République Algerienne Democratique et Populaire

Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

UNIVERSITÉ MOHAMED KHIDER, BISKRA

FACULTÉ des SCIENCES EXACTES et des SCIENCES de la NATURE et de la VIE

DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES

Mémoire présenté en vue de l'obtention du Diplôme **:**

MASTER en Mathématiques

Option : **Probabilités**

Par

GHAMRI Yasmina

Titre :

Processus de Lévy et l'Equation Différentielle Stochastique

Membres du Comité d'Examen :

Dr.	**AOUNE Salima**	UMKB	Président
Dr.	**LABED Saloua**	UMKB	Encadreur
Dr.	**ZAGHDOUDI Kadhem**	UMKB	Examinateur

Juin 2019

Dédicace

Je dédie ce modeste travail

A mes très chers parents

pour leurs sacrifices et pour leurs soutients au long de mes études.

A mes frères,

A mes sœurs,

A mes chères amies,

A tous ceux qui ont contribué de prés ou de loin pour que ce travail soit réalisé, à tous je vous dis merci.

REMERCIEMENTS

Je tiens à remercier tout d'abord **DIEU** le tout puissant de m'avoir donné la force, la volonté, le courage et la patience pour accomplir ce travail.

Tout le respect et les mots de remerciement à mon encadreur **Dr.LABED Saloua**, pour son soutien, son aide, ses conseils et ses directives du début jusqu'à la fin de ce travail.

Mes remerciements aussi aux membres de jurés qui nous honorent à accepter de juger ce modeste travail.

Dr.AOUNE Salima et **Dr.ZAGHDOUDI Kadhem.**

Je tiens aussi à remercier notre chef du département de mathématique **Dr.HAFAYED Mokhtar** et tous les enseignants du département de mathématiques de l'université Mohamed Khider, qui m'ont aide dans notre parcours d'étude, tout au long de ces années.

J'exprime aussi mes gratitudes à toutes les personnes qui ont contribués de prés ou de loin à la réalisation de ce travail.

Table des matières

Introduction

Un processus stochastique est un phénomène qui évolue dans le temps de manière aléatoire. La nature, la vie quotidienne et la science nous donnent beaucoup d'exemples divers de ce genre de phénomène, ou en tout cas des phénomènes qui peuvent être compris de cette façon-là : quelque chose qui bouge aléatoirement avec le temps.

En finances, la valeur instantanée d'un actif obéit à ce schéma-ci, la population d'une ville, le nombre de personnes dans une file d'attente ou dans un bus et la position d'une particule de pollen dans un fluide, sont des exemples de processus stochastiques.

Ce dernier fut étudié pour la première fois par le botaniste Robert Brown en 1827 et reçoit le nom de mouvement Brownien. Il joue un rôle fondamental dans la théorie des processus aléatoires et l'équation différentielle stochastique est l'un des objets principaux du calcul stochastique. Elle représente un outil puissant dans la science, mathématiques, l'économie et la finance...etc.

Les processus de Lévy ont des nombreuses propriétés intéressantes et constituent un domaine d'étude en plein développement. Sur le plan de modélisation financière, les processus de Lévy fournissent une classe de modèles avec sauts qui est à la fois suffisamment riche pour bien décrire les données empiriques et assez simple pour faire beaucoup de calculs analytiquement

Ce mémoire est principalement constituée trois chapitres :

Dans le premier chapitre, on donner des définitions d'un processus stochastique puis de définition d'un processus de Lévy et ses propriétés. et quelques exemples,

Le deuxième chapitre est consacré à l'étude des calculs stochastiques qui sont l'intégrale stochastique, le processus d'Itô, la formule d'Itô et la formule d'Itô avec saut.

Dans le dernier chapitre, nous allons présenter un exemple d'utilisation pour le processus de Lévy qui sont le but de notre étude qui est les équations différentielles stochastiques et on va étudier la théoréme d'existence et de l'unicité fort de leur solution, finallement on donne quelques exemples sur des équations différentielles stochastique avec saut.

Chapitre 1

Généralités sur les processus stochastiques

Dans ce chapitre on donne une introduction sur les processus stochastique et puis on donne des définitions du processus de Lévy et quelques exemples (mouvement Brownien, processus de Poisson, processus de Poisson composé ....etc).

1.1 Processus stochastique

Définition 1.1.1 *Soit $\mathbf{I}$ un ensemble, un processus stochastique $X = (X_t)_{t\in\mathbf{I}}$ est une famille des variable aléatoires X_t définies sur un même espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ à valeurs dans un espace mesurable $(E, \mathcal{E})$, et indexée par $t \in \mathbf{I}$.*

- *Si $\mathbf{I} = \mathbb{N}$, le processus $X = (X_t)_{t\in\mathbf{I}}$ est un processus à temps discret.*
- *Si $\mathbf{I} = \mathbb{R}_+$ où $\mathbf{I} = [0, T]$, le processus $X = (X_t)_{t\in\mathbf{I}}$ est un processus à temps continu.*

Un processus dépend de deux paramètres : $X_t(\omega)$ dépend de t (en général le temps) et de l'aléatoire $\omega \in \Omega$.

1. Pour $t \in \mathbf{I}$ fixé, $\omega \in \Omega \to X_t(\omega)$ est une variable aléatoire sur l'espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$.

2. Pour $\omega \in \Omega$ fixé, $t \in \mathbf{I} \to X_t(\omega)$ est une fonction à valeurs réelles appelée trajectoire du processus X.

Définition 1.1.2 *Soit $X = (X_t)_{t\in\mathbf{I}}$ un processus stochastique :*

1. *On dit que le processus est à trajectoire continue (ou est continue) si les applications $t \mapsto X_t(\omega)$ sont continue pour presque tout ω.*
2. *Le processus $X = (X_t)_{t\in\mathbf{I}}$ est càdlàg (continue à droite et limite à gauche) si $t \to X_t(\omega)$ est continue à droite et des limite à gauche, $\forall\omega \in \Omega$.*
3. *Le processus $X = (X_t)_{t\in\mathbf{I}}$ est càglàd (continue à gauche et limite à droite) si $t \to X_t(\omega)$ est continue à gauche et des limite à droite.*

Définition 1.1.3 *Si $X = (X_t)_{t\in\mathbf{I}}$ et $Y = (Y_t)_{t\in\mathbf{I}}$ deux processus définis sur un espace* $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$.

1. *X et Y sont indistinguable si : $\mathbb{P}(X_t = Y_t,\ \forall t \in \boldsymbol{I}) = 1$.*
2. *Y est modification de X si : $\forall t \geq 0$, les variables X_t et Y_t sont égaux $\mathbb{P}-$ p.s. c'est à dire : $\forall t \geq 0$, $\mathbb{P}(X_t = Y_t) = 1$.*
3. *X et Y sont équivalentes s'ils ont même loi on écrira : $X \overset{\mathcal{L}}{=} Y$.*

Proposition 1.1.1

1. *Si X et Y sont indistinguable, alors ils sont modification l'un de l'autre, la réciproque est faux.*
2. *Indistinguable $\Longrightarrow$modification $\Longrightarrow$équivalente.*

Définition 1.1.4 (filtration)

– *Une filtration $(\mathcal{F})_{n\epsilon\mathbb{N}}$ d'un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ est une suite croissante de sous–tribu de $\mathcal{F} = \mathcal{F}_n \subset \mathcal{F}_{n+1}$ pour tout $n \geq 0$.*

– *Un processus à temps discret $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est dit adapté à la filtration $(\mathcal{F})_{n\epsilon\mathbb{N}}$ si pour tout n la variable aléatoire X_n est $\mathcal{F}_n-$mesurable.*

- *Un processus* $(X_t)_{t\in[0,T]}$ *est dit* $\mathcal{F}-$*adapté si la variable aléatoire* X_t *est* $\mathcal{F}_t-$*mesurable si pour tout* $t \in [0,T]$ *.*
- *En particulaire, un processus* $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est toujours adapté à sa filtration naturelle* $\mathcal{F}^X$ *définie par :*

$$\mathcal{F}_n^X = \sigma(X_k, k \leq n).$$

Définition 1.1.5 ***(Processus prévisible)*** *Un processus* X *est dit prévisible si l'application* $(\omega, t) \to X_t(\omega)$ *est mesurable par rapport à la tribu prévisible* $\mathcal{P}$ *qui est engendrée par les processus continus à gauche et adaptés à* $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ *.*

1.2 Processus de Lévy

Soit $X = (X_t)_{t\geq 0}$ un processus stochastique défini sur un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$.

On dit que X est à accroissements indépendants si, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et pour tous $0 \leq t_1 \leq \ldots \leq t_n < \infty$, les variables aléatoires $\left\{X_{t_{j+1}} - X_{t_j}; 1 \leq j \leq n-1\right\}$ sont indépendantes.

On dit que X est à accroissements stationnaires si, pour tous $t, s > 0$, la variable aléatoire $X_{t+s} - X_s$ a même loi que $X_t - X_0$.

