République Algérienne Démocratique et Populaire

Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

UNIVERSITÉ MOHAMED KHIDER, BISKRA

FACULTÉ des SCIENCES EXACTES et des SCIENCES de la NATURE et de la VIE

DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES

Mémoire présenté en vue de l'obtention du Diplôme **:**

MASTER en Mathématiques

Option : **Probabilités**

Par

Dassa Meriyam

Titre :

Équations de Kolmogorov et ÉDP

Membres du Comité d'Examen :

Dr.	**LABED Boubaker**	UMKB	Président
Dr.	**CHALA Adel**	UMKB	Encadreur
Dr.	**GATT Rafika**	UMKB	Examinateur

Juin 2019

DEDICACE

Je dédie ce humble travail marquant de ma vie aux personnes qui me sont les plus chères :

A la source de tendresse et de la vie, qui n'ont pas cessé de m'encourager et de prier pour moi, mes parents : « ***Saleh*** » « ***Menni Baya*** ».

A mes soeurs et mes frères : «***Fatima***» «***Chahrazed***» «***Chahed***» «***Mounir***» «***Sadek Yassin***».

A toute ma précieuse famille, surtout ma bienveillante tante « ***Menni Rachida*** ».

REMERCIEMENTS

Tout d'abord je tiens à remercier **Dieu** de m'avoir donné le courage, la morale et la santé pour mener à bien ce travail.

Je tiens à remercier avec tous mes sentiments de respectueuse gratitude mon encadreur Mr. « **CHALA Adel** », Maître de Conférence -A à l.université de Biskra, pour sa proposition de sujet ainsi pour son soutien, ses orientations et ses précieux conseils.

J'exprime aussi ma profonde gratitude à Mr « **LABED Boubaker** », Maître.de Conférence -A à l'université de Biskra, pour avoir accepté de présider le jury de soutenance.

Je remercie également Mme « **GATT Rafika** », Maître de Conférence -B à l'université de Biskra, pour avoir accepter d'examiner ce mémoire.

Enfin, je remercie chaleureusement tous mes collègues de promotion de **Mathématiques 2019**, et toutes les personnes qui m'ont aidé, et qui ont contribué de proche ou de loin à la réalisation de ce travail.

Table des matières

Table des figures

Introduction

Je présente dans ce mémoire une classe de liens entre les équations différentielle stochastique (ÉDS) et les équations aux dérivées partielles (ÉDP), qu'ils sont appelés à leur inventeur c'est le mathématicien Kolmogorov.

En 1931, A. N. Kolmogorov a commencé à travailler avec les processus de Markov à temps continu, plus précisément, il a étudié leur densité de probabilité de transition. La même année, il introduisit des équations aux dérivées partielles très importantes. Ces équations sont connues sous les noms d'équation de Kolmogorov progressive (ÉKP) et d'équation de Kolmogorov rétrograde (ÉKR). Les deux équations sont des équations aux dérivées partielles paraboliques de la fonction de densité de probabilité pour certains processus stochastiques. Cependant, le retour arrière est principalement utilisé dans le contexte des valeurs attendues. Les noms, progressive et rétrograde, viennent du fait que les équations sont des équations de diffusion qui doivent être résolues dans une certaine direction, progressive ou rétrograde .

Avec la connaissance que nous avons aujourd'hui les ÉDS sont souvent difficiles ou impossible à résoudre. Cependant, les mathématiciens et les physiciens ont travaillés sur les ÉDO et les ÉDP pendant des siécles, et à cause de cela nous avons beaucoup d'outils pour les résoudre, c'est là que les équations de Kolmogorov arrivent, qu'ils pouvent en certains cas sont utilisés comme un pont d'ÉDS à ÉDP, et grâce à ce pont la théorie des ÉDS peut bénéfficier des outils dévelloppés dans la théorie des ÉDO et ÉDP. Non seulement les ÉDS bénéficiement de ce pont, il y'a aussi de nombreux cas où les ÉDO et ÉDP sont mieux regardé à partir d'un point de vue stochastique. L'approche probabiliste de certaines ÉDP permet d'exprimer leurs solutions sous la forme de l'espérance d'une certaine fonctionnelle d'un processus stochastique, qui est solution d'ÉDS. à partir de la formule d'Itô.

Dans notre travail on s'intéresse à les solutions des ÉDS qu'ils sont des processus Markoviens à valeurs dans $\mathbb{R}^n$, qu'on appelle les processus de diffusion qui constituant la plus importante classe.

Ce mémoire est composé de trois chapitres : Le premier chapitre est consacré aux notions importants pour l'étude d'une ÉDP il faut donc s'assurer que les théoriés d'étude classique, on s'intéressera ici de revenir à l'espace des fonctions tests et des distributions, puis la distribution de Dirac, on définira aussi la transformé de Fourier (TF) et le produit de convolution, on donnera les principales propriétés du processus de Markov ainsi que celles des diffusions d'Itô, puis le semi groupe et le générateur qui lui est associé, dans le cas particulier où $f \in \mathcal{C}_0^2(\mathbb{R}^n)$ nous montrera que ce générateur est un opérateur différentiel du second ordre. On abordera enfin la formule de Dynkin.

Dans le deuxième chapitre, on donnera un brève historique de Kolmogorov ainsi que une définition générale de l'ÉDP, ensuit, des théorèmes sur l'ÉKR et l'ÉKP et leurs preuves.

Le troisième chapitre s'agit d'applications sur les équations de Kolmogorov. On montrera que la solution de celle donne des informations sur la solution de l'ÉDS. On terminera ce chapitre en énonçant le lien entre la formule de Black-Scholes et l'ÉKR.

Chapitre 1

Généralités et processus de diffusion Markovien

1.1 Définitions

Définition 1.1.1 *(Support d'une fonction continue) :*

Soit X un ouvert de $\mathbb{R}^n$, le support d'une fonction continue $f : X \to \mathbb{R}$ est l'ensemble des points où elle ne s'annule pas :

$$supp\,(f) := \overline{\{x \in \mathbb{R}^n / f(x) \neq 0\}} \subset X.$$

où l'adhérence est relative à la topologie de X.

Définition 1.1.2 *(Espace des fonctions-tests) :*

Est l'éspace des fonctions de $X \subseteq \mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{C}$ de classe $\mathcal{C}^\infty$(indéfiniment dérivables et toutes les dérivés sont continues) à support compact est noté $\mathcal{C}_0^\infty(X, \mathbb{C})$ ou $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ en général on écrira plus simplement $\mathcal{D}$.

Où $\mathcal{D}(\mathbb{R}) = \{\varphi \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{C}) / \exists M \in \mathbb{R}_+^* : \forall x \notin [-M, M]\,, \varphi\,(x) = 0\}$.

Définition 1.1.3 *(Espace des distributions) :*

Une distribution est une forme linéaire continue sur $\mathcal{D}$.

L'espace des distributions est noté $\mathcal{D}^*$, c'est le dual de $\mathcal{D}$.

Si $S \in \mathcal{D}^*$, on notera $\langle S, \varphi \rangle$ la forme linéaire $S(\varphi)$, où $\langle ., . \rangle$ est le crochet de dualité.

Théorème 1.1.1 *Si f est localement intégrable, elle définit une distribution, notée également f par : $\langle f, \varphi \rangle = \int_{\mathbb{R}} f(x)\varphi(x)dx$*
Cette distribution est appelée la distribution régulière associée à la fonction localement intégrable (i.e : $L^1_{loc}(\mathbb{R}) \subset \mathcal{D}^*(\mathbb{R})$).

Définition 1.1.4 *(Derivée au sens des distributions) :*
La derivée d'une distribution $S \in \mathcal{D}^*$ est définie pour tout $\varphi \in \mathcal{D}$ par :

$$\langle S', \varphi \rangle = -\langle S, \varphi' \rangle$$

Pour plus des détails voir [12].

Définition 1.1.5 *(Distribution de Dirac sur $\mathbb{R}$) :*
C'est la distribution notée δ_{x_0} ou encore $\delta(x - x_0)$ définie par :

$$\langle \delta_{x_0}, \varphi \rangle = \varphi(x_0) = \int_{\mathbb{R}} \varphi(x)\delta(x - x_0)dx, \text{ pour tout fonction } \varphi \in \mathcal{D}.$$

Remarque 1.1.1 *Pour tout suite de fonctions régulières, progressivement plus grande et plue minces à $x = x_0$, avec l'aire sous la courbe restant égale à 1, cependant que cette suit tend vers zero pour tout point, sauf au point $x = x_0$ est tend vers l'infinit et cela la distribution de Dirac :*

$$\delta(x - x_0) = \begin{cases} 0 & si\ x \neq x_0, \\ \infty & si\ x = x_0. \end{cases}$$

Définition 1.1.6 *(Transformation de Fourier) :*
Si $u \in L^1$, on note F_u ou $\hat{u}$ sa TF :

$$F_u : \xi \mapsto \int_{\mathbb{R}} u(x) \exp(-ix\xi)dx, \text{ où } i^2 = -1.$$

Définition 1.1.7 *(Transformation de Fourier inverse) :*

La TF inverse s'appelle aussi la TF conjuguée $\overline{F}$ est définie par :

$$\overline{F}(\hat{u})(x) = u(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \hat{u}(\xi)\exp(ix\xi)d\xi, \text{ où } i^2 = -1.$$

Définition 1.1.8 *(Produit de convolution) :*

Soit $\varphi, \psi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ deux fonctions mesurables, on appelle produit de convolution de φ par ψ la fonction :

$$(\varphi * \psi)(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(t-x)\psi(x)dx.$$

Propriétés 1.1.1 *(Transformation de Fourier et produit de convolution) :*

Soit $\varphi,\ \psi \in L^1$, alors on a les propriétés suivantes :

1) $F(\varphi * \psi) = F(\varphi)F(\psi)$.

2) La TF inverse du produit noté par (.) est la convolution (*) de la TF inverse :

$$\Big(i.e : \overline{F}(\widehat{\varphi}.\widehat{\psi}) = \overline{F}(\widehat{\varphi}) * \overline{F}(\widehat{\psi}) = \varphi * \psi.\Big)$$

3) $F(\varphi.\psi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}F(\varphi) * F(\psi)$.

Remarque 1.1.2 *L^1 et L^2 sont stable par TF et par produit de convolution (i.e. Si φ ,$\psi \in L^1$ (respectivement. L^2) alors $F_\varphi \in L^1$ et $\varphi * \psi \in L^1$ (respectivement. L^2)).*

Remarque 1.1.3 *La fonction de densité d'une distribution normal avec moyenne μ et variance σ^2 est : $f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2\right]$.*
La TF pour cette distribution normale est une fonction normale aussi, donnée par :

$$\begin{aligned}\hat{f}(\lambda) &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\exp(-ix\lambda)dx \\ &= \exp(-i\mu\lambda - \frac{1}{2}\sigma^2\lambda^2).\end{aligned}$$

Pour plus des détails voir [7].

1.2 Processus de Markov

Soit $\mathbb{T} = \mathbb{R}_+$ ou $[0, T]$ telque $(T > 0)$, $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espace de probabilité, $(\mathcal{F}_t)_{t\in\mathbb{T}}$ une filtration sur cet espace et $(E, \mathcal{B}_E)$ un espace mesurable.

Définition 1.2.1 *Un processus $X = (X_t)_{t\in\mathbb{T}}$ définit sur $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t\in\mathbb{T}}, \mathbb{P})$ à valeurs dans l'espace d'états $(E, \mathcal{B}_E)$ est de Markov si pour tout $s < t$ dans $\mathbb{T}$, la loi de X_t sachant que le passé jusqu'à l'instant s ne depend que de X_s (le passé le plus récent), ainsi on dit que X est un processus de Markov si pour tout $s < t$ et tout $A \in \mathcal{B}_E$, on a :*

$$\mathbb{P}(X_t \in A/\mathcal{F}_s) = \mathbb{P}(X_t \in A/X_s).$$

Définition 1.2.2 *Soit $(X_t)_{t\in\mathbb{T}}$ un processus à valeurs dans $(E, \mathcal{B}_E)$, $\mathcal{F}_t = \sigma(X_s, s \leq t)$; $\mathcal{G}_t = \sigma(X_s, s \geq t)$. On dit que $(X_t)_{t\in\mathbb{T}}$ est un processus de Markov si l'un des deux propriétés est vérifiée :*

1) $\forall G$ v.a $\mathcal{G}_t$-mesurable bornée telque :

$$\mathbb{E}(G/\mathcal{F}_t) = \mathbb{E}(G/X_t) = \mathbb{E}(G/\sigma(X_t)).$$

2) $\forall G$ v.a $\mathcal{G}_t$-mesurable bornée, $\forall F$ v.a $\mathcal{F}_t$-mesurable tel que :

$$\mathbb{E}(F \times G/X_t) = \mathbb{E}(F/X_t) \times \mathbb{E}(G/X_t),$$

(i.e.le future et le passé sont indépendants conditionnellement à l'état présent).

Remarque 1.2.1 *1) D'aprés la propriété de la probabilité conditionnelle, on sait que $\forall s < t$ on a :*

$$\mathbb{P}(X_t \in A/X_s) = \Phi(X_s), \quad s \leq t,$$

où Φ est une fonction détérministe, on note alors : $\mathbb{P}(X_t \in A/X_s = x) := \Phi(x)$.

Pour abréger, on pose $\Phi(x) := P_{s,t}(x, A)$ et on dit que c'est la probabilité de transition partant *de x à l'instant s d'atteindre l'ensemble d'états A à l'instant t.*

2) Les probabilités de transition ont les mêmes propriétés que les mesures positives.

