République Algérienne Démocratique et Populaire

Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

UNIVERSITÉ MOHAMED KHIDER, BISKRA

FACULTÉ des SCIENCES EXACTES et des SCIENCES de la NATURE et de la VIE

DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES

Mémoire présenté en vue de l'obtention du Diplôme **:**

MASTER en Mathématiques

Option : **Probabilités**

Par

Ben Djaballah Mounira

Titre :

Éaquations différentielles fonctionnelles stochastiques rétrogrades neutres

Membres du Comité d'Examen :

Dr.	**Chighoub Farid**	UMKB	Encadreur
Dr.	**Yekhlef Samia**	UMKB	Président
Dr.	**Berouis Nassima**	UMKB	Examinateur

Juin 2019

Dédicace

Tous les mots ne sauraient exprimer la gratitude, le respect, l'amour, la reconnaissance, c'est tous simplement que :Je dédie ce modeste travail :

À mes trés chers parents,

À mes soeurs,

À mes frères,

À mes amis,

À tous les membres de ma promotion,

Et à tous mes enseignants depuis mes première années d'études.

MOUNIRA

REMERCIEMENTS

J'adresse en premier lieu ma reconnaissance à **ALLAH** Tout Puissant, de m'avoir donné la force, le moral et la santé de bien terminer ce modeste travail.

La première personne que je tiens à remercier **Dr**. Chighoub Farid qui ma encadré dans ce mémoire de master, pour sa patience, sa disponibilit.

Mes remerciements les plus chaleureux vont à tous mes proches et collègues qui m'ont apporté leur support moral et intellectuel tout au long de ma démarche.

Table des matières

Introduction

Dans ce travail, nous nous intéressons à l'étude des équations différentielles stochastiques rétrogrades, La théorie des équations différentielles stochastiques rétrogrades (EDSR en abrégé) a connu un formidable développement à partir des années 1990. Ces équations sont apparues en 1973, dans un article de $J.M$. Bismut qui concernait le contrôle stochastique optimal et la version probabiliste du principe du maximum de Pontryagin. Pourtant le premier résultat général concernant les EDSR ne date que de 1990 et est dû à E. Pardoux et S. Peng. Nous pourrions aborder les équations rétrogrades à travers des problèmes de modélisation : le contrôle stochastique, ou encore le problème du « pricing » et des stratégies de couverture en finance. Mais dans ce travail, la principale motivation provient des équations différentielles ordinaires et des équations aux dérivées partielles.

Résoudre une EDSR, c'est trouver un couple de processus adaptés par rapport à la filtration du mouvement brownien $(B_t)_{0\leq t\leq T}$, (Y_t, Z_t) $t \in [0, T]$ vérifiant l'équation différentielle stochastique

$$-dY_t = f(t,\ Y_t,\ Z_t)dt - Z_t dB_t, \qquad 0 \leq t \leq T,$$

Ce mémoire est composé par deux chapitres :

Le premier chapitre : On donne quelque rappels de base concernant le calcul stochastique puis on rappelle le théorème d'existence et d'unicité de la solution EDSR.

Le deuxième chapitre : nous allons étudons l'existance et l'unicité de solution de les équations différentielles fonctionnelles stochastiques rétrogrades neutres et le théorème de comparaison.

Chapitre 1

Rappels sur le calcul stochastique

1.1 Processus stochastique

Le calcul stochastique est une extension du calcul différentiel et intégrale classique, dans lequel les processus à temps continus remplaçant les fonctions, et les martingales jouent le rôle des constantes.

Le but de ce chapitre est consacré à donner des difinitions de base et des résultats principaux pour les utiliser aux prochains chapitres.

Définition 1.1 *(**Processus stochastique**)Soit T un ensemble. On appelle **processus stochastique** sur un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ indexé par T et à valeurs dans $\mathbb{R}^d$, une famille $(X_t)_{t\in T}$ d'application mesurables de $(\Omega, \mathcal{F})$ dans $(\mathbb{R}^d, B(\mathbb{R}^d))$; pour tout $t \in T$, X_t soit une variable aléatoir.*

Remarque 1.1 *Les fonctions $t \longrightarrow X_t(\omega)$ sont appellées les **trajectoires** du processus stochastique X_t.*

Définition 1.2 *On appelle **filration** $(\mathcal{F})_{t\geq 0}$ de $(\Omega, \mathcal{F})$, une famille croissante de sous tribus de $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ .i.e $\mathcal{F}_s \subset \mathcal{F}_t \subset \mathcal{F}$, $\forall s \leq t$.*

Remarque 1.2 *Un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ muni d'une filtration $(\mathcal{F})_{t\in T}$ est satisfait les conditions habituelles si :*

i) Les ensembles négligeable sont contenus dans $\mathcal{F}_0$.

ii) La filtration est continue à droite i.e. $\mathcal{F}_t = \cap_{s \succ t} \mathcal{F}_s \ \forall t$.

La famille croissante de sous tribus $G_t = \sigma(X_s, \ s \leq t)$ *s'appelle la filtration naturelle du processus stochastique* X. *Mais* G_0 *ne contient pas nécessairement les ensembles négligeables* (N), *c'est pour cela on introduit la filtration naturelle augmentée de* X *définie par* $\mathcal{F}_t = \sigma(N \cup G_t)$. *Lorsque nous parlerons de filration naturelle, il s'agira toujours de la filtration naturelle augmentée.*

Définition 1.3 *Un processus stochastique* $(X_t)_{t \in T}$ *est* ***adapté*** *par rapport à la filtration* $(\mathcal{F})_{t \geq 0}$ *si* $\forall t \geq 0$, $X_t \in \mathcal{F}_t$ *i.e.* X_t *est* $\mathcal{F}_t-$*mesurable pour tout* t.

Définition 1.4 *soient* $(X_t)_{t \geq 0}$ *et* $(Y_t)_{t \geq 0}$ *deux processus stochastiques définis sur même espace* $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$

i) X *est une modification (ou une version) de* Y *si : pour tout* $t \geq 0$, *les variables* X_t *et* Y_t *sont égales*

$$P - p.s. \forall t \ \mathbb{P}(X_t = Y_t) = 1$$

ii) X *et* Y *sont indistinguable si* $P - p.s$, *les trajectoires de* X *et* Y *sont les mêmes i.e*

$$\mathbb{P}(X_t = Y_t, \forall t \geq 0) = 1.$$

Définition 1.5 *Un processus stochastique* $(X_t)_{t \geq 0}$ *est* ***progressivement mesurable*** *par rapport à* $(F)_{t \geq 0}$, *si l'application* $(s, \omega) \rightarrow X_s(\omega)$ *de* $[0, T] \times \Omega$ *dans* $\mathbb{R}^d$ *est mesurable par rapport à* $B([0, t]) \otimes \mathcal{F}_t$ *et* $B(\mathbb{R}^d)$.

Remarque 1.3 *Un processus progressivement mesurable est mesurable et adapté. On noter aussi que si* X *est un processus mesurable et adapté alors il possède une modification progressivement mesurable.*

Proposition 1.1 *Si* X *est un processus stochastique dont les trajectoires sont continues à droite (ou à gauche), alors* X *est mesurable et progressivement mesurable s'il est de plus adapté.*

Définition 1.6 *On définit la variation infinitésimale d'ordre* p *d'un processus* X *sur* $[0,T]$ *associé à une subdivision* $\Pi_n = (t_1^n, t_2^n, \ldots, t_n^n)$ *de* $[0,T]$ *par :*

$$V_T^p(\Pi_n) = \sum_{i=1}^{n} \left| X_{t_i^n} - X_{t_{i-1}^n} \right|^p$$

Définition 1.7 *Un processus* $X = (X_t, t \geq 0)$ *est dit à variation bornée sur* $[0,T]$ *si*

$$\sup_{\Pi_n} \sum_{i=1}^{n-1} \left| X_{t_{i+1}} - X_{t_i} \right| < K.$$

Définition 1.8 *:Un processus* $X = (X_t, t \geq 0)$ *est dit à variation finie sur* $[0,T]$ *si*

$$\sup_{\Pi_n} \sum_{i=1}^{n-1} \left| X_{t_{i+1}} - X_{t_i} \right| < \infty$$

Définition 1.9 *Les variables alétoires* $X_t - X_s$, $0 \leq s \leq t$, *sont appellées* ***les acroissements*** *du processus stochastique* (X_t).

i) Processus à acroissement indépendant :

$$(X_t - X_s) \perp \mathcal{F}_t^X = \sigma(X_r,\ 0 \leq r \leq s),\ 0 \leq s \leq t.$$

ii) Processus à acroissement stationnaires :

$$X_t - X_s \sim X_{t-s} - X_0,\ \forall 0 \leq s \leq t.$$

Définition 1.10 ***(Temps d'arrêt)*** *Une variable alétoire* $\tau : \Omega \to [0,\infty]$ *est un* ***temps d'arrêt*** *si l'évènement* $\{\tau \leq t\} \in \mathcal{F}_t, \forall t,\ 0 \leq t \leq \infty$.

1.1.1 Le mouvement brownien

Définition 1.11 *On appelle* ***mouvement brownien*** *un processus stochastique à valeurs réelles,* $(B_t)_{t\geq 0}$, *qui est un processus à accroissements indépendants et stationnaires dont les* *trajectoires sont continues. Ce qui signifie que*

i) Continuité : P *p.s. la fonction* $s \longrightarrow B_t(\omega)$ *est une fonction continue.*

ii) Indépendance des accroissement : si $s \leq t$, $B_t - B_s$ *est indépendant de la tribu* $\mathcal{F}_s = \sigma(B_r,\ r \leq s)$ *est de loi gaussienne centré de variance* $t - s$.

iii) Stationnarité des accroissements : si $s \leq t$, *la loi de* $B_t - B_s$ est *identique à celle de* $B_{t-s} - B_0 = B_{t-0}$.

Définition 1.12 *Un mouvement brownien est dit standard si :* $B_0 = 0$ P *p.s*, $\mathbb{E}(B_t) = 0$, *et* $\mathbb{E}(B_t^2) = t$.

Dans la suite si on parlera de mouvement brownien sans précision, il s'agira d'un movement brownien standard.

Proposition 1.2 *Soit* $(B_t)_{t\geq 0}$ *est un movement brownien standard, alors* B_t *est un processus gaussien i.e. pour tout* n *et tous* $0 \leq t_0 \leq t_1 \leq t_2 \leq \ldots \leq t_n$, $(B_{t_1}, \ldots, B_{t_n})$ *est un vecteur gaussien.*

Théorème 1.1 B *est mouvement brownien standard si et seulement si* B *est un processus gaussien continu centré de fonction de covariance :*

$$cov(B_t, B_s) = t \wedge s = \min(t, s).$$

1.1.2 Martingale

Définition 1.13 *Un processus* $(M_t)_{t\geq 0}$*est dit* ***martingale*** *si :*

i) Pour tout $t \geq 0$, M_t *est* $\mathcal{F}_s-$*mesurable.*

ii) Pour tout $t \geq 0$, M_t *est intégrable i.e* $\mathbb{E}(|M_t|) < \infty$.

iii) $\forall t \geq s \geq 0$, $\mathbb{E}(M_t / \mathcal{F}_s) = M_s$ $P - p.s.$

On définit de manière similaire une **sous-martingale** *si (iii) remplacé par*

$$\mathbb{E}(M_t / \mathcal{F}_s) \geq M_s \ P - p.s.$$

Et **sur-martingale** *si (iii) est remplacé par*

$$\mathbb{E}\left(M_t \diagup \mathcal{F}_s\right) \leq M_s \ P - p.s.$$

Proposition 1.3 *Le mouvement brownien standard* $(B_t, t \geq 0)$ *est une martingale par rapport à la filtration naturelle* $\mathcal{F}_t^B = (B_s, 0 \leq s \leq t)$.