Définition 1.2.1 *On dit que* X *est un processus de Lévy (issu de* 0*) si :*

1) $X_0 = 0$ *p.s (presque sûrement).*

2) X *est à accroissements indépendants et stationnaires.*

3) X *est stochastiquement continue : pour tout* $\varepsilon > 0$ *et* $t \geq 0$

$$\lim_{h\to 0} \mathbb{P}(|X_{t+h} - X_t| > \varepsilon) = 0.$$

On peut remarquer que 1) et 2) implique 3) pour $t = 0$.

Propriétés

Accroissements indépendants

Un processus stochastique à temps continue associe une variable aléatoire X_t à tout instant $t \geq 0$, c'est donc une fonction aléatoire de t. Les accroissements d'un tel processus sont les différences $X_t - X_s$ entre ses valeurs à différents instants $s < t$.

Dire que les accroissements d'un processus sont indépendants signifie que les accroissements $X_t - X_s$ et $X_u - X_v$ sont des variables aléatoires indépendantes à partir du moment où les intervalles de temps ne se chevauchent pas, et plus généralement, tout nombre fini d'accoisements sur des intervalles de temps non chevauchant sont mutuellement indépendant (et pas seulement indépendants deux à deux).

Accroissements stationnaires

Dire que les accroissements sont stationnaires signifie que la loi de chaque accroissement $X_t - X_s$ ne dépend que de la longueur $t - s$ de l'intervalle de temps.

Par exemple pour un processus de Poisson, la loi de $X_t - X_s$ est une loi de Poisson d'espérance $\lambda(t-s)$; où $\lambda > 0$ est "l'intensité" ou le "taux" du processus. Pour un processus de Wiener, la loi de $X_t - X_s$ est une loi normale d'espérance nulle et de variance $(t-s)$.

Décomposition de Lévy-Itô

Théorème 1.2.1 (***Décomposition de Lévy-Itô***) *Si X est un processus de Lévy alors il existe $b \in \mathbb{R}^d$, un mouvement Brownien B, une matrice de covariance $A \in \mathbb{R}^{d\times d}$et une mesure aléatoire de Poisson indépendante N on $\mathbb{R}^+ \times (\mathbb{R}/\{0\})$, dont l'intensité est une mesure de Lévy ν, tels que, pour tous $t \geq 0$:*

$$X_t = bt + A^{1/2}B_t + \int_{|z|<1} z\widetilde{N}(t,dz) + \int_{|z|\geq 1} zN(t,dz).$$

Le processus $t \rightarrow \int_{|z|<1} z\widetilde{N}(t,dz)$ est la somme compensée des petits sauts. C'est une martingale càdlàg de carré intégrable. Le processus $t \to \int\limits_{|z|\geq 1} zN(t,dz)$ représente les grands sauts du processus de Lévy. C'est un processus de Poisson composé.

1.3 Exemples de processus de Lévy

Il ya beaucoup d'exemples du processus de Lévy et parmi ces type nous prendrons le mouvement Brownien, processus de Poisson, Poisson composé et processus Gamma.

1.3.1 Mouvement Brownien

Définition 1.3.1 *On appelle mouvement Brownien un processus stochastique à valeurs réelles,* $(X_t)_{t\geq 0}$ *qui est un processus à accroissement indépendants et stationnaires dont les trajectoires sont continus, ce qui signifie que :*

- *Continuité :* $\mathbb{P}-$ *p.s la fonction* $s \to X_s(\omega)$ *est fonction continue.*
- *Indépendants des accroissements : si* $s \leq t$, $X_t - X_s$ *est indépendant de la tribu*

  $\mathcal{F}_s = \sigma(X_u, u \leq s)$.
- *Stationnaire des accroissement : si* $s \leq t$, *la loi de* $X_t - X_s$ *est identique à celle de* $X_{t-s} - X_0$.

Définition 1.3.2 *On appellera* $(\mathcal{F}_t)-$*mouvement Brownien un processus stochastique à valeurs réelles et trajectoires continues qui vérifie :*

- *Pour tout* $t \geq 0$, X_t *est* $\mathcal{F}_t-$*mesurable.*
- *Si* $s \leq t$, *la loi de* $X_t - X_s$ *est identique à celle de* $X_{t-s} - X_0$.
- *Si* $s \leq t$, $X_t - X_s$ *est indépendant de la tribu* $\mathcal{F}_s$.

Définition 1.3.3 *Un mouvement Brownien standard est un processus aléatoire à temps continue* $(B_t, t \in \mathbb{R}_+)$ *telle que :*

i) $B_0 = 0$ *p.s.*

ii) B_t *est à accroissements indépendants et stationnaires.*

iii) $B_t \backsim N(0,t) \quad \forall t \geq 0.$

iv) B_t *est à trajectoire continues.*

Remarque 1.3.1

- B_t *est la notation d'un mouvement Brownien standard* $(M.B)$.
- *Soit* B_t *un* $(M.B)$, *alors* $B_t - B_s \backsim B_{t-s} \backsim N(0, t-s)$ *i.e :*

$$\mathbb{E}[B_t - B_s] = 0;\ \mathbb{E}\left[(B_t - B_s)^2\right] = t - s.$$

Transformation du mouvement Brownien standard

Soit $(B_t)_{t \geq 0}$ $(M.B)$ alors les cinq processus ci-dessous sont également des mouvements Browniens standard :

1) $B_t^{(1)} = -B_t$, $t \in \mathbb{R}_+$ (propriété de symétrie du mouvement Brownien).

2) Soit $T \in \mathbb{R}_+$, fixé : $B_t^{(2)} = B_{t+T} - B_T, t \in \mathbb{R}_+$ (stationnarité).

3) Soit $T \in \mathbb{R}_+$, fixé : $B_t^{(3)} = B_T - B_{T-t}, t \in [0,T]$ (renversement du temps).

4) Soit $a > 0$ fixé : $B_t^{(4)} = \frac{1}{\sqrt{a}} B_{at}, t \in \mathbb{R}_+$ (loi d'échelle).

5) $B_t^{(5)} = tB_{\frac{1}{t}}, t > 0$ et $B_0^{(5)} := 0$ (inversion du temps).

Théorème 1.3.1 *Un processus* B *est un* $(M.B)$ *si et seulement si c'est un processus gaussien continue centré de fonction de covariance donné par :*

$$\text{cov}(B_s, B_t) = \min(s,t) = s \wedge t$$

pour tout $s, t \in [0,T]$.

Preuve. On a :

$$\mathbb{E}\left[B_t - B_s\right] = \mathbb{E}\left[B_t\right] - \mathbb{E}\left[B_s\right] = 0; \forall s < t$$

et aussi, si $s < t$:

$$\begin{aligned}
\operatorname{cov}(B_s, B_t) &= \mathbb{E}\left[B_t B_s\right] - \mathbb{E}\left[B_t\right]\mathbb{E}\left[B_s\right] \\
&= \mathbb{E}\left[B_t B_s - B_s^2 + B_s^2\right] \\
&= \mathbb{E}\left[B_s(B_t - B_s) + B_s^2\right] \\
&= \mathbb{E}\left[B_s\right]\mathbb{E}\left[B_t - B_s\right] + \mathbb{E}\left[B_s^2\right] \\
&= s, \forall s < t.
\end{aligned}$$

Donc $\operatorname{cov}(B_s, B_t) = s \wedge t$. ■

1.3.2 Processus de Poisson

Processus de comptage

Définition 1.3.4 *Désignons par $N(t)_{t \geq 0}$ le nombre de tops se produisant dans l'intervalle de temps $[0, t]$ et supposons que $N(0) = 0$, le nombre $\{N(t); t \geq 0\}$ est appelé processus de comptage.*

Tout processus de comptage vérifie les propriétés suivantes :

a) *Pour tout $t \geq 0$ le nombre $N(t)$ est à valeurs entières positive.*

b) *La fonction $t \rightarrow N(t)$ est croissante.*

c) *Pour tout couple (a, b) $(0 < a < b)$ la différence $N(b) - N(a)$ représente le nombre de tops se produisant dans l'intervalle de temps $]a, b]$.*

Définition 1.3.5 *Un processus de comptage est dit :*

1. *A accroissement indépendant, si les nombres de tops se produisant dans des intervalles de temps disjoints sont indépendants.*

2. Localement continu en probabilité, si pour tout $t \geq 0$ on a :

$$\lim_{h \to 0} \mathbb{P}\left\{N(t+h) - N(t)\right\} = 0.$$

Remarque 1.3.2 *Parmi les processus de comptage, on a les processus de Poisson, définis ci-après qui jouent un rôle prépondérant.*

Processus de Poisson

Définition 1.3.6 *Un processus de comptage $\{N(t), t \geq 0\}$ est appelé processus de Poisson de densité $\lambda > 0$ s'il vérifie les propriétés suivantes :*

i) $N(0) = 0.$

ii) *Le processus est à accroissement indépendants.*

iii) *Le nombre de tops se produisant dans un intervalle de temps de longueur $t \geq 0$ suit la loi de Poisson de paramètre λt, ie : pour tout $s, t \geq 0$ on a :*

$$\mathbb{P}\left\{N(s+t) - N(s) = n\right\} = e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^n}{n!} \quad n \geq 0.$$

Proposition 1.3.1 *Soit $N(t)_{t \geq 0}$ la fonction aléatoire de comptage d'un processus de Poisson. Il existe $\lambda \geq 0$ tel que pour tout $0 \leq s \leq t$, la loi de $N(t) - N(s)$ est la loi de Poisson de paramètre $\lambda(t-s)$, i.e :*

$$\mathbb{P}\left(N(t) - N(s) = k\right) = \exp\left(-\lambda(t-s)\right) \frac{\left(\lambda(t-s)\right)^k}{k!} \qquad k \in \mathbb{N}.$$

Remarque 1.3.3 *Ce paramètre λ est appelé l'intensité du processus de Poisson $N(t)_{t \geq 0}$. Il est égale au nombre moyen d'événement qui se produisent pendant un intervalle de temps de longueur unité, ie :*

$$\mathbb{E}\left[N(t+1) - N(t)\right] = \lambda.$$

Présentation du processus de Poisson

Définition 1.3.7 *Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de variable aléatoire indépendantes et de même loi exponentielle de paramètre λ. Posons $S_0 = 0$ et pour tout entière $n \geq 1$; $S_n = X_1 + \cdots + X_n$ pour tout réel $t \geq 0$ définissons la variable aléatoire N_t à valeur entière par :*

$$N_t = n \iff S_n \leq t < S_{n+1}$$

le processus stochastique $(N_t)_{t\geq 0}$ est appelé processus de Poisson d'intensité λ.

