right|\left|\tilde{Y}_t^j-\bar{Y}_t\right|ds\right.$$
$$+\int_0^T|b_s|\left|\tilde{Y}_t^j-\bar{Y}_t\right|\left|\tilde{Z}_t^j-\bar{Z}_t\right|ds$$
$$\left.+\int_0^T|c_s|\left|\tilde{Y}_t^j-\bar{Y}_t\right|\left|\tilde{u}_s^j-\bar{u}_s\right|ds\right],$$

puisque a_t,b_t,c_t *sont bornées alors ona :*

$$|a_t|\leq M\quad,|b_t|\leq k,\quad\|c_t\|\leq\gamma,$$

alors et d'aprés l'inegalité de Young; nous donne

$$\mathbb{E}\left[\sup_{t\in[0.T]}\left|\tilde{Y}_t^j-\bar{Y}_t\right|^2\right]+\mathbb{E}\left[\int_0^T\left\|\tilde{Z}_s^j-\bar{Z}_s\right\|^2 ds\right]\leq 2M\mathbb{E}\left[\int_0^T\left|\tilde{Y}_s^j-\bar{Y}_s\right|^2 ds\right]+k\mathbb{E}\left[\int_0^T\left[\frac{1}{\alpha^2}\left|\tilde{Y}_s^j-\bar{Y}_s\right|^2\right.\right.$$
$$\left.\left.+\alpha^2\left\|\tilde{Z}_s^j-\bar{Z}_s\right\|^2\right]ds\right]+\gamma\mathbb{E}\left[\int_0^T\left|\tilde{Y}_s^j-\bar{Y}_s\right|^2 ds+\right.$$
$$\left.\int_0^T\left|\tilde{u}_s^j-\bar{u}_s\right|^2 ds\right].$$

On choisit $\alpha = \frac{1}{\sqrt{2k}}$ *pour obtenir*

$$\mathbb{E}\left[\sup_{t\in[0.T]}\left|\tilde{Y}_t^j - \bar{Y}_t\right|^2\right] + \mathbb{E}\left[\int_0^T \left\|\tilde{Z}_s^j - \bar{Z}_s\right\|^2 ds\right] \leq 2M\mathbb{E}\left[\int_0^T \left|\tilde{Y}_s^j - \bar{Y}_s\right|^2 ds\right] + k\mathbb{E}\left[\int_0^T 2k\left|\tilde{Y}_s^j - \bar{Y}_s\right|^2 + \frac{1}{2k}\left\|\tilde{Z}_s^j - \bar{Z}_s\right\| ds\right]$$
$$+\gamma\mathbb{E}\left[\int_0^T \left|\tilde{Y}_s^j - \bar{Y}_s\right|^2 ds + \int_0^T \left|\tilde{u}_s^j - \bar{u}_s\right|^2 ds\right],$$

donc

$$\mathbb{E}\left[\sup_{t\in[0.T]}\left|\tilde{Y}_t^j - \bar{Y}_t\right|^2\right] + \frac{1}{2}\mathbb{E}\left[\int_0^T \left\|\tilde{Z}_s^j - \bar{Z}_s\right\|^2 ds\right] \leq \left(2M + 2k^2 + \gamma\right)\mathbb{E}\left[\int_0^T \left|\tilde{Y}_s^j - \bar{Y}_s\right|^2 ds\right] + \gamma\mathbb{E}\left[\int_0^T \left|\tilde{u}_s^j - \bar{u}_s\right|^2 ds\right]. \tag{3.8}$$

Ona d'après l'inégalitè3.8, nous déduisons deux inégalités :

$$\mathbb{E}\left[\sup_{t\in[0.T]}\left|\tilde{Y}_t^j - \bar{Y}_t\right|^2\right] \leq \left(2M + 2k^2 + \gamma\right)\mathbb{E}\left[\int_0^T \left|\tilde{Y}_s^j - \bar{Y}_s\right|^2 ds\right] + \gamma\mathbb{E}\left[\int_0^T \left|\tilde{u}_s^j - \bar{u}_s\right|^2 ds\right],$$

et

$$\frac{1}{2}\mathbb{E}\left[\int_0^T \left\|\tilde{Z}_s^j - \bar{Z}_s\right\|^2 ds\right] \leq \left(2M + 2k^2 + \gamma\right)\mathbb{E}\left[\int_0^T \left|\tilde{Y}_s^j - \bar{Y}_s\right|^2 ds\right] + \gamma\mathbb{E}\left[\int_0^T \left|\tilde{u}_s^j - \bar{u}_s\right|^2 ds\right].$$