Définition 1.2.3 *(Noyaux de transition) :*

Une collection $\{P_{s,t}; s,t \in \mathbb{T}$ et $s<t\}$ d'applications de $(E,\mathcal{B}_E)$ dans $[0,1]$ s'appelle famille de noyaux de transition (ou fonction de transition) si :

1) $P_{s,s}=Id$.

2) $\forall A \in \mathcal{B}_E$, $\forall s<t$, l'application $x \longrightarrow P_{s,t}(x,A)$ est une fonction mesurable.

3) $\forall x \in E$, $\forall s<t, A \longrightarrow P_{s,t}(x,A)$ est une mesure de probabilité sur $\mathcal{B}_E$.

4) $\forall A \in \mathcal{B}_E$, $\forall s<t<u$, on a l'équation de Chapman Kolmogorov $P_{s,u}=P_{s,t}P_{t,u}$.

Remarque 1.2.2 *On doit considérer $P_{s,t}(x,dy)$ comme un opérateur $(P_{s,t})_{s\leq t}$ qui transforme une fonction $f: E \to \mathbb{R}$ borélienne bornée (ou positive) en une fonction $P_{s,t}f$ donnée par :*

$$P_{s,t}f(x)=\int_E f(y)\ P_{s,t}(x,dy),$$

concrétement $P_{s,t}f$ représent l'espérance de $f(X_t)$ sachant que $X_s=x$.

Définition 1.2.4 *Soit $(X_t)_{t\in\mathbb{T}}$ un processus de Markov admettant $(P_{s,t})_{s\leq t}$ comme fonction de transition si : $\forall f$ une fonction $\mathcal{B}_E$-mesurable bornée, $\forall s \leq t$,*

$$\mathbb{E}\left[f(X_t)/\mathcal{F}_s\right]=P_{s,t}f(X_s) \qquad \mathbb{P}-p.s.$$

Définition 1.2.5 *On dit que $(X_t)_{t\in\mathbb{T}}$ processus de Markov admet $(P_{s,t})_{s\leq t}$ comme fonction de transition est homogène si : $\forall s,t,h \in \mathbb{T}$*

$$P_{s+h,t+h}=P_{s,t}.$$

Remarque 1.2.3 *Lorsque le processus de Markov X est homogène, la famille des noyaux de transition $(P_{s,t})_{s\leq t}$ ne dépend plus que d'un paramètre car : $\forall s,t \in \mathbb{T}$,*

$$P_{s,t}=P_{s+0,t+s-s}=P_{0,t-s}.$$

Notation 1.2.1 *Pour simplifier la notation* $P_{0,t-s}$=P_{t-s}, *alors* $P_u(x,A) = \mathbb{P}\left(X_{s+u} \in A/X_s = x\right).$

Remarque 1.2.4 *La famille d'opérateurs* $(P_t)_{t\in\mathbb{T}}$ *est le semi-groupe de transition du processus de Markov homogène* X *tel que :*

1) La propriété de Chapman Kolmogorov s'écrit alors : $\forall t,t' \in \mathbb{T},\ P_tP_{t'} = P_{t+t'}$.

2) $P_0 = Id$.

Notation 1.2.2 *Dans le cas homogène :*

1) $P_{t-s}f(X_s) = \mathbb{E}\left[f(X_t)/\mathcal{F}_s\right] = \mathbb{E}\left[f(X_t)/\sigma(X_s)\right].$

2)$P_tf(X_{0\tau}) = \mathbb{E}\left[f(X_t)/X_0\right].$

3)$P_tf(x) = \mathbb{E}\left[f(X_t)/X_0 = x\right].$

Remarque 1.2.5 *Lorsque* $E = \mathbb{R}^d$ *et que pour tout* $x \in E$ *et tout* $s \leq t$ *la mesure* $P_{s,t}(x,dy)$ *a une densité* $\boldsymbol{p}_{s,t}(x,y)$ *par rapport à la mesure de Lebesgue (i.e.* $P_{s,t}(x,dy) = \boldsymbol{p}_{s,t}(x,y)dy$*) Les fonctions* $\boldsymbol{p}_{s,t}$ *s'appellent les densités de transition de la famille* $\left(P_{s,t}\right)_{s\leq t}$.

Définition 1.2.6 *(Densitè de transition) :*

On dit que $\left\{X_t\right\}_t$ *admet la densité de transition* $\boldsymbol{p}_t(x,y)$*, aussi notée* $\boldsymbol{p(y,t}/x,0)$ *si :*

$$\mathbb{E}^x\left[f(X_t)\right] = \mathbb{E}\left[f(X_t)/X_0 = x\right] = \int_{\mathbb{R}^d} f(y)\boldsymbol{p(y,t}/x,0)dy,$$

pour toute fonction mesurable bornée $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$

Remarque 1.2.6 *1) La notation* $\boldsymbol{p(y,t}/x,0)$ *signifie que la probabilité d'être à "y" au moment "t" étant donné que nous somme dans "x" au moment "0".*

2) La limite au sens des distributions d'une suit de densité de probabilité de transition $(p_t)_t$ *avec une concentration croissante à l'origine et satisfait* $\int_{\mathbb{R}} p_t(x)dx = 1$ *est la distribution de Dirac* $\delta = \delta_0$.

Pour plus de détails sur processus de Markov voir [5].

Définition 1.2.7 *(Temps d'arrêt)*

Sur un espace probabilisé filtré $\left(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t\in\mathbb{T}}, \mathbb{P}\right)$, *un temps d'arrêt* τ *est une v.a.* $\mathcal{F}$*-mesurable à valeurs dans* $\overline{\mathbb{R}}$ *telle que :*

$$\forall t \geq 0, \{\tau \leq t\} \in \mathcal{F}_t.$$

Définition 1.2.8 *(Martingales)*

Un processus $(M_t)_{t\geq 0}$ *est une martingale s'il satisfait les propriétés suivantes :*

1) $(M_t)_{t\geq 0}$*est* $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ *adapté.*

2) $(M_t)_{t\geq 0}$ *intégrable pour tout* t *(c-à-d :* $\mathbb{E}\left(|M_t|\right) < +\infty$ *).*

3) $\mathbb{E}(M_t/\mathcal{F}_s) = M_s$ *;* $\quad \forall s \leq t.$

1.3 Équation différentielle stochastique

Comme abréviation on dit ÉDS.

Tout au long de cette section, la référence principale est [9].

Définition 1.3.1 *Une équation différentielle stochastique est une équation de la forme :*

$$X_t = x + \int_0^t b(s, X_s)ds + \int_0^t \sigma(s, X_s)dB_s, \tag{1.1}$$

ou sous forme condensée :

$$\begin{cases} dX_t = b(s, X_s)ds + \sigma(s, X_s)dB_s, \\ X_0 = x, \end{cases} \tag{1.2}$$

où B_t *est un mouvement brownien standard (MBS) de dimension* m, *et* t *est un réel strictement positif,* $b : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n, \sigma : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{n\times m}$.

Définition 1.3.2 *(Solution d'une ÉDS) :*

Un processus X *est solution de l'ÉDS* (1.1) *si c'est un processus* $\mathcal{F}$*-adapté (où* $\mathcal{F}$ *est la* *filtration du MB) satisfaisant*

$$\int_0^t |b(s, X_s)|^2 \, ds + \int_0^t |\sigma(s, X_s)|^2 \, ds < \infty.$$

Théorème 1.3.1 *(Existance et unicité de la solution) :*

On suppose que :

1) Les fonctions b et σ sont continues .

2) Il existe $k \in \mathbb{R}^+$tel que pour $t \in [0, T]$, $x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}$

a- $|b(t, x) - b(t, y)| + |\sigma(t, x) - \sigma(t, y)| < k |x - y|$.

b- $|b(t, x)|^2 + |\sigma(t, x)|^2 < k^2(1 + |x|^2)$.

3) La condition initiale X_0 est independante de $(B_t, t \geq 0)$ et est de carré integrable.Alors il existe une unique solution de l'ÉDS (1.1) à trajectoires continues pour $t \in \mathbb{R}^+$, de plus cette solution vérifie $\mathbb{E}(\sup_{0 \leq t \leq T} |X_t|^2) < \infty$.

Définition 1.3.3 *(Formule d'Itô) : Soit*

$$\begin{aligned} u : \quad & \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ & (t, x) \longmapsto u(t, x), \end{aligned}$$

une fonction continûment differentiable par rapport à t, et deux fois continûment differentiable par rapport à x. Alors $u(t, X_t)$ satisfait l'équation :

$$\begin{aligned} u(t, X_t) = u(0, X(0)) &+ \int_0^t \frac{\partial u}{\partial t}(s, X_s) ds + \int_0^t \frac{\partial u}{\partial x}(s, X_s) b_s(X_s) ds \\ &+ \int_0^t \frac{\partial u}{\partial x}(s, X_s) \sigma_s(X_s) dBs + \frac{1}{2} \int_0^t \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(s, X_s) \sigma_s^2(X_s) ds. \qquad (1.3) \end{aligned}$$

1.4 Diffusion

Tout au long de cette section, et la section suivante, la référence principale est [2].

On appelle proc de diffusion ou diffusion d'Itô ou, plus simplement, une diffusion un processus stochastique obéissant à une équation differentielle stochastique de la forme (1.1), ou de manière équivalente (1.2). Le terme $b(t,x)$ peut s'interprèter comme la force déterministe agissant sur une particule dans un fluide au point x, et s'appelle donc le coefficient de dérive. Le terme $\sigma(t,x)$ mesure l'éffet de l'agitation thermique des molécules du fluide en x, et s'appelle le coefficient de diffusion.

Dans l'étude des diffusions, il est particulièrement intéressant de considérer la dépendance des solutions de la condition initiale $X_0 = x$, et l'état à l'instant t, mais pas du temps lui même $b(t,x) = b(x)$ et $\sigma(t,x) = \sigma(x)$.

Fixons un intervale $[0,T]$, et nous allons traiter avec $t \in [0,T]$.

Définition 1.4.1 *(Diffusion d'Itô) :*

Une diffusion d'Itô homogène dans le temps est un processus stochastique $\{X_t(\omega)\}_{t>0}$ satisfaisant une équation differentielle stochastique de la forme :

$$\begin{cases} dX_t = b(X_t)dt + \sigma(X_t)dB_t, t \geq s > 0 \\ X_s = x, \end{cases} \tag{1.4}$$

où B_t est un MBS de dimension m, le coefficient de dérive $b : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, et le coefficient de diffusion $\sigma : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{n\times m}$ sont tels que l'ÉDS (1.4) admette une unique solution en tout temps.

Notation 1.4.1 *1) Nous noterons $X_t = X_t^{s,x}, t \geq s$, la solution (unique) de (1.4).*

Quand $s = 0$, on note X_t^x au lieu de $X_t^{0,x}$.

2) $\mathbb{P}^x$ désigne la loi de X sous $X_0 = x$ ou $X_T = x$, et $\mathbb{E}^x$ l'espérance sous $\mathbb{P}^x$.

Quand $x = 0$, on note $\mathbb{E}$ au lieu de $\mathbb{E}^0$.

Remarque 1.4.1 *Précisions que puisque $(X_t)_{t\in\mathbb{T}}$ est solution de (1.4), elle est obligatoirement adaptée à $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$. Donnons maintenant une expression mathématique à $\mathbb{P}^x$:*

Pour tous boréliens A_1, ...,$A_k \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ et tous réels positifs $t_1, t_2, ..., t_k; k \in \mathbb{N}^*$ on a :

$$\mathbb{P}^x(X_{t_1} \in A_1, ..., X_{t_k} \in A_k) = \mathbb{P}(X_{t_1}^x \in A_1, ..., X_{t_k}^x \in A_k).$$

L'homogénéité en temps, c'est-à-dire le fait que b et σ ne dépendent pas du temps, à la conséquence importante suivante.

Lemme 1.4.1 *Les pocessus* $\left\{X_{s+h}^{s,x}\right\}_{h>0}$ $\left\{X_{h}^{0,x}\right\}_{h>0}$ *ont la même loi.*

Preuve.

Par définition, $X_h^{0,x}$ satisfait l'équation intégrale :

$$X_h^{0,x} = x + \int_0^h b(X_v^{0,x})dv + \int_0^h \sigma(X_v^{0,x})dB_v. \tag{1.5}$$

De même $X_{s+h}^{s,x}$ satisfait l'équation intégrale :

$$X_{s+h}^{s,x} = x + \int_s^{s+h} b(X_u^{s,x})du + \int_0^h \sigma(X_u^{s,x})dB_u, \tag{1.6}$$

où nous avons utilisé le changement de variable $u = s + v$ et $\tilde{B}_v = B_{s+v} - B_s$, par la propiété differentiable $\tilde{B}_v$ est un MBS, alors (1.6) peut s'écrit sous la forme :

$$X_{s+h}^{s,x} = x + \int_0^h b(X_{s+v}^{s,x})dv + \int_0^h \sigma(X_{s+v}^{s,x})d\tilde{B}_v.$$

Donc par l'unicité de la solution de l'équation (1.4) les intégrales (1.5) et (1.6) ont la même loi. ■

1.4.1 Propriétés de Markov

La diffusion satisfait la propriété de Markov qui affirme que l'état X_t en un temps donné "t" détermine univoquement le comportement à tous les temps futurs. Ceci permet de démontrer la propriété de semi-groupe, qui généralise celle du flot d'une équation différentielle ordinaire.