Proposition 1.4 *Soit* $(B_t)_{t\geq 0}$*un mouvement brownien. Les processus suivants sont des martingales par rapport* $\left(\mathcal{F}_t^B\right)$ *:*

i) $M_t = B_t^2 - t.$

ii) $N_t = \exp\left(B_t - \frac{t}{2}\right).$

1.2 Calcule d'Itô

Dans tout cette partie, on se donne $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ *un espace de probabilité complet,* $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ *une filtration qui vérifié les condition habituelles et* B *un* $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ $-MB$.

1.2.1 Intégrale stochastique

On veut donner un sens de la variable

$$\int_0^T \theta_s dB_s.$$

Par rapport Lorsque l'on intégrale une fonction g *par rapport à une fonction* f *dérivable, si* g *est régulière, on définit son intégrale comme :*

$$\int_0^T g(s)\, df(s) = \int_0^T g(s)\, f'(s)\, ds.$$

Si jamais f *n'est pas à dérivable mais simplement à variation borné, on s'en sort encore en* *définissant l'intégrale par :*

$$\int_0^T g(s)\, df(s) = \lim_{\pi_n \to 0} \sum_{i=0}^{n-1} g(t_i)\left(f(t_{i+1}) - f(t_i)\right).$$

L'intégrale alors définie s'appelle intégrale de Stieljes. Et dans notre, le movement brownien n'est pas à variation bornée donc, on ne peut pas définir cette limite trajectoire. Par contre, comme il est a variation quadratique finie, il est naturel de définir l'intégrale par rapport au movement brownien comme une limite dans $L^2(\Omega)$ *de cette variable aléatoire.*

$$\int_0^t \theta_s dB_s = \lim_{\pi_n \to 0} \sum_{i=0}^{n-1} \theta_{t_i}\left(B_{t_{i+1}} - B_{t_i}\right).$$

Nous allons donc construire l'intégrale stochastique sur l'ensemble.
$L^2_{\mathcal{F}}(\Omega, [0,T]) = \left\{ (\theta_t)_{0 \leq t \leq T},\ \textit{processus càd-làg}\ (\mathcal{F}_t)_{t \geq 0} - \textit{adapté tq}\ \mathbb{E}\left[\left(\int_0^T |\theta_s|^2 ds\right)\right] < \infty \right\}.$

Définition 1.14 *Un processus* $(\theta_t)_{0 \leq t \leq T}$ *est appelé processus élémentaire s'il existe une subdivision* $0 = t_0 \leq t_1 \leq \ldots \leq t_n = T$ *et un processus discret* $(\theta_t)_{0 \leq t \leq T}$ *tel que tout* θ_i *est* $(\mathcal{F}_{t_i})_{t_i \geq 0}$*–adapté et dans* $L^2(\Omega)$ *tel que :*

$$\theta_t(\omega) = \sum_{i=0}^{n-1} \theta_i(\omega)\, 1_{]t_i, t_{i+1}[}(t).$$

On note E *l'ensemble des processus élémentaires qui est un sous espace de* $L^2_{\mathcal{F}}(\Omega, [0,T])$.

Définition 1.15 *L'intégrale stochastique entre* 0 *et* $t \leq T$ *d'un processus élémentaire* $\theta \in \mathcal{E}$ *est la variable aléatoire définie par :*

$$\int_0^t \theta_s dB_s = \sum_{i=0}^{n} \theta_i\left(B_{t \wedge t_{i+1}} - B_{t \wedge t_i}\right)$$

On associe donc à $\theta \in \mathcal{E}$ *la processus* $\left(\int_0^t \theta_s dB_s\right)_{0 \leq t \leq T}$.
On définit naturellement

$$\int_s^t \theta_u dB_u = \int_0^t \theta_u dB_u - \int_0^s \theta_u dB_u.$$

Proposition 1.5 *Sur l'ensemble élémentaire $\mathcal{E}$, l'intégrale stochastique satisfait les propriétés :*

1. $\theta \to \int_0^t \theta_s dB_s$ *est linéaire.*
2. $t \to \int_0^t \theta_s dB_s$ *est continue p.s.*
3. $\left(\int_0^t \theta_s dB_s\right)_{0\leq t\leq T}$ *est un processus* $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ *−adapté.*
4. $\mathbb{E}\left[\int_0^t \theta_s dB_s\right] = 0$ *et* $Var\left(\int_0^t \theta_s dB_s\right) = \mathbb{E}\left[\int_0^t \theta_s^2 ds\right]$.
5. *Propriété d'isométrique :*

$$\mathbb{E}\left[\left(\int_0^t \theta_s dB_s\right)^2\right] = \mathbb{E}\left[\int_0^t \theta_s^2 ds\right].$$

6. *De manière plus générale, on a :*

$$\mathbb{E}\left[\int_s^t \theta_u dB_u \diagup \mathcal{F}_s\right] = 0$$

et

$$\mathbb{E}\left[\left(\int_0^t \theta_v dB_v\right)^2 \diagup \mathcal{F}_s\right] = \mathbb{E}\left[\int_0^t \theta_v^2 dv \diagup \mathcal{F}_s\right].$$

7. *On a même résultat plus général :*

$$\mathbb{E}\left[\left(\int_s^t \theta_v dB_v\right)\left(\int_s^u \phi_v dB_v\right)\diagup \mathcal{F}_s\right] = \mathbb{E}\left[\int_s^{t\wedge u} \theta_v \phi_v dv \diagup \mathcal{F}_s\right]$$

8. $\left(\int_0^t \theta_s dB_s\right)_{0\leq t\leq T}$ *est une* $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$*-martingale.*
9. *Le processus* $\left(\left(\int_0^t \theta_s dB_s\right)^2 - \int_0^t \theta^2 ds\right)_{0\leq t\leq T}$ *est une* $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$*-martingale.*
10. *La variation quadratique de l'intégrale stochastique est donné par :*

$$\left\langle \int_0^t \theta_s dB_s, \int_0^t \theta_s dB_s \right\rangle = \int_0^t \theta_s^2 ds.$$

11. *La covariance quadratique entre deux intégrales stochastique est donné par :*

$$\left\langle \int_0^t \theta_s dB_s, \int_0^u \phi_s dB_s \right\rangle = \int_0^{t\wedge u} \theta_s \phi_s ds.$$

Finalement, l'intégrale stochastique d'un élément de $\mathcal{E}$ est une martingale continue de carré intégrable.

Lemme 1.1 *L'ensemble des processus élémentaires $\mathcal{E}$ est dense dans $L^2_{\mathcal{F}}(\Omega,[0,\infty])$ au sens de la convergence en norme quadratique. Autrement dit pour tout $\theta \in L^2_{\mathcal{F}}(\Omega,[0,\infty])$. Il existe une suite de processus élémentaire (θ_n) de $\mathcal{E}$ telle que :$\|\theta_n - \theta\|_{L^2} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$, c-à-d*

$$\lim_n \mathbb{E}\left[\int_0^\infty (\theta_n(s) - \theta(s))^2 ds\right]^{\frac{1}{2}} = 0.$$

Proposition 1.6 *Sur $L^2_{\mathcal{F}}(\Omega,[0,\infty])$, l'intégrale stochastique satisfait les mêmes propriétés que énoncés dans $\mathcal{E}$.*

Proposition 1.7 *Si le processus n'est pas aléatoire mais simplement une fonction f du temps, en plus des propriétés précédentes, l'intégrale stochastique alors appelée intégrale de Wiener est Gaussienne :*

$$\int_0^t f(s)\, dB_s \sim N\left(0, \int_0^t f^2(s)\, ds\right).$$

1.2.2 Processus d'Itô

Définition 1.16 *On appelle processus d'Itô, un processus X à valeurs dans $\mathbb{R}$ tel que*

$$P - p.s,\ \forall 0 \leq t \leq T,\ X_t = X_0 + \int_0^t \varphi_s ds + \int_0^t \theta_s dB_s,$$

où X_0 est $\mathcal{F}_0-$mesurable, φ et θ deux processus progressivement mesurable vérifiant les conditions,

$$P - p.s: \int_0^T |\varphi_s|\, ds < +\infty \text{ et } \int_0^T |\theta_s|^2\, ds < +\infty.$$

Proposition 1.8 *La variation quadratique sur $[0,t]$ d'un processus d'Itô X est donnée par :*

$$\langle X, X\rangle_t = \left\langle \int_0^t \theta_s dB_s, \int_0^t \theta_s dB_s \right\rangle = \int_0^t \theta_s^2 ds.$$

Proposition 1.9 *La covariation quadratique entre deux processus d'Itô X et Y donnée par :*

$$X_t = X_0 + \int_0^t \varphi_s ds + \int_0^t \theta_s dB_s,$$

et

$$Y_t = Y_0 + \int_0^t \varphi_s^{'} ds + \int_0^t \theta_s^{'} dB_s,$$

vaut

$$\langle X, Y \rangle = \int_0^t \theta_s \theta_s^{'} ds.$$

1.2.3 Formule d'Itô

Voici l'outil qui permet de calculer les intégrales stochastique sans repasser par des suites approximations.

Théorème 1.2 *Toute fonction $f \in C^2(\mathbb{R})$ à dérivée seconder bornée vérifie :*

$$f(B_t) = f(B_0) + \int_0^t f^{'}(B_s)\, dB_s + \frac{1}{2}\int_0^t f^{''}(B_s)\, d\langle B, B\rangle_s\,,\ \forall t \leq T.$$

où pour définition $d\langle B, B\rangle_s = ds$.

Définition 1.17 *La notion d'intégrale stochastique par rapport à processus d'Itô se définit de la manière naturelle suivante :*

$$\int_0^t f^{'}(X_s)\, dX_s = \int_0^t f^{'}(X_s)\, \varphi_s ds + \int_0^t f^{'}(X_s)\, \theta_s dB_s.$$

Théorème 1.3 *Soit f une fonction $C^2(\mathbb{R})$, on a alors*

$$\begin{aligned} f(X_t) &= f(X_0) + \int_0^t f^{'}(X_s)\, dX_s^{'} + \frac{1}{2}\int_0^t f^{''}(X_s)\, d\langle X, X\rangle_s \\ &= f(X_0) + \int_0^t f^{'}(X_s)\, \varphi_s ds + \int_0^t f^{'}(X_s)\, \theta_s dB_s + \frac{1}{2}\int_0^t f^{''}(X_s)\, \theta_s^2 ds. \end{aligned}$$

ou forme différentielle

$$df\left(X_t\right) = f'\left(X_t\right) dX_t' + \frac{1}{2} f''\left(X_t\right) d\left\langle X, X\right\rangle_t .$$

Proposition 1.10 ***(Formule d'itégration par parties)*** *Soient X et Y deux processus d'Itô, et*

$$X_t = X_0 + \int_0^t \varphi_s ds + \int_0^t \theta_s dB_s$$
$$Y_t = Y_0 + \int_0^t \varphi_s' ds + \int_0^t \theta_s' dB_s$$

alors on a

$$X_t Y_t = X_0 Y_0 + \int_0^t X_s dY_s + \int_0^t Y_s dX_s + \int_0^t d\left\langle X, Y\right\rangle_s ,$$

ou sous forme différentielle

$$d\left(XY\right)_t = X_t dY_t + Y_t dX_t + d\left\langle X, Y\right\rangle_t .$$

1.3 Les équations différentielles stochastiques rétrogrades

1.3.1 Résultats d'existence et d'unicité

Soit $B = (B_t)_{0\leq t\leq T}$ un mouvement Brownien standard d-dimensionnel défini sur un espace de probabilité filtré $(\Omega,\, \mathcal{F},\, \mathbb{F},\, \mathbb{P})$ où $\mathbb{F} = (\mathcal{F}_t)_{0\leq t\leq T}$ est la filtration naturelle de B. On note par $\mathcal{H}^2(0,\, T)$ l'ensemble des processus progressifs Y tel que : $\mathbb{E}[\int_0^T |Y_t|^2 dt] < \infty$. Ici T est un horizon fini fixé.

