République Algérienne Démocratique et Populaire

Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

**UNIVERSITÉ MOHAMED KHIDER, BISKRA**

FACULTÉ des SCIENCES EXACTES et des SCIENCES de la NATURE et de la VIE

**DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES**

Mémoire présenté en vue de l'obtention du Diplôme **:**

**MASTER en Mathématiques**

Option : **Probabilités**

Par

**BENHAMED Hadjer**

Titre :

# Intégrale stochastique et application

Membres du Comité d'Examen :

| | | | |
|---|---|---|---|
| Dr. | **GHERBALE Boulakhras** | UMKB | Président |
| Dr. | **ZEGHDOUDI Khadem** | UMKB | Encadreur |
| Dr. | **YEKHLEF Samia** | UMKB | Examinateur |

Juin 2019

## REMERCIEMENTS

Je remercie mon Allah qui m'aidé pour finir mon mémoire

Je remercie mon encadreur ZEGHDOUDI Khadem qui m'a dirigé et m'a dit touts les conseils importants et les indications utiles

Je remercie mes parents qui m'ont toujours encouragé pour continuer mon étude

Je remercie tous les enseignements qui m'ont appris durant mon étude scolaire

Je remercie BOUZEGAG Walid qui m'aidé pour faire l'écriture de ce mémoire

Je remercie ma famille pour l'encouragement

# Table des matières

# Introduction

Le calcul stochastique est l'étude des phénomènes aléatoires dépendant du temps.il applique dans la mécanique quantique, le traitement du signal ,la chimie, les mathématique financières, la météorologie, et même la musique .

Un notion important représente une évolution discrète ou à temps continue d'une variable aléatoire est appelé processus stochastique(processus aléatoire ou fonction aléatoire).

Le mouvement Brownien avant d'être un objet mathématique il a étudié en botanique ,en finance et en physique .

Le Botaniste Robert Brown a observé le d'abord vers 1828.

Dans le mathématique le mouvement Brownien est un exemple particulièrement simple de processus aléatoire .

D'après le développement de calcul stochastique d'Itô, Kiyoshi Itô a donné un terme <<intégration stochastique>>.il a montré que l'on peut intégrer des processus par rapport à la différentielle du mouvement Brownien au lieu de la théorie de Paley –Wiener qui permette d'intégrer des fonction déterministe.

Après ça ,Ito est utilisé sa théorie de l'intégrale stochastique pour <<poser>>et résoudre des équations différentielle stochastique.

Donc, les chapitres de ce mémoire sont comme suit :

Le $1^{ère}$ chapitre sera consacré à des généralités sur le calcul stochastique <<surtout les processus>>et à d'exemple important <<le M B>>

Le $2^{ème}$ chapitre sera celui du calcul stochastique <<intégrale stochastique et ses propriétés ,formule d'Itô>>

Le $3^{éme}$ chapitre est l'application du chapitre précédent .Il permettre de traiter les équation différentielle stochastique.

# Chapitre 1

# Généralités et Rappels de calcul stochastique

**Introduction**

Dans ce chapitre introductif nous rassemblons quelques notions basique de la théorie des probabilités et les processus stochastiques qui seront utilisés dans la suite d'étude.

## 1.1 Espace de probabilité :

Est le triplet $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ où :

$\Omega$ : Ensemble des évènements.

$\mathcal{F}$ : La tribu définie sur $\Omega$.

$P$ : Mesure de probabilité.

**Définition 1.1.1** *Une tribu $F$ définie sur $\Omega$ est une famille de sous- ensemble de $\Omega$ vérifiant :*

$\Omega \in \mathcal{F}$

$A \in \mathcal{F} \Longrightarrow A^c \in \mathcal{F}$

$(A_n)_{n=1}^{\infty} \in \mathcal{F} \Longrightarrow U_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{F}$.

**Exemple 1.1.1** *1/ Soit* $\Omega = \{1, 2, 3\}$

$F_1 = \{\phi, \Omega, \{1, 2\}, \{3\}\}$ *est une tribu.*

$F_2 = \{\phi, \Omega\}$ *est une tribu triviale.*

*2/ Soit* $\Omega = [0, 3]$ *et* $I_1, \cdots\cdot, I_n$ *une famille d'intervalles formant une partition de* $\Omega$ *, la famille de sous ensembles définie par :*

$G = \{\phi, I_1, I_2 \cdots\cdot, I_1 \cup I_2, \cdots\cdot, I_1 \cup I_2 \cup I_3, \cdots\cdot, \Omega\}$ *est une tribu sur* $\Omega$

### 1.1.1 La tribu engendré par une famille d'ensemble :

Soit $A$ une famille de sous ensemble, la tribu engendré par $A$ est la plus petite tribu contenant cette famille on la note par $\delta(A)$

**Exemple 1.1.2** *1/ soit* $\Omega = \{1, 2, 3\}$

$A_1 = \{\{2\}\}, \sigma(A_1) = \{\phi, \Omega, \{2\}, \{1, 3\}\}$

$A_2 = \{\{1, 3\}\}, \sigma(A_2) = \{\phi, \Omega, \{1, 3\}, \{2\}\}$

*2/ Soit* $\Omega = [0, 3]$ *et* $A = \{I_1, \cdots\cdot, I_n\}, \delta(A) = G$

### 1.1.2 La tribu de Borel (Borélienne) :

Soit $\Omega = \mathbb{R}$, une tribu de Borel est la tribu engendré par les ouverts de $\mathbb{R}$ de la forme $]a, b[$ où $a, b$ dans $\mathbb{R}$ .Elle note $B_\Omega$.

**Exemple 1.1.3** *Soit* $\Omega = [0, 3]$

*La tribu de Borel sur* $[0, 1]$*est la tribu engendré par la famille de sous ensemble*

$A = \{]a, b[, 0 \leq a < b \leq 3\} = \{\textit{intervalles des ouverts dans } [0, 3]\}$ *,elle est notée* $B_{[0,3]}$

**Remarque 1.1.1** *Pour* $\Omega$ *un ensemble fini , on choisi* $F = \rho(\Omega)$*, et pour* $\Omega \in \mathbb{R}$ *, on choisi* $F = B_{\Omega}$*.*

### 1.1.3 Sous tribu :

$L$ sous tribu de $\mathcal{F}$ si $A \in L \Rightarrow A \in \mathcal{F}$ , $L \subset \mathcal{F}$.

**Exemple 1.1.4** *soit* $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5\}$

$\mathcal{F}_0 = \{\phi, \Omega\}$

$\mathcal{F}_1 = \{\phi, \Omega, 1, \{2, 3, 4, 5\}\}$

$\mathcal{F}_0$ *sous tribu de* $\mathcal{F}_1$

### 1.1.4 Mesure de probabilité :

Soit $\mathcal{F}$une tribu sur $\Omega$. une mesure sur une tribu $F$ est une application $\mu : F \longrightarrow [0, +\infty[$ où :

1/ $\mu(\phi) = 0$

2/ $\sigma$ -additivité : pour toute famille $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ d' élément de $\mathcal{F}$ disjoints deux à deux

$\mu(\cup_{n=1}^{\infty} A_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n)$

Si de plus $\mu(\Omega) = 1$, $\mu$ est une mesure de probabilité, et on le notera $P$

Autrement, mesure de probabilité est une application $P : \mathcal{F} \longrightarrow [0, 1]$ où :

$P(\phi) = 0$ , $P(\Omega) = 1$

$\sigma$ -additivité : pour toute famille $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ d' élément de $\mathcal{F}$ disjoints deux à deux

$P(\cup_{n=1}^{\infty} A_n) = \sum_{n=1}^{\infty} P(A_n)$

**Définition 1.1.2** - *Si* $F$ *est une tribu sur* $\Omega$*,* $(\Omega, \mathcal{F})$ *est appelée un espace mesurable et les éléments de* $\mathcal{F}$ *sont dits mesurable. Si* $\mu$ *est une mesure ,*$(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ *est appelée un espace mesuré.*

- $(\Omega, \mathcal{F})$ *est un espace probabilisable . Si* $P$ *est une mesure de probabilité,* $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ *est appelée espace probabilisé.*

### 1.1.5 Mesure de Lebesgue :

Il existe une mesure $\lambda$ sur $(\mathbb{R}, B_{\mathbb{R}})$ est une seule qui vérifie $\lambda(A) = b - a$ ,

si $A = [a, b]$ ou $]a, b[$ , $]a, b]$ , $[a, b[$ qui on appelé la mesure de Lebesgue.

## 1.2 Variable aléatoire :

soit , $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, $\left(\Omega^{'}, \mathcal{F}^{'}, P^{'}\right)$ deux espaces de probabilités.

**Définition 1.2.1** *soit* $X$ *une application de* $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ *dans* $\left(\Omega^{'}, \mathcal{F}^{'}, P^{'}\right)$*,on dit que* $X$ *est une Variable aléatoire si :*

$\forall B \in \mathcal{F}^{'} : X^{-1}(B) \in \mathcal{F}$

$X^{-1}(B) = \{\omega \in \Omega : X(\omega) \in B\} \in \mathcal{F}$ , $\forall B \in \mathcal{F}^{'}$.

**Définition 1.2.2** *une Variable aléatoire réelle est une application de* $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ *dans*$(\mathbb{R}, B_{\mathbb{R}})$ *où :*

$X^{-1}(B) = \{\omega \in \Omega : X(\omega) \in B\} \in \mathcal{F}$ , $\forall B \in B_{\mathbb{R}}$ .

**Définition 1.2.3** *une Variable aléatoire réelle discrète si l'ensemble de réalisation* $X(\Omega)$ *est dénombrable fini ou infini.*

## 1.3 Filtration :

une filration $(\mathcal{F}_t)_{t \in \mathcal{T}}$ est une famille croissante de sous tribu de $\mathcal{F}$, $\forall s, t \in \mathcal{T}$ , $s < t$ $\Longrightarrow \mathcal{F}_s \subset \mathcal{F}_t \subset \mathcal{F}$

On dit alors que $(\Omega, \mathcal{F}, P, (\mathcal{F}_t)_{t \in \mathcal{T}})$ est une espace probabilisé filtré.

On pose $\mathcal{F}_\infty = \sigma\left(\cup_{s\in\mathcal{T}}\mathcal{F}_s\right)$ la tribu engendré par $\cup_{s\in\mathcal{T}}\mathcal{F}_s$.

**Définition 1.3.1** $\mathcal{F}_{t^-} = \sigma\left(\cup_{s<t}\mathcal{F}_s\right)$ , $\mathcal{F}_{t^+} = \cap_{s>t}\mathcal{F}_s$

*Une filtration est continue à droite (resp. à gauche)*

*si* $\forall t \geq 0$ , $\mathcal{F}_t = \mathcal{F}_{t^+}$ $(resp.\mathcal{F}_t = \mathcal{F}_{t^-})$ .