Théorème 1.4.1 *(Propriété de Markov pour les diffusions d'Itô) :*
Pour toute fonction mesurable bornée $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$, alors

$$\mathbb{E}^x \left[f(X_{t+h})/\mathcal{F}_t\right](\omega) = \mathbb{E}^{X_t(\omega)}\left[f(X_h)\right]. \tag{1.7}$$

Preuve. Voir [2]. ■

Théorème 1.4.2 *(Propriété de Markov forte pour les diffusions d'Itô) :*

Pour toute fonction mesurable bornée $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ *et tout temps d'arrêt fini presque sûrement,*

$$\mathbb{E}^x \left[f(X_{\tau+h})/\mathcal{F}_\tau \right](\omega) = \mathbb{E}^{X_\tau(\omega)} \left[f(X_h) \right]. \tag{1.8}$$

Preuve. Voir [2]. ■

1.4.2 Semi-groupes et générateurs

Définition 1.4.2 *(Semi-groupe de Markov) :*

A toute fonction mesurable bornée $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ *on associe pour tout* $t > 0$ *la fonction* $P_t f$ *définie par :*

$$P_t f(x) = \mathbb{E}^x \left[f(X_t) \right].$$

L'opérateur linéaire P_t *est appelé le semi-groupe de Markov associé à la diffusion.*

Un semi-groupe de Markov peut être caractérisé par son générateur, qui s'avère être un opérateur differentiel du second ordre dans le cas des diffusions.

Définition 1.4.3 *(Générateur d'une diffusion d'Itô) :*

Le générateur infinitésimal $\mathcal{A}$ *d'une diffusion d'Itô est défini par son action sur une fonction test* f *via la limite suivante :*

$$(\mathcal{A}f)(x) = \lim_{h \longmapsto 0^+} \frac{(P_h f)(x) - f(x)}{h}. \tag{1.9}$$

Le domaine de $\mathcal{A}$ *est par définition l'ensemble des fonctions* f *pour les quelles la limite* (1.9) *existe à* x *est indiqué par* $\mathcal{D}_\mathcal{A}(x)$, *et* $\mathcal{D}_\mathcal{A}$ *indique l'ensemble des fonctions de telle sorte que la limite existe pour tout* $x \in \mathbb{R}$

Proposition 1.4.1 *Le générateur de la diffusion d'Itô est un opérateur aux dirivées partielles du second ordre, et peut être écrit explicitement comme suit :*

$$\mathcal{A} = \sum_{i=1}^{n} b_i(x) \frac{\partial}{\partial x_i} + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{n} (\sigma\sigma^t)_{i,j}(x) \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j}, \tag{1.10}$$

où σ^t désigne la matrice transposée de la matrice σ.

Le domaine de $\mathcal{A}$ contient l'ensemble des fonctions deux fois continûment differentiables a support compact.

Preuve.

Considérons le cas $n = m = 1$. Soit f une fonction deux fois continûment differentiable à support compact (i.e. $f \in \mathcal{C}_0^2$). On applique la formule d'Itô sur $f(X_h)$:

$$f(X_h) = f(X_0) + \int_0^h f'(X_s)b(X_s)ds + \int_0^h f'(X_s)\sigma(X_s)dBs + \frac{1}{2}\int_0^h f''(X_s)\sigma(X_s)^2 ds.$$

En prenant l'espérance, comme l'espérance de l'integrale d'Itô est nulle, on trouve :

$$\mathbb{E}^x(f(X_h)) = f(x) + \mathbb{E}^x\left(\int_0^h f'(X_s)b(X_s)ds + \frac{1}{2}\int_0^h f''(X_s)\sigma(X_s)^2 ds\right), \tag{1.11}$$

d'ou

$$\frac{\mathbb{E}^x(f(X_h)) - f(x)}{h} = \frac{1}{h}\int_0^h \mathbb{E}^x\left(f'(X_s)b(X_s)\right)ds + \frac{1}{2h}\int_0^h \mathbb{E}^x\left(f''(X_s)\sigma(X_s)^2\right)ds.$$

Alors

$$\lim_{h \longrightarrow 0} \frac{\mathbb{E}^x(f(X_h)) - f(x)}{h} = \lim_{h \longrightarrow 0}\left[\frac{1}{h}\int_0^h \mathbb{E}^x\left(f'(X_s)b(X_s)\right)ds + \frac{1}{2h}\int_0^h \mathbb{E}^x\left(f''(X_s)\sigma(X_s)^2\right)ds\right].$$

D'aprés le théorème de la moyenne "dans l'annexe A", formule (3.21) :

$$\mathcal{A}f(x) = f'(x)b(x) + \frac{1}{2}\left(f''(x)\sigma(x)^2\right).$$

Les cas où $n > 2$ ou $m > 2$ se traitent de manière similaire, en utilisant la formule d'Itô multidimensionnelle. ■

Remarque 1.4.2 *1) La connaissance de (P_t) sur les fonctions entières bornées sur $\mathbb{R}$ suffit à déterminer $\mathcal{A}$ sur $\mathcal{B}_b(\mathbb{R})$.*

2) La connaissance de $\mathcal{A}$ sur son domaine suffit à déterminer (P_t) univoquement.

1.5 Formule de Dynkin

La formule de Dynkin est essentiellement une généralisation de l'expression (1.11) à des temps d'arrêt. Elle fournit une premiére classe de liens entre les diffusions d'Itô et les équations aux dérivées partielles.

Proposition 1.5.1 *(formule de Dynkin) :*

Soit $\{X_t\}_{t\geqslant 0}$ une diffusion d'Itô de générateur $\mathcal{A}$, $x \in \mathbb{R}^n$, et τ un temps d'arrêt tel que $\mathbb{E}^x(\tau) < \infty$, et $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction deux fois continûment differentiable a support compact. Alors :

$$\mathbb{E}^x\left[f(X_\tau)\right] = f(x) + \mathbb{E}^x\left[\int_0^\tau \mathcal{A}f(X_s)ds\right]. \tag{1.12}$$

Preuve.

Considérons le cas $n = m = 1$, m étant la dimension du mouvement Brownien. En procèdant comme dans la preuve de la Proposition 1.4.1, on obtient :

$$\mathbb{E}^x\left[f(X_\tau)\right] = f(x) + \mathbb{E}^x\left[\int_0^\tau \mathcal{A}f(X_s)ds\right] + \mathbb{E}^x\left[\int_0^\tau \sigma(X_s)f'(X_s)dB_s\right]. \tag{1.13}$$

Il suffit donc de montrer que l'espérance de l'intégrale stochastique est nulle. Or pour toute fonction h bornèe par $\mathcal{M}$ et tout $\mathcal{N} \in \mathbb{N}$, on a

$$\mathbb{E}^x\left[\int_0^{\tau\wedge\mathcal{N}} h(X_s)dBs\right] = \mathbb{E}^x\left[\int_0^{\mathcal{N}} 1_{\{s<\tau\}}h(X_s)dBs\right] = 0.$$

On va montré que $1_{\{s<\tau\}}$ et $h(X_s)$ sont $\mathcal{F}_s$-mesurable, on a $\{s < \tau\} = \{\tau \leq s\}^c$, comme τ est un temps d'arrêt alors $\{\tau \leq s\} \in \mathcal{F}_s$, et $\mathcal{F}_s$ est stable par le complementaire. C'est implique que $\{\tau \leq s\}^c \in \mathcal{F}_s$, alors $\{s < \tau\} \in \mathcal{F}_s$. c'est équivalent à $1_{\{s<\tau\}}$ est $\mathcal{F}_s$-mesurable, $h(X_s)$ est la composé d'une fonction Borélienne et une v.a $\mathcal{F}_s$-mesurable.

De plus

$$\begin{aligned} \mathbb{E}^x\left(\left[\int_0^\tau h(X_s)dB_s - \int_0^{\tau\wedge\mathcal{N}} h(X_s)dB_s\right]^2\right) &= \mathbb{E}^x\left[\int_{\tau\wedge\mathcal{N}}^\tau h(X_s)^2 ds\right] \\ &\leqslant \mathcal{M}^2\mathbb{E}^x\left[\tau - (\tau\wedge\mathcal{N})\right], \end{aligned}$$

qui tend vers 0 lorsque $\mathcal{N} \longmapsto \infty$, en vertu de l'hypothèse $\mathbb{E}^x(\tau) < \infty$, par le théorème de convergence bornée. On peut donc écrire

$$0 = \lim_{\mathcal{N}\longmapsto\infty} \mathbb{E}^x\left[\int_0^{\tau\wedge\mathcal{N}} h(X_s)dB_s\right] = \mathbb{E}^x\left[\int_0^\tau h(X_s)dB_s\right].$$

Ce qui conclut la preuve, en substituant dans (1.13). La preuve du cas général est analogue.

■

Chapitre 2

Équations de Kolmogorov et ÉDP

2.1 Brève historique

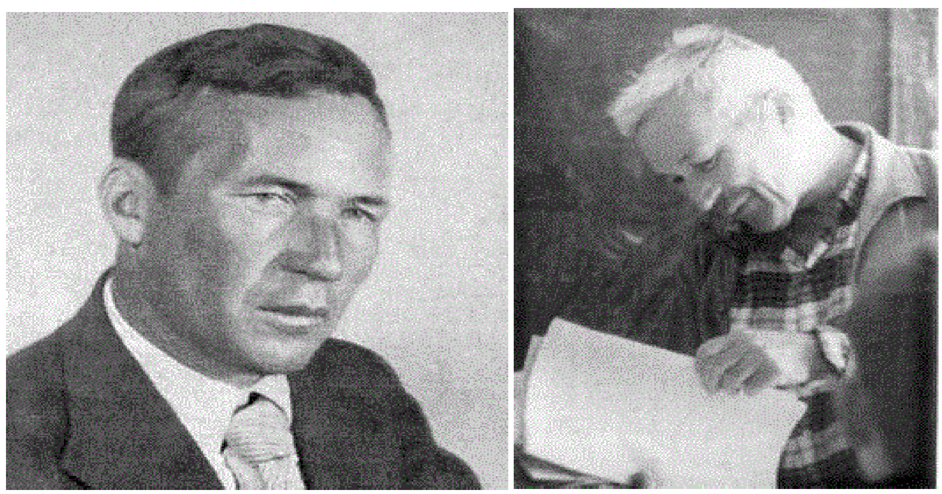
2.1.1 Andreï Nikolaïevitch Kolmogorov

25 avril 1903 à Tambov- 20 octobre 1987 à Moscou : est un mathématicien soviétique et russe qui a apporté des contributions significatives en mathématiques, notamment en théorie des probabilités, topologie, turbulence, mécanique classique, logique intuitionniste, théorie algorithmique de l'information et en analyse de la complexité des algorithmes.

A. Kolmogorov est considéré par beaucoup comme le plus grand mathématicien de l'histoire de la Russie et l'un des plus brillants mathématiciens que le monde ait jamais vu. Il était un homme aux intérêts multiples grâce à sa créativité et à son intellect aiguisé, il était capable de contribuer à de nombreux domaines des mathématiques. Heureusement, la théorie des probabilités était l'un de ces intérêts. Kolmogorov était l'homme qui a placé la théorie des probabilités dans la catégorie des mathématiques rigoureuses. Avant Kolmogorov, il n'y avait pas beaucoup de différence entre la modélisation probabiliste et la modélisation stochastique et on pouvait douter des résultats en probabilité de la même manière que l'on douterait de la justesse d'un modèle. Kolmogorov a changé tout cela en établissant un fondement rigoureux sur lequel s'appuie la théorie des probabilités. Non seulement il a jeté les bases, mais il a également contribué avec des résultats avancés au terrain.

La citation suivante est extraite du livre Heritage de Kolmogorov en mathématiques [3] et décrit à quel point Kolmogorov était brillant : «La plupart des mathématiciens prouvent ce qu'ils peuvent, Kolmogorov était de ceux qui prouvent ce qu'ils veulent».

Kolmogorov n'a cependant pas été le premier à découvrir l'équation de Kolmogorov. Il a été introduit pour la première fois dans le contenu de la physique par Adriaan Fokker et Max Planck, et connu sous le nom d'équation de Fokker-Planck comme moyen de décrire le mouvement Brownien des particules.



Andreï Nikolaïevitch Kolmogorov

Les photos ont été prises de [13]

2.2 Équations aux dérivées partielles (ÉDP)

Le caractére particulier d'une équation aux dérivées partielles est de mettre en jeu des fonctions de plusieurs variables $(x, y, ...) \longmapsto u(x, y, ...)$.Une ÉDP est alors une relation entre les variables et les dérivées partielles de u.

Dans le cas de deux variables, une ÉDP d'ordre un s'écrit :

$$F(x, y, u(x, y), \partial_x u(x, y), \partial_y u(x, y)) = 0.$$

Et une équation de second ordre s'écrit comme suit :

$$F(x, y, u(x, y), \partial_x u(x, y), \partial_y u(x, y), \partial_x^2 u(x, y), \partial_y^2 u(x, y), \partial_x \partial_y u(x, y)) = 0.$$

Pour plus de détails sur ÉDP voir [8].

2.3 Équations de Kolmogorov pour les diffusions d'Itô

On présente dans ce chapitre deux équations aux dérivées parielles (ÉDP) qui se posent dans la théorie de temps continue, état continue des processus de diffusion Markovien, qui a été presenté par A.N.Kolmogorov en 1931.

Ces équations caractérisent la dynamique de la distribution du processus de diffusion, tel que la second classe des liens entre ÉDS et ÉDP est constituée par les équations de Kolmogorov.