On se donne un couple (ζ, f) appelé condition terminale et générateur vérifiant

1) $\zeta \in \mathbb{L}^2(\Omega,\, \mathcal{F}_T,\, P;\, \mathbb{R}^n)$

2) $f : \Omega \times [0,\, T] \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{n\times d} \to \mathbb{R}^n$ tel que

- $f(t,\, x,\, z)$ est progressivement mesurable pour tous $x,\, z$

- $f(t,\, 0,\, 0) \in \mathcal{H}^2(0,\, T)^n$, i.e. $\mathbb{E}\left[\int\limits_0^T |f(t,\ 0,\ 0)|^2 dt\right] < +\infty$.

- f satisfait une condition de Lipschitz uniforme : il existe une constante positive K_f telle que :

$$\forall x_1,\ x_2,\ \forall z_1,\ z_2,\ |f(t,\ x_1,\ z_1) - f(t,\ x_2,\ z_2)| \leq K_f(|x_1 - x_2| + |z_1 - z_2|).$$

On considère l'équation différentielle stochastique rétrograde (EDSR)

$$-\,dX_t = f(t,\ X_t,\ Z_t)dt - Z_t dB_t, \quad X_T = \zeta. \tag{1.1}$$

Définition 1.18 *Une solution de l'EDSR* (1.1) *est un couple* $(X,\, Z)$ *de processus progressifs à valeurs dans* $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{n\times d}$ *tel que :* $Z \in \mathcal{H}^2(0,\, T)^{n\times d}$*, i.e.*

$$\mathbb{E}\left[\int\limits_0^T |Z_t|^2 dt\right] < +\infty$$

Et

$$X_t = \zeta + \int\limits_t^T f(s,\ X_s,\ Z_s)ds\ - \int\limits_t^T Z_s dB_s,\ 0 \leq t \leq T.$$

Théorème 1.4 *Etant donné un couple* $(\zeta,\, f)$ *vérifiant* 1) *et* 2)*, il existe une unique solution* $(X,\, Z)$ *à l'EDSR* (1.1)*.*

Preuve. Nous donnons ici une preuve de ce théorème basée sur une méthode de point fixe. On considére la fonction Φ sur $\mathcal{H}^2(0,\, T)^n \times \mathcal{H}^2(0,T)^{n\times d}$, qui à tout $(U,\, V) \in \mathcal{H}^2(0,\, T)^n \times \mathcal{H}^2(0,\, T)^{n\times d}$ associe $(X,\, Z) = \Phi(U,\, V)$ défini par

$$Y_t = \zeta + \int\limits_t^T f(s,\ X_s, Z_s)ds - \int\limits_t^T Z_s dB_s, \tag{1.2}$$

En fait, le couple $(X,\ Z)$ est construit ainsi. On considére la martingale

$$M_t = \mathbb{E}\left[\zeta + \int_0^T f(s,\ U_s,\ V_s)ds\,|\mathcal{F}_t\right]$$

qui est de carré intégrable sous les hypothèses sur $(\zeta,\ f)$. On applique alors le théorème de représentation d'Itô qui fournit l'existence et l'unicité de $Z \in \mathcal{H}^2(0,\ T)^{n\times d}$, tel que

$$M_t = M_0 + \int_0^T Z_s dB_s \tag{1.3}$$

On définit alors X par

$$\begin{aligned} X_t &= \mathbb{E}\left[\zeta + \int_t^T f(s,\ U_s,\ V_s)ds\,|\mathcal{F}_t\right], \\ &= M_t - \int_0^T f(s,\ U_s,\ V_s)ds,\ 0 \leq t \leq T, \end{aligned}$$

En utilisant la représentation 1.3 de M dans l'égalité précédente et en notant que $X_T = \zeta$, on voit que X satisfait (1.2). Notons par l'inégalité de Doob que

$$\mathbb{E}\left[\sup_{0\leq \mathrm{t} \leq \mathrm{T}} \left|\int_t^T Z_s dB_s\right|^2\right] \leq 4\mathbb{E}\left[\int_0^T |Z_s|^2\, ds\right] < +\infty.$$

On en déduit sous les hypothèses sur $(\zeta,\ f)$ que

$$\mathbb{E}\left[\sup_{0\leq \mathrm{t}\leq \mathrm{T}} |X_t|^2\right] < +\infty. \tag{1.4}$$

En particulier, $X \in \mathcal{H}^2(0,\ T)^n$ et Φ est donc bien une fonction de $\mathcal{H}^2(0,\ T)^n \times \mathcal{H}^2(0,\ T)^{n\times d}$ dans lui-même. ■

Soit $(U,\ V),\ (U',\ V') \in \mathcal{H}^2(0,\ T)^n \times \mathcal{H}^2(0,\ T)^{n\times d}$ et $(X,\ Z) = \Phi(U,\ V),\ (X',\ Z') = \Phi(U',$ $V')$. On pose

$(\overline{U}, \overline{V}) = (U - U', V - V')$, $(\overline{X}, \overline{Z}) = (X - X', Z - Z')$ et $\overline{f_t} = f(t, U_t, V_t) - f(t, U'_t, V'_t)$.

Soit $\delta > 0$ à choisir plus tard.

On applique la formule d'Itô à $e^{\delta s}\left|\overline{X}_s\right|^2$ entre $s = 0$ et $s = T$

$$\left|\overline{X}_0\right|^2 = -\int_0^T e^{\delta s}\left(\delta\left|\overline{X}_s\right|^2 - 2\overline{X}_s\overline{f_s}\right) ds \; - \int_0^T e^{\delta s}\left|\overline{Z}_s\right|^2 ds - 2\int_0^T e^{\delta s}\overline{X}_s\overline{Z}_s dB_s, \tag{1.5}$$

Notons que

$$\mathbb{E}\left[\left(\int_0^T e^{2\delta t}|X_t|^2|Z_t|^2 dt\right)^{\frac{1}{2}}\right] \leq \frac{e^{\delta T}}{2}\mathbb{E}\left[\sup_{0\leq t\leq T}|X_t|^2 + \int_0^T |Z_t|^2 dt\right] < +\infty,$$

ce qui montre que la martingale locale $\int_0^T e^{\delta s}\overline{X}_s\overline{Z}_s dB_s$ est en fait une martingale uniformément intégrable d'après l'inégalité de Burkholder-Davis Gundy. En prenant l'espérance dans 1.5, on a donc

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}\left[\left|\overline{X}_0\right|^2\right] + \mathbb{E}\left[\int_0^T e^{\delta s}\left(\delta\left|\overline{X}_s\right|^2 + \left|\overline{Z}_s\right|^2\right) ds\right] \\
&= 2\mathbb{E}\left[\int_0^T e^{\delta s}\overline{X}_s\overline{f_s} ds\right], \\
&\leq 2K_f\mathbb{E}\left[\int_0^T e^{\delta s}\left|\overline{X}_s\right|(|\overline{U}_s| + |\overline{V}_s|) ds\right], \\
&\leq 4K_f^2\mathbb{E}\left[\int_0^T e^{\delta s}\left|\overline{X}_s\right|^2 ds\right] + \frac{1}{2}\mathbb{E}\left[\int_0^T e^{\delta s}(|\overline{U}_s|^2 + |\overline{V}_s|^2) ds\right],
\end{aligned}$$

En choisissant $\delta = 1 + 4K_f^2$, on obtient alors

$$\mathbb{E}\left[\int_0^T e^{\delta s}\left(\left|\overline{X}_s\right|^2 + \left|\overline{Z}_s\right|^2\right) ds\right] \leq \frac{1}{2}\mathbb{E}\left[\int_0^T e^{\delta s}(|\overline{U}_s|^2 + |\overline{V}_s|^2) ds\right].$$

Ceci prouve que Φ est une contraction stricte sur l'espace de Banach $\mathcal{H}^2(0,T)^n \times \mathcal{H}^2(0,T)^{n\times d}$

muni de la norme

$$\|(X,\, Z)\|_\delta = \left(\mathbb{E} \left[\int_0^T e^{\delta s} \left(\left|\overline{X}_s\right|^2 + \left|\overline{Z}_s\right|^2 \right) ds \right] \right)^{\frac{1}{2}}.$$

On conclut que Φ admet un unique point fixe qui est la solution de l'EDSR(1.1).

Chapitre 2

Les équations différentielles fonctionnelles stochastiques rétrogrades neutres

Dans cet chapitre, nous nous intéressons à un type d'équations rétrogrades avec anticipation que nous appelons équations différentielles fonctionnelles stochastiques rétrogrades neutres. Nous obtenons l'existence et l'unicité et prouvons un théorème de comparaison.

Dans cet chapitre, nous fixons $\xi > 0$ comme une constante positive. Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{F}, \mathbb{P})$ un espace de probabilité filtré complet lequel un mouvement brownien $\{B_t\}_{t\geq 0}$ à $d-$dimension est défini avec $\{\mathcal{F}_t\}_{t\geq 0}$ étant sa filtration naturelle augmentée de tous les ensembles $\mathbb{P}$-nuls en $\mathcal{F}$. Nous définissons également $\mathcal{F}_s := \mathcal{F}_0$ pour tous $s \in [-\xi, 0]$ puis $\mathbb{F} := \{\mathcal{F}_t\}_{t\geq -\xi}$ est une filtration satisfaisant les conditions usuelles sur $[-\xi, +\infty)$.

Dans cet chapitre, nous étudions l'équation stochastique rétrograde suivante avec anticipation,

$$\begin{cases} -d\left[X(t) - G(t, X_t, Z_t)\right] = f(t, X_t, Z_t)\,dt - Z(t)\,dB_t & , t \in [0, T] \\ Z(t) = \psi(t) & t \in [T, T+\xi]. \\ X(t) = \varphi(t) & t \in [T, T+\xi] \end{cases} \tag{2.1}$$

où (X_t, Z_t) désigne le trajectoire des processus inconnus (X, Z) sur $[t, t+\xi]$, $G, f : [0, T] \times$

$\Omega \times \mathbb{L}^2(0, \xi; \mathbb{R}^n) \times \mathbb{L}^2\left(0, \xi;\ \mathbb{R}^{n\times d}\right) \to \mathbb{R}^n$ sont donnés, et (φ, ψ) sont des processus stochastiques adapté sur $[T, T+\xi]$. Nous appelons (G, f) le générateur. L'équation 2.1 est appelée équation différentielle fonctionnelle stochastique rétrograde neutre EDFSRN.

Lorsque $G = 0$ et $\xi = 0$, 2.1 devient une équation différentiel stochastique rétrograde bien connu EDSR

$$X(t) = \varphi(T) + \int_t^T f(s, X_s, Z_s)\, ds - \int_t^T Z(s)\, dB_s \qquad t \in [0, T]$$

Quand $G = 0$ et $f(t, \cdot, \cdot)$ dépend uniquement de la valeur du trajectoire (X, Z) en t et $t + \xi$, 2.1 devient

$$\begin{cases} -dX(t) = f(t, X(t), X(t+\xi), Z(t), Z(t+\xi))\, dt - Z(t)\, dB_t & t \in [0, T] \\ X(t) = \varphi(t) & t \in [T, T+\xi] \\ Z(t) = \psi(t) & t \in [T, T+\xi] \end{cases}$$

Par équation différentielle fonctionnelle stochastique neutre EDFSN de type Itô, nous définons

$$\begin{cases} d\left[Y(t) - g(t, Y^t)\right] = b(t, Y^t)\, dt + \sigma(t, Y^t)\, dB_t & t \in [0, T] \\ Y(t) = \eta(t) & t \in [-\xi, 0] \end{cases}$$

Y^t désigne la trajectoire de Y sur $[t - \xi, t]$. C'est un type d'équations fonctionnelles retardées.