**Définition 1.3.2** ***(Filtration standard) :***

*Une filtration* $(\mathcal{F}_t)_{t\in\mathcal{T}}$ *satisfait les conditions usuelles si elle est continue à droite et si* $\mathcal{F}_0$ *contient tous les ensembles* $P$ *-négligeables de* $\mathcal{F}$.

## 1.4 Espérance conditionnelle par rapport à une tribu :

Soit $X$ une variable aléatoire réel définie sur $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ et $G$ une sous -tribu de $\mathcal{F}$.

**Définition 1.4.1** *L'espérance conditionnelle* $E\left(X\backslash G\right)$ *de* $X$ *quand* $G$ *est l'unique variable aléatoire tels que :*

*a)* $G$*-mesurable.*

*b)* $\int_A E\left(X\backslash G\right) dp = \int_A X dp \quad , \quad \forall A \in G$

**Propriété 1.4.1** *a) Linéarité. Soit* $a$ *et* $b$ *deux constante*

$E\left(aX + bY\backslash G\right) = aE\left(X\backslash G\right) + bE\left(Y\backslash G\right)$

*b) Croissance. Soit* $X$ *et* $Y$ *deux variable aléatoire .telles que* $X \leq Y$ ,

*alors* $E\left(X\backslash G\right) \leq E\left(Y\backslash G\right).$

*c)* $E\left[E\left(X\backslash G\right)\right] = E\left[X\right].$

*d) Si* $X$ *est* $G$ *-mesurable,* $E\left(X\backslash G\right) = X.$

*e) Si* $Y$ *est* $G$*-mesurable* $E\left(XY\backslash G\right) = YE\left(X\backslash G\right)$

*f) Si* $X$ *est indépendante de* $G$, $E\left(X\backslash G\right) = E\left(X\right).$

*g) Si $G$ et $H$ sont deux tribu telles que $H \subset G$ alors*

$E(X \backslash H) = E(E(X \backslash H) \backslash G) = E(E(X \backslash G) \backslash H)$.

## 1.5 Temps d'arrêt :

Une variable aléatoire $\tau : \Omega \mapsto [0, +\infty]$ est un temps d'arrêt par rapport à une filtration $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$ si,$\forall t \geq 0, \{\tau = t\} \in \mathcal{F}_t$.

Ou bien , de manière équivalente, si $\forall t \geq 0, \{\tau \leq t\} \in \mathcal{F}_t$.

( Resp. $\tau : \Omega \mapsto \mathbb{N} \cup \{+\infty\}$ est un temps d'arrêt par rapport à une filtration $(\mathcal{F}_n)_{n \geq 0}$ si, $\forall n \in \mathbb{N}, \{\tau = n\} \in \mathcal{F}_n$. Ou bien , de manière équivalente, si $\forall n \in \mathbb{N}, \{\tau \leq n\} \in \mathcal{F}_n$ ).

## 1.6 processus stochastique :

**Définition 1.6.1** *un processus stochastique est une famille $X = (X_t)_{t \in \mathcal{T}}$ de variable aléatoire sur $(\Omega, \mathcal{F})$ à valeurs dans un espace mesurable $(E, \ \varepsilon \ )$.*

*Si on prend $E = \mathbb{R}^d$, $\varepsilon = B(\mathbb{R}^d)$ la tribu de Borel de $\mathbb{R}^d$*

*Le processus alors est une application :*

$X : \Omega \times \mathcal{T} \mapsto (\mathbb{R}^d, B(\mathbb{R}^d))$

$\quad (\omega, t) \mapsto X_t(\omega)$

**Remarque 1.6.1** *1) Soit le processus $X$ .si on fixe $t$ ,on obtient la fonction $X_t : \omega \mapsto X_t(\omega)$ est appelée variable aléatoire.*

*2) Soit le processus$X$ .si on fixe $\omega$ on obtient la fonction $X_t : t \mapsto X_t(\omega)$ est une trajectoire du processus stochastique $X$ associe à $\omega$.*

*3) Lorsque $\mathcal{T} = [0, +\infty[$ ou $[0, T]$ dans ce cas le processus $X$ est dit a temps continu. Lorsque $\mathcal{T}$ est l' ensemble $\mathbb{N}$ des entiers le processus est à temps discret.*

*4) La Variable aléatoire $X_t$ représente l 'états du processus a l' instant $t$.*

*5) La filtration d'un processus est un objet important qui contient l'essentiel des propriétés du processus .*

**Définition 1.6.2** *Un processus stochastique càdlag (resp caglàd) si presque toutes ses trajectoires sont continues à droite avec limite à gauche en tout point ( resp presque toute ses trajectoires sont continues à gauche avec limite à droite en tout point ).*

*Limite à droite : $t > 0$ , $s > t$* $\qquad \lim_{s \mapsto t} X_s = X_{t^+}$.

*Limite à gauche : $t > 0$ , $s < t$* $\qquad \lim_{s \mapsto t} X_s = X_{t^-}$.

**Définition 1.6.3** ***(comparaison de deux processus) :***

*1) Soit $X$ et $Y$ deux processus stochastique , on on dit que $X$ est un modification de $Y$ si :*

$\forall t \geq 0$ , $P(X_t = Y_t) = 1$.

*2) On dit que $X$ et $Y$ sont indistingables si presque toutes les trajectoires coïncident,*

$P(X_t = Y_t \ , \ \forall 0 \leq t < \infty) = 1$.

*3) On dit que $X$ et $Y$ basé respectivement sur $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ et $\left(\Omega', \mathcal{F}', P'\right)$ à valeurs dans $(E, \varepsilon)$ sont équivalents si et seulement s' ils ont la même loi.[voir 1, 2 et 4 ].*

**Remarque 1.6.2** *Si $X$ et $Y$ sont indistingables ,alors chacun de ces processus est une modification de l'autre.*

**Définition 1.6.4** ***(mesurabilité) :***

*Un processus stochastique $X$ est mesurable si pour tout $A \in B(\mathbb{R}^d)$, l'ensemble $\{(t, \omega)$ où $X_t(\omega) \in A\}$ appartient à la tribu produit $B([0; +\infty[) \otimes \mathcal{F}$.autrement dit l'application :*

$([0; +\infty[ \times \Omega \ , \ B([0; +\infty[) \otimes \mathcal{F}) \mapsto \left(\mathbb{R}^d, B(\mathbb{R}^d)\right)$

$$(t, \omega) \mapsto X_t(\omega)$$

*est mesurable.*

**Définition 1.6.5** ***(Adaptation) :***

*Un processus stochastique* $X = (X_t)_{t \geq 0}$ *est adapté à la filtration* $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$*si :* $\forall t \geq 0, X_t$ *est une variable aléatoire* $\mathcal{F}_t$ *-mesurable.*

**Définition 1.6.6** *Soit* $X$ *un processus stochastique en temps continu* $(X_t)_{t \geq 0}$ *, les accroissements de ce processus sont des variables* $X_t - X_s$ *pour tout* $t \quad 0 \leq s \leq t < \infty$.

## 1.7 Martingales :

**Définition 1.7.1** ***(Sur martingale) :***

*Un processus stochastique* $(X_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$ *est une sur martingale relativement à* $(\mathcal{F}_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$ *si :*

*1)* $(X_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$ *est* $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$ *−adapté.*

*2)* $\forall t \in \mathbb{R}_+$ *la variable aléatoire* $X_t$ *est intégrable.*

*3)* $\forall s \in \mathbb{R}_+$ *, où* $s \leq t$ *,* $E(X \setminus \mathcal{F}_s) \leq X_s$.

**Définition 1.7.2** ***(Sous martingale) :***

*Un processus stochastique* $(X_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$ *est une sous martingale relativement à* $(\mathcal{F}_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$ *si :*

*1)* $(X_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$ *est* $(\mathcal{F}_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$ *− adapté.*

*2)* $\forall t \in \mathbb{R}_+$ *la variable aléatoire* $X_t$ *est intégrable.*

*3)* $\forall s \in \mathbb{R}_+$ *,* $\forall t \in \mathbb{R}_+$ *,où* $s \leq t$ *,* $E(X \setminus \mathcal{F}_s) \geq X_s$.

**Définition 1.7.3** ***(Martingale) :***

*Un processus stochastique* $(X_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$ *est une martingale relativement à* $(\mathcal{F}_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$ *si :*

*1)* $(X_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$ *est* $(\mathcal{F}_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$ *−adapté.*

*2)* $\forall t \in \mathbb{R}_+$ *la variable aléatoire* $X_t$ *est intégrable.*

*3)* $\forall s, t \in \mathbb{R}_+$ *,où* $s \leq t$ *,* $E[X \setminus \mathcal{F}_s] = X_s$.

## 1.8 Exemple de quelques processus :

### 1.8.1 Processus de poisson :

On appelle processus de paramètre $\lambda$ un processus $X$ défini par :

1)$X_o = 0.$

2)$X$ est accroissements indépendants.

3)Pour tout couple $(s,t) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+$ ou $s \leq t$ la variable $X_t - X_s$ suit une loi de poisson de paramètre $\lambda (t-s)$ ,

c'est à dire que pour tout $K \in \mathbb{N}$ ,$P(X_t - X_s = k) = \frac{(\lambda(t-s))^k}{k!} \exp(-(\lambda(t-s)))$ .

4)Le processus de poisson est de ce fait un processus en temps continu, mais à espace d'état discret, puisque les valeurs possibles des variables $X_t$ sont dans $\mathbb{N}$.

### 1.8.2 Mouvement Brownien :

**Définition 1.8.1** ***(mouvement brownien) :***

*Un mouvement brownien défini sur un espace de probabilité* $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ *est un processus* $B = \{B_t, 0 \leq t < +\infty\}$ *verifiant :*

1) $\forall$ *n*, $\forall t_i$, $0 \leq t_1 \leq t_2 \leq ...... \leq t_n$*.les variables aléatoires* $\left(B_{t_n} - B_{t_{n-1}}, ......, B_{t_1} - B_{t_0}, B_{t_0}\right)$*sont indépandantes.*

2) $\forall\ 0 \leq s \leq t$ , $B_t - B_s \sim \mathcal{N}(0, t-s)$ .

3) $\forall\ \omega$ *les trajectoires* $t \mapsto B_t(\omega)$ *sont continues.*

4) *si*$B_0 = 0$*, on dit que un mouvement Brownien standar.[voir 6]*

**Définition 1.8.2** *Un mouvement brownien standard défini sur un espace de probabilité filtré* $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}, P)$ *est un processus* $\mathbf{B} = \{B_t, 0 \leq t < +\infty\}$ *adapté à la filtration* $(\mathcal{F}_t)_{t \in I}$ *est appelé* $(\mathcal{F}_t)_{t \in I}$ *mouvement brownien standard si :*

1)$B_0 = 0$

2) $\forall\ 0 \leq s \leq t$ Variable aléatoire $B_t - B_s$ est indépendant de $\mathcal{F}_s$.

3) $\forall\ 0 \leq s \leq t$ , $B_t - B_s \sim \mathcal{N}(0, t-s)$.