L'équation de Kolmogorov progressive aborde le suivant : si dans le temps "t" l'état du systéme est x, qu'est qu'on peut dire à propose de la distribution d'état à un temps future $s > t$ (c'est le terme "progressive").

L'équation de Kolmogorov rétrograde est utile pour aborder la question qu'étant donné que le systéme à un temps future "s" a un comportement particulier. Qu'est qu'on peut dire à propose de la distribution à un temps $t < s$. Ce suppose une condition terminale sur l'ÉDP (c'est le terme "rétrograde").

Historiquement, l'équation progressive a été découvert (sous le nom d'équation de Fokker-Plank) avant l'équation rétrograde. Qu'est une peu plus générale et nous allons décrire cette dernière premiérement.

Proposition 2.3.1 *Soit $f \in \mathcal{D}_{\mathcal{A}}$, on a :*

i) $\forall t \geq 0, P_t f \in \mathcal{D}_{\mathcal{A}}$.

ii) Pour tout $x \in \mathbb{R}$. *la fonction* $t \to P_t f$ *est dérivable, la fonction* $\frac{d}{dt} P_t f : x \to \frac{d}{dt} P_t f(x)$ *est dans* $\mathcal{C}_0(E)$, *et on a :*

$$\frac{d}{dt} P_t f = (\mathcal{A} P_t) f = (P_t \mathcal{A}) f. \tag{2.1}$$

De plus on a :

$$P_t f - f = \int_0^t \mathcal{A} P_s f \; ds = \int_0^t P_s \mathcal{A} f \; ds. \tag{2.2}$$

Preuve.

Formellement la relation (1.9) du générateur infinitésimale d'une diffusion d'Itô, peut s'écrire :

$$\mathcal{A} = \frac{dP_t}{dt}|_{t=0}.$$

Par la propriéte de Chapman-Kolmogorov pour le semi groupe $(P_t)_{t>0}$ et la continuité de l'opérateur P_t impliquent,

$$\begin{aligned} \frac{dP_t}{dt}|_{t=0} &= \lim_{h \mapsto 0^+} \frac{P_h(P_t f) - P_t f}{h} \\ &= \lim_{h \mapsto 0^+} \frac{P_h - Id}{h} P_t \\ &= \mathcal{A} P_t. \end{aligned}$$

Alors :

$$\frac{d}{dt} P_t = \mathcal{A} P_t, \tag{2.3}$$

ce qui preuve l'assertion i). Le même calcule montre que $t \longrightarrow P_t f$ est dérivable en tout $t > 0$ et dérivable à droite en $t = 0$. On remarque qu'en dérivant par rapport à t, la formule de Dynkin (1.12), dans le cas particulier $\tau = t$, on obtient :

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} P_t f(x) &= \frac{d}{dt} \mathbb{E}^x \left[f(X_t) \right] \\ &= \mathbb{E}^x \left[\mathcal{A} f(X_t) \right] \\ &= P_t \left(\mathcal{A} f(x) \right), \end{aligned}$$

qui l'on peut abréger sous la forme

$$\frac{d}{dt} P_t = P_t \mathcal{A}. \tag{2.4}$$

Alors d'aprés (2.3) et (2.4) on a (2.1) et par conséquent, les opérateurs $\mathcal{A}$ et P_t commutent, de plus la fonction $t \longrightarrow \int_0^t \mathcal{A} P_s f$ et sa dérivée $t \longrightarrow \mathcal{A} P_s f$ coincide avec la dérivée de la fonction $t \longrightarrow P_t f - f$ ces deux fonctions égales à "0" en $t = 0$ sont donc égales partout et on a (2.2).On peut écrire formellement $P_t = \exp(t\mathcal{A})$, et du moins formellement le théorème 2.3.1 rend ce point rigoureux. ■

2.3.1 Équation de Kolmogorov rétrograde (ÉKR)

Le théorème suivant et sa preuve sont tirées de [11].

Théorème 2.3.1 *Soit $f : \mathbb{R}^n \longmapsto \mathbb{R}$ une fonction deux fois continûment differentiable à support cmpact (i.e. $f \in \mathcal{C}_0^2(\mathbb{R}^n)$) :*

1) La fonction $u(t,x) = (P_t f)(x) = \mathbb{E}^x [f(X_t)]$ satisfait le probléme aux valeurs initiales :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t}(t,x) = \mathcal{A}u(t,x), & t > 0, x \in \mathbb{R}^n. \\ u(0,x) = f(x), & \forall x \in \mathbb{R}^n. \end{cases} \tag{2.5}$$

2) Si $w(t,x)$ est une fonction bornée, continûment differentiable en "t" et deux fois continûment differentiable en x,satisfait le probléme (2.5), *alors*

$$w(t,x) = \mathbb{E}^x [f(X_t)] .$$

Avant de commencer la démonstration du théorème, nous énonçons le lemme suivant, qui tiré de [1]

Lemme 2.3.1 *Avec les données du théorème précédent, on posant $Y = (Y_t)_{t \geq 0}$ un processus de la forme $Y = (s - t, X_t^{0,x})$, qui a comme générateur infinitésimale $\tilde{A}$ avec :*

$$\tilde{A}g = -\frac{\partial g}{\partial t} + \mathcal{A}g.$$

Preuve du lemme 2.3.1 *Soit $\tilde{A}$ le générateur de Y, alors :*

$$\tilde{A}g(y) = \lim_{t \longmapsto 0} \frac{\mathbb{E}^y [g(Y_t)] - g(y)}{t},$$

tel que $g(y) = g(Y_0) = g(s,x)$. *On reécrit ceci de la maniére suivante :*

$$\begin{aligned}
\tilde{A}g(y) &= \lim_{t\longmapsto 0} \frac{\mathbb{E}^y\left[g(s-t,X_t)\right] - g(s,x)}{t} \\
&= \lim_{t\longmapsto 0} \frac{\mathbb{E}^y\left[g(s-t,X_t) - g(s,X_t) + g(s,X_t)\right] - g(s,x)}{t} \\
&= \lim_{t\longmapsto 0} \frac{\mathbb{E}^y\left[g(s-t,X_t) - g(s,X_t) + g(s,X_t) - g(s,x)\right]}{t} \\
&= \lim_{t\longmapsto 0} \frac{\mathbb{E}^y\left[g(s-t,X_t) - g(s,X_t)\right]}{t} + \lim_{t\longmapsto 0} \frac{\mathbb{E}^y\left[g(s,X_t) - g(s,x)\right]}{t} \\
&= \lim_{t\longmapsto 0} \frac{\mathbb{E}^y\left[g(s-t,X_t) - g(s,X_t)\right]}{t} + \lim_{t\longmapsto 0} \frac{\mathbb{E}^y\left[g_s(X_t)\right] - g_s(x)}{t} \\
&= \lim_{t\longmapsto 0} \frac{\mathbb{E}^y\left[g(s-t,X_t) - g(s,X_t)\right]}{t} + \mathcal{A}g_s(t).
\end{aligned}$$

On doit montrer maintenant que :

$$\lim_{t\longmapsto 0} \frac{\mathbb{E}^y\left[g(s-t,X_t) - g(s,X_t)\right]}{t} = -\frac{\partial g}{\partial t}(y).$$

Pour cela, on utilise la formule d'Itô (1.3) *pour une fonction à deux variables* $g(A_t, X_t)$ *avec* $A_t = s - t$,

$$\begin{aligned}
g(A_t,X_t) &= g(A_0,X_0) + \int_0^t \frac{\partial g}{\partial r}(A_r,X_r)dA_r + \int_0^t \frac{\partial g}{\partial x}(A_r,X_r)dX_r + \tfrac{1}{2}\int_0^t \frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(A_r,X_r)d\left\langle X,X\right\rangle_r \\
&= g(s,x) - \int_0^t \frac{\partial g}{\partial r}(A_r,X_r)dr + \int_0^t \frac{\partial g}{\partial x}(A_r,X_r)b(X_r)dr + \int_0^t \frac{\partial g}{\partial x}(A_r,X_r)\sigma(X_r)dBr \\
&+ \tfrac{1}{2}\int_0^t \frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(A_r,X_r)\sigma^2(X_r)dr.
\end{aligned}$$

On utilise une deuxième fois la formule d'Itô (1.3) *pour* $g(s, X_t)$:

$$\begin{aligned}
g(s,X_t) &= g(s,x) + \int_0^t \frac{\partial g}{\partial x}(s,X_r)dXr + \tfrac{1}{2}\int_0^t \frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(s,X_r)d\left\langle X,X\right\rangle_r \\
&= g(s,x) + \int_0^t \frac{\partial g}{\partial x}(s,X_r)b(X_r)dr + \int_0^t \frac{\partial g}{\partial x}(s,X_r)\sigma(X_r)dB_r \\
&\quad + \tfrac{1}{2}\int_0^t \frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(s,X_r)\sigma^2(X_r)dr.
\end{aligned}$$

On passe à l'espérance de la différence, et on divise le tout par t :

$$\begin{aligned}\tfrac{1}{t}\mathbb{E}^y\left[g(s-t,X_t)-g(s,X_t)\right] = & -\tfrac{1}{t}\int_0^t \mathbb{E}^y\left[\frac{\partial g}{\partial r}(A_r,X_r)\right]dr+\tfrac{1}{t}\int_0^t \mathbb{E}^y\left[\frac{\partial g}{\partial x}(A_r,X_r)b(X_r)\right]dr\\ & -\tfrac{1}{t}\int_0^t \mathbb{E}^y\left[\frac{\partial g}{\partial x}(s,X_r)b(X_r)\right]dr+\tfrac{1}{2t}\int_0^t \mathbb{E}^y\left[\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(A_r,X_r)\sigma^2(X_r)\right]dr\\ & -\tfrac{1}{2t}\int_0^t \mathbb{E}^y\left[\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(s,X_r)\sigma^2(X_r)\right]dr.\end{aligned}$$

En passant à la limite, et en utilisant le théorème de la moyenne "dans l'annexe A" pour les 5 termes, on aura

$$\begin{aligned}\lim_{t\to 0}\frac{\mathbb{E}^x[g_t(s-t,X_t)]-g_t(s,X_t)}{t} &= -\frac{\partial g}{\partial t}(s,x)+\frac{\partial g}{\partial x}(s,x)b(x)-\frac{\partial g}{\partial x}(s,x)b(x)+\tfrac{1}{2}\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(s,x)\sigma^2(x)\\ &\quad -\tfrac{1}{2}\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(s,x)\sigma^2(x)\\ &= -\frac{\partial g}{\partial t}(s,x)\\ &= -\frac{\partial g}{\partial t}(y).\end{aligned}$$

Alors $\tilde{A}g(y)=-\dfrac{\partial g}{\partial t}(y)+\mathcal{A}g(y).$

Preuve du théorème 2.3.1.

1) Posons $g_t(x):=u(t,x)$, $\forall x\in\mathbb{R}^n$, g est dérivable, et on a pour tout $t<r$:

$$\begin{aligned}\frac{\mathbb{E}^x[g_t(X_r)]-g_t(x)}{r} &= \frac{\mathbb{E}^x[u(t,X_r)]-u(t,x)}{r}\\ &= \frac{1}{r}\mathbb{E}^x\left[\mathbb{E}^{X_r}\left[f(X_t)\right]-\mathbb{E}^x\left[f(X_t)\right]\right].\end{aligned}$$

On applique la propriété de Markov (1.7) pour les diffusions d'Itô :

$$\frac{1}{r}\mathbb{E}^x\left[\mathbb{E}^{X_r}\left[f(X_t)\right]-\mathbb{E}^x\left[f(X_t)\right]\right] = \frac{1}{r}\mathbb{E}^x\left[\mathbb{E}^x\left[f(X_{t+r})/\mathcal{F}_r\right]-\mathbb{E}^x\left[f(X_t)/\mathcal{F}_r\right]\right].$$

D'aprés les propriétés de l'espérance conditionnelle :

$$\begin{aligned}\frac{1}{r}\mathbb{E}^x\left[\mathbb{E}^x\left[f(X_{t+r})/\mathcal{F}_r\right]-\mathbb{E}^x\left[f(X_t)/\mathcal{F}_r\right]\right] &= \frac{1}{r}\mathbb{E}^x\left[\mathbb{E}^x(f(X_{t+r})-f(X_t)/\mathcal{F}_r)\right]\\ &= \frac{1}{r}\mathbb{E}^x\left[f(X_{t+r})-f(X_t)\right]\\ &= \frac{1}{r}(u(t+r,x)-u(t,x)).\end{aligned}$$

On passe à la limite pour r tend vers 0, alors :

$$\lim_{r\to 0^+} \frac{1}{r}(u(t+r,x)-u(t,x)) = \frac{\partial u}{\partial t}.$$

On aura alors $\mathcal{A}g = \lim\limits_{r\to 0^+} \dfrac{\mathbb{E}^x g(X_r)-g(x)}{r}$ existe, et :

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \mathcal{A}u.$$

2) Unicité : Pour montrer l'unicité supposons qu'il existe une fonction $w(t,x) \in \mathcal{C}^{1,2}(\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^n)$ qui satisfait (2.5), alors :

$$\tilde{A}w = -\frac{\partial w}{\partial t} + \mathcal{A}w = 0; \forall t \geq 0, x \in \mathbb{R}^n.$$

On définit le processus $Y = (Y_t)_{t\in\mathbb{T}}$ de $\mathbb{R}^2$ par $Y_t = (s-t, X_t^{0,x})$ comme le montre le lemme précédent, le processus Y a $\tilde{A}$ comme générateur infinitésimale. Soit $\tau_R = \inf\{t > 0 : \|X_t\| \geq R\}$. En appliquant la formule de Dynkin (1.12) pour Y, et comme $\tilde{A}w = 0$, on obtient :

$$\mathbb{E}^y\left[w(Y_{t\wedge\tau_R})\right] = w(s,x) + \mathbb{E}^{s,x}(\int_0^{t\wedge\tau_R} (\tilde{A}w)(Y_u)du) = w(s,x),$$

En faisant tendre R vers $+\infty$,on obtient ,

$$\mathbb{E}^{s,x}\left[w(Y_t)\right] = w(s,x).$$

En particulier pour $t = s$, on aura :

$$\begin{aligned} w(s,x) &= \mathbb{E}^{s,x}\left[w(Y_s)\right]. \\ &= \mathbb{E}\left[w(Y_s^{0,(s,x)})\right]. \\ &= \mathbb{E}\left[w(0, X_s^{0,x})\right]. \\ &= \mathbb{E}\left[f(X_s^{0,x})\right]. \\ &= \mathbb{E}^x\left[f(X_s)\right]. \end{aligned}$$

D'où l'unicité. ■

Proposition 2.3.2 *Pour tout choix des fonctions $\varphi, \psi : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ deux fois continûments differentiables, à support compact, où $\langle\ ,\rangle_{L^2}$ désigne le produit scalaire usual de L^2. L'adjoint du générateur $\mathcal{A}$ est par définition l'opérateur linéaire $\mathcal{A}^*$ tel que :*

$$\langle \mathcal{A}\varphi,\psi\rangle_{L^2} = \int_{\mathbb{R}^n} \mathcal{A}\varphi(x)\psi(x)dx = \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(x)\mathcal{A}^*\psi(x)dx = \langle \varphi,\mathcal{A}^*\psi\rangle_{L^2}.$$

et

$$\mathcal{A}^*\psi(x) = -\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}(b_i\psi)(x) + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j}([\sigma\sigma^t]_{i,j}\psi)(x)$$

Preuve.