$\mathcal{H}^2(s, \tau) := \Im^2_{\mathbb{F}}([s, \tau]; \mathbb{R}^n) \times \mathcal{L}^2_{\mathbb{F}}\left(s, \tau; \mathbb{R}^{n\times d}\right)$,

$\mathbb{L}^2(\mathcal{F}_T;\ H) := \left\{\delta : \Omega \to H \,\middle|\, \mathcal{F}_T\text{−mesurable } \mathbb{E}\left[|\delta|^2\right] < +\infty\right\}$,

$\mathbb{S}^2(s, \tau; H) := \left\{\gamma : [s, \tau] \to H \,\middle|\, \sup_{s\le t\le\tau} |\gamma(t)|^2 < +\infty\right\}$,

$\mathbb{L}^2(s, \tau;\ H) := \left\{\gamma : [s, \tau] \to H \,\middle|\, \int_s^\tau |\gamma(t)|^2\, dt < +\infty\right\}$,

$\mathcal{L}^2_{\mathbb{F}}(s, \tau;\ H) := \left\{X(\cdot) : [s, \tau] \times \Omega \to H \,\middle|\, \mathbb{F}\text{−adapté et } \mathbb{E}\left[\int_s^\tau |X(t)|^2\, dt\right] < +\infty\right\}$,

$\mathcal{J}^2_{\mathbb{F}}([s, \tau]; H) := \left\{X(\cdot) : [s, \tau] \times \Omega \to H \,\middle|\, \mathbb{F}\text{−adapté et et } \mathbb{E}\left[\sup_{s\le t\le\tau} |X(t)|^2\right] < +\infty\right\}$,

2.1 Résultat d'existence et d'unicité

Dans cette section, nous prouvons l'existence et l'unicité de la solution de l'EDFSRN 2.1, nous construisons quelques estimations des solutions. Fixons $\xi \geq 0$ soit une constante. Pour tous $(x,\, z) \in \mathcal{H}^2\,(0,\, T+\xi)$, soit $(x\,(t)\,,\, z\,(t))$ la valeur de$(x,\, z)$ à l'instant t, et $(x_t,\, z_t)$ désignent la restriction de trajectoire de $(x,\, z)$ sur $[t,\, t+\xi]$. Nous donnons quelques conditions sur le générateur $(G,\, f)$ de l'EDFSRN 2.1. Supposons que

1) Il existe deux fonctions $\mathcal{B}\left([0,\, T] \times \mathbb{S}^2\,([0,\, \xi]\,; \mathbb{R}^n) \times \mathbb{L}^2\left(0,\, \xi;\ \mathbb{R}^{n\times d}\right)\right) \times \mathcal{F}_T$ mesurables N, $H : [0,\, T] \times \Omega \times \mathbb{S}^2\,([0,\, \xi]\,; \mathbb{R}^n) \times \mathbb{L}^2\left(0,\, \xi; \mathbb{R}^{n\times d}\right) \to \mathbb{R}^n$, tel que $N\,(\cdot,\, \kappa,\, \gamma)$ et $H\,(\cdot,\, \kappa,\, \gamma)$ sont $\mathbb{F}$-progressivement mesurables, $\forall\,(\kappa,\, \gamma) \in \mathbb{S}^2\,([0,\, \xi]\,; \mathbb{R}^n) \times \mathbb{L}^2\left(0,\, \xi; \mathbb{R}^{n\times d}\right)$.

2) Pour tous $(x,\, z) \in \mathcal{H}^2\,[0,\, T+\xi]$

$$G\,(t,\, x_t,\, z_t) := \mathbb{E}\,[N\,(t,\, x_t,\, z_t)\,|\mathcal{F}_t] = \mathbb{E}_t\,[N\,(t,\, x_t,\, z_t)]$$

$$f\,(t,\, x_t,\, z_t) := \mathbb{E}\,[H\,(t,\, x_t,\, z_t)\,|\mathcal{F}_t] = \mathbb{E}_t\,[H\,(t,\, x_t,\, z_t)]$$

Considérons les hypothèses suivantes sur (G, f).on pose $n\,(t) = |G\,(t,\, x_t,\, z_t) - G\,(t,\, \overline{x_t},\, \overline{z_t})|^2$ et $h\,(t) = |f\,(t,\, x_t,\, z_t) - f\,(t,\, \overline{x_t},\, \overline{z_t})|^2$

$$(H_1) : \exists \alpha \in [0,\, 1]\ \ ,\, \lambda_1 \in [0,\, \xi]\ \ tq : (x,\, z)\,,\ (\overline{x},\, \overline{z}) \in \mathcal{H}^2\,(0,\, T+\xi)\,,\ (t,\, \omega) \in [0,\, T] \times \Omega$$
$$n\,(t) \leq \alpha \mathbb{E}_t \left[\int_0^\xi \lambda_1 \left|x\,(t+u) - \overline{x}\,(t+u)\right|^2 du + \int_0^\xi \left|z\,(t+u) - \overline{z}\,(t+u)\right|^2 du \right]. \tag{2.2}$$

$$(H_2) : \exists \beta \in [0{,}1]\ \ ,\, \lambda_2,\, \lambda_3 \in [0,\, \xi]\ \ tq : (x,\, z)\,,\ (\overline{x},\, \overline{z}) \in \mathcal{H}^2\,(0,\, T+\xi)\,,\ (t,\, \omega) \in [0,\, T] \times \Omega$$
$$h\,(t) \leq \beta \mathbb{E}_t \left[\int_0^\xi \lambda_2 \left|x\,(t+u) - \overline{x}\,(t+u)\right|^2 du + \int_0^\xi \lambda_3 \left|z\,(t+u) - \overline{z}\,(t+u)\right|^2 du \right] \tag{2.3}$$

$$(H_3) : \mathbb{E}\left[\sup_{0\leq t\leq T} |G\,(t,\, 0,\, 0)|^2\right] < +\infty \ \text{ et } \mathbb{E}\left[\int_0^T |f\,(t,\, 0,\, 0)|^2\, dt\right] < +\infty$$

Remarque 2.1 *La dépendance de G et f sur le trajectoire de z requiert dans 2.2 et 2.3 dans différents façons.*

En particulier, une telle forme $G(t,\, x\,(t)\,,\, z(t))$ n'est pas incluse dans 2.2.

Les mesures de probabilité λ_i $(i = 1, 2, 3)$ dans le générateur nous permettent d'incorporer de nombreuses cas, tels que

$$G(t, x_t, z_t) = \frac{1}{2\xi}\mathbb{E}_t\left[\int_0^{\xi} x(t+u)\,du\right]$$
$$f(t, x_t, z_t) = \mathbb{E}_t\left[\lambda\int_0^{\xi} x(t+u)\,du + \lambda\int_0^{\xi} z(t+u)\,du\right]$$

Et

$$G(t, x_t, z_t) = \mathbb{E}_t\left[\mathtt{g}\left(t, x(t), x(t+\theta_1), \int_0^{\xi} z(t+u)\,du\right)\right]$$
$$f(t, x_t, z_t) = \mathbb{E}_t\left[\mathtt{h}\left(t, x(t), z(t), x(t+\theta_2), z(t+\theta_3)\right)\right]$$

Où θ_i est une constante positive , $i = 1, 2, 3$.

Introduisons la définition d'une solution adaptée de l'EDFSRN 2.1.

Définition 2.1 *Une paire de processus $(X, Z) \in \mathcal{H}^2(0, T+\xi)$ est appelée solution $\mathbb{L}^2$ adaptée de l'EDFSRN 2.1 si elles vérifiée 2.1 au sens d'Itô.*

Le théorème suivant est confirmé à l'existence et à l'unicité de la solution $\mathbb{L}^2$ adaptée à EDFSRN 2.1.

Théorème 2.1 *Soit (H_1)-(H_3) sont vérifiées. Alors pour tout couple $(\varphi,\psi) \in \mathcal{H}^2(T, T+\xi)$, l'EDFSRN 2.1 admet une solution $\mathbb{L}^2$ adaptée unique $(X, Z) \in \mathcal{H}^2(0, T+\xi)$.*

De plus, l'estimation suivante est valable

$$\mathbb{E}\left[\sup_{0\le t\le T}|X(t)|^2 + \int_0^T |Z(t)|^2\,dt\right]$$
$$\le k\ \mathbb{E}\left[\sup_{T\le t\le T+\xi}|\varphi(t)|^2 + \int_T^{T+\xi}|\psi(t)|^2\,dt + \sup_{0\le t\le T}|G(t, 0, 0)|^2 + \int_0^T |f(t, 0, 0)|^2\,ds\right],$$

où k dépend seulement de n, d, β et α.

Notons par

$\mathcal{H}^2(0, T; \varphi, \psi) := \{(x, z) \in \mathcal{H}^2(0, T+\xi) \,|x(t) = \varphi(t), z(t) = \psi(t), \forall t \in [T, T+\xi]\}$

1 er Étape : Définir un sous-ensemble de $\mathcal{H}^2(0, T+\xi)$, muni de la norme

$$\|(x, z)\|^2 = \mathbb{E}\left[\sup_{0\le t\le T} \exp\{\delta t\}|x(t)|^2 + \int_0^T \exp\{\delta t\}|z(t)|^2 dt\right], \delta > 0.$$

Notos que $\mathcal{H}^2(0, T; \varphi, \psi)$ est un sous-ensemble de $\mathcal{H}^2(0, T+\xi)$.

Pour $(x, z) \in \mathcal{H}^2(0, T+\xi)$, considérons l'équation

$$\begin{cases} -d[X(t) - G(t, x_t, z_t)] = f(t, x_t, z_t)dt - Z(t)dB_t, t \in [0,T] \\ Z(t) = \psi(t), \; t \in [T, T+\xi]. \\ X(t) = \varphi(t), t \in [T, T+\xi] \end{cases} \tag{2.4}$$

Notons $\overline{X} := X\ (t) - G(t, x_t, z_t)$, alors

$$\overline{X} = \varphi(T) - G(T, x_T, z_T) + \int_t^T f(s, x_s, z_s)ds - \int_t^T Z(s)dB_s, \; t \in [0, T] \tag{2.5}$$

De (H_1)-(H_3), nous avons

$$\begin{aligned} &\mathbb{E}\left[|\varphi(T) - G(T, x_T, z_T)|^2\right] \\ &\le k\ \mathbb{E}\left[|\varphi(T)|^2 - |G(T, 0, 0)|^2 + \int_0^\xi \lambda_1 |\varphi(T+u)|^2 du + \int_0^\xi |\psi(T+u)|^2 du\right], \\ &\le k\ \mathbb{E}\left[\sup_{T\le t\le T+\xi} |\varphi(t)|^2 + \int_T^{T+\xi} |\psi(t)|^2 dt\right] < +\infty. \end{aligned}$$

Et

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}\left[\int_0^T |f(t, x_t, z_t)|^2 dt\right] \\
&\leq k\ \mathbb{E}\left[\int_0^T \left(|f(t, 0, 0)|^2 + \int_0^\xi \lambda_2 |x(t+u)|^2 du + \int_0^\xi \lambda_3 |z(t+u)|^2 du\right) dt\right] \\
&\leq k\ \mathbb{E}\left[\int_0^T |f(t, 0, 0)|^2 dt + \sup_{0\leq t\leq T+\xi} |x(t)| + \int_0^{T+\xi} |z(t)|^2 dt\right] < +\infty
\end{aligned}$$

Par la théorie des EDSR, 2.5 admet une solution unique $\left(\overline{X}, Z\right) \in \mathcal{H}^2(0,T)$. Ensuite défінons

$$X(t) := \begin{cases} \overline{X}(t) - G(t, x_t, z_t), \ t \in [0, T] \\ \varphi(t) \qquad\qquad t \in [T, T+\xi] \end{cases}$$

Et

$$Z(t) := \psi(t) \quad t \in [T, T+\xi]$$

De $(H_1) - (H_3)$ sur G, nous avons

$$\mathbb{E}\left[\sup_{0\leq t\leq T} |X(t)|^2\right] \leq k\mathbb{E}\left[\sup_{0\leq t\leq T} \left|\overline{X}(t)\right|^2 + \sup_{0\leq t\leq T+\xi} |x(t)| + \int_0^{T+\xi} |z(t)|^2 dt\right] < +\infty$$

Alors $(X, Z) \in \mathcal{H}^2(0, T; \varphi, \psi)$ est la solution de 2.4.