4) $\forall\ \omega$ les trajectoires $t \mapsto B_t(\omega)$ sont continues.

**Proposition 1.8.1** *En dimension 1,* $B = \{B_t, 0 \leq t < +\infty\}$ *et* $\{B_t^2 - t\ , 0 \leq t < +\infty\}$ *sont des martingales.*

**Proposition 1.8.2** $B_t$ *est une variable aléatoire gaussienne centré de variance* $t$.

*Donc à une densité :* $f(x) = \frac{1}{2\pi t} \exp\left(\frac{-|x|^2}{2t}\right), x \in \mathbb{R}$.

**Lemme 1.8.1** *Un mouvement brownien de dimension 1 est un processus gaussien de moyenne nulle et de fonction de covariance* $\rho(s,t) = s \wedge t$.

**Définition 1.8.3** ***( Mouvement brownien multidimensionnel) :***

*Un processus* $B = (B_t)_{t \in \mathcal{T}}$ *défini sur un espace* $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ *à valeurs dans* $\mathbb{R}^d$

$\left\{B_t = \left(B_t^1, B_t^2, ..., B_t^d\right); t \in \mathbb{R}_+\right\}$ *à trajectoires continues*

*est appelé mouvement brownien standar d-dimensionnel si :*

*1)* $B_0 = 0$ *P-p.s*

*2) pour tout* $0 \leq t_1 \leq t_2 \leq ...... \leq t_n$*.les accroisements* $B_{t_{i+1}} - B_{t_i}$ *avec* $0 \leq i \leq n-1$ *sont indépandantes.*

*3)* $\forall\ 0 \leq s \leq t$ , $B_t - B_s$ *est de loi gaussienne* $\mathcal{N}_d(0, (t-s) I_d)$ *où* $I_d$ *est la matrice identité de* $\mathbb{R}^d$.

**Remarque 1.8.1** *Les trajectoires du mouvement brownien sont presque sûrement nulle par dérivable.*

*C' est à dire que pour presque tout* $\omega \in \Omega$ *la fonction* $t \mapsto B_t(\omega)$ *est une fonction continue nulle par dérivable.*

## 1.9 Filtration naturelle :

Soit $X = (X_t)_{t\in\mathcal{T}}$ un processus stochastique sur $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, on appelle filtration naturelle relativement à $X$ la filtration $G_t^X = \sigma(X_s; s \leq t, s \in \mathcal{T})$ pour tout $t \in \mathcal{T}$ .c'est a dire la plus petite sous tribu de $\mathcal{F}$ qui rend mesurable toutes les applications $\omega \mapsto X_s(\omega)$ pour tout $s \leq t, s \in \mathcal{T}$.

## 1.10 Filtration augmentée :

Pour un processus $X = \{X_t \ ; \ t \geq 0\}$. on défini $\mathcal{N}_t = \left\{\mathcal{F} \subset \Omega \ , \ \exists G \in \mathcal{F}_t^X \ , \ \mathcal{F} \subset G \ , \ P(G) = 0\right\}$ et$\mathcal{N}_\infty = \mathcal{N}$ l' ensemble des événements $P$- négligeable pour tout $0 \leq t \leq \infty$ définit augmentation $\mathcal{F}_t = \mathcal{F}_t^X \cup \mathcal{N}$.[voir 1].

## 1.11 processus gaussien :

Un processus $X$ est appelée un processus gaussien si toute combinaison linéaire finie de $X_t$ est une variable aléatoire gaussienne, autrement dit si pour tout $n \in N$ ,$t_1 \cdots\cdot, t_n$ , $a_1, \cdots\cdot, a_n$ $\sum_{i=1}^n a_i X_{t_i}$ ,est une variable gaussienne. Un processus gaussien est caractérisé par deux fonctions : sa fonction espérance $t \mapsto m(t) = E(X_t)$ et sa fonction de covariance $(s,t) \to \Gamma(s,t) = E[(X_t - m(t))(X_s - m(s))]$ [voir 6]

## 1.12 Variation totale et variation quadratique :

Soit $T > 0$ et $\Pi = \{0 = t_0 < t_1 < .... < t_n = T\}$ une subdivision de $[0,T]$

de pas $\delta := max\ (t_{i+1} - t_i)$

on définit la variation infinitesimal d'ordre $P$ d'un processus $X$ sur $[0,T]$ par $\vee_X^P([0,T]) := \sum_{i=1}^n \left|X_{t_i} - X_{t_{i+1}}\right|$

La variation totale de $X$ sur l'intervalle $[0, T]$ est définie par

$\vee_X^1([0, T]) = \sup_\Pi \sum_{i=1}^n \left|X_{t_i} - X_{t_{i+1}}\right|$

et la variation quadratique de $X$ sur l'intervalle $[0, T]$ est définie par

$\vee_X^2([0, T]) = \sum_{i=1}^n \left|X_{t_i} - X_{t_{i+1}}\right|^2$

elle note $\langle X \rangle_T = \langle X, X \rangle$. [voir 1 et 2].

**Remarque 1.12.1** *1) la variation quadratique de mouvement Brownien est définie par* $\sum_{i=1}^n \left(B_{t_i} - B_{t_{i+1}}\right)^2$.

*2) la variation quadratique sur* $[0, T]$ *du mouvement Brownien existe dans* $L^2$ *est* $T$, $(\langle B \rangle_T = T)$.

*3) mouvement Brownien de processus à variation borné est nulle p.s* $(\langle X \rangle_T = 0)$.

**Conclusion**

Les processus stochastiquessont considérés comme base de la définition de plusieurs phénomènes réels.

Le mouvement brownien est un cas particulier de le processus stochastique qui est important de l'étude de l'intégrale stochastique.

# Chapitre 2

# L'Intégrale stochastique

**Introduction**

A partir du chapitre précédent nous avons amené à la définition du M.B qui nous utiliserons de l'intégrale stochastique alors dans ce chapitre on va définit L'intégrale stochastique pour quelques classes des processus qui nous étudions leurs propriétés .

Enfin Nous formelons la formule d'Itô.

Soit $B = (B_t)_{t\geq 0}$ un M.B ; $X$ un processus stochastique on va définir $\int_0^t X_s dB_s$ des processus stochastique simples et après prolonge cette définition à une classe de processus stochastique appropriée.

## 2.1 Intégrale stochastique des processus élémentaire(simple) :

**Définition 2.1.1** ***(Processus élémentaire) :***

*Un processus* $L = (L_t \ , \ t \geq 0)$ *est élémentaire si :*

$L_t(\omega) = \sum_{i=0}^{p_n - 1} \varphi_i(\omega) \mathbf{1}_{]t_i, t_{i+1}]}(t)$

*où* $p_n \geq 1$ , $0 = t_0 < t_1 < \cdots\cdots < t_{p_n}$

*et pour tout* $i$, $\varphi_i$ *est une variable aléatoire bornée et* $\mathcal{F}_{t_i}$ *-mesurable.*

*On pose $\mathcal{L}_0$ la classe des processus simples. [ voir 1 et 7].*

**Définition 2.1.2** ***(Intégrale stochastique des processus élémentaire ) :***

*Soit $B = (B_t)_{t\geq 0}$ un mouvement brownien , si $X \in \mathcal{L}_0$*

*On peut définir $I_t(X) = \int_0^t X_s dB_s := \sum_{i=0}^{p_n-1} \varphi_i(\omega)\left(B_{t_{i+1}\wedge t} - B_{t_i \wedge t}\right)$*

*où $a \wedge b = \min(a, b)$.*

**Remarque 2.1.1** *Si $X \in \mathcal{L}_0$ on a $X_t(\omega) = \varphi_0(\omega)\mathbf{1}_{\{0\}}(t) + \sum_{i=0}^{p_n-1} \varphi_i(\omega)\mathbf{1}_{]t_i,t_{i+1}]}(t)$*

*alors on peut définir l'intégrale stochastique pour un processus simple comme suit :*

$\forall t \geq 0 \quad , I_t(X) = \sum_{i=0}^{p_n-1} \varphi_i\left(B_{t_{i+1}} - B_{t_i}\right) + \varphi_{p_n}\left(B_t - B_{t_{p_n}}\right).$

**Proposition 2.1.1** *soit $X$ et $Y$ des processus simple ,alors*

$E\left(\int_0^t X_s dB_s\right) = 0$

$E\left[\left(\int_0^t X_s dB_s\right)\left(\int_0^t Y_s dB_s\right)\right] = E\left[\int_0^t X_s Y_s ds\right]$

*en cas particulier,* $E\left[\left(\int_0^t X_s dB_s\right)^2\right] = E\left[\int_0^t X_s^2 ds\right]$

**Preuve.** On prend $X \in \mathcal{L}_0$

1) On pose $\Delta_i := B_{t_{i+1}} - B_{t_i}$ ,

$E[I_t(X)] = E\left[\sum_{i=0}^{p_n-1} \varphi_i \Delta_i\right] = \sum_{i=0}^{p_n-1} E[\varphi_i \Delta_i]$

on a pour chaque $i$ , $\varphi_i$ est $\mathcal{F}_{t_i}$ -mesurable et $B_{t_{i+1}} - B_{t_i}$ des accroissements 2 *à* 2 indépendants et $B_{t_{i+1}} - B_{t_i}$ est indépendant de $\mathcal{F}_{t_i}$.

donc $E[\Delta_i \backslash \mathcal{F}_{t_i}] = E[\Delta_i] = 0$

et $E[\varphi_i \Delta_i] = E[E[\varphi_i \Delta_i \setminus \mathcal{F}_{t_i}]] = E[\varphi_i E[\Delta_i \setminus \mathcal{F}_{t_i}]\ ] = 0$

alors $E[I_t(X)] = 0$.