Considérons le cas $n = 1$, soit $\varphi, \psi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions deux fois continûments differentiables, et φ a support compact avec :

$$\langle \mathcal{A}\varphi,\psi\rangle_{L^2} = \int_{\mathbb{R}} \mathcal{A}\varphi(x)\psi(x)dx.$$

On remplace $\mathcal{A}$ par sa expression, et on obtient

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}} \mathcal{A}\varphi(x)\psi(x)dx &= \int_{\mathbb{R}} (b(x)\varphi'(x) + \tfrac{1}{2}\sigma^2(x)\varphi''(x))\psi(x)dx \\
&= \int_{\mathbb{R}} (b(x)\varphi'(x)\psi(x))dx + \tfrac{1}{2}\int_{\mathbb{R}} \sigma^2(x)\varphi''(x))\psi(x)dx \\
&:= I_1 + \tfrac{1}{2}I_2.
\end{aligned}$$

Pour calculer I_1 on utilise l'IPP une fois, mais pour calculer I_2 on utilise l'IPP deux fois, qui remplace les dérivées par rapport à x de φ par ces de ψ, telque les fonctions φ' et φ étant dérivables, sont continues, et sont intégrables. Ainsi, leur limite aux infinis est nulle.

$$\begin{aligned}
I_1 &= -\int_{\mathbb{R}} \varphi(x)(b(x)\psi(x))'dx, \\
I_2 &= \int_{\mathbb{R}} \varphi(x)(\sigma^2(x)\psi(x))''dx.
\end{aligned}$$

Alors

$$\begin{aligned}\langle \mathcal{A}\varphi,\psi\rangle_{L^2} &= -\int_{\mathbb{R}} \varphi(x)(b(x)\psi(x))' dx + \tfrac{1}{2}\int_{\mathbb{R}} \varphi(x)(\sigma^2(x)\psi(x))'' dx \\ &= \int_{\mathbb{R}} [-(b(x)\psi(x))' + \tfrac{1}{2}(\sigma^2(x)\psi(x))'']\varphi(x)dx. \\ &= \langle \varphi,\mathcal{A}^*\psi\rangle_{L^2}.\end{aligned}$$

Donc

$$\mathcal{A}^*\psi(x) = \frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial x^2}(\sigma^2(x)\psi(x)) - \frac{\partial}{\partial x}(b(x)\psi(x)).$$

Cela termine la preuve. ■

Remarque 2.3.1 *remarquons que, la nécessité de prolonger l'opérateur $\mathcal{A}^*$ pour le faire agir non seulement sur des fonctions régulières ψ mais aussi sur des probabilités. Pour cela, on définit $\mathcal{A}^*$ comme l'adjoint de $\mathcal{A}$ sur l'espace des distributions sur $\mathbb{R}^n$, et les dérivées apparaissant dans l'expression de $\mathcal{A}^*$ sont au sens des distributions.*

2.3.2 Équation de Kolmogorov progressive (ÉKP)

Nous allons prouver l'ÉKP à l'aide l'ÉKR, supposons que X_t est un diffusion d'Itô sur $\mathbb{R}^n$ qui a une densité de transition $p(y,t/x,0)$ qui simplifier par $p_t(x,y)$.

Le théorème et la preuve suivants sont inspirés de [10]

Théorème 2.3.2 *Si X_t posséde une densité de transition lisse $p_t(x,y)$, alors celle-ci satisfait l'équation*

$$\begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial t}\, p_t(x,y) &= \mathcal{A}_y^* p_t(x,y), \\ \lim\limits_{t\longrightarrow 0} p_t(x,y) &= \delta(x-y). \end{cases} \tag{2.6}$$

La notation $\mathcal{A}_y^*$ signifier que $\mathcal{A}^*$ agit sur la variable y.

Preuve.

Soit $f \in \mathcal{C}_0^2(\mathbb{R}^n)$. D'aprés les propriétés de l'espérance conditionnelle on a :

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[f(X_t)] &= \mathbb{E}[\mathbb{E}[f(X_t)/X_0 = x]] \\ &= \mathbb{E}[\mathbb{E}^x[f(X_t)]].\end{aligned}$$

Comme $u(t,x) = \mathbb{E}^x\left[f(X_t)\right]$, alors

$$\mathbb{E}[f(X_t)] = \int_{\mathbb{R}^n} u(t,x)p_t(x,y)dx.$$

Si on dérive par rapport à t les deux cotés, on trouve :

$$0 = \int_{\mathbb{R}^n}\left[u(t,x)\frac{\partial}{\partial t}p_t(x,y) + p_t(x,y)\frac{\partial}{\partial t}u(t,x)\right]dx.$$

Comme u satisfait l'ÉKR (2.5) c'est implique que :

$$\begin{aligned} 0 &= \int_{\mathbb{R}^n} u(t,x)\frac{\partial}{\partial t}p_t(x,y)dx + \int_{\mathbb{R}^n} p_t(x,y)\frac{\partial}{\partial t}u(t,x)dx, \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} u(t,x)\frac{\partial}{\partial t}p_t(x,y)dx - \int_{\mathbb{R}^n} p_t(x,y)\mathcal{A}u(t,x)dx. \end{aligned}$$

D'aprés la proposition 2.3.2, on a :

$$\begin{aligned} 0 &= \int_{\mathbb{R}^n} u(t,x)\frac{\partial}{\partial t}p_t(x,y)dx - \int_{\mathbb{R}^n} u(t,x)\mathcal{A}_y^*p_t(x,y)dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} u(t,x)\left[\frac{\partial}{\partial t}p_t(x,y) - \mathcal{A}_y^*p_t(x,y)\right]dx. \end{aligned}$$

Maintenant, si nous choisissons $t = T$, nous obtenons

$$0 = \int_{\mathbb{R}^n} f(x)\left[\frac{\partial}{\partial t}p_t(x,y) - \mathcal{A}_y^*p_t(x,y)\right]dx,$$

comme $f \in \mathcal{C}_0^2(\mathbb{R}^n)$ est une fonction arbitraire, alors

$$\frac{\partial}{\partial t}p_t(x,y) - \mathcal{A}_y^*p_t(x,y) = 0.$$

Donc la preuve est terminée. ■

Propriétés 2.3.1 *1). l'ÉKP s'appelle aussi l'équation de Kolmogorov directe qu'elle est l'adjoint de l'ÉKR, cette derniére s'appelle aussi l'équation à retard de Kolmogorov.*

2). Parfois, nous rencontrons à l'équation (2.5) *avec une condition terminale par faisant le* *changement de variable* $t \mapsto T - t$, *et signe négative devant la dérivée de* u *par rapport le temps,*

$$\begin{cases} -\dfrac{\partial u}{\partial t}(x,t) & = \mathcal{A}u(x,t) \qquad 0 \leq t < T, x \in \mathbb{R}^n, \\ u(x,T) & = f(x); \qquad\qquad x \in \mathbb{R}^n, \end{cases}$$

pour $u(x,t) = \mathbb{E}^x\left[f(X_t)\right].$

3). Si $f(x) = 1_A(x)$ *est la fonction indicatrice d'un Borélien* $A \subset \mathbb{R}^n$, *on peut écrire l'ÉKR comme suit :*

$$\begin{cases} -\frac{\partial u}{\partial t}(x,t) & = \mathcal{A}u(x,t); \quad 0 \leq s < t < T, x \in \mathbb{R}^n \\ u(x,T) & = 1_A(x); \qquad\qquad x \in \mathbb{R}^n, \end{cases}$$

telque :

$$\begin{aligned} u(x,t) &= \mathbb{E}^{x,s}[1_A(X_t)] \\ &= \mathbb{E}[1_A(X_t)/X_s = x] \\ &= \mathbb{P}(X_t \in A/X_s = x) \\ &= P_{s,t}(x,A), \end{aligned}$$

d'aprés ça on peut écrire l'ÉKR pour les probabilité de transition, dans ce cas nous obtenons l'équation :

$$\begin{cases} -\dfrac{\partial}{\partial t}P_{s,t}(x,A) & = \mathcal{A}P_{s,t}(x,A) \qquad 0 \leq s < t < T, x \in \mathbb{R}^n. \\ P_{s,T}(x,A) & = 1_A(x); \qquad\qquad x \in \mathbb{R}^n, \end{cases}$$

cette derniere nous montre la possibilité d'écrire l'ÉKR en terme de densité de transition :

$$\begin{cases} -\dfrac{\partial}{\partial t}p(A,t/x,s) & = \mathcal{A}p(A,t/x,s) \qquad 0 \leq s < t < T, x \in \mathbb{R}^n, \\ \lim\limits_{s \longrightarrow t} p(A,T/x,s) & = \delta_x; \qquad\qquad x \in \mathbb{R}^n. \end{cases} \tag{2.7}$$

4). Alors l'ÉKR (2.5) *pour la densité de transition reécrit comme suit :*

$$\begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial t}p(y,t/x,0) & = \mathcal{A}p(y,t/x,0)\,; \qquad 0 \leq t < T; x,y \in \mathbb{R}^n. \\ \lim\limits_{t \longrightarrow 0} p(y,t/x,0) & = \delta_x(y) = \delta(x-y); \qquad\qquad x,y \in \mathbb{R}^n. \end{cases}$$

2.4 Lien entre l'espérance conditionnelle et l'ÉKR

Supposons que :

$$\begin{aligned} u(t,x) &= \mathbb{E}^x \left[f(X_t) \right] \\ &= \mathbb{E} \left[f(X_t)/X(T) = x \right]. \end{aligned}$$

Pour trouver la dérivée de la fonction u (i.e : du), nous pouvons appliquer la formule d'Itô multidimentionnelle, car $u(t, X_t)$ est une fonction de diffusion d'Itô.

$$\begin{aligned} du(t,X_t) &= \frac{\partial u}{\partial t}(t,X_t)dt + \sum_{i=1}^{d} \frac{\partial u}{\partial X_i(t)}(t,X_t)dX(t) + \tfrac{1}{2}\sum_{i=1}^{d}\sum_{i=1}^{d} \frac{\partial^2 u}{\partial X_i(t)\partial X_j(t)}(t,X_t)d\left\langle X,X\right\rangle_t . \\ &= \left[\frac{\partial u}{\partial t}(t,X_t) + \sum_{i=1}^{d} b_i(X_t)\frac{\partial u}{\partial X_i(t)}(t,X_t) \right. \\ &\left. + \tfrac{1}{2}\sum_{i=1}^{d}\sum_{i=1}^{d} [\sigma(X_t)\sigma(X_t)^t]_{i,j}\frac{\partial^2 u}{\partial X_i(t)\partial X_j(t)}(t,X_t) \right] dt + \sum_{i=1}^{d}\sigma_i(X_t)\frac{\partial u}{\partial X_i(t)}(t,X_t)dB_t. \\ &= \left[\frac{\partial u}{\partial t} + \mathcal{A}u \right] dt + \left[\sum_{i=1}^{d}\sigma_i(X_t)\frac{\partial u}{\partial X_i(t)}(t,X_t) \right] dB_t. \end{aligned}$$

Comme l'espérance conditionnelle est une martingale alors du doit avoir le dérive égal à zero (i.e.$\dfrac{\partial u}{\partial t} + \mathcal{A}u = 0$), et c'est l'équation de Kolmogorov rétrograde.

Chapitre 3

Application

Tout au long de ce chapitre, la référence principale est [10].

Dans ce chapitre nous allons donner des exemples sur les cas où les deux équations de Kolmogorov rétrograde et progressive peuvent être utilisés dans nombreux domaines allant des sciences naturelles à les sciences sociales.