$2em$ Étape : Définons $\Phi \in \mathcal{H}^2(0, T; \varphi, \psi)$ par

$$\Phi : (x, z) \mapsto (X, Z)$$

avec(X, Z) étant la solution de 2.4 à l'étape (1). On prouve que c'est une contraction. Considérons une autre paire de processus $(\overline{x}, \overline{z}) \in \mathcal{H}^2(0, T; \varphi, \psi)$, et désignons par $\left(\overline{X}, \overline{Z}\right) :=$

$\Phi(\overline{x},\overline{z})$. Soit

$$\Delta X(t) := X(t) - \overline{X}(t),\ \ \Delta Z(t) := Z(t) - \overline{Z}(t)$$
$$\Delta x(t) := x(t) - \overline{x}(t),\ \ \Delta z(t) := z(t) - \overline{z}(t).$$
$$\Delta G(t) := G(t, x_t, z_t) - G(t, \overline{x}_t, \overline{z}_t)$$

Puis

$$\Delta X(t) - \Delta G(t) = \int_t^T [f(s, x_s, z_s) - f(s, \overline{x}_s, \overline{z}_s)]\, ds + \int_t^T \Delta Z(s)\, dB_s,\ t \in [0, T]$$

En appliquant la formule d'Itô pour $|\Delta X(t) - \Delta G(t)|^2 \exp\{\delta t\}$ nous avons

$$\begin{aligned} &|\Delta X(t) - \Delta G(t)|^2 \exp\{\delta t\} + \int_t^T \delta\, |\Delta X(s) - \Delta G(s)|^2 \exp\{\delta t\}\, ds \\ &+ \int_t^T |\Delta Z(s)|^2 \exp\{\delta s\}\, ds \\ &= 2\int_t^T \langle \Delta X(s) - \Delta G(s)\,,\, f(s, x_s, z_s) - f(s, \overline{x}_s, \overline{z}_s)\rangle \exp\{\delta s\}\, ds \\ &- 2\int_t^T \langle \Delta X(s) - \Delta G(s)\,,\, \Delta Z(s)\rangle \exp\{\delta s\}\, dB_s. \end{aligned} \tag{2.6}$$

En vue de (H_2) et de l'inégalité Schwartz

$$\begin{aligned} &\mathbb{E}\left[\int_0^T \delta \exp\{\delta s\}\, |\Delta X(s) - \Delta G(s)|^2\, ds + \int_0^T \exp\{\delta s\}\, |\Delta Z(s)|^2\, ds\right] \\ &= 2\mathbb{E}\left[\int_0^T \exp\{\delta s\}\, \langle \Delta X(s) - \Delta G(s)\,,\, f(s, x_s, z_s) - f(s, \overline{x}_s, \overline{z}_s)\rangle\, ds\right] \end{aligned}$$

$$\leq \mathbb{E}\left[\int_0^T \beta k \exp\{\delta s\} |\Delta X(s) - \Delta G(s)|^2 ds\right]$$
$$+ \mathbb{E}\left[+\frac{1}{k}\int_0^T \exp\{\delta s\}\left(\int_0^\xi \lambda_2 |\Delta x(s+u)|^2 du + \int_0^\xi \lambda_3 |\Delta z(s+u)|^2 du\right) ds\right].$$

Par conséquent, en choisissant $\delta > \beta k$, nous avons

$$\mathbb{E}\left[\int_0^T |\Delta Z(s)|^2 \exp\{\delta s\} ds\right] \tag{2.7}$$
$$\leq \frac{1}{k}\mathbb{E}\left[\int_0^T \exp\{\delta s\}\left(\int_0^\xi \lambda_2 |\Delta x(s+u)|^2 du + \int_0^\xi \lambda_3 |\Delta z(s+u)|^2 du\right) ds\right].$$

A partir de 2.6, nous avons

$$\mathbb{E}\left[\sup_{0\leq t\leq T} \exp\{\delta t\} |\Delta X(t) - \Delta G(t)|^2\right]$$
$$+ \mathbb{E}\left[\int_0^T \delta |\Delta X(s) - \Delta G(s)|^2 \exp\{\delta s\} ds + \int_0^T |\Delta Z(s)|^2 \exp\{\delta s\} ds\right]$$
$$\leq 2\mathbb{E}\left[\int_0^T |\Delta X(s) - \Delta G(s)| \left|f(s, x_s, z_s) - f(s, \overline{x}_s, \overline{z}_s)\right| \exp\{\delta s\} ds\right]$$
$$+ 2\mathbb{E}\left[\sup_{0\leq t\leq T}\left|\int_t^T (\Delta X(s) - \Delta G(s)) \Delta Z(s) \exp\{\delta s\} dB_s\right|\right],$$

$$\leq \mathbb{E}\left[\beta k \int_0^T |\Delta X(s) - \Delta G(s)|^2 \exp\{\delta s\} ds\right]$$
$$+ \mathbb{E}\left[\frac{1}{k}\int_0^T \exp\{\delta s\}\left(\int_0^\xi \lambda_2 |\Delta x(s+u)|^2 du + \int_0^\xi \lambda_3 |\Delta z(s+u)|^2 du\right) ds\right]$$
$$+ \mathbb{E}\left[\frac{1}{Q}\sup_{0\leq t\leq T} \exp\{\delta t\} |\Delta X(t) - \Delta G(t)|^2 + Q\int_0^T \exp\{\delta s\} |\Delta Z(s)|^2 ds\right].$$

En vue de 2.7.

$$\begin{aligned}
&\left(1-\frac{1}{Q}\right)\mathbb{E}\left[\sup_{0\leq t\leq T}\exp\left\{\delta t\right\}\left|\Delta X\left(t\right)-\Delta G\left(t\right)\right|^{2}\right] \\
&+\mathbb{E}\left[\int_{0}^{T}\exp\left\{\delta s\right\}\left|\Delta Z\left(s\right)\right|^{2}ds\right] \\
&\leq\frac{1+Q}{k}\mathbb{E}\left[\int_{0}^{T}\exp\left\{\delta s\right\}\left(\int_{0}^{\xi}\lambda_{2}\left|\Delta x\left(s+u\right)\right|^{2}du+\int_{0}^{\xi}\lambda_{3}\left|\Delta z\left(s+u\right)\right|^{2}du\right)ds\right].
\end{aligned}$$

Ensuite

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}\left[\sup_{0\leq t\leq T}\exp\left\{\delta t\right\}\left|\Delta X\left(t\right)-\Delta G\left(t\right)\right|^{2}\right]+\mathbb{E}\left[\int_{0}^{T}\exp\left\{\delta s\right\}\left|\Delta Z\left(s\right)\right|^{2}ds\right] \\
&\leq\theta\mathbb{E}\left[\int_{0}^{T}\exp\left\{\delta s\right\}\left(\int_{0}^{\xi}\lambda_{2}\left|\Delta x\left(s+u\right)\right|^{2}du+\int_{0}^{\xi}\lambda_{3}\left|\Delta z\left(s+u\right)\right|^{2}du\right)ds\right].
\end{aligned} \tag{2.8}$$

où $\theta=\frac{Q(1+Q)}{k(Q-1)}$ est une constante positive par un bon choix de k et Q.

Puisque pour tous $a,\ b\in\mathbb{R}^{n}$ et $\forall\ \rho\in[0,\ 1]$,

$$(a-b)^{2}\geq\left(|a|-|b|\right)^{2}\geq\left(1-\rho\right)a^{2}-\left(\frac{1}{\rho}-1\right)b^{2}.$$

Puis

$$\begin{aligned}
&\sup_{0\leq t\leq T}\exp\left\{\delta t\right\}\left|\Delta X\left(t\right)-\Delta G\left(t\right)\right|^{2} \\
&\geq\sup_{0\leq t\leq T}\exp\left\{\delta t\right\}\left[\left(1-\rho\right)\left|\Delta X\left(t\right)\right|^{2}-\left(\frac{1}{\rho}-1\right)\left|\Delta G\left(t\right)\right|^{2}\right] \\
&\geq\left(1-\rho\right)\sup_{0\leq t\leq T}\exp\left\{\delta t\right\}\left|\Delta X\left(t\right)\right|^{2}-\left(\frac{1}{\rho}-1\right)\sup_{0\leq t\leq T}\exp\left\{\delta t\right\}\left|\Delta G\left(t\right)\right|^{2},
\end{aligned}$$

2.8 devient

$$
\begin{aligned}
&(1-\rho)\,\mathbb{E}\left[\sup_{0\leq t\leq T}\exp\{\delta t\}\left|\Delta X(t)\right|^2\right]+\mathbb{E}\left[\int_0^T\exp\{\delta s\}\left|\Delta Z(s)\right|^2ds\right]\\
&\leq\theta\mathbb{E}\left[\int_0^T\exp\{\delta s\}\left(\int_0^\xi\lambda_2\left|\Delta x(s+u)\right|^2du+\int_0^\xi\lambda_3\left|\Delta z(s+u)\right|^2du\right)ds\right]\\
&+\left(\frac{1}{\rho}-1\right)\mathbb{E}\left[\sup_{0\leq t\leq T}\exp\{\delta t\}\left|\Delta G(t)\right|^2\right]
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\leq\theta\mathbb{E}\left[\int_0^T\exp\{\delta s\}\left(\int_0^\xi\lambda_2\left|\Delta x(s+u)\right|^2du+\int_0^\xi\lambda_3\left|\Delta z(s+u)\right|^2du\right)ds\right]\\
&+\left(\frac{1}{\rho}-1\right)\alpha\mathbb{E}\left[\sup_{0\leq t\leq T}\exp\{\delta t\}\left(\int_0^\xi\lambda_1\left|\Delta x(t+u)\right|^2du+\int_0^\xi\left|\Delta z(t+u)\right|^2du\right)\right]
\end{aligned}
$$

et alors

$$
\begin{aligned}
&(1-\rho)\,\mathbb{E}\left[\sup_{0\leq t\leq T}\exp\{\delta t\}\left|\Delta X(t)\right|^2\right]+\mathbb{E}\left[\int_0^T\exp\{\delta s\}\left|\Delta Z(s)\right|^2ds\right]\\
&\leq\left[\left(\frac{1}{\rho}-1\right)\alpha+\theta T\right]\mathbb{E}\left[\sup_{0\leq t\leq T}\exp\{\delta t\}\left|\Delta x(t)\right|^2\right]\\
&+\left(\left(\frac{1}{\rho}-1\right)\alpha+\theta\right)\mathbb{E}\left[\int_0^T\exp\{\delta t\}\left|\Delta z(t)\right|^2dt\right].
\end{aligned}
$$

Pour montrer que Φ est une contraction, il suffit de prouver que pour tout $\alpha\in[0,\,1]$, $\exists\rho\in[0,\,1]\,,\,\theta>0$, telle que

$$
\left(\frac{1}{\rho}-1\right)\alpha+\theta T<1-\rho \text{ et } \left(\frac{1}{\rho}-1\right)\alpha+\theta<1. \tag{2.9}
$$

En effet, pour tout $\alpha\in[0,\,1]$, choisir$\rho\in[\alpha,\,1]$ et θ petit suffisamment, les deux inégalités ci-dessus est facile à tenir.

Par conséquent, Φ admet un point fixe unique. C'est-à-dire 2.4 admet une solution unique

$(X,\, Z) \in \mathcal{H}^2\,(0, T\,;\, \varphi,\, \psi)\,.$

En vue de la définition de $\mathcal{H}^2\,(0, T\,;\, \varphi,\, \psi)$, $(X,\, Z) \in \mathcal{H}^2\,(0, T+\xi)$ et c'est la solution de $\mathbb{L}^2$ adaptée unique de EDFSRN 2.1.