2) On traiter le cas $X = Y$

par définition : $\left(\int_0^t X_s dB_s\right)^2 = \sum_{i=0}^{p_n-1} \varphi_i^2 \Delta_i^2 + 2\sum_{i<j} \varphi_i \varphi_j \Delta_i \Delta_j$

Si $i < j$ et $i + 1 < j$ ,alors $t_{i+1} < t_j$

on a $\varphi_i$ et $\varphi_j$ est $\mathcal{F}_{t_j}$ -mesurable , tandis que $E\left[\Delta_j \setminus \mathcal{F}_{t_j}\right] = 0$

$E\left[\left(\int_0^t X_s dB_s\right)^2\right] = \sum_{i=0}^{p_n-1} E\left[\varphi_i^2 \Delta_i^2\right] + 2\sum_{i<j} E\left[\varphi_i \varphi_j \Delta_i \Delta_j\right]$

alors

$$\begin{aligned} E\left[\varphi_i \varphi_j \Delta_i \Delta_j\right] &= E\left[E\left[\varphi_i \varphi_j \Delta_i \Delta_j \setminus \mathcal{F}_{t_j}\right]\right] \\ &= E\left[\varphi_i \varphi_j E\left[\Delta_i \Delta_j \setminus \mathcal{F}_{t_j}\right]\right] \\ &= E\left[\varphi_i \varphi_j E\left[\Delta_i \setminus \mathcal{F}_{t_j}\right] E\left[\Delta_j \setminus \mathcal{F}_{t_j}\right]\right] = 0 \end{aligned}$$

D'autre part, $\Delta_i$ étant indépendante de $\mathcal{F}_{t_j}$ ,on a : $E\left[\Delta_i^2 \setminus \mathcal{F}_{t_j}\right] = E\left[\Delta_i^2\right] = t_{i+1} - t_i$

Donc $E\left[\left(\int_0^t X_s dB_s\right)^2\right] = E\left[\sum_{i=0}^{p_n-1} \varphi_i^2 \left(t_{i+1} - t_i\right)\right] = E\left[\int_0^t X_s^2 ds\right]$. ■

### 2.1.1 Isométrie d'Itô :

Pour $X \in \mathcal{L}_0$ et $0 \leq s \leq t < \infty$

On a $E\left[\left|I_t(X) - I_s(X)\right|^2 \setminus \mathcal{F}_s\right] = E\left[\int_s^t X_u^2 du \setminus \mathcal{F}_s\right]$ p.s

**Preuve.** on va utilisé $(B_t^2 - t \ , \ t \geq 0)$ que est une martingale.

De là pour $0 \leq s \leq t$ ,

$$\begin{aligned} \left[I_t(X) - I_s(X)\right]^2 &= \left\{\sum_{i=0}^{\infty} \varphi_i \left[\left(B_{t\wedge t_{i+1}} - B_{t\wedge t_i}\right) - \left(B_{s\wedge t_{i+1}} - B_{s\wedge t_i}\right)\right]\right\}^2 \\ &= \sum_{i=0}^{\infty} \varphi_i^2 \left[\ \left(\ B_{t\wedge t_{i+1}} - B_{t\wedge t_i}\right)\ - \left(\ B_{s\wedge t_{i+1}} - B_{s\wedge t_i}\right)\ \right]^2 \\ &+ 2\sum_{i,j=0, i<j}^{\infty} \varphi_i \varphi_j \left[\left(B_{t\wedge t_{i+1}} - B_{t\wedge t_i}\right) - \left(B_{s\wedge t_{i+1}} - B_{s\wedge t_i}\right)\right] \\ &\times \left[\left(B_{t\wedge t_{j+1}} - B_{t\wedge tj}\right) - \left(B_{s\wedge t_{j+1}} - B_{s\wedge tj}\right)\right] \end{aligned}$$

Ensuite on prend l'espérance conditionnelle en tenant compte du fait que le mouvement brownien est une martingale (ou que les accroissements browniens sont indépendants et de moyenne nulle). Donc comme $i < j$ , en conditionnant par rapport à $\mathcal{F}_{t_j}$,à l'intérieur de l'espérance conditionnelle :

$E\left[\varphi_i\varphi_j\left[\left(B_{t\wedge t_{i+1}}-B_{t\wedge t_i}\right)-\left(B_{s\wedge t_{i+1}}-B_{s\wedge t_i}\right)\right]\left[\left(B_{t\wedge t_{j+1}}-B_{t\wedge tj}\right)-\left(B_{s\wedge t_{j+1}}-B_{s\wedge tj}\right)\right]\backslash\mathcal{F}_s\right]$

$= 0$

Comme les sommes qui interviennent sont en fait des sommes finies, on a :

$$\begin{aligned}
E\left[\left(I_t(X)-I_s(X)\right)^2\ \backslash\ \mathcal{F}_s\right] &= \sum_{i=0}^{\infty}E\left[\varphi_i^2\left[\ \left(\ B_{t\wedge t_{i+1}}-B_{t\wedge t_i}\right)\ -\left(\ B_{s\wedge t_{i+1}}-B_{s\wedge t_i}\right)\ \right]^2\backslash\mathcal{F}_s\right]\\
&= \sum_{i=0}^{\infty}E\left[E\left[\varphi_i^2\left[\ \left(\ B_{t\wedge t_{i+1}}-B_{t\wedge t_i}\right)-\left(\ B_{s\wedge t_{i+1}}-B_{s\wedge t_i}\right)\ \right]^2\backslash\mathcal{F}_{t_i}\right]\backslash\mathcal{F}_s\right]\\
&= \sum_{i=0}^{\infty}E\left[\varphi_i^2E\left[\left[\ \left(\ B_{t\wedge t_{i+1}}-B_{t\wedge t_i}\right)-\left(\ B_{s\wedge t_{i+1}}-B_{s\wedge t_i}\right)\ \right]^2\backslash\mathcal{F}_{t_i}\right]\backslash\mathcal{F}_s\right]
\end{aligned}$$

De là :

$E\left[\left[\ \left(\ B_{t\wedge t_{i+1}}-B_{t\wedge t_i}\right)-\left(\ B_{s\wedge t_{i+1}}-B_{s\wedge t_i}\right)\ \right]^2\backslash\mathcal{F}_{t_i}\right]$

$= E\left[\ \left(\ B_{t\wedge t_{i+1}}-\ B_{s\wedge t_{i+1}}\right)^2+\left(\ B_{t\wedge t_i}-B_{s\wedge t_i}\right)^2\backslash\mathcal{F}_{t_i}\right]-2E\left[\ \left(\ B_{t\wedge t_{i+1}}-\ B_{s\wedge t_{i+1}}\right)\left(\ B_{t\wedge t_i}-B_{s\wedge t_i}\right)\ \backslash\mathcal{F}_{t_i}\right]$

$= E\left[\ \left(\ B_{t\wedge t_{i+1}}-B_{s\wedge t_{i+1}}\right)^2\ \backslash\mathcal{F}_{t_i}\right]+\left(\ B_{t\wedge t_i}-B_{s\wedge t_i}\right)^2$

$-2\left(\ B_{t\wedge t_i}-B_{s\wedge t_i}\right)E\ \left[\ \left(\ B_{t\wedge t_{i+1}}-B_{s\wedge t_{i+1}}\right)\ \backslash\mathcal{F}_{t_i}\right]$

$= E\left[\ \left(\ B_{t\wedge t_{i+1}}-B_{s\wedge t_{i+1}}\right)^2\ \backslash\mathcal{F}_{t_i}\right]-\left(\ B_{t\wedge t_i}-B_{s\wedge t_i}\right)^2$

$= \left(t\wedge t_{i+1}-s\wedge t_{i+1}\right)-\left(t\wedge t_i-s\wedge t_i\right)$

Car $(B_t^2-t, t\geq 0)$ est une martingale .ainsi :

$$\begin{aligned}
E\left[\left(I_t(X)-I_s(X)\right)^2\ \backslash\ \mathcal{F}_s\right] &= E\left[\sum_{i=0}^{\infty}\varphi_i^2\left(t\wedge t_{i+1}-s\wedge t_{i+1}\right)-\left(t\wedge t_i-s\wedge t_i\right)\backslash\mathcal{F}_s\right]\\
&= E\left[\int_s^t X_u^2du\backslash\mathcal{F}_s\right]
\end{aligned}$$

[voir 1 ]. ■

**Propriété 2.1.1** *Pour $X$ et $Y$ deux processus de $\mathcal{L}_0$ , $0 \leq s \leq t < \infty$*

*1) $I_0(X) = 0$ p.s*

*2) $I(\alpha X + \beta Y) = \alpha I(X) + \beta I(Y)$ ; $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ (linéarité).*

*3) $E\left[(I_t(X))^2\right] = E\left[\int_0^t X_u^2 du\right] = Var(I_t(X))$*

*4) $E[I_t(X) \backslash \mathcal{F}_s] = I_s(X)$ p-s (propriétés de martingale)*

**Preuve.** 2) La linéarité :

on pose

$$X_t = \sum_{i=0}^{P_n-1} \varphi_i \mathbf{1}_{]t_i,t_{i+1}]}(t)$$

$$Y_t = \sum_{i=0}^{P_n-1} \dot{\varphi}_i \mathbf{1}_{]t_i,t_{i+1}]}(t)$$

$$\begin{aligned}
I(\alpha X + \beta Y) &= \int_0^t \left(\alpha \left(\sum_{i=0}^{P_n-1} \varphi_i \mathbf{1}_{]t_i,t_{i+1}]}(t)\right) + \beta \left(\sum_{i=0}^{P_n-1} \dot{\varphi}_i \mathbf{1}_{]t_i,t_{i+1}]}(t)\right)\right) dB_s \\
&= \int_0^t \alpha \left(\sum_{i=0}^{P_n-1} \varphi_i \mathbf{1}_{]t_i,t_{i+1}]}(t)\right) dB_s + \int_0^t \beta \left(\sum_{i=0}^{P_n-1} \dot{\varphi}_i \mathbf{1}_{]t_i,t_{i+1}]}(t)\right) dB_s \\
&= \alpha \int_0^t \left(\sum_{i=0}^{P_n-1} \varphi_i \mathbf{1}_{]t_i,t_{i+1}]}(t)\right) dB_s + \beta \int_0^t \left(\sum_{i=0}^{P_n-1} \dot{\varphi}_i \mathbf{1}_{]t_i,t_{i+1}]}(t)\right) dB_s \\
&= \alpha I_t(X) + \beta I_t(Y).
\end{aligned}$$

3) $Var(I_t(X)) = E[I_t(X)]^2 - (E[I_t(X)])^2$

on a d'après la proposition précédent $E[I_t(X)] = 0$

et $E[I_t(X)]^2 = E\left(\int_0^t X_u^2 du\right)$

donc $Var(I_t(X)) = E[I_t(X)]^2 = E\left[\int_0^t X_u^2 du\right]$ ■

**Définition 2.1.3** ***(martingale de carré intégrable continue) :***

*Une martingale* $\mathcal{M} = (M_t) \in \mathcal{M}_2^c$ *si :*

$E\left|M_t\right|^2 < \infty \quad , \ \forall t \geq 0.$ *Les trajectoires* $t \mapsto M_t(\omega)$ *sont continues,*$\forall \omega \in \Omega$.