L'une des raisons pour les quelles un tel succés est parceque les problèmes dans le monde réel sont souvent des systèmes macroscopique qui dépend d'une énorme quantité des variables microsopiques.

Pour résoudre ce système macroscopique souvent nous devons résoudre tous les variables microscopique dans le système, c'est génèralement une tâche écrasante.

Au lieu de faire cette énorme quantité des calcules, nous pouvons utiliser une discription stochastique du problème, cela se fait à décrivant le système comme un système des variables macroscopiques qui fluctuent, c'est ce que nous allons voir dans certains processus et problèmes spécifiques :

1. Mise à l'échelle de mouvement Brownien (MB).
2. Processus d'Ornstein-Uhlenbeck (d'O-U).
3. Équation de Black-Scholes et sa relation avec l'ÉKR.

3.1 Mise à l'échelle de MB

La solution de l'ÉDS suivant :

$$\begin{cases} dX_t &= \sigma dB_t, \\ X_0 &= 0, \end{cases} \tag{3.1}$$

s'appelle une échelle de MB telque le nom nous donne une bonne description.

Une MB mise à l'échelle est en fait just une MB avec une coefficient en avant de la partie stochastique (autrement dit : le coefficient de dérive égale à "0" et le coefficient de diffusion est égal à un constant "σ"), cela signifie que les accroissements sont mise à l'échelle.

La solution de l'équation (3.1) est $X_t = \sigma B_t$, telque le MB est un processus de Markov homogène de loi initialle δ_0.

3.1.1 Semi groupe du MB

Soit $B = (\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}, (B_t)_{t\geq 0}, \mathbb{P})$ un MB sur $\mathbb{R}^m$. Le semi groupe de B est de la forme :

$$P_t f(x) = \int_{\mathbb{R}^m.} \frac{1}{(2\pi t)^{\frac{m}{2}}} \exp\left(-\frac{1}{2}\frac{\|x-y\|^2}{t}\right) f(y)dy.$$

Pour tout $t \geq 0$, et tout fonction $f : \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}$ borélienne et bornée, x et y deux vecteurs aléatoires à valeurs dans $\mathbb{R}^m$, telque $\|.\|$ est la norme Euclidienne de $\mathbb{R}^m$. Autrement dit : Le MB sur $\mathbb{R}^m$ a une densité de transition :

$$p_t(x,y) = \frac{1}{(2\pi t)^{\frac{m}{2}}} \exp\left(-\frac{1}{2}\frac{\|x-y\|^2}{t}\right).$$

Dans le cas où $m = 1$ le semi groupe de B est :

$$P_t f(x) = \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{\sqrt{(2\pi t)}} \exp\left(-\frac{1}{2}\frac{(x-y)^2}{t}\right) f(y)dy. \tag{3.2}$$

3.1.2 Générateur infinitésimal du MB

Proposition 3.1.1 *Le générateur infinitésimal d'un MB sur $\mathbb{R}$ est :*

$$\mathcal{A}f(x) = \frac{1}{2}f''(x).$$

Preuve.

Considérons que $f \in \mathcal{C}_0^2(\mathbb{R})$ qui vérifier la formule (3.2).

Si on fait le changement de variable $y = x + z\sqrt{t}$ dans la formule (3.2), alors :

$$P_t f(x) = \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{\sqrt{(2\pi)}} \exp\left(-\frac{1}{2}z^2\right) f(x + z\sqrt{t})dz \tag{3.3}$$

Le devellopement de Taylor-Lagrange appliquée à l'ordre 2 au point x avec l'accroissement $h = z\sqrt{t}$, montre qu'on peut écrire :

$$f(x + z\sqrt{t}) = f(x) + z\sqrt{t}f'(x) + \frac{1}{2}z^2 t f''(x) + \frac{1}{2}z^2 t \left[f''(x + \theta z\sqrt{t}) - f''(x)\right]. \tag{3.4}$$

Où $\theta = \theta(x, z\sqrt{t}) \in [0, 1]$. Ainsi lorsqu'on remplace l'éxpression (3.4) dans (3.3) en tenant compte le fait que la variable z suit la loi normale de centre "0" et de variance "1".

$$\begin{aligned}
P_t f(x) = &\int_{\mathbb{R}} \frac{1}{\sqrt{(2\pi)}} \exp\left(-\frac{1}{2}z^2\right) \Bigg[f(x) + z\sqrt{t}f'(x) + \frac{1}{2}z^2 t f''(x) \\
&+ \frac{1}{2}z^2 t \left[f''(x + \theta z\sqrt{t}) - f''(x)\right]\Bigg] dz \\
= &\int_{\mathbb{R}} \frac{1}{\sqrt{(2\pi)}} \exp\left(-\frac{1}{2}z^2\right) f(x)dz + \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{\sqrt{(2\pi)}} \exp\left(-\frac{1}{2}z^2\right) z\sqrt{t}f'(x)dz \\
&+ \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}} \frac{1}{\sqrt{(2\pi)}} \exp\left(-\frac{1}{2}z^2\right) z^2 t f''(x)dz \\
&+ \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}} \frac{1}{\sqrt{(2\pi)}} \exp\left(-\frac{1}{2}z^2\right) z^2 t \left[f''(x + \theta z\sqrt{t}) - f''(x)\right] dz \\
:= &I_1 + I_2 + I_3 + I_4,
\end{aligned}$$

telque :

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{\sqrt{(2\pi)}} \exp\left(-\frac{1}{2}z^2\right) f(x)dz \\ &= f(x) \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{\sqrt{(2\pi)}} \exp\left(-\frac{1}{2}z^2\right) dz \\ &= f(x) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} I_2 &= \sqrt{t} f'(x) \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{\sqrt{(2\pi)}} \exp\left(-\frac{1}{2}z^2\right) zdz \\ &= \sqrt{t} f'(x) \mathbb{E}(z) \\ &= 0. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} I_3 &= \frac{1}{2} t f''(x) \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{\sqrt{(2\pi)}} \exp\left(-\frac{1}{2}z^2\right) z^2 dz. \\ &= \frac{1}{2} t f''(x) \mathbb{E}(z^2) \\ &= \frac{1}{2} t f''(x). \end{aligned}$$

On voit que :

$$P_t f(x) = f(x) + \frac{1}{2} t f''(x) + I_4.$$

Alors :

$$\frac{P_t f(x) - f(x)}{t} - \frac{1}{2} f''(x) = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{\sqrt{(2\pi)}} z^2 \exp\left(-\frac{1}{2}z^2\right) \left[f''(x + \theta z\sqrt{t}) - f''(x)\right] dz \tag{3.5}$$

Il nous reste à prouver que le second membre de (3.5), tend vers 0 uniformément en $x \in \mathbb{R}$ quand $t \mapsto 0$. On doit procéder délicatement. D'abord, on fait le changement de variable $u = z\sqrt{t}$ et l'intégrale de (3.5), s'écrit :

$$R(t, x) = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{\sqrt{(2\pi)}} \frac{1}{t\sqrt{t}} u^2 \exp\left(-\frac{1}{2t}u^2\right) \left[f''(x + \theta u) - f''(x)\right] du.$$

Comme f" est uniformément continue sur $\mathbb{R}$, à tout $\epsilon > 0$, on peut associer $\alpha > 0$ tel que $|h| \leq \alpha$ implique $|f"(x+h) - f"(x)| \leq \epsilon$. Si on décompose l'intégrale précédente, en une intégrale sur $[-\alpha, \alpha]$ et sur $[-\alpha, \alpha]^c$, on obtient :

$$\begin{aligned}
|R(t,x)| &= \left| \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{\sqrt{(2\pi)}} \frac{1}{t\sqrt{t}} u^2 \exp\left(-\frac{1}{2t}u^2\right) \left[f''(x+\theta u) - f''(x)\right] du \right| \\
&= \left| \frac{1}{2} \int_{[-\alpha,\alpha].} \frac{1}{\sqrt{(2\pi)}} \frac{1}{t\sqrt{t}} u^2 \exp\left(-\frac{1}{2t}u^2\right) \left[f''(x+\theta u) - f''(x)\right] du \right| \\
&+ \left| \frac{1}{2} \int_{[-\alpha,\alpha]^c.} \frac{1}{\sqrt{(2\pi)}} \frac{1}{t\sqrt{t}} u^2 \exp\left(-\frac{1}{2t}u^2\right) \left[f''(x+\theta u) - f''(x)\right] du \right| \\
&\leq \frac{\epsilon}{2} + \frac{1}{2} \|f"\|_\infty \int_{[-\alpha,\alpha]^c.} \frac{1}{\sqrt{(2\pi)}} \frac{1}{t\sqrt{t}} u^2 \exp\left(-\frac{1}{2t}u^2\right) du,
\end{aligned}$$

et en revenant à $z = \frac{u}{\sqrt{t}}$, on obtient :

$$\begin{aligned}
|R(t,x)| &\leq \frac{\epsilon}{2} + \frac{1}{2} \|f"\|_\infty \int_{[-\alpha,\alpha]^c.} \frac{1}{\sqrt{(2\pi)}} z^2 \exp\left(-\frac{1}{2}z^2\right) dz \\
&\leq \frac{\epsilon}{2} + \frac{1}{2} \|f"\|_\infty \left[\int_{-\infty}^{-\frac{\alpha}{\sqrt{t}}} \frac{1}{\sqrt{(2\pi)}} z^2 \exp\left(-\frac{1}{2}z^2\right) dz + \int_{\frac{\alpha}{\sqrt{t}}}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{(2\pi)}} z^2 \exp\left(-\frac{1}{2}z^2\right) dz \right] \\
&\leq \frac{\epsilon}{2} + \frac{1}{2} \|f"\|_\infty \left[2 \int_{\frac{\alpha}{\sqrt{t}}}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{(2\pi)}} z^2 \exp\left(-\frac{1}{2}z^2\right) dz \right] \\
&\leq \frac{\epsilon}{2} + \|f"\|_\infty \left[\int_{\frac{\alpha}{\sqrt{t}}}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{(2\pi)}} z^2 \exp\left(-\frac{1}{2}z^2\right) dz \right]. \qquad (3.6)
\end{aligned}$$

Comme l'intégrale de second membre de (3.6) tend vers "0" quand $t \mapsto 0$, ceci montre que $|R(t,x)| \leq \epsilon$ uniformement en x, alors :

$$\lim_{t \longmapsto 0^+} \frac{P_t f(x) - f(x)}{t} = \frac{1}{2} f''(x).$$

Donc l'assertion du proposition 3.1.1 en résulte aussitôt. ∎

Remarque 3.1.1 *1. Le générateur infinitésimal d'un MB sur* $\mathbb{R}^2$ *est :*

$$\mathcal{A} f(x) = \frac{1}{2} \Delta f(x),$$

où $\Delta = \dfrac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \dfrac{\partial^2}{\partial x_2^2}$; *c'est le Laplacien.*
2. Dans la dimension superieure (i.e. $\mathbb{R}^m$*), on obtient le suivant :*

$$\mathcal{A}f(x) = \frac{1}{2}\sum_{i=2}^{m} \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} f(x).$$

3.1.3 Équations de Kolmogorov pour l'échelle d'un MB

Mise à l'échelle de MB est un peu spécial quand il s'agit des équations de Kolmogorov. Les équations de Kolmogorov progressive et rétrograde sont les plus souvent deux équations completement différents, mais pour une mise à l'échelle de MB les deux équations semblent comme une. l'ÉKR pour mise à l'échelle de MB avec une condition initielle est :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t}(t,x) & = \frac{1}{2}\sigma^2 \dfrac{\partial^2}{\partial x^2} u(t,x) \qquad 0 < t < T, x \in \mathbb{R} \\ \lim\limits_{t \to 0^+} u(t,x) & = f(x), \qquad x \in \mathbb{R} \end{cases} \tag{3.7}$$

l'ÉKP est :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial p_t}{\partial t}(x,y) & = \frac{1}{2}\sigma^2 \dfrac{\partial^2 p_t}{\partial x^2}(x,y) \qquad 0 < t < T, x \in \mathbb{R} \\ \lim\limits_{t \to 0^+} p_t(t,x) & = \delta(x-y); \qquad x \in \mathbb{R} \end{cases} \tag{3.8}$$

Les équations (3.7), (3.8) sont connués en physique sous le nom d'équation de la chaleur, qui introduite par Joseph Fourier pour décrire des phénomènes de propagation de la chaleur et d'évolution de la température.