Théorème 1.3.2 *Considérons un processus de Poisson $(N_t)_{t\geq 0}$ d'intensité λ, il vérifie les propriétés suivantes :*

1) *$(N_t)_{t\geq 0}$ est un processus de comptage ; il est à valeur entière, vérifie $N_0 = 0$ p.s et pour tous réels $0 \leq s \leq t$, $N_s \leq N_t$.*

2) *$(N_t)_{t\geq 0}$ est un processus à accroissements indépendants ; pour tout entier k et pour suite d'instants $0 \leq t_1 \leq t_2 \cdots \leq t_k$ les accroissements $N_{t_2} - N_{t_1}, \cdots N_{t_k} - N_{t_{k-1}}$ sont des variables aléatoires indépendantes.*

3) *Les accroissements du processus $(N_t)_{t\geq 0}$ sont Poissonniens ; pour tous réels $0 \leq s < t$, la variable aléatoire $N_t - N_s$ suit la loi de Poisson de paramètre $\lambda (t - s)$.*

4) *$(N_t)_{t\geq 0}$ est un processus homogène ou à accroissements stationnaires ; pour tous instants $0 \leq t_1 < t_2$ et $s \geq 0$, la variable aléatoire $N_{t_2+s} - N_{t_1+s}$ suit la même loi que $N_{t_2} - N_{t_1}$.*

5) *$(N_t)_{t\geq 0}$ est un processus d'événements rares $\mathbb{P}(N_{t+h} - N_t \geq 2) = o(h)$.*

Définition 1.3.8 *Un processus de Poisson N de paramètre $\lambda > 0$ est un processus de comptage :*

$$\forall t \geq 0, \quad N_t = \sum_{n\geq 0} \mathbf{1}_{\{T_n \leq t\}} \tag{1.1}$$

associé à une famille $(T_n; n \in \mathbb{N})$ *(avec* $T_0 = 0$*) de variable aléatoire représentant les temps d'arrivées, telle que les variable aléatoire* $(T_{n+1} - T_n; n \in \mathbb{N})$ *sont indépendantes identiquement distribuées de la loi exponentielle de paramètre* λ*.*

Proposition 1.3.2 *Si* N *est un processus de Poisson alors :*

1. *La somme (1.1) est presque sûrement finie pour tout* $t \geq 0$*.*
2. *Les trajectoires de* N *sont constantes par morceaux, avec des sauts de taille* 1 *seulement.*
3. *Les trajectoires sont càdlàge.*
4. $\forall t > 0$, $\mathbb{P}(N_{t-} = N_t) = 1$.
5. $\forall t > 0$, N_t *suit une loi de Poisson de paramètre* λt :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \mathbb{P}(N_t = n) = e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^n}{n!}.$$

En particulier on a :

$$\mathbb{E}[N_t] = \lambda t = Var[N_t], \ \mathbb{E}\left[e^{(iuN_t)}\right] = \exp\left(\lambda t \left(e^{iu} - 1\right)\right).$$

6. $\forall n \geq 1$, T_n *suit une loi de gamma de paramètre* (n, λ) *de densité :*

$$f_{T_n}(x) = \frac{(\lambda t)^{n-1}}{(n-1)!} \lambda e^{-\lambda t} \mathbf{1}_{(t>0)}.$$

7. N *est à accroissements indépendants et stationnaires.*

Théorème 1.3.3 *Si* N *est un processus de Poisson d'intensité* $\lambda > 0$, *alors lorsque* t *tend vers* $+\infty$:

$$p.s \ \frac{N_t}{t} \to \lambda \qquad et \qquad \sqrt{\frac{t}{\lambda}} \left(\frac{N_t}{t} - \lambda\right) \underrightarrow{loi} \mathcal{N}(0,1).$$

1.3.3 Processus de Poisson composé

Définition 1.3.9 *Un processus de Poisson avec intensité $\lambda > 0$ et loi de sauts ν_z est un processus stochastique défini par :*

$$X_t = \sum_{K=0}^{N_t} Z_K$$

où $(Z_n)_n$ est une suite de variable aléatoire indépendante identiquement distribuée à valeurs dans $\mathbb{R}^d$ de loi ν_z et N est un processus de Poisson de paramètre λ indépendant de la suite $(Z_n)_n$.
En d'autres mots, un processus de Poisson composé est un processus constant par morceaux qui saute aux instants de sauts d'un processus de Poisson standard, et dont les tailles de sauts sont des variables indépendantes identiquement distribuées d'une loi donnée.

Proposition 1.3.3 *Soit X un processus de Poisson composé. Alors X est à accroissements indépendants et stationnaires.*

1.3.4 Processus Gamma

Nous allons maintenant définir un processus de Lévy qu'est la loi Gamma. On définit donc le processus Gamma $\Gamma\left\{\Gamma_t, t \geq 0\right\}$, de paramètres $\alpha > 0$ et $\beta > 0$, comme étant le processus de Lévy dont l'accroissement $X_t - X_s$, pour $0 \leq s < t$, suit la loi Gamma de paramètres $\alpha\,(t-s)$ et β.
On en déduit qu'un processus Gamma est croissant ; c'est un subordinateur. Il s'agit donc d'un processus de Lévy à variation finie.

Remarque 1.3.4 *Il existe évidemment plusieurs autres exemples de processus de Lévy :*

- *Processus inverse gaussien,*
- *Processus stables,*
- *Processus Variance Gamma,*
- *Processus CGMY(ce modéle a été étudié par Carr, Geman, Madan et Yor (2002)),...etc.*

1.4 Martingale

Définition 1.4.1 ***(martingale en temps discret)***

Soit $X = (X_n)_{n\geq 0}$ *un processus définie sur* $\left(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}}, \mathbb{P}\right)$ *un espace de probabilité filtré, alors* X *est* $\mathcal{F}_n-$*martingale si les trois conditions suivantes vérifient :*

1) X_n *est* $\mathcal{F}_n-$*adapté (*$\forall n \geq 0, X_n$ *est* $\mathcal{F}_n-$*mesurable).*

2) $\forall n \in \mathbb{N}$, X_n *est intégrable* $\left(i.e : \mathbb{E}\left[|X_n|\right] < \infty\right)$.

3) $\forall n \in \mathbb{N}$, $\mathbb{E}\left[X_{n+1} / \mathcal{F}_n\right] = X_n$.

On définit de même une $\mathcal{F}_n$ sur-martingale (respectivement une $\mathcal{F}_n$ sous-martingale) en remplaçant la $3^{\text{éme}}$condition par $\mathbb{E}\left[X_{n+1} / \mathcal{F}_n\right] \leq X_n$ (respectivement $\mathbb{E}\left[X_{n+1} / \mathcal{F}_n\right] \geq X_n$).

Remarque 1.4.1

1. *La condition* $3^{éme}$ *est équivalente à :*

$$\mathbb{E}\left[X_{n+1} / \mathcal{F}_n\right] - X_n = 0, \text{ ou } \mathbb{E}\left[X_{n+1} - X_n / \mathcal{F}_n\right] = 0 \text{ ou } \forall A \in \mathcal{F}_n, \ \mathbb{E}\left[X_n \underset{A}{\mathbf{1}}\right] = \mathbb{E}\left[X_{n+1} \underset{A}{\mathbf{1}}\right].$$

2. *Le processus* $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est une martingale si et seulement si il est à la fois une sous-martingale et sur-martingale.*

3. *Le processus* $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est une sous-martingale si et seulement si le processus* $(-X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est une sur-martingale.*

Définition 1.4.2 ***(martingale en temps continue)***

Soit $\left(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}, \mathbb{P}\right)$ *un espace de probabilité filtré, une famille adapté* $(M_t)_{t\geq 0}$ *des variables aléatoires intégrables (i.e :* $\forall t \geq 0\ \mathbb{E}\left[|M_t|\right] < \infty$*) est :*

- *Une martingale si, pour tout* $s \leq t$ *,* $\mathbb{E}\left[M_t \diagup \mathcal{F}_s\right] = M_s$.
- *Une sur-martingale si, pour tout* $s \leq t$ *,* $\mathbb{E}\left[M_t \diagup \mathcal{F}_s\right] \leq M_s$.
- *Une sous-martingale si, pour tout* $s \leq t$ *,* $\mathbb{E}\left[M_t \diagup \mathcal{F}_s\right] \geq M_s$.