On applique le lemme de Gronwall

$$\mathbb{E}\left[\sup_{t\in[0.T]}\left|\tilde{Y}_t^j - \bar{Y}_t\right|^2\right] \leq \left(2M + 2k^2 + \gamma\right)\mathbb{E}\left[\int_0^T \left|\tilde{Y}_s^j - \bar{Y}_s\right|^2 ds\right] + \gamma\mathbb{E}\left[\int_0^T \left|\tilde{u}_s^j - \bar{u}_s\right|^2 ds\right].$$

On note par

$$g(t) = \mathbb{E}\left[\left|\tilde{Y}_t^j - \bar{Y}_t\right|^2\right],$$
$$a = \gamma \mathbb{E}\left[\int_0^T \left|\tilde{u}_s^j - \bar{u}_s\right|^2 ds\right],$$

et

$$b = \left(2M + 2k^2 + \gamma\right),$$

donc

$$\mathbb{E}\left[\sup_{t\in[0.T]}\left|\tilde{Y}_t^j - \bar{Y}_t\right|^2\right] \leq \gamma \mathbb{E}\left[\int_t^T \left|\tilde{u}_s^j - \bar{u}_s\right|^2 ds\right] \exp\left(2M + 2k^2 + \gamma\right),$$

comme

$$\tilde{u}^j \to \bar{u} \text{ quand } j \to \infty \text{ dans } L_{\mathcal{F}}^2\left(0, T; \mathbb{R}^k\right),$$

alors

$$\tilde{Y}_t^j \longrightarrow \bar{Y}_t \text{ fortement dans } C_{\mathcal{F}}\left(0, T; \mathbb{R}^k\right).$$

D'aprés 3.7 *ona*

$$\mathbb{E}\left[\int_0^T \left\|\tilde{Z}_s^j - \bar{Z}_s\right\|^2 ds\right] \leq 2\left(2M + 2k^2 + \gamma\right)\mathbb{E}\left[\int_0^T \left|\tilde{Y}_s^j - \bar{Y}_s\right|^2 ds\right]$$
$$+2\gamma \mathbb{E}\left[\int_0^T \left|\tilde{u}_s^j - \bar{u}_s\right|^2 ds\right].$$

Puisque les suites $\left(\tilde{Y}_s^j\right)$ *et* $(\tilde{u}_s^j)$ *sont convergentes, alors*

$$\mathbb{E}\left[\int_0^T \left\|\tilde{Z}_t^j - \bar{Z}_t\right\|^2 ds\right] \longrightarrow 0 \text{ comme } j \longrightarrow \infty,$$

ce qui implique

$$\int_t^T \tilde{Z}_s^j dW_s \longrightarrow \int_t^T \bar{Z}_s dW_s \text{ fortement dans } L^2_{\mathcal{F}}\left(0,T;\mathbb{R}^k\right).$$

Il reste de prouver que $\bar{u}$ minimize la fonction coût J sur U_{ad} l'ensemble des contrôles admissibles

Supposons que (A_1) et (A_2) sont assurez .

Soit la suite (Y^j, Z^j, u^j) telle que

$$\begin{aligned}
\lim_{j\longrightarrow\infty} J\left(u^j\right) &= \lim_{j\longrightarrow\infty} \mathbb{E}\left[g\left(Y_0^j\right) + \int_0^T h\left(t, Y_t^j, Z_t^j, u_t^j\right)dt\right] \\
&= \inf_{u\in U_{ad}} J(u),
\end{aligned}$$

on a

$$\begin{aligned}
J(\bar{u}) &= \mathbb{E}\left[g\left(\bar{Y}_0\right) + \textstyle\int_0^T h\left(t, \bar{Y}_t, \bar{Z}_t, \bar{u}_t\right)dt\right] \\
&= \mathbb{E}\left[g\left(\lim_{j\longrightarrow\infty} \tilde{Y}_0^j\right) + \textstyle\int_0^T h\left(t, \lim\limits_{j\longrightarrow\infty} \tilde{Y}_t^j, \lim\limits_{j\longrightarrow\infty} \tilde{Z}_t^j, \lim\limits_{j\longrightarrow\infty} \tilde{u}_t^j\right)dt\right],
\end{aligned}$$

puisque g et h sont continues, alors

$$\begin{aligned}
J(\bar{u}) &= \lim_{j\longrightarrow\infty} J\left(\tilde{u}^j\right) \\
&= \lim_{j\longrightarrow\infty} \mathbb{E}\left[g\left(\tilde{Y}_0^j\right) + \textstyle\int_0^T h\left(t, \tilde{Y}_t^j, \tilde{Z}_t^j, \tilde{u}_t^j\right)dt\right] \\
&= \lim_{j\longrightarrow\infty} \mathbb{E}\left[g\left(\sum\limits_{i\geq 0}\alpha_{ij} Y_0^{i+j}\right) + \textstyle\int_0^T h\left(t, \sum\limits_{i\geq 0}\alpha_{ij} Y_t^{i+j}, \sum\limits_{i\geq 0}\alpha_{ij} Z_t^{i+j}, \sum\limits_{i\geq 0}\alpha_{ij} u_t^{i+j}\right)dt\right],
\end{aligned}$$