Solution de l'ÉKR

Pour trouver la solution de l'équation (3.7), on applique la TF sur la fonction u, tel que u et ses dérivées admettent la TF qu'est un opérateur linéaire alors :

$$\widehat{\frac{\partial u}{\partial t}}(t,\xi) - \frac{1}{2}\sigma^2 \widehat{\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}}(t,\xi) = 0, \tag{3.9}$$

telque

$$\begin{aligned}
\widehat{\frac{\partial u}{\partial t}}(\xi,t) \quad &= \int_{\mathbb{R}} \frac{\partial u}{\partial t}(t,x)e^{-ix\xi}dx \\
&= \frac{\partial}{\partial t}\int_{\mathbb{R}} u(t,x)e^{-ix\xi}dx \\
&= \frac{\partial \widehat{u}}{\partial t}(t,\xi),
\end{aligned}$$

et

$$\widehat{\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}}(t,\xi) = \int_{\mathbb{R}} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t,x)e^{-ix\xi}dx,$$

on applique l'IPP deux fois, telque les fonctions $\frac{\partial u}{\partial x}$ et u étant dérivables, sont continues, et sont intégrables. Ainsi, leur limite aux infinis est nulle :

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{\partial^2 u(t,x)}{\partial x^2}e^{-ix\xi}dx = \left[\frac{\partial u(t,x)}{\partial x}e^{-ix\xi}\right]_{-\infty}^{\infty} - i\xi\left(\left[u(t,x)e^{-ix\xi}\right]_{-\infty}^{\infty} - i\xi\int_{\mathbb{R}} u(t,x)e^{-ix\xi}dx\right) \tag{3.10}$$

$$= -\xi^2\widehat{u}(t,\xi).$$

Il devient l'équation (3.9) comme suit :

$$\frac{\partial \widehat{u}}{\partial t}(t,\xi) + \frac{1}{2}\sigma^2\xi^2\widehat{u}(t,\xi) = 0$$

C'est l'équivalent :

$$\frac{\partial \widehat{u}}{\partial t}(t,\xi) = -\frac{1}{2}\sigma^2\xi^2\widehat{u}(t,\xi).$$

Alors :

$$\frac{d\widehat{u}}{\widehat{u}}(t,\xi) = -\frac{1}{2}\sigma^2\xi^2 dt,$$

c'est implique que :

$$\widehat{u}(t,\xi) = k(\xi)\exp(-\frac{1}{2}\sigma^2\xi^2 t).$$

D'aprés la condition initialle on a :

$$\begin{aligned} k(\xi) &= \lim_{t\to 0^+} \widehat{u}(t,\xi) \\ &= \lim_{t\to 0^+} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} u(t,x)e^{-ix\xi}dx \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} \lim_{t\to 0^+} u(t,x)e^{-ix\xi}dx \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} f(x)e^{-ix\xi}dx \\ &= \widehat{f}(\xi). \end{aligned}$$

Alors $\widehat{u}(t,\xi) = \widehat{f}(\xi) \exp\left(-\frac{1}{2}\sigma^2\xi^2 t\right)$. Pour trouver $u(t,x)$ on applique la TF inverse :

$$\begin{aligned} \overline{F}\left(\widehat{u}(t,\xi)\right) &= u(t,x) \\ &= \overline{F}\left(\widehat{f}(\xi). \exp\left(-\frac{1}{2}\sigma^2\xi^2 t\right)\right). \end{aligned}$$

D'aprés la $2^{éme}$ propriété de la proposition 1.1.1, on a :

$$u(t,x) = \overline{F}\left(\widehat{f}(\xi)\right) * \overline{F}\left(\exp\left(-\frac{1}{2}\sigma^2\xi^2 t\right)\right).$$

Par la remarque 1.1.3 on a la fonction $\exp\left(-\frac{1}{2}\sigma^2\xi^2 t\right)$ est la TF de la fonction $\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi t}} \exp\left(-\frac{1}{2}\frac{x^2}{\sigma^2 t}\right)$ alors :

$$\begin{aligned} u(t,x) &= f(x) * \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi t}} \exp\left(-\frac{1}{2}\frac{x^2}{\sigma^2 t}\right) \\ &= \int_{\mathbb{R}} f(y) \frac{1}{\sigma(2\pi t)^{\frac{1}{2}}} \exp\left(-\frac{1}{2}\frac{(x-y)^2}{\sigma^2 t}\right) dy. \end{aligned}$$

Alors :

$$u(t,x) = \int_{\mathbb{R}} f(y) \frac{1}{\sigma(2\pi t)^{\frac{1}{2}}} \exp\left(-\frac{1}{2}\frac{(x-y)^2}{\sigma^2 t}\right) dy,$$

c'est ça la solution de l'équation (3.7).

3.2 Processus d'Ornstein-Uhlenbeck (d'O-U)

Le processus d'O-U est la diffusion solution de l'équation de Langevin suivante :

$$\begin{cases} dX_t = -\mu X_t dt + \sigma dB_t, \\ X_0 = x_0, \end{cases} \tag{3.11}$$

où μ et σ sont deux réels, et $\mu > 0$.

Nous pouvons simuler sous le langage R une trajectoire du processus d'O-U dans l'intervalle de temps $[t_0, T]$ avec un pas $h = (T - t_0)/N$, à l'aide la fonction "OU", voir Code R dans l'annex A.

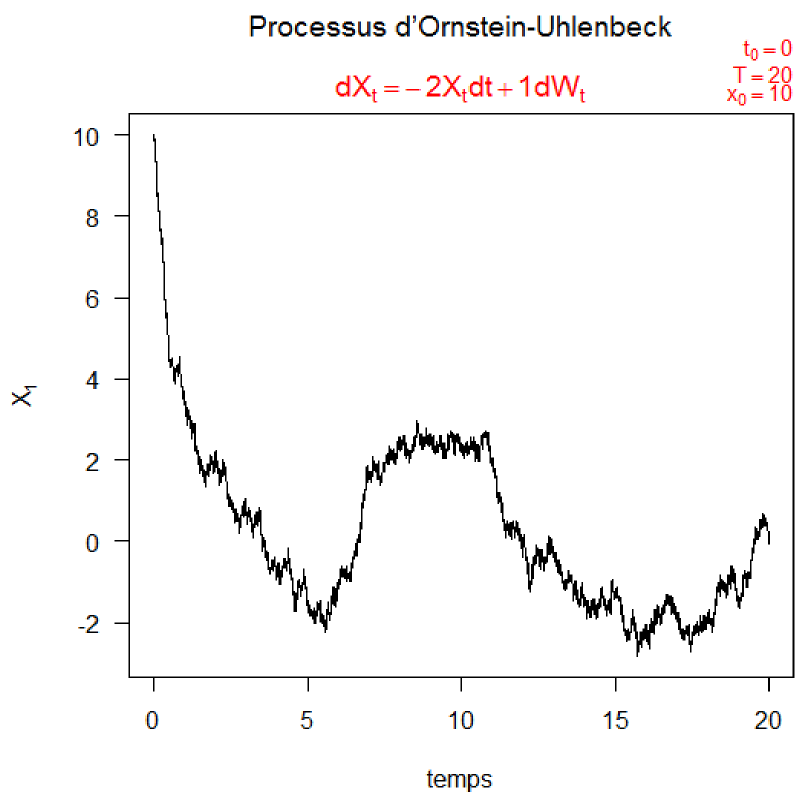


FIG. 3.1 – Trajectoire d'un processus d'O-U avec $\mu = 2$ et $sigma = 1$.

D'aprés la formule (1.10) le générateur infinitésimal de processus d'O-U est :

$$\mathcal{A}f(x) = -\mu x f(x) + \frac{1}{2}\sigma^2 f''(x),$$

et l'adjoint du générateur infinitésimal de processus d'O-U est :

$$\mathcal{A}^* f(x) = \mu\,(xf(x))' + \frac{1}{2}\sigma^2 f''(x). \tag{3.12}$$

Nous pouvons obtenir la densité de transition de la solution de l'ÉDS (3.11) à l'aide l'ÉKP qui s'écrit comme suite :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial t}\, p_t(x_0, x) & = \mathcal{A}^*_y p_t(x_0, x), \\ \lim\limits_{t \longrightarrow 0} p_t(x_0, x) & = \delta(x_0 - x). \end{cases} \tag{3.13}$$

Si on remplace $\mathcal{A}^*$ par sa expression (3.12) dans (3.13), on trouve :

$$\frac{\partial}{\partial t}\, p_t(x_0, x) = \mu \frac{\partial}{\partial x}(xp_t(x, x_0)) + \frac{1}{2}\sigma^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} p_t(x, x_0), \tag{3.14}$$

$$\lim_{t \longrightarrow 0} p_t(x_0, x) = \delta(x_0 - x). \tag{3.15}$$

Maintenant, on applique la TF de l'équation (3.14), et d'aprés la linéarité da la TF :

$$\frac{\partial}{\partial t}\, \widehat{p_t(x_0, x)} = \mu \frac{\partial}{\partial x}\widehat{(xp_t(x_0, x))} + \frac{1}{2}\sigma^2 \widehat{\frac{\partial^2 p_t}{\partial x^2}(x_0, x)}, \tag{3.16}$$

telque :

$$\frac{\partial}{\partial t}\, \widehat{p_t(x_0, x)} = \frac{\partial}{\partial t}\, \widehat{p_t}(x_0, \lambda).$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial x}\widehat{(xp_t(x_0,x))} &= \int_{\mathbb{R}} \frac{\partial}{\partial x}(xp_t(x_0,x))e^{-ix\xi}dx \\
&\overset{IPP}{=} -\int_{\mathbb{R}} -i\lambda(xp_t(x_0,x))e^{-ix\lambda}dx \\
&= -\lambda\int_{\mathbb{R}} p_t(x_0,x)\,(-ix)\,e^{-ix\lambda}dx \\
&= -\lambda\int_{\mathbb{R}} p_t(x_0,x)\frac{\partial}{\partial\lambda}e^{-ix\lambda}dx \\
&= -\lambda\frac{\partial}{\partial\lambda}\int_{\mathbb{R}} p_t(x_0,x)e^{-ix\lambda}dx \\
&= -\lambda\frac{\partial}{\partial\lambda}\widehat{p_t}(x_0,\lambda).
\end{aligned}$$

D'aprés (3.10) on a : $\widehat{\frac{\partial^2 p_t}{\partial x^2}(x_0,x)} = \lambda^2\widehat{p_t}(x_0,\lambda)$.

Donc l'équation (3.16) devient comme suite :

$$\frac{\partial\widehat{p_t}}{\partial t} + \mu\lambda\frac{\partial\widehat{p_t}}{\partial\lambda} = -\frac{1}{2}\sigma^2\lambda^2\widehat{p_t}. \tag{3.17}$$

D'aprés la méthode de caractéristique dans l'annexe A, on obtient :

$$\begin{aligned}
\frac{\partial\widehat{p_t}}{\partial t} &= \frac{\partial\widehat{p_t}}{\partial t} + \frac{\partial\widehat{p_t}}{\partial\lambda}\frac{d\lambda}{dt} \\
&= \frac{\partial\widehat{p_t}}{\partial t} + \mu\lambda\frac{\partial\widehat{p_t}}{\partial\lambda}.
\end{aligned}$$

A partir de ce que nous obtenons :

$$\frac{d\lambda}{dt} = \mu\lambda,$$

ce qui équivaut :

$$\frac{d\lambda}{\lambda} = \mu dt,$$

qui nous donne :

$$\lambda(t) := \lambda = \lambda(0)\exp(\mu t).$$

On a :

$$\frac{\partial\widehat{p_t}}{\partial t} = -\frac{1}{2}\sigma^2\lambda^2\widehat{p_t}.$$

alors :

$$\widehat{p}_t(x_0,\lambda) = k(\lambda)\exp\left(-\int_0^t \frac{1}{2}\sigma^2\lambda(0)^2 e^{2\mu s}ds\right).$$

Telque :

$$\begin{aligned}
k(\lambda) &= \lim_{t\to 0}\widehat{p}_t(x_0,\lambda) \\
&= \lim_{t\to 0}\int_{\mathbb{R}} p_t(x_0,x)\exp(-i\lambda x)dx \\
&= \int_{\mathbb{R}} \lim_{t\to 0} p_t(x_0,x)\exp(-i\lambda x)dx,
\end{aligned}$$

d′aprés la condition initial,on a :

$$\int_{\mathbb{R}} \lim_{t\to 0} p_t(x_0,x)\exp(-i\lambda x)dx = \int_{\mathbb{R}} \delta(x-x_0)\exp(-i\lambda(0)x)dx.$$

Par la définition de la distribution de Dirac delta, on obtient :

$$k(\lambda) = \exp(-i\lambda(0)x_0) = \exp(-ix_0\lambda e^{-\mu t}).$$

Alors :

$$\begin{aligned}
\widehat{p}_t(x_0,\lambda) &= \exp(-ix_0\lambda e^{-\mu t})\exp\left(-\int_0^t \frac{1}{2}\sigma^2\lambda(0)^2 e^{2\mu s}ds\right) \\
&= \exp(-ix_0\lambda e^{-\mu t})\exp\left(-\frac{1}{2}\sigma^2\lambda(0)^2\frac{1}{2\mu}(e^{2\mu t}-1)\right) \\
&= \exp(-ix_0\lambda e^{-\mu t})\exp\left(-\frac{1}{4\mu}\sigma^2\lambda^2 e^{-2\mu t}(e^{2\mu t}-1)\right) \\
&= \exp\left(-ix_0\lambda e^{-\mu t} - \frac{1}{4\mu}\sigma^2\lambda^2 e^{-2\mu t}(e^{2\mu t}-1)\right).
\end{aligned}$$

Maintenant, et d’aprés la remarque 1.1.3 dans le premier chapitre,nous reconnaissons que c’est la même forme que la TF de la fonction de densité d’une distribution normal avec moyenne "$x_0e^{-\mu t}$" et variance "$\frac{1}{2\mu}\sigma^2e^{-2\mu t}(e^{2\mu t}-1)$". Ce que nous obtenons lors de l’utilisation de la

TF inverse :

$$p_t(x_0,x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\frac{1}{2\mu}\sigma^2 e^{-2\mu t}(e^{2\mu t}-1)}} \exp\left(-\frac{(x-x_0e^{-\mu t})^2}{2\frac{1}{2\mu}\sigma^2 e^{-2\mu t}(e^{2\mu t}-1)}\right)$$
$$= \frac{1}{\sqrt{\frac{\pi}{\mu}\sigma^2 e^{-2\mu t}(e^{2\mu t}-1)}} \exp\left(-\frac{(x-x_0e^{-\mu t})^2}{\frac{1}{\mu}\sigma^2 e^{-2\mu t}(e^{2\mu t}-1)}\right).$$

3.3 Équation de Black-Scholes et sa relation avec l'ÉKR

L'équation :

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + rS\frac{\partial V}{\partial S} - \mu V = 0 \tag{3.18}$$

est connu sous le nom d'équetion de Black-Scholes où :

V : le prix de certaines dérivées.