Remarque 1.4.2 *On déduit de cette définition que si* M_t *est une martingale, alors :*

$$\mathbb{E}\left[M_t\right] = \mathbb{E}\left[M_0\right]$$

pour tout t *.*

Proposition 1.4.1 *Si* $(B_t)_{t\geq 0}$ *est un* $\mathcal{F}_t - (M.B)$ *alors :*

1. B_t *est* $\mathcal{F}_t-$*martingale.*
2. $(B_t^2 - t)$ *est* $\mathcal{F}_t-$*martingale.*
3. $\exp\left(\sigma B_t - \frac{\sigma^2}{2} t\right)$ *est* $\mathcal{F}_t-$*martingale.*

Définition 1.4.3 ***(martingale de carré intégrable)***

Un martingale dont tout élément est L^2 *est dite de carré intégrable (ou martingale* L^2*).*

Proposition 1.4.2 *Soit* M *une* $\mathcal{F}_t-$*martingale de carré intégrable (i.e.*$\mathbb{E}\left[|M_t|^2\right] < \infty$ *pour tout* $t \in [0, T]$*) alors pour tout* $s, t \in [0, T]$ *tels que* $s \leq t$ *:*

$$\mathbb{E}\left[|M_t - M_s|^2 \diagup \mathcal{F}_s\right] = \mathbb{E}\left[M_t^2 - M_s^2 \diagup \mathcal{F}_s\right].$$

Preuve. On a :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[\left|M_t - M_s\right|^2 \diagup \mathcal{F}_s\right] &= \mathbb{E}\left[\left|M_t\right|^2 \diagup \mathcal{F}_s\right] - 2\mathbb{E}\left[\left|M_t M_s\right| \diagup \mathcal{F}_s\right] + \mathbb{E}\left[\left|M_s\right|^2 \diagup \mathcal{F}_s\right] \\
&= \mathbb{E}\left[\left|M_t\right|^2 \diagup \mathcal{F}_s\right] - 2\left|M_s\right| \mathbb{E}\left[\left|M_t\right| \diagup \mathcal{F}_s\right] + \left|M_s\right|^2 \\
&= \mathbb{E}\left[\left|M_t\right|^2 \diagup \mathcal{F}_s\right] - 2\left|M_s\right|^2 + \left|M_s\right|^2 \\
&= \mathbb{E}\left[\left|M_t\right|^2 - \left|M_s\right|^2 \diagup \mathcal{F}_s\right]
\end{aligned}$$

on ne retrouve donc que $|M|^2$ est $\mathcal{F}-$sous-martingale. ■

Chapitre 2

Rappel sur le calcul stochastique

Dans ce chapitre, nous présentons des résultats du calcul stochastique dont nous aurons besoin dans la suite de ce mémoire.

2.1 Variation totale et variation quadratique

Définition 2.1.1 *On appelle variation infinitésimale d'ordre p d'un processus X sur* $[0,T]$ *associée à la subdivision* $\pi_n = (t_1^n, t_2^n, ..., t_n^n)$ *de* $[0,T]$ *par :*

$$V_T^p = (\pi_n) := \sum_{i=1}^{n} \left| X_{t_i^n} - X_{t_{i-1}^n} \right|^p$$

si $V_T^p = (\pi_n)$ *a une limite dans un certain sens (converge dans* L^p *p.s).*
Lorsque $\pi_n = \|\pi_n\|_\infty := \max \left| t_{i+1}^n - t_i^n \right| \to 0$ *la limite ne dépend pas de la subdivision choisir, on l'appelle la variation d'ordre p de X sur* $[0,T]$ *, en particulier :*

- *Si* $p = 1$: *la limite s'appelle variation totale de X sur* $[0,T]$.
- *Si* $p = 2$: *la limite s'appelle variation quadratique de X sur* $[0,T]$ *, note* $< X >_T$.

Définition 2.1.2 *Soit $f : [0,T] \to \mathbb{R}$, on dit que f est à variation bornée sur $[0,T]$ si :*

$$\sup_{\pi_n} \sum_{i=1}^{n} \left| f\left(t_i^n - t_{i-1}^n\right) \right| < \infty.$$

Définition 2.1.3 *Un processus X est un processus à variation borné sur $[0,T]$ s'il est à variation bornée trajectoire par trajectoire :*

$$\sup_{\pi_n} \sum_{i=1}^{n} \left| X_{t_i} - X_{t_{i-1}} \right| < \infty \qquad p.s.$$

Proposition 2.1.1 *Si X est un processus à variation borné à trajectoire continue sa variation quadratique et nulle p.s $\left(\langle X \rangle_T = 0\right)$; finalement :*

	V.totale	*V.quadratique*
M.B	∞	T
processus à variation borné	$< \infty$	0

par construction : $\langle \alpha X \rangle = \alpha^2 \langle X \rangle$.

Donc on peut prolonger cette application $X \to \langle X, X \rangle := \langle X \rangle$ en une application bilinéaire.

Définition 2.1.4 *Soient X et Y deux processus tels que X , Y et $X+Y$ ont des variations quadratiques bornée (finies) dans L^2, on définit alors la covariation quadratique entre X et Y comme :*

$$\langle X, Y \rangle := \frac{1}{2} \left(\langle X + Y \rangle - \langle X \rangle - \langle Y \rangle \right)$$

par construction, cette définition rend l'application $(X, Y) \to \langle X, Y \rangle$ bilinéaire :

- *Relation de bilinéarité :* $\langle X + Y, X + Y \rangle = \langle X, X \rangle + 2 \langle X, Y \rangle + \langle Y, Y \rangle$.
- *Relation scalaire :* $\langle \alpha X, \beta Y \rangle = \alpha\beta \langle X, Y \rangle$.

Remarque 2.1.1 *$\langle X, Y \rangle$ s'identifie à la limite dans $L^2(\Omega)$ de* $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \left| X_{t_i^n} - X_{t_{i-1}^n} \right| \left| Y_{t_i^n} - Y_{t_{i-1}^n} \right|$.

2.2 Intégrale stochastique

On cherche à définir

$$\int_0^t \theta_s dBs$$

quand $\{\theta_s, s \geq 0\}$ est un processus stochastique. Le caractère aléatoire de θ va exiger des conditions supplémentaires par rapport au cas de l'intégrale de Wiener. On note $\left\{\mathcal{F}_t^B, t \geq 0\right\}$ la filtration naturelle du mouvement Brownien B.

Définition 2.2.1 *On dit que $(\theta_t)_{t\geq 0}$ est un bon processus s'il est $\left(\mathcal{F}_t^B\right)-$adapté, càglàd et si :*

$$\mathbb{E}\left[\int_0^t \theta_s^2 ds\right] < +\infty$$

pour tout $t > 0$.

2.2.1 Cas de processus étagés

On dit qu'un processus θ est étagé (ou élémentaire) s'il existe une suite de réels $t_j, 0 \leq t_1 .... \leq t_n$ et une suite de variables aléatoires θ_j telle que θ_j soit $\mathcal{F}_{t_j}-$mesurable, appartienne à $L^2(\Omega)$ et que $\theta_t = \theta_j$ pour tout $t \in \left]t_j, t_{j+1}\right]$.

Soit $\theta_s(\omega) = \sum\limits_{j=0}^{n-1} \theta_j(\omega) \mathbf{1}_{]t_j,t_{j+1}]}(s)$, on définit alors :

$$\int_0^t \theta_s dBs = \sum_{j=0}^{n-1} \theta_j \left(B(t_{j+1}) - B(t_j)\right).$$

On a : $\mathbb{E}\left[\int\limits_0^t \theta_s dBs\right] = 0$ et $var\left(\int\limits_0^t \theta_s dBs\right) = \mathbb{E}\left[\int\limits_0^t \theta_s^2 ds\right]$

on obtient :

$$\int_0^t \theta_s dBs = \sum_{j=0}^{n-1} \theta_j \left(B(t_{j+1} \wedge t) - B(t_j \wedge t)\right).$$

Proposition 2.2.1 *Si $(\theta_t)_{0\leq t\leq T}$ est un processus élémentaire :*

* $\int_0^t \theta_s dBs$ *est une $\mathcal{F}_t-$martingale continue.*

* $\mathbb{E}\left[\left(\int_0^t \theta_s dBs\right)^2\right] = \mathbb{E}\left[\int_0^t \theta_s^2 ds\right]$.

* $\mathbb{E}\left[\sup_{t\leq T}\left|\int_0^t \theta_s dBs\right|^2\right] \leq 4\mathbb{E}\left[\int_0^T \theta_s^2 ds\right]$.