**Proposition 2.1.2** *pour* $L \in \mathcal{L}_0$ *on a le processus* $\left(\int_0^t L_s dB_s, t \geq 0\right) \in \mathcal{M}_2^{c,0}$ *(martingale de carré intégrable continue ,*$M_0 = 0$*).*

**Preuve.** 1) On va démontrer que le processus $\left(\int_0^t L_s dB_s, t \geq 0\right)$ et une martingale :

* On a $\int_0^t L_s dB_s = \sum_{i=1}^{p_n} \varphi_{i-1}\left(B_{t_i} - B_{t_{i-1}}\right)$

$$\varphi_{i-1}\left(B_{t_i \wedge t}(\omega) - B_{t_{i-1}\wedge t}(\omega)\right) = \begin{cases} 0 & t \leq t_{i-1} \\ \varphi_{i-1}\left(B_{t_i\wedge t} - B_{t_{i-1}\wedge t}\right) & t > t_{i-1} \end{cases}$$

On a 0 est $F_0$ -mesurable et $F_0 \subset \mathcal{F}_t$ donc 0 est $\mathcal{F}_t$ -mesurable on a aussi $\varphi_{i-1}$

est $\mathcal{F}_{t_{i-1}}$ -mesurable et $\mathcal{F}_{t_{i-1}} \subset \mathcal{F}_t$

donc $\varphi_{i-1}$ est $\mathcal{F}_t$ -mesurable et $\left(B_{t_i\wedge t} - B_{t_{i-1}\wedge t}\right)$ est $\mathcal{F}_{t_{i-1}\wedge t}$ -mesurable d'où $\mathcal{F}_{t_{i-1}}$ -mesurable.

donc $\left(B_{t_i\wedge t} - B_{t_{i-1}\wedge t}\right)$ est $\mathcal{F}_{t_{i-1}}$ -mesurable et $\mathcal{F}_{t_{i-1}} \subset \mathcal{F}_{t_i}$ donc $\mathcal{F}_t$ -mesurable.

la somme de produit de $\mathcal{F}_t$ -mesurable est $\mathcal{F}_t$ -mesurable.

* On démontre la propriété de martingale.

On calcule $E\left[\sum_{i=1}^{p_n-1} \varphi_i\left(B_{t\wedge t_{i+1}} - B_{t\wedge t_i}\right) \backslash \mathcal{F}_s\right]$ pour tout $i$, et on montre que cela vaut $\varphi_i\left(\ B_{s\wedge t_{i+1}} - B_{s\wedge t_i}\right)$ tels que $s \leq t$

on va discuter les cas suivantes : $s \leq t_i$ , $t_i < s \leq t_{i+1}$ , $s > t_{i+1}$.

-1$^{ére}$ cas $s \leq t_i$ :

$$\begin{aligned} E\left[\varphi_i\left(B_{t_{i+1}\wedge t} - B_{t\wedge t_i}\right)\backslash \mathcal{F}_s\right] &= E\left[E\left[\varphi_i\left(B_{t\wedge t_{i+1}} - B_{t\wedge t_i}\right)\backslash \mathcal{F}_{t_i}\right]\backslash \mathcal{F}_s\right] \\ &= \ \ E\left[\varphi_i E\left[\left(B_{t\wedge t_{i+1}} - B_{t\wedge t_i}\right)\backslash \mathcal{F}_{t_i}\right]\backslash \mathcal{F}_s\right] \\ &= E\left[\varphi_i\left(B_{t_i} - B_{t_i}\right)\backslash \mathcal{F}_s\right] \\ &= 0 \\ &= \varphi_i\left(B_{s\wedge t_{i+1}} - B_{s\wedge t_i}\right) \end{aligned}$$

-2$^{ème}$ cas $t_i < s \leq t_{i+1}$ :

$$\begin{aligned}
E\left[\varphi_i\left(B_{t\wedge t_{i+1}} - B_{t\wedge t_i}\right)\backslash\mathcal{F}_s\right] &= \varphi_i E\left[\left(B_{t\wedge t_{i+1}} - B_{t\wedge t_i}\right)\backslash\mathcal{F}_s\right] \\
&= \varphi_i E\left[\left(B_{t\wedge t_{i+1}} - B_{t_i}\right)\backslash\mathcal{F}_s\right] \\
&= \varphi_i\left[E\left(B_{t\wedge t_{i+1}}\backslash\mathcal{F}_s\right) - B_{t_i}\right] \\
&= \varphi_i\left(B_s - B_{t_i}\right) \\
&= \varphi_i\left(B_{s\wedge t_{i+1}} - B_{s\wedge t_i}\right)
\end{aligned}$$

-3$^{ème}$ cas $t \geq s > t_{i+1}$ :

$$\begin{aligned}
E\left[\varphi_i\left(B_{t\wedge t_{i+1}} - B_{t\wedge t_i}\right)\backslash\mathcal{F}_s\right] &= E\left[\varphi_i\left(B_{t_{i+1}} - B_{t_i}\right)\backslash\mathcal{F}_s\right] \\
&= \varphi_i\left(B_{t_{i+1}} - B_{t_i}\right) \\
&= \varphi_i\left(B_{s\wedge t_{i+1}} - B_{s\wedge t_i}\right)
\end{aligned}$$

Car $\varphi_i$ est $\mathcal{F}_{t_i}$ d'où $\mathcal{F}_s$mesurable .

et B est une martingale[voir 1].

* On démontre que $E\left|I_t(L)(\omega)\right| < \infty$

$$\begin{aligned}
E\left|\sum_{i=1}^{p_n-1}\varphi_i\left(B_{t_{i+1}\wedge t} - B_{t_i\wedge t}\right)\right| &\leq \sum_{i=1}^{p_n-1} E\left|\varphi_i\left(B_{t_{i+1}\wedge t} - B_{t_i\wedge t}\right)\right| \\
&\leq \sum_{i=1}^{p_n-1} E\left|\varphi_i\right| E\left|\left(B_{t_{i+1}\wedge t} - B_{t_i\wedge t}\right)\right| < \infty
\end{aligned}$$

2) D'après un propriété précédent $I_0(L) = 0 \quad$ p.s

3)On démonter que $I_t(L)$ est carré intégrable c-à-d

$E\left|I_t(L)\right|^2<\infty \quad , \forall t \geq 0$

$$\begin{aligned}
E\left|\sum_{i=1}^{p_n-1} \varphi_i\left(B_{t_{i+1} \wedge t}-B_{t_i \wedge t}\right)\right|^2 & \leq \sum_{i=1}^{p_n-1} E\left|\varphi_i\left(B_{t_{i+1} \wedge t}-B_{t_i \wedge t}\right)\right|^2 \\
& \leq \sum_{i=1}^{p_n-1} E\left|\varphi_i\right|^2 E\left(B_{t_{i+1} \wedge t}-B_{t_i \wedge t}\right)^2 \\
& =\sum_{i=1}^{p_n-1} c\left(t_{i+1} \wedge t-t_i \wedge t\right) \\
& <\infty
\end{aligned}$$

4) On démontre la continuité :

D'après la définition on a : $\forall t \geq 0 \quad , I_t(X)=\sum_{i=1}^{p_n-1} \varphi_i\left(B_{t_{i+1}}-B_{t_i}\right)+\varphi_{p_n}\left(B_t-B_{t_{p_n}}\right)$

On a $\left(B_t\right)_{t \geq 0}$ est continue $\Longrightarrow\left(B_{t_{i+1}}-B_{t_i}\right)$ est continue et $\left(B_t-B_{t_{p_n}}\right)$ est continue.

Alors $\sum_{i=1}^{p_n-1} \varphi_i\left(B_{t_{i+1}}-B_{t_i}\right)+\varphi_{p_n}\left(B_t-B_{t_{p_n}}\right)$ est continue.

Donc $I_t(X)$ est continue en $t$. ■

## 2.2 Intégrale stochastique des bon processus :

**Définition 2.2.1** *pour prolonger la définition précédent à autre classe des processus, on définit la classe des bon processus* $\mathcal{L}_2$

$\mathcal{L}_2:=\left\{L=\left(L_t\right)_{t \geq 0} ;\left(\mathcal{F}_t^B\right)\right.$ *-adapté, càglàd,* $\left.E\left(\int_0^t L_s^2 d s\right)<\infty\right\}$.*[voir 7].*

*tels que* $\left\{\mathcal{F}_t^B, t \geq 0\right\}$ *la filtration naturelle du mouvement Brownien.*

**Proposition 2.2.1** *Si* $L$ *est un bon processus, il existe* $\left\{L^n, n \geq 0\right\}$ *suite de processus étagés telle que* $E\left[\int_0^t\left(L_s-L_s^n\right)^2 d s\right] \mapsto 0$

*Quand* $n \mapsto+\infty$*, puis que pour tout* $t>0$ *il existe une v.a*

*$I_t(L)$ de carré intégrable telle que $E\left[\left|I_t(L)_s - I_t(L_s^n)\right|^2\right] \mapsto 0$ quand $n \mapsto +\infty$.*

*Donc on définit $I_t(L) = \int_0^t L_s dB_s$ ,tels $L \in \mathcal{L}_2$ comme suite :*

$\int_0^t L_s dB_s = \lim_{n\mapsto\infty} \int_0^t L_s^{(n)} dB_s = \lim_{n\mapsto\infty} \sum_{i=0}^{n-1} L_i^{(n)}\left(B_{t_{i+1}} - B_{t_i}\right).$

***Proposition 2.2.2*** *Pour tout $t \geq 0$ on a $\int_0^t B_s dB_s = \frac{1}{2}\left(B_t^2 - t\right)$*

**Preuve.** On utilise la définition précédent, on a donc

$$\begin{aligned}
\int_0^t B_s dB_s &= \lim_{n\mapsto\infty} \sum_{i=0}^{p_n-1} B_{t_i}\left(B_{t_{i+1}} - B_{t_i}\right) \\
&= \lim_{n\mapsto\infty}\left(\frac{1}{2}\left(\sum_{i=0}^{p_n-1}\left(B_{t_{i+1}}^2 - B_{t_i}^2 - \left(B_{t_{i+1}} - B_{t_i}\right)^2\right)\right)\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(B_t^2 - \lim_{n\mapsto+\infty}\left(\sum_{i=0}^{p_n-1}\left(B_{t_{i+1}} - B_{t_i}\right)^2\right)\right)
\end{aligned}$$

car :

$$\begin{aligned}
\sum_{i=0}^{p_n-1}\left(B_{t_{i+1}}^2 - B_{t_i}^2\right) &= B_{t_1}^2 - B_{t_0}^2 + B_{t_2}^2 - B_{t_1}^2 + .....B_{t_{pn}}^2 - B_{t_{pn-1}}^2 = B_{t_0}^2 + B_{t_{pn}}^2 \\
&= 0 + B_t^2 \\
&= \frac{1}{2}\left(B_t^2 - t\right)
\end{aligned}$$

$\lim_{n\mapsto+\infty}\left(\sum_{i=0}^{p_n-1}\left(B_{t_{i+1}} - B_{t_i}\right)^2\right) = t$ car la variation quadratique sur $[0,t]$ du mouvement Brownien existe dans $L^2$ est $t$ . [voir 6]. ■

**Propriété 2.2.1** *pour $L$ et $X$ dans $\mathcal{L}_2$*

*1) $E\left[I_t(L)\right] = 0$*

*2) $E\left[\left(\int_0^t L_s dB_s\right)\left(\int_0^t X_s dB_s\right)\right] = E\left[\int_0^t L_s X_s ds\right]$*

*En cas particulier si $L = X$*

*on a* $E\left[\left(\int_0^t L_s dB_s\right)^2\right] = E\left[\int_0^t L_s^2 ds\right] = var\left[I_t(L)\right]$

*3) La linéarité* $I_t(\alpha L + \beta X) = \alpha I_t(L) + \beta I_t(X)$.