3 *em* Étape : Soit $(X,\, Z) \in \mathcal{H}^2\,(0, T+\xi)$ la solution de 2.1, puis

$$\begin{aligned}
&\exp\{\delta t\}\,|X\,(t) - G\,(t,\, X_t,\, Z_t)|^2 + \int_t^T \delta \exp\{\delta s\}\,|X\,(s) - G\,(s,\, X_s,\, Z_s)|^2\, ds \\
&+ \int_t^T |Z\,(s)|^2 \exp\{\delta s\}\, ds \\
&= |\varphi\,(T) - G\,(T,\, X_T,\, Z_T)|^2 \exp\{\delta T\} \\
&- 2\int_t^T \langle X\,(s) - G\,(s,\, X_s,\, Z_s)\,,\, Z\,(s)\rangle \exp\{\delta s\}\, dB_s \\
&+ 2\int_t^T \langle X\,(s) - G\,(s,\, X_s,\, Z_s)\,,\, f\,(s,\, X_s,\, Z_s)\rangle \exp\{\delta s\}\, ds.
\end{aligned}$$

D'apré la deuxième Étape, pour tous les $\rho \in [0,\, 1]$ et $M > 0$

$$\begin{aligned}
&(1-\rho)\,\mathbb{E}\left[\sup_{0\le t\le T} \exp\{\delta t\}\,|X\,(t)|^2\right] + \mathbb{E}\left[\int_0^T \exp\{\delta s\}\,|Z\,(s)|^2\, ds\right] \\
&\le \mathbb{E}\left[\exp\{\delta T\}\,|\varphi\,(T) - G\,(T,\, X_T,\, Z_T)|^2 + \int_0^T \exp\{\delta t\}\,|f\,(t,\, 0,\, 0)|^2\, dt\right] \\
&+ \left(\frac{1}{\rho} - 1\right)\mathbb{E}\left[\sup_{0\le t\le T} \exp\{\delta t\}\,|G\,(t,\, X_t,\, Z_t)|^2\right] \\
&+ \theta\mathbb{E}\left[\int_0^T \exp\{\delta s\}\left(\int_0^\xi \lambda_2\,|X\,(s+u)|^2\, du + \int_0^\xi \lambda_3\,|Z\,(s+u)|^2\, du\right) ds\right]
\end{aligned}$$

$$\leq k\mathbb{E}\left[\exp\{\delta T\}\left(\sup_{T\leq t\leq T+\xi}|\varphi(t)|^2+\int_T^{T+\xi}|\psi(t)|^2\,dt+|G(T,0,0)|^2\right)\right]$$
$$+k\mathbb{E}\left[+\int_0^T\exp\{\delta t\}|f(t,0,0)|^2\,dt\right]$$
$$+(1+M)\left(\frac{1}{\rho}-1\right)\mathbb{E}\left[\sup_{0\leq t\leq T}\exp\{\delta t\}|G(T,0,0)|^2\right]$$
$$+(1+M)\left(\frac{1}{\rho}-1\right)\alpha\mathbb{E}\left[\sup_{0\leq t\leq T}\exp\{\delta t\}\left(\int_0^\xi\lambda_1|X(t+u)|^2\,du+\int_0^\xi|Z(t+u)|^2\,du\right)\right]$$
$$+\theta\mathbb{E}\left[\int_0^T\exp\{\delta s\}\left(\int_0^\xi\lambda_2|X(s+u)|^2\,du+\int_0^\xi\lambda_3|Z(s+u)|^2\,du\right)ds\right]$$

$$\leq k\mathbb{E}\left[\exp\{\delta T\}\left(\sup_{T\leq t\leq T+\xi}|\varphi(t)|^2+\int_T^{T+\xi}|\psi(t)|^2\,dt\right)\right]$$
$$+k\mathbb{E}\left[+\sup_{0\leq t\leq T}\exp\{\delta t\}|G(t,0,0)|^2+\int_0^T\exp\{\delta t\}|f(t,0,0)|^2\,dt\right]$$
$$+\left(\alpha\left(\frac{1}{\rho}-1\right)\left(1+\frac{1}{M}\right)+\theta T\right)\mathbb{E}\left[\sup_{0\leq t\leq T}\exp\{\delta t\}|X(t)|^2\right]$$
$$+\left(\alpha\left(\frac{1}{\rho}-1\right)\left(\frac{1}{M}+1\right)+\theta\right)\mathbb{E}\left[\int_0^{T+\xi}\exp\{\delta t\}|Z(t)|^2\,dt\right].$$

Puis

$$\left[(1-\rho)-\alpha\left(\frac{1}{M}+1\right)\left(\frac{1}{\rho}-1\right)-\theta T\right]\mathbb{E}\left[\sup_{0\leq t\leq T}\exp\{\delta t\}|X(t)|^2\right]$$
$$+\left[1-\alpha\left(\frac{1}{M}+1\right)\left(\frac{1}{\rho}-1\right)-\theta\right]\mathbb{E}\left[\int_0^T\exp\{\delta s\}|Z(s)|^2\right]$$
$$\leq k\mathbb{E}\left[\sup_{T\leq t\leq T+\xi}|\varphi(t)|^2+\int_T^{T+\xi}|\psi(t)|^2\,dt+\sup_{0\leq t\leq T}|G(t,0,0)|^2\right]$$
$$+k\mathbb{E}\left[\int_0^T\exp\{\delta t\}|f(t,0,0)|^2\,dt\right].$$

Pour tout $\alpha \in [0,\, 1]$, il existe des $\rho \in [0,\, 1]$ et $M > 0$, tels que

$$\begin{aligned} &(1-\rho) - \alpha\left(\frac{1}{M}+1\right)\left(\frac{1}{\rho}-1\right) - \theta T > 0 \\ &1 - \alpha\left(\frac{1}{M}+1\right)\left(\frac{1}{\rho}-1\right) - \theta > 0. \end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned} &\mathbb{E}\left[\sup_{0\leq t\leq T}|X(t)|^2 + \int_0^T |Z(s)|^2\, ds\right] \\ &\leq k\mathbb{E}\left[\sup_{T\leq t\leq T+\xi}|\varphi(t)|^2 + \int_T^{T+\xi}|\psi(t)|^2\, dt\right] \\ &+ k\mathbb{E}\left[+\sup_{0\leq t\leq T}|G(t,\, 0,\, 0)|^2 + \int_0^T |f(t,\, 0,\, 0)|^2\, dt\right]. \end{aligned}$$

Remarque 2.2 *La valeur de Z sur $[0,\, T]$ est inconu, exactement comme les EDSR. La condition terminale de Z est nécessaire pour le bien posétion sur $[T,\, T+\xi']$.*

Par exemple, si $G(t,\, \cdot,\, \cdot)$ et $f(t,\, \cdot,\, \cdot)$ ne dépendent que de $Z(t)$, alors la condition terminale de Z n'est pas nécessaire.

Dans ce cas, la solution Z a une sens que sur $[0,\, T]$. Mais pour le caractère unique de la solution dans $\mathcal{H}^2(0,\, T+\xi)$, nous définissons $Z = 0$ sur $[T,\, T+\xi]$, et l'omettons dans l'équation.

Remarque 2.3 *a) puisque $X\ (t) + G(t,\, X_t,\, Z_t)$ est le trajctoire-continu, la continuité de $X\ (\cdot)$ dépend de $G(t,\, \cdot,\, \cdot)$. Si $G(t,\, \cdot,\, \cdot)$ est continu en t, par exemple :*

$$G(t,\ X_t,\ Z_t) = \frac{1}{2\xi}\mathbb{E}_t\left[\int_t^{t+\xi} X_s ds\right]$$

puis $X(\cdot)$ est également trajctoire-continu.

b) $X(t) + G(t,\, X_t,\, Z_t)$ est une semi-martingale avec diffusion $\int_0^t Z_s dB_s$. Mais, nous ne sais pas si $X(\cdot)$ est une semi-martingale ou non.

Nous avons le corollaire suivant

Corollaire 2.1 *Supposons que* $(G_j,\ f_j)$ *satisfait* $(H_1)-(H_3)$, *et* $(\varphi^j,\ \psi^j)\in\mathcal{H}^2(T,\ T+\xi)$, $j=1,\ 2$. *Considérons l'EDFSRN suivante*

$$\begin{cases} -d\left[X(t)-G_j(t,\ X_t,\ Z_t)\right]=f_j(t,\ X_t,\ Z_t)\,dt-Z(t)\,dB_t,\ t\in[0,\ T] \\ Z(t)=\psi^j(t) \qquad\qquad t\in[T,\ T+\xi]\,. \\ X(t)=\varphi^j(t) \qquad\qquad t\in[T,\ T+\xi] \end{cases}$$

Soit $(X^j,\ Z^j)\in\mathcal{H}^2(0,\ T+\xi)$ *la solution pour* $j=1,\ 2$, *respectivement.*

Ensuite, l'estimation suivante est vérifiée

$$\mathbb{E}\left[\sup_{0\le t\le T}\left|X^1(t)-X^2(t)\right|^2+\int_0^T\left|Z^1(t)-Z^2(t)\right|^2dt\right] \tag{2.10}$$

$$\le k\mathbb{E}\left[\sup_{T\le t\le T+\xi}\left|\varphi^1(t)-\varphi^2(t)\right|^2+\int_T^{T+\xi}\left|\psi^1(t)-\psi^2(t)\right|^2dt\right.$$

$$+\sup_{0\le t\le T}\left|G_1\left(t,\ X_t^1,\ Z_t^1\right)-G_2\left(t,\ X_t^1,\ Z_t^1\right)\right|^2 \tag{2.11}$$

$$\left.+\int_0^T\left|f_1\left(t,\ X_t^1,\ Z_t^1\right)-f_2\left(t,\ X_t^1,\ Z_t^1\right)\right|^2dt\right]. \tag{2.12}$$

Où k ne dépend que de n, d, β et α.

Ce corollaire indique la dépendance des solutions par le générateur $(G,\ f)$ et le condition terminal.

Dans ce qui suit, nous discuterons le cas ou la solution dépend de ξ dans un cas simple.

Soit ξ_1 et ξ_2 deux constantes non negatives, et $\xi_1>\xi_2$. Considérez les deux équations suivantes

$$\begin{cases} -d\left[X(t)-\mathbb{E}_t\left[\mathtt{g}(t,\ X(t+\xi_j))\right]\right]=\mathbb{E}_t\left[\mathtt{h}(t,\ X(t),\ Z(t),\ X(t+\xi_j))\right]dt-Z(t)\,dB_t \\ X(t)=\varphi(t) \qquad\qquad \mathrm{t}\in[T,\ T+\xi_1] \end{cases} \tag{2.13}$$

où $\mathtt{g}$: $[0,\, T] \times \Omega \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, et $\mathtt{h}$: $[0,\, T] \times \Omega \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{n\times d} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ sont tous deux Processus adaptés.