2.2.2 Cas générale

On peut prolonger la définition de l'intégrale de Wiener à une classe plus grande de processus. On perd le caractère gaussien de l'intégrale, ce qui est déjà le cas pour le cas de processus étagé.

On définit les processus càglàd de carré intégrable (appartenant à $L^2(\Omega\times\mathbb{R}^+)$) comme l'ensemble Γ des processus θ adaptés (càglàd) $(\mathcal{F}_t)-$adaptés tels que :

$$\|\theta\|^2 = \mathbb{E}\left[\int_0^\infty \theta_t^2 dt\right] < \infty.$$

Les processus étagés appartiennent à Γ .On dit que θ_n converge vers θ dans $L^2(\Omega\times\mathbb{R}^+)$ si $\|\theta-\theta_n\|^2 \to 0$ quand $n\to\infty$.

L'application $\theta \to \|\theta\|$ définit une norme qui fait de Γ un espace complet.

On peut définir $\int_0^\infty \theta_s dB_s$ pour tous les processus θ de Γ : on approche θ par des processus étagés, soit $\theta = \lim_{n\to\infty}\theta_n$ où $\theta_n = \sum_{j=1}^{k(n)} \widetilde{\theta_j^n}\mathbf{1}_{]t_j,t_{j+1}]}$, avec $\widetilde{\theta_j^n} \in \mathcal{F}_{t_j}$ la limite étant au sens de $L^2(\Omega\times\mathbb{R}^+)$.

L'intégrale $\int_0^\infty \theta_s dB_s$ est alors la limite dans $L^2(\Omega)$ des sommes $\sum_{j=1}^{k(n)} \widetilde{\theta_j^n}\left(B(t_{j+1}) - B(t_j)\right)$ dont l'espérance est 0 et la variance $\mathbb{E}\left[\sum_j \widetilde{\theta_j^2}\,(t_{j+1}-t_j)\right]$.

On a alors $\mathbb{E}\left[\int_0^\infty \theta_s dB_s\right] = 0$ et $\mathbb{E}\left[\int_0^\infty \theta_s dB_s\right]^2 = \mathbb{E}\left[\int_0^\infty \theta_s^2 d_s\right]$.

On note $\int_0^t \theta_s dB_s = \int_0^\infty \theta_s \mathbf{1}_{[0,t]}(s)\, dB_s$. Si θ est étagé $\int_0^t \theta_s dB_s = \sum_i \theta_i \left(B_{t_{i+1}\wedge t} - B_{t_i \wedge t}\right)$.

2.2.3 Propriétés d'intégrale stochastique

Il y'a plusieurs propriétés sur l'intégrale stochastique les plus important sont :

1. Linéarité :
$$\int_0^t \left(a\theta_s^1 + b\theta_s^2\right) dB_s = a\int_0^t \theta_s^1 dB_s + b\int_0^t \theta_s^2 dB_s.$$

2. Additivité : pour $0 \leq s \leq u \leq t \leq T$
$$\int_s^t \theta_v dB_v = \int_s^u \theta_v dB_v + \int_u^t \theta_v dB_v.$$

3. Propriétés de martingale :

   On a :
$$M_t(\theta) = \int_0^t \theta_s dB_s = \sum_{j=0}^{n-1} \theta_j \left(B(t_{j+1}) - B(t_j)\right)$$

   pour tout processus θ les processus :
$$t \to M_t(\theta) \quad \text{et} \quad t \to M_t(\theta)^2 - \int_0^t \theta_s^2 ds$$

   sont des $\left(\mathcal{F}_t^B\right)$ −martingales continues.

Corollaire 2.2.1 *Si* $M_t(\theta) = \int_0^t \theta_s dB_s$ *et* $M_t(\varphi) = \int_0^t \varphi_s dB_s$, *L'espérance de* M_t *est nulle et sa variance est égale à* $\int_0^t \mathbb{E}(\theta_s)^2 ds$ *et*

$$\mathbb{E}\left[\int_0^t \theta_s dB_s \int_0^t \varphi_s dB_s\right] = \mathbb{E}\left[\int_0^t \theta_s \varphi_s ds\right],$$

le processus

$$M_t(\theta) M_t(\varphi) - \int_0^t \theta_s \varphi_s ds$$

est une martingale.

2.3 Processus d'Itô

Définition 2.3.1 *Soient* $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}, \mathbb{P})$ *un espace de probabilisé muni d'une filtration et* $(B_t)_{t\geq 0}$*un* $\mathcal{F}_t-(M.B)$ *On appelle processus d'Itô, un processus* $(X_t)_{0\leq t\leq T}$ *à valeurs dans* $\mathbb{R}$ *tel que :*

$$\mathbb{P}-p.s\ \forall t \leq T : X_t = X_0 + \int_0^t b_s d_s + \int_0^t \sigma_s dB_s$$

avec :

* X_0 $\mathcal{F}_0-$*mesurable.*

* $(b)_{0\leq t\leq T}$ *et* $(\sigma)_{0\leq t\leq T}$ *des processus adaptés à* $\mathcal{F}_t$.

* $\int_0^T |b_s| ds < \infty \quad \mathbb{P}-\ p.s.$

* $\int_0^T |\sigma_s|^2 ds < \infty \quad \mathbb{P}-\ p.s.$

Proposition 2.3.1 *Soit $(M)_{0\leq t\leq T}$ une martingale continue telle que :*

$$M_t = \int_0^t b_s ds, \text{ avec } \mathbb{P}-p.s, \int_0^T |b_s|\, ds < \infty$$

alors $\mathbb{P}-$ p.s $\forall t \leq T$, $M_t = 0$, ceci entraîne que :

- *La décomposition d'un processus d'Itô est unique, ce qui signifie que si, pour tout,*

$$X_t = X_0 + \int_0^t b_s d_s + \int_0^t \sigma_s dB_s = X_0^{'} + \int_0^t b_s^{'} d_s + \int_0^t \sigma_s^{'} dB_s$$

alors :

$$X_0 = X_0^{'} \;\; d\mathbb{P}\; p.s \qquad \sigma_s = \sigma_s^{'} \;\; ds \otimes d\mathbb{P}\; p.p \qquad b_s = b_s^{'} \;\; ds \otimes d\mathbb{P}\; p.p.$$

- *Si $(X_t)_{0\leq t\leq T}$ est une martingale de la forme $X_0 + \int_0^t b_s d_s + \int_0^t \sigma_s dB_s$ alors $b_s = 0dt \otimes d\mathbb{P}$ p.p.*

2.4 Formule d'Itô

Première formule d'Itô

Théorème 2.4.1 *Soit f une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}_+$ de classe C^2 à dérivée bornées et $(X_t)_t$ une martingale continue, alors :*

$$f(X_t) = f(X_0) + \int_0^t f^{'}(X_s)\, dX_s + \frac{1}{2}\int_0^t f^{''}(X_s)\, d\langle X, X\rangle_s \tag{2.1}$$

où, par définition :

$$d\langle X, X\rangle_t = dX_t dX_t = \sigma_t^2 dt$$

avec la table multiplication :

	dt	dB_t
dt	0	0
dB_t	0	dt

alors la formule (2.1) *s'écrite sous forme différentielle :*

$$\begin{aligned} df\left(X_t\right) &= f^{'}\left(X_t\right) dX_t + \frac{1}{2} f^{''}\left(X_t\right) \sigma_t^2 dt \\ &= (f^{'}\left(X_t\right) b_t + \frac{1}{2} f^{''}\left(X_t\right) \sigma_t^2) dt + f^{'}\left(X_t\right) \sigma_t dB_t. \end{aligned}$$

Deuxième formule d'Itô

Théorème 2.4.2 (***fonction dépendant du temps***)
Soit f une fonction de $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}$ de classe C^1 par rapport à t, de classe C^2 par rapport à x de dérivé bornées on a :

$$f\left(t, X_t\right) = f\left(0, X_0\right) + \int_0^t f_t^{'}\left(s, X_s\right) ds + \int_0^t f_x^{'}\left(s, X_s\right) dX_s + \frac{1}{2} \int_0^t f_{xx}^{''}\left(s, X_s\right) d\left\langle X, X \right\rangle_s$$

on peut écrire cette formule sous forme différentielle :

$$\begin{aligned} df\left(t, X_t\right) &= f_t^{'}\left(t, X_t\right) dt + \frac{1}{2} f_{xx}^{''}\left(t, X_t\right) \sigma_t^2 dt + f_x^{'}\left(t, X_t\right) dX_t \\ &= \left(f_t^{'}\left(t, X_t\right) + f_x^{'}\left(t, X_t\right) b_t + \frac{1}{2} f_{xx}^{''}\left(t, X_t\right) \sigma_t^2\right) dt + f_x^{'}\left(t, X_t\right) \sigma_t dB_t. \end{aligned}$$

Formule d'intégration par parties

Soient X_t et Y_t deux processus d'Itô :

$$X_t = X_0 + \int_0^t b_s ds + \int_0^t \sigma_s dB_s \quad \text{et} \quad Y_t = Y_0 + \int_0^t b_s^{'} ds + \int_0^t \sigma_s^{'} ds$$

alors :

$$X_tY_t = X_0Y_0 + \int_0^t X_s dY_s + \int_0^t Y_s dX_s + \langle X, Y\rangle_t$$

avec la notation :

$$\langle X, Y\rangle = \int_0^t \sigma_s \sigma_s^{'} ds.$$

Et la formule d'intégration par partie s'écrit :

$$d\left(XY\right)_t = X_t dY_t + Y_t dX_t + d\left\langle X, Y\right\rangle_t.$$