puisque g et h sont convexes, alors

$$\begin{aligned}
J(\bar{u}) \quad &\leq \lim_{j\longrightarrow\infty}\sum_{i\geq 0}\alpha_{ij}\mathbb{E}\left[g\left(Y_0^{i+j}\right)+\int_0^T h\left(t,Y_t^{i+j},Z_t^{i+j},u_t^{i+j}\right)dt\right]\\
&= \lim_{j\longrightarrow\infty}\sum_{i\geq 0}\alpha_{ij}J\left(u^{i+j}\right)\\
&= \lim_{j\longrightarrow\infty}\sum_{i\geq 1}\alpha_{ij}\underset{1\leq i\leq n_j}{Max}\,J\left(u^{i+j}\right)\\
&= \lim_{j\longrightarrow\infty}\underset{1\leq i\leq n_j}{Max}\,J\left(u^{i+j}\right)\sum_{i\geq 1}\alpha_{ij}\\
&= \lim_{j\longrightarrow\infty}J\left(u^{i+\sigma(j)}\right)\\
&= \inf_{u\in U_{ad}}J(u)\,,
\end{aligned}$$

en conséquence

$$J(\bar{u})\leq\inf_{u\in U_{ad}}J(u)\,.$$

■

Conclusion

Dans ce mémoire on a démontrer l'existence du contrôle optimal pour les équations différentielles stochastiques rétrogrades linéaires où la fonction de coût et sous la forme générale. La méthode de démonstration est basée sur le fait que l'ensemble des valeurs du contrôles est convexe et compact et la fonction de coût est convexe ainsi que le théorème de Mazur.

Bibliographie

[1] *E. Pardoux, S. Peng (1990), Adapted solutions of backward stochastic differential equations, Syst. Control Letters, Vol. 14, 55-61.*

[2] *Jean-Christophe Breton Intégrale de Lebesgue L3 Mathématiques Universite de Rennes 1(2016).*

[3] *Jean-françois Le gall Mouvement brownien,martingales et calcul stochastique Springer.*

[4] *Khaled Bahlali, Boulakhrass Gherbal and Brahim Mezerdi Existence and optimality conditions in stochastic control of linear BSDEs (2000).*

[5] *N. El Karoui, S. Peng, and M-C. Quenez (1997), Backward equations in finance, Math. Finance 7 , no. 1, 1-71 .*

[6] *Philippe B (mass 2001) :Equations différentielles Stochastique Rétrogrades université de Savoie Mont Bla.*

[7] *P. Briand (2002), Introduction aux Equations differentielles stochastiques rétrogrades, Cours de 3éme cycle, Université de Rennes.*

Annexe A : Abréviations et Notations

Les différentes abréviations et notations utilisées tout au long de ce mémoire sont expliquées ci-dessous.

$(\Omega, \mathcal{F}, p)$	*Espace de probabilité.*
$(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$	*Filtration.*
$(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}, P)$	*Espace de probabilité filtré.*
$EDSR$	*Equations différentielles stochastiques rétrogrades.*
$P - p.s$	*presque surement pour la mesure de probabilité p.*
U_{ad}	*L'ensemble des contrôles admissibles*
$\bar{u}$	*Contrôle optimal.*
$\mathbb{E}$	*L'espérance par rapport à la probabilité p*
$J(.)$	*Fonction de coût.*
$B(\mathbb{R})$	*La tribu borélienne sur $\mathbb{R}$*
$B(\mathbb{R}^d)$	*La tribu borélienne sur $\mathbb{R}^d$.*
$M^2(\mathbb{R}^{k\times d})$	*L'espace vectoriel formé des processus Z, prog-mes à valeurs dans $\mathbb{R}^{k\times d}$*
S^2	*Lespace vectoriel formé des processus Y prog-mes à valeurs dans $\mathbb{R}^k$.*
S_c^2	*Le sous formé par les processus continus.*
B^2	*L'espace de Banach.*
$\langle . \, , \, . \rangle$	*Le produit scalaire dans $\mathbb{R}^d$.*
W_t	*Mouvement brownien.*
ξ	*Variable aléatoire à valeur dans $\mathbb{R}^k$.*