Comme pour les hypothèses (H_1) et (H_2), considérez l'hypothèse

$$
\begin{gathered}
(H_4) : \exists \alpha \in [0,\, 1] \;\; ,\, \beta > 0 \; tq : x,\, \overline{x},\, \mu,\, \overline{\mu} \in \mathbb{R}^n,\, z,\, \overline{z} \in \mathbb{R}^{n\times d} \\
\left| \mathtt{g}\,(t,\, x) - \mathtt{g}\,(t,\, \overline{x}) \right| \leq \alpha \left| x - \overline{x} \right| \\
\left| \mathtt{h}\,(t,\, x,\, z,\, \mu) - \mathtt{h}\,(t,\, \overline{x},\, \overline{z},\, \overline{\mu}) \right| \leq \beta \left(\left| x - \overline{x} \right| + \left| z - \overline{z} \right| + \left| \mu - \overline{\mu} \right| \right).
\end{gathered}
$$

Ensuite, nous donnons la proposition suivante sur la dépendance de la solution par ξ

Proposition 2.1 *Supposons que (H_4) est vrai et supposons qu'il existe $k > 0$ et $\rho > 0$, tels que*

$$
\left| \boldsymbol{g}\,(t,\, x) - \boldsymbol{g}\left(t^{'},\, x\right) \right| \leq k \left| t - t^{'} \right|^{\rho},\, \forall x \in \mathbb{R}^n,
$$

Et pour tout $\overline{\eta} \in \mathbb{L}^2\left(\mathcal{F}_T;\; \mathbb{R}^n\right)$

$$
\begin{aligned}
&\left| \boldsymbol{g}\,(t,\, \eta) - \boldsymbol{g}\,(t,\, \overline{\eta}) \right| \leq \alpha \left| \mathbb{E}_t \left[\eta - \overline{\eta} \right] \right|, \\
&\left| \boldsymbol{h}\,(t,\, x,\, z,\, \eta) - \boldsymbol{h}\,(t,\, x,\, z,\, \overline{\eta}) \right| \leq \beta \left| \mathbb{E}_t \left[\eta - \overline{\eta} \right] \right|.
\end{aligned}
$$

Ensuite, pour tout $\varphi \in \mathcal{J}_{\mathbb{F}}^2\,([T,\, T+\xi_1];\, \mathbb{R}^n)$, l'estimation suivante est vérifiée

$$
\begin{aligned}
&\mathbb{E}\left[\sup_{0\leq t\leq T} \left| \Delta X\,(t) \right|^2 + \int_0^T \left| \Delta Z\,(t) \right|^2 dt \right] \\
&\leq k \left(\left| \xi_1 - \xi_2 \right|^{2\rho} + \left| \xi_1 - \xi_2 \right| + \mathbb{E}\left[\sup_{t,\overline{t}\in[T,T+\xi]} \left| \mathbb{E}_T \left[\varphi\,(t) - \varphi\left(\overline{t}\right) \right] \right|^2 \right] \right).
\end{aligned}
$$

En particulier, si φ est une martingale, alors

$$
\mathbb{E}\left[\sup_{0\leq t\leq T} \left| \Delta X\,(t) \right|^2 + \int_0^T \left| \Delta Z\,(t) \right|^2 dt \right] \leq k \left[\left| \xi_1 - \xi_2 \right|^{\rho} + \left| \xi_1 - \xi_2 \right| \right].
$$

Preuve. Il est évident que 2.13 admet une paire unique de solution $(X^j,\, Z^j)$ pour $j = 1,\, 2$ respectivement. ■

Soit $\Delta X := X_1 - X_2$ et $\Delta Z := Z_1 - Z_2$. En vue de 2.10, nous avons l'estimation suivante :

$$\mathbb{E}\left[\sup_{0\leq t\leq T}\left|\Delta X(t)\right|^2+\int_0^T\left|\Delta Z(t)\right|^2dt\right] \tag{2.14}$$

$$\leq k\mathbb{E}\left[\sup_{0\leq t\leq T}\left|\mathtt{g}(t,\,X_1(t+\xi_1))-\mathtt{g}(t,\,X_1(t+\xi_2))\right|^2\right]$$

$$+k\mathbb{E}\left[\int_0^T\left|\mathtt{h}(t,\,X_1(t)\,,\,Z_1(t)\,,\,X_1(t+\xi_1))-\mathtt{h}(t,\,X_1(t)\,,\,Z_1(t)\,,\,X_1(t+\xi_2))\right|^2\right] \tag{2.15}$$

$$\leq k\mathbb{E}\left[\sup_{0\leq t\leq T}\left|\mathbb{E}_t\left[X_1(t+\xi_1)-X_1(t+\xi_2)\right]\right|^2\right].$$

Si $t+\xi_1\geq T$, $t+\xi_2\geq T$, alors

$$\begin{aligned}&\left|\mathbb{E}_t\left[X_1(t+\xi_1)-X_1(t+\xi_2)\right]\right|^2\\&=\left|\mathbb{E}_t\left[\varphi(t+\xi_1)-\varphi(t+\xi_2)\right]\right|^2\\&\leq\mathbb{E}_t\left|\mathbb{E}_T\left[\varphi(t+\xi_1)-\varphi(t+\xi_2)\right]\right|^2\\&\leq\mathbb{E}_t\left[\sup_{s,\,\overline{s}\in[T,\,T+\xi]}\left|\mathbb{E}_T\left[\varphi(s)-\varphi(\overline{s})\right]\right|^2\right].\end{aligned}$$

Si $t+\xi_1\geq T$, $t+\xi_2<T$, alors $T-(t+\xi_2)\leq(t+\xi_1)-(t+\xi_2)=\xi_1-\xi_2$

$$\begin{aligned}&\mathbb{E}_t\left[X_1(t+\xi_1)-X_1(t+\xi_2)\right]\\&=\mathbb{E}_t\left[\varphi(t+\xi_1)-X_1(t+\xi_2)\right]\\&=\mathbb{E}_t\left[\varphi(t+\xi_1)-\varphi(T)+\left[\mathtt{g}(T,\,\varphi(T+\xi_1))-\mathtt{g}(t+\xi_2,\,\varphi(t+\xi_1+\xi_2))\right]\right]\\&+\mathbb{E}_t\left[-\int_{t+\xi_2}^T\mathtt{h}(s,\,X_1(s)\,,\,Z_1(s)\,,\,X_1(s+\xi_1))\,ds\right].\end{aligned}$$

Alors

$$
\begin{aligned}
&\left|\mathbb{E}_t\left[X_1(t+\xi_1)-X_1(t+\xi_2)\right]\right|^2 \\
&\leq k\left|\mathbb{E}_t\left[\varphi(t+\xi_1)-\varphi(T)\right]\right|^2+k\left|\mathbb{E}_t\left[\mathtt{g}(T,\,\varphi(T+\xi_1))-\mathtt{g}(t+\xi_2,\,\varphi(t+\xi_1+\xi_2))\right]\right|^2 \\
&+k(T-t-\xi_2)\,\mathbb{E}_t\left[\int_{t+\xi_2}^{T}\left|\mathtt{h}(s,\,X_1(s)\,,\,Z_1(s)\,,\,X_1(s+\xi_1))\right|^2 ds\right] \\
&\leq k\mathbb{E}_t\left[\left|\mathbb{E}_T\left[\varphi(t+\xi_1)-\varphi(T)\right]\right|^2+\left|\mathbb{E}_T\left[\varphi(T+\xi_1)-\varphi(t+\xi_1+\xi_2)\right]\right|^2\right]+k\left(|\xi_1-\xi_2|^{2\rho}+|\xi_1-\xi_2|\right) \\
&\leq k\left(\mathbb{E}_t\left[\sup_{s,\,\overline{s}\in[T,\,T+\xi]}\left|\mathbb{E}_T\left[\varphi(s)-\varphi(\overline{s})\right]\right|^2\right]+|\xi_1-\xi_2|^{2\rho}+|\xi_1-\xi_2|\right).
\end{aligned}
$$

Si $t+\xi_1\leq T$, alors

$$
\begin{aligned}
&\mathbb{E}_t\left[X_1(t+\xi_1)-X_1(t+\xi_2)\right] \\
&=\mathbb{E}_t\left[\mathtt{g}(t+\xi_1,\,X_1(t+2\xi_1))-\mathtt{g}(t+\xi_2,\,X_1(t+\xi_1+\xi_2))\right] \\
&+\mathbb{E}_t\left[\int_{t+\xi_2}^{t+\xi_1}\mathtt{h}(s,\,X_1(s)\,,\,Z_1(s)\,,\,X_1(s+\xi_1))\,ds\right]
\end{aligned}
$$

Et

$$
\begin{aligned}
&\left|\mathbb{E}_t\left[X_1(t+\xi_1)-X_1(t+\xi_2)\right]\right|^2 \\
&\leq\left|\mathbb{E}_t\left[\mathtt{g}(t+\xi_1,\,X_1(t+2\xi_1))-\mathtt{g}(t+\xi_2,\,X_1(t+\xi_1+\xi_2))\right]\right|^2 \\
&+|\xi_1-\xi_2|\,\mathbb{E}_t\left[\int_{t+\xi_2}^{t+\xi_1}\left|\mathtt{h}(s,\,X_1(s)\,,\,Z_1(s)\,,\,X_1(s+\xi_1))\right|ds\right] \\
&\leq k\left(|\xi_1-\xi_2|^{2\rho}+\left|\mathbb{E}_t\left[X_1(t+2\xi_1)-X_1(t+\xi_1+\xi_2)\right]\right|^2+|\xi_1-\xi_2|\right) \\
&\leq ....\leq k\left(|\xi_1-\xi_2|^{2\rho}+|\xi_1-\xi_2|+\mathbb{E}_t\left[\sup_{s,\,\overline{s}\in[T,\,T+\xi]}\left|\mathbb{E}_T\left[\varphi(s)-\varphi(\overline{s})\right]\right|^2\right]\right).
\end{aligned}
$$

Donc on obtient

$$\mathbb{E}\left[\sup_{0\le t\le T}\left|\mathbb{E}_t\left[X_1\left(t+\xi_1\right)-X_1\left(t+\xi_2\right)\right]\right|^2\right]$$
$$\le k\left(\left|\xi_1-\xi_2\right|^{2\rho}+\left|\xi_1-\xi_2\right|+\mathbb{E}_t\left[\sup_{s,\,\overline{s}\in[T,\,T+\xi]}\left|\mathbb{E}_T\left[\varphi\left(s\right)-\varphi\left(\overline{s}\right)\right]\right|^2\right]\right)\quad \forall t\in\left[0,\,T\right].$$

Application 2.14, puis

$$\mathbb{E}\left[\sup_{0\le t\le T}\left|\Delta X\left(t\right)\right|^2+\int_0^T\left|\Delta Z\left(t\right)\right|^2dt\right]$$
$$\le k\left(\left|\xi_1-\xi_2\right|^{2\rho}+\left|\xi_1-\xi_2\right|+\mathbb{E}_t\left[\sup_{s,\,\overline{s}\in[T,\,T+\xi]}\left|\mathbb{E}_T\left[\varphi\left(s\right)-\varphi\left(\overline{s}\right)\right]\right|^2\right]\right).$$

Si $\varphi\left(\cdot\right)$ est une martingale, puis $\mathbb{E}_T\ \left[\varphi\left(t\right)\right]=\varphi(T)$

$$\mathbb{E}\left[\sup_{0\le t\le T}\left|\Delta X\left(t\right)\right|^2+\int_0^T\left|\Delta Z\left(t\right)\right|^2dt\right]\le k\left(\left|\xi_1-\xi_2\right|^{\rho}+\left|\xi_1-\xi_2\right|\right).$$

2.2 Théorème de comparaison

Dans cette section, nous allons établir un théorème de comparaison pour la solution adaptée de EDFSRN lorsque G est indépendant de Z et f dépend de Z sans anticipation, c'est-à-dire

$$\begin{cases} -d\left[X\left(t\right)-G\left(t,\,X_t\right)\right]=f\left(t,\,X_t,\,Z_t\right)dt-Z\left(t\right)dB_t & ,\,t\in\left[0,\,T\right]\\ X\left(t\right)=\varphi\left(t\right) & t\in\left[T,\,T+\xi\right]\end{cases}\tag{2.16}$$

En vue de la remarque 2,2, nous omettons la condition de bornetude sur Z, et traitons le cas ou $Z=0$ sur $[T,\,T+\xi]$.

Ici, nous supposons que $n=1,\,d\ge1$.

Les deux hypothèses (H_1) et (H_2) sur $(G,\, f)$ sont réduites à

$$\begin{aligned}
&(H_5)\ :(x,\, z)\,,\ (\overline{x},\, \overline{z}) \in \mathcal{H}^2\left(0, T+\xi\right) \\
&\left|G\left(t,\, x_t\right) - G\left(t,\, \overline{x_t}\right)\right|^2 \leq \alpha \mathbb{E}_t \int_0^\xi \lambda_1 \left|x\left(t+u\right) - \overline{x}\left(t+u\right)\right|^2 du \\
&\left|f\left(t,\, x_t,\, z_t\right) - f\left(t,\, \overline{x}_t,\, \overline{z_t}\right)\right|^2 \leq \beta \mathbb{E}_t \left[\int_0^\xi \lambda_2 \left|x\left(t+u\right) - \overline{x}\left(t+u\right)\right|^2 du + \left|z\left(t\right) - \overline{z}\left(t\right)\right|^2\right]
\end{aligned}$$

où α, β, λ_1 et λ_2 sont les mêmes que dans (H_1) et (H_2).