Preuve. On a :

$$f\left(X_t\right) = f\left(X_0\right) + \int_0^t f^{'}\left(X_s\right) dX_s + \frac{1}{2}\int_0^t f^{''}\left(X_s\right)\sigma_t^2 dt,$$

et si on pose :

$$f\left(X_t\right) = X_t^2 \Rightarrow f^{'}\left(X_t\right) = 2X_t \Rightarrow f^{"}\left(X_t\right) = 2$$

donc :

$$\begin{aligned}
(X_t + Y_t)^2 &= (X_0 + Y_0)^2 + 2\int_0^t (X_s + Y_s) d(X_s + Y_s) + \int_0^t (\sigma_s + \sigma_s^{'})^2 ds \\
X_t^2 &= X_0^2 + 2\int_0^t X_s dX_s + \int_0^t \sigma_s^2 ds \\
Y_t^2 &= Y_0^2 + 2\int_0^t Y_s dY_s + \int_0^t \sigma_s^{'2} ds.
\end{aligned}$$

D'où, en faisant la différence entre la première ligne et les deux suivantes :

$$\begin{aligned}
X_tY_t &= \tfrac{1}{2}\left((X_t+Y_t)^2 - X_t^2 - Y_t^2\right) \\
&= \frac{1}{2}\Bigg((X_0+Y_0)^2 - X_0^2 - Y_0^2 + 2\int_0^t (X_s+Y_s)d(X_s+Y_s) - 2\int_0^t X_s dX_s \\
&\qquad -2\int_0^t Y_s dY_s + \int_0^t (\sigma_s+\sigma_s^{'})^2 ds - \int_0^t \sigma_s^2 ds - \int_0^t \sigma_s^{'2} ds\Bigg) \\
&= \frac{1}{2}\left(2X_0Y_0 + 2\int_0^t X_s dY_s + 2\int_0^t Y_s dX_s + 2\int_0^t \sigma_s\sigma_s^{'} ds\right) \\
&= X_0Y_0 + \int_0^t X_s dY_s + \int_0^t Y_s dX_s + \int_0^t \sigma_s\sigma_s^{'} ds.
\end{aligned}$$

■

2.5 Formule d'Itô avec sauts

Soit N un processus de comptage de Poisson. Rappelons que la fonction $t \to N_t$ est une fonction càdlàg, constante par morceaux avec des sauts de taille 1. Soit $t \to \theta_t$ un processus quelconque. On peut définir l'intégrale stochastique :

$$\boldsymbol{I}_t^\theta = \int_0^t \theta_s dN_s = \sum_{n\geq 1} \theta_{T_n} \mathbf{1}_{\{T_n \leq t\}}$$

ce que l'on va également écrire :

$$\boldsymbol{I}_t^\theta = \sum_{0\leq s\leq t} \theta_s \Delta N_s.$$

Plus précisément, $\boldsymbol{I}_t^\theta = 0$ sur $\{t < T_1\}$ (car N n'a pas varié), $\boldsymbol{I}_t^\theta = \theta_{T_1}$ sur $\{T_1 \leq t < T_2\}$ (car N a sauté une fois en T_1 et n'a pas varié ensuite), $\boldsymbol{I}_t^\theta = \theta_{T_1} + \theta_{T_2}$ sur $\{T_2 \leq t < T_3\}$ (car N a sauté une fois en T_1 et n'a pas varié, puis une fois en T_2 et n'a pas varié ensuite)...etc. Remarquons de plus que si $\theta \equiv 1$, on a :

$$\boldsymbol{I}_t^{\theta} = \sum_{n \geq 1} \mathbf{1}_{T_n \leq t} = N_t$$

de sorte que :

$$N_t = \int_0^t dN_s$$

comme il est souhaitable.

Soit maintenant $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction mesurable quelconque. On a :

$$f(N_t) = f(0) \quad \text{si} \quad t < T_1, \quad f(N_t) = f(N_{T_1}) \quad \text{si} \quad T_1 \leq t < T_2 \ldots$$

ce qu'on peut récrire :

$$\begin{aligned} f(N_t) &= f(0) + \sum_{i=1}^{n} \left[f(N_{T_i}) - f\left(N_{T_{i-1}}\right) \right] \\ &= f(0) + \sum_{i=1}^{n} \left[f(N_{T_i}) - f\left(N_{T_{i-}}\right) \right] \\ &= f(0) + \sum_{s \leq t} \left[f(N_s) - f(N_{s-}) \right] \end{aligned}$$

sur l'événement $\{T_n \leq t < T_{n+1}\}$. Comme le dernier terme ne dépend pas de n, on en peut en déduire le théorème suivant :

Théorème 2.5.1 ***(formule d'intégration pour le processus de Poisson)***

Pour toute fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mesurable, on a :

$$f(N_t) = f(0) + \sum_{s \leq t} \left(f(N_s) - f(N_{s-}) \right).$$

On remarque que la preuve de cette formule est beaucoup plus élémentaire que pour le Brownien. De plus aucune hypothèse particulière n'est faite sur f. Supposons maintenant que f soit de classe C^1. Avec la définition précédente pour l'intégrale, on a :

$$\begin{aligned}\int_0^t f'(N_{s-})\,dN_s &= \sum_{i=1}^n f'\left(N_{T_{i-}}\right)\\ &= \sum_{s\leq t} f'(N_{s-})\,\Delta N_s\end{aligned}$$

sur l'événement $\{T_{n-1} \leq t < T_n\}$. Remarquons que le dernier terme ne dépend pas de n. Et pour trouve à la deuxiéme formule d'intégration pour le processus de Poisson , en retranchant et on ajouté et on a le théorème suivant :

Théorème 2.5.2 ***(deuxième formule d'intégration pour le processus de Poisson)*** *Pour toute fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe C^1, on a :*

$$f(N_t) = f(0) + \int_0^t f'(N_{s-})\,dN_s + \sum_{s\leq t}\Big(f(N_s) - f(N_{s-}) - f'(N_{s-})\,\Delta N_s\Big).$$

Cette formule est plus compliquée mais son intérêt est qu'elle peut se généraliser à une classe plus grande de processus à sauts, les processus de Lévy, lesquels comportent en général un nombre infini de sauts.

Chapitre 3

Equations différentielles stochastiques

Dans ce chapitre, nous donnons une introduction à l'équation différentielle stochastique et prouvons l'existence et l'unicité forte de la solution, puis nous donnons quelques exemples d' équation différentielle stochastique avec saut.

3.1 Introduction et définition générales

Le but de cette partie est de donner un modèle mathématique pour une équation différentielle perturbée par un bruit aléatoire. Partons d'une équation différentielle ordinaire

$$\frac{dX_t}{dt} = b\left(X_t\right)$$

ces équations décrivents en générale l'évolution dans le temps d'un système physique, par exemple X_t peut être la position et le mouvement d'un satellite à l'instant t. L'équation décrivant l'évolution du stellite ne peut pas être déterministe à cause de nombreux paramètres inconnus. On ajoute donc un terme de bruite (aléatoire) de la forme $\sigma\left(X_t\right) dB_t$ où B_t est un mouvement Brownien et $\sigma\left(.\right)$ repesent l'intensité du bruit dépendant de l'état du système physique à l'instant t.

On arrive donc à une équation différentielle stochastique (EDS) de la forme suivante :

$$\begin{cases} dX_t = b(X_t)\,dt + \sigma(X_t)\,dB_t \\ X_0 = x \end{cases} \tag{3.1}$$

l'inconnu est le processus $(X_t)_t$, les coefficients b et σ sont appelé respectivement la dérivé (ou le drift) du processus, et son coefficient de diffusion. Il s'agit d'une équation homogène puisque ces coefficients ne dépendent pas du temps.

La solution d'une EDS est appelée processus de diffusion, ou simplement diffusion.

Définition 3.1.1 *Soient b et σ deux fonction de $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^n$ à valeurs dans $\mathbb{R}$, données par :* $b : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, \quad \sigma : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}.$ $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ *un espace de probabilité, muni de la filtration $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$, $(B_t)_{t\geq 0}$ est une $\mathcal{F}_t - (M.B)$.*

Une solution de l'équation (3.1) est un processus X continue $\mathcal{F}_t-$adapté tel que les intégrales $\int_0^t b(X_s)\,ds$ et $\int_0^t \sigma(X_s)\,dB_s$ on un sens, et l'égalité

$$X_t = x + \int_0^t b(X_s)\,ds + \int_0^t \sigma(X_s)\,dB_s$$

est satisfaite pour tout t $\mathbb{P}-p.s.$

3.2 Quelques inégalités

On va situé ici des inégalités qu'on va les utilisées dans les démonstrations de ce chapitre.