*4) Propriétés d'isométrie :*

*Pour* $s, t \geq 0 \quad E\left[I_s(X) I_t(L)\right] = E\left[\int_0^{t\wedge s} L_u X_u du\right]$.

* *le processus* $I_t(L) I_t(X) - \int_0^t L_s X_s ds$ *est une* $\left(\mathcal{F}_t^B\right)$ *-martingale.*

*5) Pour tout* $t \geq 0$ , $X\mathbf{1}_{[0,t]} := X_u \mathbf{1}_{[0,t]}(u)$ , $u \geq 0$.

*On définit* $\int_0^t X_u dB_u := \int_0^\infty X_u \mathbf{1}_{[0,t]}(u)\, dB_u \quad , \quad t \geq 0$

$$\int_s^t X_u dB_u := \int_0^t X_u dB_u - \int_0^s X_u dB_u \quad , \quad 0 \leq s \leq t.$$

*6)* $E\left[\left(I_t(L) - I_s(L)\right)^2 \backslash \mathcal{F}_s^B\right] = E\left[\int_s^t L_u^2 du \backslash \mathcal{F}_s^B\right]$.

*7) Propriété de martingale :*

*Les processus* $\left(I_t(L)\ , t \geq 0\right)$ *et* $\left(I_t(L)^2 - \int_0^t L_s^2 ds\ , t \geq 0\right)$ *sont des* $\left(\mathcal{F}_t^B\right)$ *-martingales continues.*

***Preuve.*** *1) On utilise la proposition (2.3.1)*

$$E\left[I_t(L)\right] = \lim_{n \mapsto +\infty} E\left[I_t(L^n)\right] = 0$$

*2)*

$$\begin{aligned} Var\left[I_t(L)\right] &= \lim_{n\mapsto+\infty} VarE\left[I_t(L^n)\right] = \lim_{n\mapsto+\infty} E\left[I_t(L^n)\right]^2 \\ &= \lim_{n\mapsto+\infty} E\left[\sum_{i=0}^{p_n - 1} \varphi_i^2 (t_{i+1} - t_i)\right] \\ &= E\left[\int_0^t L_s^2 ds\right]. \end{aligned}$$

*3)*

$$\begin{aligned}
I_t(\alpha L+\beta X) &= \lim_{n\mapsto+\infty} I_t(\alpha L^n+\beta X^n) = \lim_{n\mapsto+\infty} (\alpha I_t(L^n)+\beta I_t(X^n)) \\
&= \alpha \lim_{n\mapsto+\infty} I_t(L^n)+\beta \lim_{n\mapsto+\infty} I_t(X^n) \\
&= \alpha I_t(L)+\beta I_t(X).
\end{aligned}$$

*4) Pour* $s=t$

$$E[I_t(L)\, I_t(X)] = E\left[\int_0^t L_u X_u du\right]$$

*On a*

$$\begin{aligned}
E\left[\int_0^t L_u X_u du\right] &= E\left[\int_0^\infty (L_u X_u)\, \mathbf{1}_{]0,t]} du\right] \\
&= E\left[\int_0^\infty \left(L_u \mathbf{1}_{]0,t]}(u)\right)\left(X_u \mathbf{1}_{]0,t]}(u)\right) du\right] \\
&= E\left[\left(\int_0^\infty \left(L_u \mathbf{1}_{]0,t]}(u)\right) dB_u\right)\left(\int_0^\infty X_u \mathbf{1}_{]0,t]}(u)\, dB_u\right)\right] \\
&= E\left[\left(\int_0^t L_u dB_u\right)\left(\int_0^t X_u dB_u\right)\right]
\end{aligned}$$

*6)*

$$\begin{aligned}
E\left[\left(I_t\left(L\right)-I_s\left(L\right)\right)^2\backslash\mathcal{F}_s\right] &= E\left[\left(\int_s^t L_u dB_u\right)^2\backslash\mathcal{F}_s\right] \ (d'après5) \\
&= \lim_{n\mapsto+\infty} E\left[\left(\int_s^t L_u^n dB_u\right)^2\backslash\mathcal{F}_s\right] \\
&= \lim_{n\mapsto+\infty} E\left[\int_s^t \left(L_u^n\right)^2 du\backslash\mathcal{F}_s\right] \\
&= E\left[\lim_{n\mapsto+\infty}\int_s^t \left(L_u^n\right)^2 du\backslash\mathcal{F}_s\right] \\
&= E\left[\int_s^t L_u^2 du\backslash\mathcal{F}_s\right].
\end{aligned}$$

*7)* $s \leq t$

$$E\left[I_t\left(L\right)\backslash\mathcal{F}_s^B\right] = \lim_{n\mapsto+\infty} E\left[I_t\left(L^n\right)\backslash\mathcal{F}_s^B\right] = \lim_{n\mapsto+\infty} I_s\left(L^n\right) = I_s\left(L\right).$$

■

**Définition 2.2.2** ***(Martingale locale) :***

*Soit* $\{\mathcal{F}_t, t\geq 0\}$ *une filtration et* $\{X_t, t\geq 0\}$ *un processus* $(\mathcal{F}_t)$ *adapté. On dit que* $X$ *est une* $(\mathcal{F}_t)$ *-martingale locale s'il existe une suite* $\{\tau_n, n\geq 0\}$ *de* $\mathcal{F}_t$ *-temps d'arrêt telle que* $p\left(\tau_n\mapsto+\infty\right)=1$

*et le processus* $X^n : t\mapsto X_{t\wedge\tau_n}$ *est une martingale pour tout* $n\geq 0$.

**Définition 2.2.3** ***(bon processus local) :***

*On dit que* $\{L_t, t\geq 0\}$ *est un bon processus local s'il est càglàd,* $\left(\mathcal{F}_t^B\right)$ *−adapté, et si* $\int_0^t L_s^2 ds < +\infty$ *p.s.*

*pour tout* $t\geq 0$, *ce classe du processus est plus grand de fonction de classe* $\mathcal{L}_2$.

*On notera* $\mathcal{L}_{loc}^2 = \left\{ (L_t, t \geq 0) \ ,\mathcal{F}_t - adapt\acute{e}, c\grave{a}gl\grave{a}d, \int_0^t L_s^2 ds < +\infty \quad p.s. \forall t \geq 0 \right\}$

**Théorème 2.2.1** *Soit* $K, L \in \mathcal{L}_{loc}^2$ *et* $I_t(L) = \int_0^t L_s dB_s$ , $I_t(K) = \int_0^t K_s dB_s$.

*tels que* $E\left(\int_0^t L_s^2 ds\right) < \infty$ , $\forall t \geq 0$, *et* $E\left(\int_0^t K_s^2 ds\right) < \infty$ , $\forall t \geq 0$,

*a) Le processus* $\left(I_t(L) = \int_0^t L_s dB_s, t \geq 0\right)$ *et* $\left(I_t(K) = \int_0^t K_s dB_s, t \geq 0\right)$ *est une martingale.*

*b) Soit* $N_t = \left(\int_0^t L_s dB_s\right)^2 - \int_0^t L_s^2 ds$ *.Le processus* $(N_t \ , \ t \geq 0)$ *est une martingale.*

*c) L'espérance de* $\int_0^t L_s dB_s$ *(resp* $\int_0^t K_s dB_s$*) est nulle et sa variance est égale* $E\left(\int_0^t L_s^2 ds\right)$ *(resp* $E\left(\int_0^t K_s^2 ds\right)$*).*

*d)* $E\left(\int_0^t L_s dB_s \int_0^t K_s dB_s\right) = E\left(\int_0^t L_s K_s ds\right)$.

*e) Le processus* $\left(\int_0^t L_s dB_s \int_0^t K_s dB_s - \int_0^t L_s K_s ds \ , \ t \geq 0\right)$ *est une martingale.*

**Remarque 2.2.1** *On peut définir* $\int_0^t L_s dB_s$ *pour des processus adaptés càglàd qui n'appartiermment pas nécessairement à* $L^2(\Omega \times \mathbb{R}_+)$, *mais qui vérifiant pour tout* $t$,

$\int_0^t L_s^2(\omega) ds < \infty$.

*Dans ce cas le processus* $\left(\int_0^t L_s dB_s, t \geq 0\right)$ *n'est pas une martingale mais martingale locale et* $E\left(\int_0^t L_s dB_s\right)$ *peut être non nul.*

## 2.3 Intégrale de Wiener :

L'intégrale de Wiener est simplement une intégrale stochastique avec $X$ fonction déterministe $i, e$ ne dépendant pas de $\omega$ ( $X$ fonction de $t$).

**Définition 2.3.1** *On note* $L^2([0,T], \mathbb{R}) = \left\{ f : [0,T] \mapsto \mathbb{R} / \int_0^T |f(s)|^2 ds < \infty \right\}$ *l'ensemble des classes des fonctions boréliennes* $f$ *de* $[0,T]$ *dans* $\mathbb{R}$ *de carré intégrable.*

$L^2([0,T], \mathbb{R})$ *est un espace de Hilbert pour la norme* $\|f\|_2 = \left(\int_0^T f^2(s) ds\right)^{\frac{1}{2}}$.

**Lemme 2.3.1** ***(Lemme hilbertien) :***

*Soit* $f \in L^2([0,T],\mathbb{R})$*.Il existe une suite des fonctions en exalier* $\{f_n\}$

*telle que* $\|f - f_n\|_{2,T} \mapsto 0$ *quand* $n \mapsto +\infty$. *[voir 7].*

**Proposition 2.3.1** *Soit* $f_n$ *une fonction en exalier ,* $f_n(t) = \sum_{i=1}^{p_n} \alpha_i \mathbf{1}_{]t_i,t_{i+1}]}(t)$ *tels que* $p_n \in \mathbb{N}$*, les* $\alpha_i$ *sont réels et* $\left\{t_i^{(n)}\right\}$ *une suite croissante de* $[0,T]$ *donc on définit l'intégrale de Wiener par*

$I_T(f_n) = \int_0^T f_n(s)\,dB_s = \sum_{i=1}^{p_n} \alpha_i \left(B_{t_{i+1}} - B_{t_i}\right)$

*d'où la variable aléatoire* $I_T(f)$ *est une v.a gaussieme d'espérance nulle et variance* $\int_0^T f^2(s)\,ds$.