Considérons d'abord le cas simple

$$\begin{cases} -d\left[x\left(t\right) - \mathsf{g}\left(t\right)\right] = \left[f\left(t\right) + \delta\left(t\right) z\left(t\right)\right] dt - z\left(t\right) dB\left(t\right),\ t \in [0,\, T] \\ X\left(T\right) = B \in \mathbb{L}^2\left(\mathcal{F}_T;\ \mathbb{R}\right) \end{cases} \tag{2.17}$$

Nous avons le lemme suivant

Lemme 2.1 *Supposons que $B \geq 0$, $g(T) = 0$. Ensuite, pour tout $\delta \in \mathcal{L}_{\mathbb{F}}^{\infty}\ (0,\ T;\ \mathbb{R})$ et non négatif, $g\in \mathcal{J}_{\mathbb{F}}^{2}\ (0,\ T;\mathbb{R})$ et $f \in \mathcal{L}_{\mathbb{F}}^{2}\ (0,\ T;\ \mathbb{R})$, nous avons $x(t) \geq 0$, $\forall t \in [0,\, T]$ p.s.*

Preuve. Définir $\overline{x}\left(t\right) = x\left(t\right) - \mathsf{g}(t)$. Puis

$$\overline{x}\left(t\right) = B + \int_t^T \left[f\left(s\right) + \delta\left(s\right) z\left(s\right)\right] ds - \int_t^T z\left(s\right) dB\left(s\right).$$

Puisque $B \geq 0$ et $f(s) \geq 0$, en vue du théorème de comparaison de EDSRs, nous avons

$$\overline{x}(t) = x(t) - \mathsf{g}\left(t\right) \geq 0$$

c'est-à-dire $x(t) \geq \mathsf{g}(t) \geq 0$. ■

Maintenant, nous avons le théorème de comparaison suivant.

Théorème 2.2 *Supposons que (H_3) et (H_5) sont vérifiées pour $(f_j,\, G_j)$, et $\varphi^j \in \mathcal{J}_{\mathbb{F}}^{2}\left([T,\, T+\xi]\,;\ \mathbb{R}^n\right)$*

$j = 1,\, 2$. *Soit* $(X^j,\, Z^j)$ *la solution de la EDFSRN suivante,* $j = 1,\, 2$ *respectivement*

$$\begin{cases} -d\left[X^j(t) - G_j\left(t,\, X_t^j\right)\right] = f_j\left(t,\, X_t^j,\, Z^j(t)\right)dt - Z^j(t)\, dB_t,\ t \leq T \\ X^j(t) = \varphi^j(t) \qquad t \in [T,\, T+\xi] \end{cases} \tag{2.18}$$

Supposons que $G_j(T,\, \varphi_T^i) = 0$ $(i,\ j = 1,\ 2)$, *et que* f_2 *et* G_2 *ne diminuent pas dans le trajectoire de* X. *Si* $\varphi^1(T) \geq \varphi^2(T)$,

$$G_1\left(t,\, X_t^1\right) \geq G_2\left(t,\, X_t^1\right) \ \text{ et } f_1\left(t,\, X_t^1,\, Z^1(t)\right) \geq f_2\left(t,\, X_t^1,\, Z^1(t)\right).$$

Alors nous avons presque sûrement $X^1(t) \geq X^2(t)$ *pour tout* $t \in [0,\, T]$.

Preuve. En vue de l'étape (1) du théorème $(2, 1)$, l'équation suivante

$$\begin{cases} -d\left[X^3(t) - G_2(t,\, X_t^1)\right] = f_2(t,\, X_t^1,\, Z^3(t))\, dt - Z^3(t)\, dB_t,\ t \leq T \\ X^3(t) = \varphi^2(t)\,,\ \ t \in [T,\, T+\xi] \end{cases}$$

admet une paire unique de solutions $(X^3,\, Z^3)$. Notons

$$\Delta_3 X := X^1 - X^3,\ \Delta_3 Z := Z^1 - Z^3,\ \Delta G(t) := G_1(t,\ X_t^1) - G_2(t,\ X_t^1),$$

$$\Delta f(t) := f_1\left(t,\, X_t^1,\, Z^1(t)\right) - f_2\left(t,\, X_t^1,\, Z^1(t)\right) \geq 0$$

Et

$$\delta(t) = \frac{\left[f_2(t,\, X_t^1,\, Z^1(t)) - f_2(t,\, X_t^1,\, Z^3(t))\right]\Delta_3 Z(t)}{\left|\Delta_3 Z(t)\right|^2} I_{\{|\Delta_3 Z(t)| \neq 0\}}.$$

Nous avons $\Delta G(t) \geq 0$, $\Delta f(t) \geq 0$, $\delta \in \mathcal{L}_{\mathbb{F}}^{\infty}\left(0,\ T;\ \mathbb{R}^d\right)$ et

$$\begin{aligned}
&\Delta_3 X(t) - \Delta G(t) \\
&= \Delta\varphi(T) + \int_t^T \left[f_1\left(s,\, X_s^1,\, Z^1(s)\right) - f_2\left(s,\, X_s^1,\, Z^3(s)\right)\right] ds - \int_t^T \Delta_3 Z(s)\, dB_s \\
&= \Delta\varphi(T) + \int_t^T \left[\Delta f(s) + \delta^T(s)\, \Delta_3 Z(s)\right] ds - \int_t^T \Delta_3 Z(s)\, dB_s.
\end{aligned}$$

En vue de Lemme $(2,1)$, nous avons presque sûrement $\Delta_3 X(t) = X^1(t) - X^3(t) \geq 0$, $\forall t \in [0,\, T]$. Depuis le fait que les deux G_2 et f_2 ne diminuent pas dans la trajectoire de X, et

$$G_2(t,\ X_t^1) \geq G_2(t,\ X_t^3) \text{ et } f_2\left(t,\, X_t^1,\, \cdot\right) \geq f_2\left(t,\, X_t^3,\, \cdot\right).$$

L'équation suivante

$$\begin{cases}
-d\left[X^4(t) - G_2\left(t,\, X_t^3\right)\right] = f_2\left(t,\, X_t^3,\, Z^4(t)\right) dt - Z^4(t)\, dB_t,\, t \leq T \\
X^4(t) = \varphi^2(t) \qquad t \in [T,\, T+\xi]
\end{cases}$$

A une paire unique de solution $(X^4,\, Z^4)$. Décrivez $\Delta_4 X := X^3 - X^4$, $\Delta_4 Z := Z^3 - Z^4$, puis

$$\begin{aligned}
&\Delta_4 X(t) - \left[G_2(t,\ Y_t^1) - G_2(t,\ Y_t^3)\right] \\
&= \int_t^T \left(f_2\left(s,\, X_s^1,\, Z_3(s)\right) - f_2\left(s,\, X_s^3,\, Z_4(s)\right)\right) ds - \int_t^T \Delta_4 Z(s)\, dB_s \\
&= \int_t^T \left(f_2\left(s,\, X_s^1,\, Z_3(s)\right) - f_2\left(s,\, X_s^3,\, Z_3(s)\right) + f_2\left(s,\, X_s^3,\, Z_3(s)\right) - f_2\left(s,\, X_s^3,\, Z_4(s)\right)\right) ds \\
&- \int_t^T \Delta_4 Z(s)\, dB_s.
\end{aligned}$$

De même que dans le paragraphe précédent, nous avons presque sûrement $\Delta_4 X(t) = X_3(t) \geq 0$, $\forall t \in [0,\, T]$. ■

Pour tout entier n, l'équation suivante

$$\begin{cases} -d\left[X^{n}(t)-G_{2}\left(t,\,X_{t}^{n-1}\right)\right]=f_{2}\left(t,\,X_{t}^{n-1},\,Z^{n}(t)\right)dt-Z^{n}(t)\,dB_{t} & ,\,t\leq T \\ X^{n}(t)=\varphi^{2}(t) \qquad t\in[T,\,T+\xi] \end{cases} \tag{2.19}$$

admet une paire unique de solution $(X^n,\,Z^n)$. De même, nous déduisons presque sûrement

$$X^{1}(t)\geq X^{3}(t)\geq X^{4}(t)\geq....\geq X^{n}(t)\geq...,\,\forall t\in[0,\ T].$$

Au vu des étapes 2 et 3 du théorème (2.1), il existe $\mu\in[0,\ 1]$ tel que

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}\left[\sup_{0\leq t\leq T}\exp\{\delta t\}\left|\Delta_{n}X(t)\right|^{2}+\int_{0}^{T}\exp\{\delta t\}\left|\Delta_{n}Z(t)\right|^{2}dt\right] \\
&\leq\mu\mathbb{E}\left[\sup_{0\leq t\leq T}\exp\{\delta t\}\left|\Delta_{n-1}X(t)\right|^{2}+\int_{0}^{T}\exp\{\delta t\}\left|\Delta_{n-1}Z(t)\right|^{2}dt\right] \\
&\leq...\leq\mu^{n-2}\mathbb{E}\left[\sup_{0\leq t\leq T}\exp\{\delta t\}\left|\Delta_{3}X(t)\right|^{2}+\int_{0}^{T}\exp\{\delta t\}\left|\Delta_{3}Z(t)\right|^{2}dt\right] \\
&\leq\mu^{n-2}k\mathbb{E}\left[\left|\varphi^{1}-\varphi^{2}\right|^{2}+\sup_{0\leq t\leq T}\exp\{\delta T\}\left|\Delta G(t)\right|^{2}+\int_{0}^{T}\exp\{\delta t\}\left|\Delta f(s)\right|^{2}dt\right]\rightarrow 0.
\end{aligned}$$

C'est-à-dire que $\left(X^n,\,Z^n\right)_{n\geq1}$ est une suite de Cauchy dans $\mathcal{H}^2\,[0,\ T+\xi]$.

Soit n tend vers à l'infini dans 2.19 et le comparer à 2.18, nous avons

$$(X^{n},\,Z^{n})\rightarrow\left(X^{2},\,Z^{2}\right),\,\text{dans }\mathcal{H}^{2}\,[0,\ T+\xi]\,.$$

Ensuite, nous avons presque sûrement $X^1(t)\geq X^2(t)$, $\forall\ t\in[0,\,T]$.

Conclusion

Le travail de la recherche dans deux équations différentielles stochstiques (EDSR, EDF-SRN), où nous avons étudié les résultats d'éxistance et d'unicité du solutions pour chaque type d'équation différentielle stochastique.

Bibliographie

[1] Philipe Briand, Equations Différentielles Stochqstiques Rétrograde, Mars (2001).

[2] WenNing Wei, Neutral backward stochastic functional differential equations and their application. ArXiv :1301.3081, 2013

[3] WenNing Wei, Maximum principle for optimal control of neutral stochastic functional differential systems, Science China Mathematics, 2015, 58 (6), pp 1265–1284.

[4] Lingying Teng, Li Xiang, and Daoyi Xu, Existence-uniqueness of the solution for neutral stochastic functional differential equations, Rocky Mountain Journal of Mathematics, 2013, 43, (2), pp 619-644.

Annexe : Abréviations et Notations

Les différentes abréviations et notations utilisées tout au long de ce mémoire sont expliquées ci-dessous.

$(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$	Espace de probabilité.
$(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{F}_t, \mathbb{P})$	Espace de probabilité filtré.
$\mathcal{F}_t$	Filtration.
B_t	Mouvement brownien.
$\mathbb{P}-p.s$	Presque sûrement pour la mesure de probabilité
$\mathbb{E}\left[\cdot\right]$	L'espérence mathématique.
$\mathbb{E}_t\left[\cdot\right]$	L'espérence Conditionnelle
$\mathbb{L}^2$	Espace des processus de carré intégrable