Définition 3.2.1 *Une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est dit lipchitzienne, s'il existe $K \geq 0$ telle que :*

$$|f(x) - f(y)| \leq K |x - y| \qquad \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

Remarque 3.2.1 *Si f est lipchitzienne alors f est uniformément continue (et donc continue) sur $\mathbb{R}$.*

Lemme 3.2.1 (lemme de Gronwall)

Soit $T \geq 0$ et soit g une fonction positive mesurable bornée sur l'intervalle $[0, T]$. Supposons qu'il existe deux constantes $a \geq 0, b \geq 0$ telles que pour tout $t \in [0, T]$:

$$g(t) \leq a + b \int_0^t g(s)\, ds$$

alors on a pour tout $t \in [0, T]$:

$$g(t) \leq a \exp(b_t).$$

Remarque 3.2.2 *Si $a = 0$ alors $g(t) = 0$.*

Théorème 3.2.1 ***(inégalité de Cauchy-Schwarz)***

Soient f, g deux fonctions de carré intégrable, alors on a :

$$\mathbb{E}[f \cdot g] \leq \left(\mathbb{E}\left[f^2\right] \mathbb{E}\left[g^2\right]\right)^{\frac{1}{2}}.$$

3.3 Existence et unicité de solution forte

Soient $\sigma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$, $b : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, un $(M.B)$ B et une variable aléatoire X_0 définis sur le même espace $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ avec X_0 et B indépendants, l'équation :

$$\begin{cases} dX_t = b(X_t)\,dt + \sigma(X_t)\,dB_t \\ X_0 = x \end{cases} \tag{3.2}$$

est appelée une équation différentielle stochastique.

Définition 3.3.1 *On appelle solution forte de l'EDS* ***(3.2)*** *toute fonction aléatoire* $X = (X_t; t \geq 0)$ *définie sur* $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ *telle que :*

1) X *est adapté à la filtration* $\mathcal{F}$.

2) $\int_0^t \left[b(X_s)^2 + \sigma(X_s)^2\right] ds < \infty$ *p.s pour tout* t *et on a* $\mathbb{P} - p.s$

$$X_t = X_0 + \int_0^t b(X_s)\,ds + \int_0^t \sigma(X_s)\,dB_s \qquad t \in [0, +\infty).$$

Théorème 3.3.1 *Supposons* $X_0 \in L^2$, b, σ *lipchitzienne c'est à dire :*

$$|b(x) - b(y)| + |\sigma(x) - \sigma(y)| \leq K|x - y|$$

alors l'équation (3.2) admet une unique solution $X \in \mathcal{M}^2$ *telle que :*

$$\mathcal{M}^2[0,T] = \left\{ (X_t)_{0 \leq t \leq T}\,,\ \text{processus càglàd, } \mathcal{F}_t - \text{adapté telle que } \mathbb{E}\left[\int_0^T X_s^2 ds\right] < +\infty \right\}.$$

Preuve.

Unicité : Si $X, Y \in \mathcal{M}^2$ sont deux solution ; avec $X_0 = Y_0$, on a alors :

$$X_t - Y_t = \int_0^t [b(X_s) - b(Y_s)]\, ds + \int_0^t [\sigma(X_s) - \sigma(Y_s)]\, dB_s$$

et en utilisant l'inégalité de Young $(a+b)^2 \leq 2(a^2+b^2)$, l'inégalité de Cauchy-Schwarz, la propriété d'isométrie de l'intégrale stochastique et la condition de Lipchitz

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[X_t - Y_t]^2 &\leq 2\mathbb{E}\left[\int_0^t [b(X_s) - b(Y_s)]\, ds\right]^2 + 2\mathbb{E}\left[\int_0^t [\sigma(X_s) - \sigma(Y_s)]\, dB_s\right]^2 \\
&\leq 2t\mathbb{E}\left[\int_0^t [b(X_s) - b(Y_s)]^2\, ds\right] + 2\mathbb{E}\left[\int_0^t [\sigma(X_s) - \sigma(Y_s)]^2\, ds\right] \\
&\leq 2T\mathbb{E}\left[\int_0^t (K|X_s - Y_s|)^2\, ds\right] + 2\mathbb{E}\left[\int_0^t (K|X_s - Y_s|)^2\, ds\right] \\
&\leq 2(T+1)K^2\mathbb{E}\int_0^t [X_s - Y_s]^2\, ds
\end{aligned}$$

alors :

$$\mathbb{E}[X_t - Y_t]^2 \leq 2(T+1)K^2\mathbb{E}\int_0^t [X_s - Y_s]^2\, ds \qquad t \leq T \tag{3.3}$$

si on pose $g(t) = \mathbb{E}[X_t - Y_t]^2$ et $C = 2(T+1)K^2$, alors on a établi que g vérifie pour $t \in [0, T]$:

$$g(t) \leq C\int_0^t g(s)\, ds$$

par le lemme de Gronwall $\mathbb{E}[X_t - Y_t]^2 = 0$, donc on déduit que $X = Y$.

Existence : On construit une suite de fonction aléatoire $\{X_t^n\}_{n\geq 0}$ par "le procédé d'itération de Picard" pour cela, on pose :

$$
\begin{aligned}
X_t^0 &= x \\
X_t^1 &= x + \int_0^t b(x)\, ds + \int_0^t \sigma(x)\, dB_s \\
X_t^2 &= x + \int_0^t b\left(X_t^1\right) ds + \int_0^t \sigma\left(X_t^1\right) dB_s \\
&\vdots
\end{aligned}
$$

$$
X_t^{n+1} = x + \int_0^t b\left(X_t^n\right) ds + \int_0^t \sigma\left(X_t^n\right) dB_s. \tag{3.4}
$$

Alors, on a l'identité :

$$
X_t^{n+1} - X_t^n = \int_0^t \left[b\left(X_t^n\right) - b\left(X_t^{n-1}\right)\right] ds + \int_0^t \left[\sigma\left(X_t^n\right) - \sigma\left(X_t^{n-1}\right)\right] dB_s
$$

et en utilisant les mêmes arguments qui nous ont menés à (3.3), on obtient :

$$
\mathbb{E}\left[X_t^{n+1} - X_t^n\right]^2 \leq C_T \int_0^t \mathbb{E}\left[X_s^n - X_s^{n-1}\right]^2 ds \qquad \forall t \leq T
$$

avec $C_T = 2(T+1)K^2$, on vérifie alors par récurrence :

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[X_t^{n+1} - X_t^n\right]^2 &\leq C_T \int_0^t C_T \int_0^{s_1} \mathbb{E}\left[X_{s_2}^{n-1} - X_{s_2}^{n-2}\right]^2 ds_2 ds_1 \\
&\leq C_T^2 \int_0^t \int_0^{s_1} \mathbb{E}\left[X_{s_2}^{n-1} - X_{s_2}^{n-2}\right]^2 ds_2 ds_1 \\
&\leq C_T^2 \int_0^t \int_0^{s_1} C_T \int_0^{s_2} \mathbb{E}\left[X_{s_3}^{n-2} - X_{s_3}^{n-3}\right]^2 ds_3 ds_2 ds_1
\end{aligned}
$$

$$\leq C_T^3 \int_0^t \int_0^{s_1} \int_0^{s_2} \mathbb{E}\left[X_{s_3}^{n-2} - X_{s_3}^{n-3}\right]^2 ds_3 ds_2 ds_1$$

$$\vdots$$

$$\leq C_T^n \int_0^t \int_0^{s_1} \int_0^{s_2} \cdots \int_0^{s_{n-1}} \mathbb{E}\left[X_{s_n}^1 - X_{s_n}^0\right]^2 ds_n \dots ds_3 ds_2 ds_1$$

donc :

$$\mathbb{E}\left[X_t^{n+1} - X_t^n\right]^2 \leq a C_T^n \frac{t^n}{n!},$$

où la quantité $a := \max\limits_{t \leq T} \mathbb{E}\left|X_t^1 - X_t^0\right|^2$ est finie. Finalement,

$$\left\|X^{n+1} - X^n\right\|_{\mathcal{M}^2[0,T]}^2 \leq a \frac{(C_T T)^n}{n!}$$

donc :

$$\left\|X^{n+1} - X^n\right\|_{\mathcal{M}^2[0,T]} \leq a^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{K \geq n} \frac{(C_T T)^K}{K!}\right)^{\frac{1}{2}}$$

qui tend vers 0 quand n tend vers l'infini, la suite $\{X_\bullet^n\}_{n\geq 0}$ est de Cauchy, elle converge donc dans l'espace de Hilbert $\mathcal{M}^2[0,T]$, pour tout $T > 0$, vers une limite $X = (X_t, t \geq 0)$ (d'après l'unicité dans (3.2), la limite ne dépend pas de T).