***Preuve.*** *D'après l'indépendance de les accroissements*

$$\begin{aligned} E[I_T(f_n)] &= E\left[\sum_{i=1}^{p_n} \alpha_i \left(B_{t_{i+1}} - B_{t_i}\right)\right] \\ &= \sum_{i=1}^{p_n} E\left[\alpha_i \left(B_{t_{i+1}} - B_{t_i}\right)\right] \\ &= \sum_{i=1}^{p_n} E(\alpha_i)\, E\left(B_{t_{i+1}} - B_{t_i}\right) \\ &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Var(I_T(f_n)) &= \sum_{i=1}^{p_n} \alpha_i^2 Var\left(B_{t_{i+1}} - B_{t_i}\right) = \sum_{i=1}^{p_n} \alpha_i^2 (t_{i+1} - t_i) \\ &= \int_0^T f_n^2(s)\,ds. \end{aligned}$$

*[voir 7].* ■

## 2.4 Intégrale des processus d'Itô :

**Définition 2.4.1** *On appelle processus d'Itô tout processus* $(X_t, t \geq 0)$ *tels que :*

$X_t = X_0 + \int_0^t H_s dB_s + \int_0^t V_s ds$

*où* $X_0$ *est* $\mathcal{F}_0$ *-mesurable,* $H$ *un processus adapté tels que :*$\forall t, \int_0^t H_s^2 ds < \infty \quad p.s$

*et* $V$ *est un processus adapté tels que :* $\forall t, \int_0^t |V_s|\, ds < \infty \quad p.s.$

### 2.4.1 Intégration :

L'intégrale stochastique d'un processus $Y$par rapport a une processus d'Itô

$dX_t = V_t dt + H_t dB_t$

est définit par $\int_0^t Y_s dX_s = \int_0^t Y_s V_s ds + \int_0^t Y_s H_s dB_s$.

## 2.5 Formule d'Itô :

Soit $X_t = X_0 + \int_0^t H_s dB_s + \int_0^t V_s ds$ un processus d'Itô.

**Remarque 2.5.1** *si on prend* $dX_t = V_t dt + H_t dB_t$,*on a* $\langle dX_t, dX_t\rangle = H_t^2 dt$

### 2.5.1 Première formule d'Itô :

soit $f \quad :\mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ une fonction de classe $C^2$,alors $f(X_t) = f(X_0) + \int_0^t f'(X_s)\, dX_s + \frac{1}{2}\int_0^t f''(X_s)\, d\langle X\rangle_s$

cette formule s'écrit sous forme

$$df(X_t) = f'(X_t)\, dX_t + \frac{1}{2} f''(X_t)\, d\langle X\rangle_s$$

si $f$ est a dérivée borné ,et $H$ bornée le processus $f(X_t) - \int_0^t f'(X_s) V_s ds - \frac{1}{2}\int_0^t f''(X_s) H_s^2 ds$ est une martingale.

En cas particulier si $dX_t = dB_t$

$$f(B_t) = f(B_0) + \int_0^t f'(B_s)\, dB_s + \frac{1}{2}\int_0^t f''(B_s)\, d\langle B\rangle_s$$
$$= f(0) + \int_0^t f'(B_s)\, dB_s + \frac{1}{2}\int_0^t f''(B_s)\, ds$$

### 2.5.2 Deuxième formule d'Itô :

Soit $f$ une fonction de classe $C^{1,2}$ (définie sur $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}$ de classe $C^1$ par rapport à $t$ ,de classe $C^2$ par rapport à $x$),on a :

$$f(t, X_t) = f(0, X_0) + \int_0^t \frac{\partial f}{\partial t}(s, X_s)\, ds + \int_0^t \frac{\partial f}{\partial x}(s, X_s)\, dX_s + \frac{1}{2}\int_0^t \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(s, X_s)\, d\langle X\rangle_s$$

On peut écrire cette formule sous forme différentielle :

$$df(t, X_t) = \frac{\partial f}{\partial t}(t, X_t)\, dt + \frac{\partial f}{\partial x}(t, X_t)\, dX_t + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(t, X_t)\, d\langle X\rangle_t$$

En cas particulier :

$$f(t, B_t) = f(0, 0) + \int_0^t \frac{\partial f}{\partial x}(s, B_s)\, dB_s + \int_0^t \frac{\partial f}{\partial t}(s, B_s)\, ds + \frac{1}{2}\int_0^t \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(s, B_s)\, d\langle B\rangle_s$$

**Définition 2.5.1** *On présente maintenant la version multidimensionnelle de la formule d'Ito. Un processus $B = (B_t, t \geq 0)$ à valeurs dans $\mathbb{R}^d$ (avec $d \geq 1$)est un $(\mathcal{F}_t)$ -mouvement Brownien d-dimensionnel si ses composantes sont de $(\mathcal{F}_t)$ mouvement Brownien indépendants.*

*Un processus réel $X = (X_t, t \geq 0)$ est un processus d'Itô si :*

$X_t = X_0 + \sum_{k=1}^{d} \int_0^t H_s^{(k)} dB_s^{(k)} + \int_0^t V_s ds$

*où* $d \geq 1$ *,* $B = \left(B^{(1)}.....B^{(d)}\right)$ *est un* $(\mathcal{F}_t)$ *-mouvement Brownien d-dimensionnel,*

$H^{(k)} \in \mathcal{L}_2$ *(donc adapté tels que* $\forall t, \int_0^t \left(H_s^{(k)}\right)^2 ds < \infty$ *p.s) et* $V$ *un processus adapté tels que* $\forall t, \int_0^t |V_s| \, ds < \infty$ *p.s.*

*pour un couple quelconque de processus d'Itô :*

$X_t = X_0 + \sum_{k=1}^d \int_0^t H_s^{(k)} dB_s^{(k)} + \int_0^t V_s ds$

*et* $Y_t = Y_0 + \sum_{k=1}^d \int_0^t K_s^{(k)} dB_s^{(k)} + \int_0^t W_s ds$ *,on définit :*

$\langle X, Y \rangle_t := \sum_{k=1}^d \int_0^t H_s^{(k)} K_s ds, t \geq 0$

*En cas particulier ,on définit* $\langle X \rangle_t = \langle X, Y \rangle_t$ *.*

### 2.5.3 Formule d'Ito multidimensionnelle :

Soit $X^{(1)}, ......, X^{(n)}$ des processus d'Itô

$X_t^{(i)} = X_0^{(i)} + \sum_{k=1}^d \int_0^t H_s^{(i,k)} dB_s^{(k)} + \int_0^t V_s^{(i)} ds$

Soit $f : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}$ une fonction de classe $C^{1,2}$ ,Alors :

$f\left(t, X_t^{(1)}, ......, X_t^{(n)}\right) = f\left(0, X_t^{(1)}, ......, X_t^{(n)}\right) + \int_0^t \frac{\partial f}{\partial s}\left(s, X_s^{(1)}, ......, X_s^{(n)}\right) ds +$
$\sum_{i=1}^n \int_0^t \frac{\partial f}{\partial x_i}\left(s, X_s^{(1)}, ......, X_s^{(n)}\right) dX_s^{(i)} + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \int_0^t \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}\left(s, X_s^{(1)}, ......, X_s^{(n)}\right) d\left\langle X^{(i)}, X^{(j)}\right\rangle_s$

## 2.6 Intégration par partie :

La formule d'intégration par partie dans le résultat suivant est une conséquence de la formule d'Itô.

**Proposition 2.6.1** *Soient* $X, Y$ *deux processus stochastique d'Itô*

*on a :* $X_t Y_t = X_0 Y_0 + \int_0^t X_s dY_s + \int_0^t Y_s dX_s + \int_0^t d\langle X, Y \rangle_s$

*En notation différentielle :*

$d(X.Y)_t = X_t dY_t + Y_t dX_t + d\langle X, Y \rangle_t$

**Preuve.** On applique la formule d'Itô à $X_t^2$ et $Y_t^2$ ,on obtient :

$dX_t^2 = 2X_t dX_t + \frac{2}{2} d\langle X\rangle_t$

$dY_t^2 = 2Y_t dY_t + \frac{2}{2} d\langle Y\rangle_t$

En appliquant aussi à $(X+Y)^2$ on obtient :

$d(X+Y)^2 = 2(X_t+Y_t)\, d(X_t+Y_t) + \frac{2}{2}\langle X+Y\rangle_t$

on obtient :

$$\begin{aligned} d(XY)_t &= \frac{1}{2}\left(d(X+Y)_t^2 - dX_t^2 - dY_t^2\right) \\ &= X_t dY_t + Y_t dX_t + \frac{1}{2}\left[d\langle X+Y\rangle_t - d\langle X\rangle_t - d\langle Y\rangle_t\right] \\ &= X_t dY_t + Y_t dX_t + d\langle X, Y\rangle_t \end{aligned}$$

soient les processus $X_t = e^{\alpha\beta_t}$ et $Y_t = e^{\alpha t}$

d'aprés la formule d'Itô :

$dX_t = \alpha e^{\alpha\beta_t} d\beta_t + \frac{1}{2}\ \alpha^2 e^{\alpha\beta_t} dt = \alpha X_t d\beta_t + \frac{1}{2}\alpha^2 X_t dt$

$dY_t = \alpha e^{\alpha t} dt = \alpha Y_t dt$

on pose $Z_t = Y_t X_t$

donc d'prés la formule d'integration par partie :

$$\begin{aligned} Z_t = Y_t X_t = e^{\alpha(\beta_t + t)} &= 1 + \int_0^t Y_s dX_s + \int_0^t X_s dY_s + \int_0^t d\langle X, Y\rangle_s \\ &= 1 + \int_0^t Y_s\left(\alpha X_s dB_s + \frac{1}{2}\alpha^2 X_s ds\right) + \int_0^t \alpha Y_s X_s ds + 0 \end{aligned}$$

■

**Conclusion**

L'intégrale stochastique considère comme base de calcul stochastique .

Dans le chapitre suivante nous aurons appliqué la dans les équations différentielles stochastiques

# Chapitre 3

# Les équations différentielles stochastiques

**Introduction**

Les équations différentielles (standard)gouvernent de nombreux phénomènes déterministes.

Pour prendre en compte des phénomènes aléatoires, formelles on doit prendre en compte des <<différentielles stochastiques>> , ce qui transforme les équations différentielles en équations différentielles stochastiques(EDS).

## 3.1 Les équations différentielles stochastiques :

**Définition 3.1.1** *On appelle équation différentielles stochastiques(EDS) une équation en le processus $X$ de la forme :*

$dX_t = a(t, X_t)\, dt + \sigma(t, X_t)\, dB_t$

*où $a(t, x)$ est appelé dérivé ou drift de l'EDS*

*$\sigma(t, x)$est appelé coefficient de diffusion de l'EDS.*

*La solution d'une l'EDS est une fonction aléatoire, pour démontrer que un processus $X$*

*est un solution des EDS on appliquer la formule d'Itô.*

*Il ya des types des équations différentielles stochastiques dans la partie suivante on va étudier ces types et nous donnons queques exemples. [voir 5].*

## 3.2 Equation linéaire :

### 3.2.1 Black-scholes :

En générale black-scholes de la forme $dX_t = aX_t dt + \sigma X_t dB_t$

tels que $a(t,x) = ax$ et $\sigma(t,x) = \sigma x$

Sa solution est $X_t = X_0 \exp\left(at - \frac{\sigma 2}{2}t + \sigma B_t\right)$

On a EDS : $dX_t = rX_t dt + \sigma X_t dB_t$

$$X_0 = x_0 \qquad , r, \sigma > 0$$

On va démontrer que le processus :

$X_t = x_0 e^{\left(r - \sigma\frac{2}{2}\right)t} e^{\sigma B_t}$ est un solution de l'EDS : $dX_t = rX_t dt + \sigma X_t dB_t$

$$X_0 = x_0 \qquad , r, \sigma > 0$$

$$\begin{aligned} dX_t &= d\left(x_0 e^{\left(r-\sigma\frac{2}{2}\right)t} e^{\sigma B_t}\right) \\ &= \left[\left(r - \frac{\sigma 2}{2}\right) x_0 e^{\left(r-\sigma\frac{2}{2}\right)t} e^{\sigma B_t} dt + x_0 e^{\left(r-\sigma\frac{2}{2}\right)} \left(\sigma e^{\sigma B_t} dB_t + \frac{\sigma 2}{2} e^{\sigma B_t} dt\right)\right] \\ &= rX_t dt + \sigma X_t dB_t \end{aligned}$$

Ce forme des EDS est appelé black-scholes.