S : le prix de certaines actions.

μ : le taux d'intérêt sans risque.

σ : la volatilité de rendement de l'action.

C'est une équation des modéles du marché classique, qu'il s'agit d'hypothéses suivantes :

1) Il n'ya pas de possibilité d'arbitrage : qui signifie que vous ne pouvez pas faire un bénéfice sans risque.

2) Le prix d'actifs suivent la distribution log normale.

3) Il existe un risque constant de taux d'intérêt gratuit à laquelle vous pouvez emprunter et prêter de l'argent.

4) Vous pouvez achetez et vendre tout montant de actions, les fractions de action sont inclus.

5) le marché n'est pas friction.

6) Maintenant les dividendes sont payés au cours de la periode qui nous faisons le calcule.

Ce modéle est fortement utilisé dans la finance à discribe le prix des options au fil du temps, le seul objectif principal du modéle est également à couvrir l'option c-à-d baisse des risques. Il y'a un lien entre ce modéle qu'il est trés important et l'ÉKR.

Imaginez pendant un certain temps que nous avons acheté une action suit la loi log normale (i.e.MBG) avec μ et σ sont connu, donc on sait que : $dS = \mu S dt + \sigma S dB_t$. Si vous voulez connaitre nécessaire, autrement dit, qu'est ce que nous avons besoin, la réponse est la fonction de densité de transition, et pour l'obtenir on va utiliser l'ÉKR (2.7), cette dernière écrit de la forme :

$$\frac{\partial p(t,x)}{\partial t} + \mathcal{A}p(t,x) = 0. \tag{3.19}$$

Le générateur infinitésimal de $(S_t)_t$ est : $\mathcal{A}p(t,x) = \mu S \frac{\partial p(t,x)}{\partial x} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 p(t,x)}{\partial x^2}$. Alors l'équation (3.19) s'écrit comme suit :

$$\frac{\partial p(t,x)}{\partial t} + \mu S \frac{\partial p(t,x)}{\partial x} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 p(t,x)}{\partial x^2} = 0. \tag{3.20}$$

Si nous voulons connaitre le prix d'une option à l'aide cette équation, nous présentons la valeur d'option V nous laisser $p(T,S)$ être l'intérête à T, maintenant l'actualisation de la valeur à échéance de l'option (ou payoff en anglais) à T nous donne $V(S,t) = e^{-\mu(T-t)}p(t,S)$, c'est implique que :

$$\begin{aligned}\frac{\partial V}{\partial t} &= p(t,S)\frac{\partial}{\partial t}e^{-\mu(T-t)} + e^{-\mu(T-t)}\frac{\partial}{\partial t}p(t,S)\\ &= \mu V + e^{-\mu(T-t)}\frac{\partial}{\partial t}p(t,S).\end{aligned}$$

Alors : $\frac{\partial V}{\partial t} - \mu V = e^{-\mu(T-t)}\frac{\partial}{\partial t}p(t,S)$; $\frac{\partial V}{\partial S} = e^{-\mu(T-t)}\frac{\partial p}{\partial S}$ et $\frac{\partial V}{\partial S} = e^{-\mu(T-t)}\frac{\partial^2 p}{\partial S^2}$.
On applique l'ÉKR (3.20) sur V :

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + rS\frac{\partial V}{\partial S} - \mu V = 0.$$

C'est l'équation de Black- Scholes.

Conclusion : Étude comparative

A l'issue de cette étude, nous pouvons conclure plusieurs choses, dont la plus importante est la possibilité d'obtenir des informations sur la solution d'ÉDS par des méthodes classiques dans le cas détérministe, telque ces information correspondent à les information que nous obtenons par les méthodes de solution stochastique, comme la $2^{éme}$ exemple d'application, le processus d'O-U.

D'une part, on sait que le processus d'O-U est obtenu comme solution de l'ÉDS (3.11), on résout facilement cette équation en appliquant la formule d'Itô (1.3) à la fonction $e^{\mu t}X_t$, on obtient :

$$X_t = X_0 e^{-\mu t} + \sigma \int_0^t e^{-\mu(t-s)} dB_s.$$

Remarquons que l'intégrale stochastique obtenue est en fait une intégrale de Wiener, qui appartient donc à l'espace gaussien engendré par le MB $(B_t)_{t\in\mathbb{T}}$. Cela montre alors que $(X_t)_{t\in\mathbb{T}}$ est un processus gaussien (non centré), dont la fonction de moyenne est $m(t) = \mathbb{E}[X_t] = x_0 e^{-\mu t}$, et la fonction de variance est : $var\,(X_t) = \frac{1}{2\mu}\sigma^2 e^{-2\mu t}(e^{2\mu t} - 1)$.

D'autre part, à la fin d'étude du processus d'O-U la $2^{éme}$ exemple dans le chapitre d'application à l'aide l'ÉKP nous avons atteint à les mêmes resultats précédent.

Nous sommes arrivés à l'ultime de ce travail, la citation de quelques applications en physique et en mathématiques financières est d'un grand apport explicatif pour étayer davantage notre démarche dans ce domaine dont la porte de recherche reste toujours ouvert.

Bibliographie

[1] Abi Ayad, I. Introduction aux équations différentielles stochastique. Mémoire de master en probabilités et statistiques. Université Aboubkr Belkaid - Tlemcen.

[2] Berglund, N. (2014). Martingales et calcul stochastique Master 2 Recherche de Mathématiques. Université d'Orléans.

[3] Erik, C., Annick, L. & Nikolaï, N. (2007). Kolmogorov's Heritage in Mathematics. Springer-Verlag, Berlin.

[4] Francis, C. & Thierry, M. (2015). Calcul stochastique et modèles de diffusions. 2^e édition. Dunod.

[5] Gallardo, L. (2008). Mouvement brownien et calcul d'Itô cours et exercices corrigés. Hermann éditeurs, 6 rue de la Sorbonne 75005 Paris.

[6] Guidoum, A. (2012). Conception d'un Pro Logiciel Interactif Sous R Pour La Simulation de Processus de diffusion. Mémoire de magister en Probabilités. Université des Sciences et de la Technologie Houari Boumediene.

[7] Haberman, R. (2004). Applied Partial Differential Équation : with Fourier Series and Boundary Value Problems. Pearson Prentice Hall, Upper Saddle River, New Jersey,4^{th} Edition.

[8] Helffer, B. (2007). Introduction aux Équations aux Dérivées Partielles. A partir du texte établi par Thierry Ramond. Département de Mathématiques.Université Paris-Sud.

[9] Jeanblanc, M. (2006). Cours de Calcule stochastique. Master 2IF EVRY.

[10] Ludvigsson, G. (2013). Kolmogorov Équations. Departement of Mathematics Uppsala University.

[11] Øksendal, B. (2010). Stochastic Differential Équations. An Introduction with Applications, Sixth Edition, With 14 Figures. Springer-Verlag Heidelberg New York.

[12] Pierron, T. Distributions. ENS Ker Lann.

[13] https ://fr.wikipedia.org/wiki/Andreï_Kolmogorov.

Annexe A : Notions supplémentaires

Théorème :(Formule de la moyenne)

Pour toute fonction f à valeurs réelles, définie et continue sur un segment $[a, b]$, avec $a < b$, il existe un réel c dans $]a, b[$ vérifiant :

$$f(c) = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)dx$$

En particulier

$$\lim_{t \longmapsto 0} \frac{1}{t} \int_0^t f(s)ds = f(0) \tag{3.21}$$

Théorème :(Convergence bornée de Lebesgue)

Soit $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de fonctions μ intégrables telque :

1) $\lim\limits_{n \mapsto \infty} f_n = f$ $\qquad\qquad \mu$-$p.p.$

2) $|f_n| \leq M < +\infty$ $\qquad\qquad \forall n \in \mathbb{N}.$

Si $\mu(E) < +\infty$, alors : $\lim\limits_{n \mapsto \infty} \int_E f_n d\mu = \int_E f d\mu.$

Méthode de caractéristique pour ÉDP d'ordre 1 :

Soit : $\frac{\partial w}{\partial t} + c\frac{\partial w}{\partial x} = 0$ une ÉDP pour la fonction $w(t, x(t))$.

La régle de chaîne implique que : $\frac{d}{dt}w(t, x(t)) = \frac{\partial w}{\partial t} + \frac{dx}{dt}\frac{\partial w}{\partial x}$, telque le premiér terme $\frac{\partial w}{\partial t}$ répresent le changement de w au position fixée. mais le deuxiéme terme $\frac{dx}{dt}\frac{\partial w}{\partial x}$ répresent le changement en raison du fait que l'observateur se déplace dans une région peut être differente. Pour une explication plus détaillée, voir [7].

Mouvement Brownien géométrique :

Soit $(B_t)_{t\in\mathbb{T}}$ un MBS sur $\mathbb{R}$ $(i.e : B_0 = 0)$, et $(B_t)_{t\in\mathbb{T}}$ c'est un processus gaussien de moyenne "0" et de variance égal à "t". On définit $(W_t)_t$ un processus gaussien de moyenne "$W_0 + \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right) t$" et de variance "$\sigma^2 t$", s'écrit comme suit :

$$W_t = W_0 + \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right) t + \sigma B_t$$

il s'appelle mouvement Brownien régulière (MBR), telque μ et σ sont deux réels.

On dit que $(S_t)_{t\in\mathbb{T}}$ est un MBG si $\forall t \in \mathbb{T}$:

$$\begin{aligned} S_t &= \exp(W_t) \\ &= \exp\left(W_0 + \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right) t + \sigma B_t\right) \\ &= \exp(W_0) \exp\left(\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right) t + \sigma B_t\right) \\ &= S_0 \exp\left(\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right) t + \sigma B_t\right). \end{aligned}$$

Le processus $(S_t)_t$ a une distribution log normale, et est un solution de l'ÉDS suivante :

$$dS_t = \mu S_t dt + \sigma S_t dB_t.$$

Remarquons en particulier que, si la valeur initiale S_0 est strictement positive, la solution le reste en tout temps $t > 0$. Le mouvement brownien géométrique est utilisé dans le célébre modéle de Black et Scholes en mathématiques financiéres. La raison de l'apparition de ce processus tient à une hypothése économique d'indépendance des rendements successifssur des intervalles de temps disjoints sur la forme explicite de S_t, on voit que cette hypothése correspond à la propriété d'indépendance des accroissements du mouvement brownien.

Code R :

R> N = 10000 ; t0 = 0 ; T=20 ; h = (T-t0)/N ; x0 = 10 ; μ = 2 ; sigma = 1 ;

R> time <- c(t0 ,t0+ cumsum(rep(h,N)))

R> X<-OU(N, t0, T, h, x0, μ, sigma)

R> plot(time,X,type="l",las=1,xlab="temps",ylab=expression(X[1]))

R> mtext("Processus d'Ornstein-Uhlenbeck",line=2.5,cex=1.2)

R> mtext(bquote(dX[t]==-.(μ)*X[t]*dt+.(sigma)*dW[t]),line=0.25,cex=1.2,col="red")

R> mtext(bquote(x[.(0)]==.(x0)),line=0.1,cex=0.9,adj=1,col="red")

R> mtext(bquote(t[0]==.(t0)),line=1.7,cex=0.9,adj=1,col="red")

R> mtext(bquote(T==.(T)),line=0.9,cex=0.9,adj=1,col="red")

Remarque

Il faut installer Le package Sim.DiffProc sous la version 3.5.1 (2018-07-02) de langage R à été développée pour simulée et traité statistiquement des équations différentielles stochastiques d'une façon générale en particulier les processus de diffusion, L'installation du package Sim.DiffProc sous R est simple, il suffira d'écrire dans R Console la commande suivante :

R> install.packages("Sim.DiffProc")

Pour le chargement de package après l'installation est décrit par la commande suivantes :

R> library("Sim.DiffProc")

Pour plus des détails le lucteur peut voir [6].

Annexe B : Abréviations et Notations

Les différentes abréviations et notations utilisées tout au long de ce mémoire sont expliquées ci-dessous :

$(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$	:	Espace de probabilité.
$(\mathcal{F}_t)_{t\in\mathbb{T}}$	:	Une filtration.
$(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t\epsilon T}, \mathbb{P})$	:	Espace de probabilité filtré.
$(E, \mathcal{B}_E)$	:	Espace d'états.
$\mathbb{P}-p.s.$	:	Presque sûrment pour la mesure de probabilité $\mathbb{P}$.
$v.a$	:	Variable aléatoire.
$\mathcal{B}_b(\mathbb{R})$	:	Tribu borélienne bornée sur $\mathbb{R}$.
MBS	:	Mouvement Brownien standard.
σ^t	:	Transposée de la matrice σ.
$\acute{E}DS$	:	Équation differentielle stochastique.
$\acute{E}DP$	:	Équation aux dérivés partielles.
$\acute{E}KP$	:	Équation de Kolmogorov progressive.
$\acute{E}KR$	:	Équation de Kolmogorov retrograde.
MB	:	Mouvement Brownien.
MBR	:	Mouvement Brownien régulière.
MBG	:	Mouvement Brownien géométrique.
IPP	:	Intégration par partié.
TF	:	Transformée de Fourier.
O-U	:	Processus d'Ornstein-Uhlenbeck.