### 3.2.2 Ornstein-uhlenbeck :

Est un EDS de la forme $dX_t = -aX_t dt + \sigma dB_t$

tels que $a(t,x) = -ax \quad (a > 0)$ et $\sigma(t,x) = \sigma$

Sa solution $X_t = X_0 e^{-at} + \sigma \int_0^t e^{-a(t-s)} dB_s$

Si l'EDS sans le terme $\sigma dB_s$ ,l'équation $dX_t = -aX_t dt$ se résout immédiatement

en $X_t = ce^{-at}$

Pour tenir compte du terme , on fait<<varier la constante $c$ >>

$d(ce^{-at}) = dc - ace^{-at}dt = dX_t = -aX_t dt + \sigma dB_t$

$$dc = \sigma e^{at} dB_t$$

$$c = X_0 + \int_0^t \sigma e^{as} dB_s$$

Un autre équation tels que $a(t,x) = a_t x$ et $\sigma(t,x) = \sigma_t x$

On suppose que $(a_t)_{t \geq 0}$ et $(\sigma_t)_{t \geq 0}$ sont bornés où vérifiant l'inégrabilité $\int_0^T |a_t| \, dt < \infty$ et $\int_0^T |\sigma_t|^2 \, dt < +\infty$

L'EDS $dX_t = X_t (a_t dt + \sigma_t dB_t)$ , $X_0 = x$

admet pour solution

$$X_t = x \exp\left( \int_0^t a_s ds + \int_0^t \sigma_s dB_s - \frac{1}{2} \int_0^t \sigma_s^2 ds \right).$$

**Preuve.** $dX_t = a_t X_t dt + \sigma_t X_t dB_t$

Nous pouvons alors écrire $\frac{dX_t}{X_t} = a_t dt + \sigma_t dB_t$.

En intégrant le membre de gauche ,on devrait trouver $\log(X_t)$

posons $Y_t = \log(X_t)$ .Alors la formule d'Itô donne

$$\begin{aligned} dY_t &= \frac{1}{X_t} dX_t - \frac{1}{2X_t^2} dX_t^2 \\ &= a_t dt + \sigma_t dB_t - \frac{1}{2} \sigma_t^2 dt \end{aligned}$$

En intégrant et en reprenant l'exponentielle,on obtient donc la solution

$$X_t = X_0 \exp\left(\int_0^t \left[a_s - \frac{1}{2}\sigma_s^2\right] ds + \int_0^t \sigma_s dB_s\right)$$

[voir 5]. ■

## 3.3 Equation affine :

On suppose que $a(t,x) = a_t x + c_t$ et $\sigma(t,x) = \sigma_t x + \delta_t$

C'est-à-dire l'EDS affine générale

$dX_t = X_t (a_t dt + \sigma_t dB_t) + c_t dt + \delta_t dB_t$

Elle a une solution construire a partir de la solution de l'EDS linéaire $dZ_t = Z_t (a_t dt + \sigma_t dB_t)$ de condition initiale $Z_0 = 1$ , *ie*

$Z_t = \exp\left(\int_0^t a_s ds + \int_0^t \sigma_s dB_s - \frac{1}{2}\int_0^t \sigma_s^2 ds\right)$

Donnée,avec $\tilde{c}_t = c_t - \sigma_t \delta_t$ ,par $X_t = Z_t \left(X_0 + \int_0^t Z_s^{-1} (\tilde{c}_s ds + \delta_s dB_s)\right)$.

**Remarque 3.3.1** *La solution d' une EDS n' est pas en général aussi simple. C'est pour quoi il existe des conditions sur les fonctions $a$ et $\sigma$ qui assurent l'existence et l'unicité de la solution de l'EDS.*

## 3.4 L'existence et l'unicité :

L'existence et l'unicité de la solution des EDS sont partie important dans l'étude de EDS.

### 3.4.1 Equations homogènes en temps :

Soit $B$ un M.B et $a$ et $\sigma$ deux fonctions définies comme suite $a, \sigma : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$.

On définit l' EDS homogène en temps comme suit

$dX_t = a(X_t)\,dt + \sigma(X_t)\,dB_t$ et $X_0 = x_0 \in \mathbb{R}$

**Définition 3.4.1** ***(fonction Lipchitzienne) :***

*Une fonction $a : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ est une fonction Lipchitzienne*

*Si il existe une constante $K > 0$ tels que pour tout $x, y \in \mathbb{R}$*

$|a(x) - a(y)| \leq K|x - y|$.

**Théorème 3.4.1** *Si les fonctions $a, \sigma : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ sont continues pour tout $x \in \mathbb{R}$ et aussi Lipxchitizienne, $|a(x) - a(y)| + |\sigma(x) - \sigma(y)| \leq K|x - y|$ alors l' EDS admet une unique solution pour tout condition initiale $x_0$ de plus cette solution vérifie*

$E\left(\sup_{0\leq t\leq T}|X_t|^p\right) < \infty \quad , \quad 2 \leq p < \infty$

*La solution est appelé solution forte.. [voir 8].*

### 3.4.2 Equation non homogène en temps :

On définit l' EDS non homogène en temps comme suite :

$dX_t = a(t, X_t)\,dt + \sigma(t, X_t)\,dB_t$ et $X_0 = x_0 \in \mathbb{R}$

tels que $a, \sigma : [0, +\infty] \times \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ et $B$ un M.B.

**Définition 3.4.2** *Une fonction $a : [0, \infty] \times \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ est une fonction Lipchitzienne*

*Si il existe une constante $K > 0$ tels que pour tout $x, y \in \mathbb{R}$*

$|a(t, x) - a(t, y)| \leq K|x - y|$.

**Théorème 3.4.2** *Si les fonctions $a, \sigma : [0, +\infty] \times \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ sont continues pour tout $x \in \mathbb{R}$ et aussi Liptizienne, $|a(t, x) - a(t, y)| + |\sigma(t, x) - \sigma(t, y)| \leq K|x - y|$ alors l' EDS admet une unique solution pour tout condition initiale $x_0$*

*De plus cette solution vérifie $E\left(\sup_{0\leq t\leq T}|X_t|^p\right) < \infty \ , \ 2 \leq p < \infty$*

*La solution est appelé solution forte.*

**Conclusion**

L'étude des équations différentielle stochastique permet de trouver une solution de plusieurs phénomènes aléatoires.

# Conclusion

l'objectif de notre travail est l'étude de l'intégrale stochastique et application .

d'abord nous avons présenté quelques notions basique de la théorie des probabilités ,processus stochastique et exemple particule de ces processus.

Ensuite nous avons détaillé de l'intégrale stochastique et formule d'itô qu'ils décrit par Kiyoshi Itô.

Enfin nous avons présenté les équations différentielles stochastiques qu'ils sont considérés comme application de l'intégrale stochastique.

Donc dans ce mémoire nous avons reconnu à un nouvelle intégrale(intégrale stochastique)et application(les EDS).

Nous souhaitons de complète le recherche par une étude détaillé de la solution des équation différentielles stochastique et quelques théorèmes principaux.

# Bibliographie

[1] Alexandre Popier. (2016-2017). Calcul stochastique, application en finance, ENSAI,3A,GDRIF.

[2] Fabien campillo , Marc Jonnides. (2010-2011). Processus stochastique en temps continu pour la modélisation en écologie. Université Montpellier - Université Montpellier , Montpellier Sup Agro.

[3] Francis Comets, Thierry Meyre. (2006-2015 ). Calcul stochastique et modèles de diffusion, Cours et exercices corrigés ($2^{ème}$ édition), Dunod.

[4] Hervé Guiol. (2006). Calcul stochastique Avancé. TIMB /TIMC-IMAG.

[5] Jean-Christophe Breton. (2014). Calcul stochastique, université de Rennes 1.

[6] Monique Jeanblanc. (2006). Cours de calcul stochastique, Master 2IF EVERY.

[7] Monique Jean blanc, Thomas Sinon. (2005). Eléments de calcul stochastique. IBRId.

[8] Nadine Guillotin-plantard. (2009). Introduction au calcul stochastique.

# Annexe : Abréviations et Notations

Les différentes abréviations et notations utilisées tout au long de ce mémoire sont expliquées ci-dessous :

| | | |
|---|---|---|
| $\mathbb{R}$ | : | Ensemble des nombres réels |
| $\mathbb{R}_+$ | : | Ensemble des nombres réels positifs |
| $B_R$ | : | Tribu Borélienne sur $\mathbb{R}$ |
| $\Omega$ | : | Un ensemble des événements |
| $\mathcal{F}$ | : | La tribu définie sur $\Omega$ |
| $P$ | : | mesure de probabilité sur $(\Omega, \mathcal{F})$ |
| $\mathcal{T}$ | : | Intervalle de $t$ $[0, +\infty]$ ou $[0, T]$ |
| $v.a$ | : | Variable aléatoire. |
| $p.s$ | : | Presque sûrement |
| $M.B$ | : | Mouvement brownien. |
| $\langle X \rangle_t$ | : | Variation quadratique de processus $X$ |
| $E[X]$ | : | Espérance de variable aléatoire. |
| $E[X \backslash \mathcal{F}]$ | : | Espérance conditionnelle de variable aléatoire |
| $\mathbf{1}_A$ | : | Fonction indicatrice de l'ensemble $A$ |
| $I_t(X)$ | : | Intégrale stochastique de processus $X$ |
| $EDS$ | : | Equation différentielle stochastique |

# Résumé

Dans ce mémoire nous somme intéressées au l'intégrale stochastique et application

D'abord nous avons présenté des généralités de la théorie de probabilités et les processus

Ensuit nous avons détaillé de l'intégrale stochastique et formule d'Itô

Enfin nous avons étudié les équations différentielles stochastiques

# Abstract

In this thesis ,we are interested with stochastic integrals and application

Firstly, we have presented stochastic processes, secondly we have spoken about stochastic integrals accurately and Ito-formula.

Finally, we have studied stochastic differential equation.