Avec l'hypothèse de Lipchitz, on peut passer à la limite dans (3.4) et on obtient (3.2) les autres propriétés définissant les solutions forts sont clairement satisfaites. ∎

3.4 EDS et processus de Lévy

3.4.1 Changement de mesures et martingales exponentielles

Soit $b : [0,T] \times \Omega \to \mathbb{R}$ et $\sigma : [0,T] \times \Omega \to \mathbb{R}$ des processus $\mathcal{F}_t-$adapté prévisible tels que :

$$\mathbb{E}\int_0^T |b(r)|^2 + |\sigma(r)|^2 \, dr < \infty$$

et $H, K : [0,T] \times (\mathbb{R}/\{0\}) \times \Omega \to \mathbb{R}$ des processus prévisibles tels que $H \in H^2(T,\nu)$. On considère le processus, pour $0 \leq t \leq T$:

$$X_t = X_0 + \int_0^t b(r)\, dr + \int_0^t \sigma(r)\, dB_r + \int_0^t \int_{|z|<1} H(r,z)\, \widetilde{N}(dr,dz) + \int_0^t \int_{|z|\geq 1} k(r,z)\, N(dr,dz).$$

Exponentielle de Doleans-Dade

La question est de trouver un processus adapté tel que :

$$dZ_t = Z_{t-} dX_t.$$

On définit l'exponentielle de Doleans-Dade, pour $t \geq 0$:

$$Z_t = \exp\left(X_t - \frac{1}{2}\int_0^t \sigma(r)^2\, dr \right) \prod_{0\leq s\leq t} (1 + \Delta X_s)\, e^{-\Delta X_s}.$$

On fait l'hypothèse que :

$$\inf\{\Delta X_t ; t > 0\} > -1 \qquad p.s. \tag{3.5}$$

Proposition 3.4.1 *Sous l'hypothèse (3.5), alors* $Z_t < +\infty \quad p.s.$

Martingales exponentielles

Théorème 3.4.1 *On suppose, de plus, que :*

$$\mathbb{E}\left[\int_0^t \int_{|z|\geq 1} |k(r,z)|\,\nu(dz)\,dr\right] < +\infty.$$

Le processus X est une martingale si et seulement si :

$$b(t) + \int_{|z|\geq 1} k(t,z)\,\nu(dz) = 0 \qquad p.s.$$

Corollaire 3.4.1 *e^X est martingale si et seulement si :*

$$b(t) + \frac{1}{2}\sigma^2(t) + \int_{|z|<1} \left(e^{H(t,z)} - 1 - H(t,z)\right)\nu(dz) + \int_{|z|\geq 1} \left(e^{K(t,z)} - 1\right)\nu(dz) = 0 \qquad p.s.$$

3.4.2 Probabilité de risque neutre

On considère un actif risqué $\{S_t; t \geq 0\}$ adapté à une filtration $\{\mathcal{F}_t; t \geq 0\}$ et un actif non risqué $\{S_t^0; t \geq 0\}$ qui croît selon la formule des intérêts composés :

$$\forall t \geq 0; \quad S_t^0 = S_0 e^{rt}$$

où r est le taux d'intérêt instantané. On définit le processus actualisé $\left\{\widetilde{S}_t; t \geq 0\right\}$ par :

$$\widetilde{S}_t = e^{-rt} S_t.$$

Un marché est dit complet si tout actif contingent peut être répliqué par un portefeuille autofinancé.

Théorème 3.4.2 *Le marché est complet si et seulement s'il existe une unique mesure de probabilité Q équivalente à $\mathbb{P}$ sous laquelle l'actif réactualisé $\widetilde{S}_t$ est une martingale.*

Une telle mesure est alors appelée mesure de risque neutre. Si Q existe mais n'est pas unique, le marché est dit incomplet.

On suppose que l'actif risqué satisfait l'EDS :

$$dS_t = \sigma S_{t-} dX_t + \mu S_{t-} dt$$

où X est un processus de Lévy. On peut alors utiliser les exponentielles de Doleans-Dade pour modéliser S. Clairement, pour que les prix du stock soit non négatif, il faut imposer la condition $\Delta X_t > -\sigma^{-1}$. On met $c = -\sigma^{-1}$. On impose également la condition suivante sur la mesure de Lévy ν associée à la mesure aléatoire de Poisson N représentant les sauts de X :

$$\int_c^{+\infty} \left(x^2 \vee x\right) d\nu\left(x\right) < +\infty.$$

En particulier, les returns possèdent des moments d'ordre 2.

D'après la décomposition d'Itô-Lévy, on peut écrire :

$$X_t = mt + \kappa B_t + \int_0^t \int_c^{+\infty} z \widetilde{N}\left(dr, dz\right)$$

où $\kappa \geq 0$ et $m \in \mathbb{R}$. En utilisant la formule d'Itô, on a :

$$d\ln\left(S_t\right) = \kappa\sigma dB_t + \left(m\sigma + \mu - \frac{1}{2}\kappa^2\sigma^2\right) dt + \int_c^{+\infty} \ln\left(1+\sigma z\right) \widetilde{N}\left(dr, dz\right) + \int_c^{+\infty} \left[\ln\left(1+\sigma z\right) - \sigma z\right] \nu\left(dz\right) dt.$$

On cherche maintenant à déterminer des mesures de probabilité $\mathbb{Q}$ équivalentes à $\mathbb{P}$ par rapport auxquelles l'actif risqué réactualisé est une martingale. Pour cela on va chercher des mesures de probabilités $\mathbb{Q}$ sous la forme :

$$d\mathbb{Q} = e^{Y_T} d\mathbb{P}$$

où Y est un processus d'Itô-Lévy de la forme :

$$dY_t = G(t)dt + F(t)dB_t + \int_{\mathbb{R}} H(t,z)\widetilde{N}(dt,dz)$$

avec $H \in H^2(T,\nu)$. On suppose que les coefficients, G; F; H sont tels que le processus e^Y soit une martingale. Ainsi G est uniquement déterminé par F et H, on peut donc bel et bien définir une nouvelle mesure de probabilité $\mathbb{Q}$ par :

$$d\mathbb{Q} = e^{Y_T} d\mathbb{P}.$$

De plus, d'après le théorème de Girsanov :

$$B_t^Q = B_t - \int_0^t F(r)\, dr$$

est un mouvement Brownien sous $\mathbb{Q}$ et :

$$\widetilde{N}^Q(t,E) = \widetilde{N}(t,E) - \nu^Q(t,E)$$

est une $\mathbb{Q}$-martingale où :

$$\nu^Q(t,E) = \int_0^t \int_E \left(e^{H(r,z)} - 1\right) \nu(dz)\, dr.$$

Lemme 3.4.1 *Le compensateur de* $\widetilde{N}^Q(t,E)$ *est* $\int_0^t \int_E e^{H(r,z)} \nu(dz)\, dr.$

On peut alors réécrire le prix de l'actif réactualisé en fonctions de ces nouveaux processus pour obtenir :

$$\begin{aligned}
d\ln\left(\widetilde{S}_t\right) &= \kappa\sigma dB_t^Q - \frac{1}{2}\kappa^2\sigma^2 dt + \int_c^{+\infty} \ln(1+\sigma z)\,\widetilde{N}^Q(dr,dz) \\
&+ \int_c^{+\infty} \left[\ln(1+\sigma z) - \sigma z\right] e^{H(t,z)}\nu(dz)\,dt \\
&+ \left(m\sigma + \mu - r + \kappa\sigma F(t) + \sigma\int_c^{+\infty} z\left(e^{H(t,z)} - 1\right)\nu(dz)\right) dt.
\end{aligned}$$

Posons :

$$C(t) = m\sigma + \mu - r + \kappa\sigma F(t) + \sigma\int_c^{+\infty} z\left(e^{H(t,z)} - 1\right)\nu(dz)$$

en appliquant la formule d'Itô-Lévy, on obtient :

$$d\widetilde{S}_t = \widetilde{S}_t\kappa\sigma dB_t^Q + \int_c^{+\infty} \widetilde{S}_{t-}\sigma z\widetilde{N}^Q(dr,dz) + \widetilde{S}_t C(t)\,dt.$$

Ainsi, l'actif réactualisé $\widetilde{S}_t$ est une $\mathbb{Q}$-martingale locale si et seulement si $C(t) = 0$ $p.s.$ C'est même une martingale si l'on impose la condition :

$$\forall T > 0, \quad \int_0^t \int_c^{+\infty} z^2 \mathbb{E}^Q\left[e^{H(r,z)}\right]\nu(dz)\,dr < +\infty.$$

Il est important de remarquer que la condition $C = 0$ possède (en général) une infinité de solutions (F, H). En effet, si $f \in L^1(\mathbb{R},\nu)$ et si (F, H) est une solution, alors le couple :

$$\left(F + \int_{\mathbb{R}} f d\nu, \ln\left(e^H - \frac{\kappa f}{z}\right)\right)$$

est aussi solution. Donc il existe une infinité de mesure $\mathbb{Q}$, équivalentes à $\mathbb{P}$, sous lesquelles l'actif réactualisé est une martingale. D'une façon générale, les modèles d'actif de type Lévy sont donc des marchés incomplets.

Remarque 3.4.1 *Il existe deux cas particuliers où le marché est complet :*

1. *Cas Brownien (c'est à dire $\nu = 0$ et $\kappa > 0$) dans ce cas $F(t) = \dfrac{r - \mu - m\sigma}{\kappa\sigma}$ p.s.*
2. *Cas Poissonien (c'est à dire $\kappa = 0$ et $\nu = \lambda\delta_1$ avec $\nu > m + (\mu - r/\sigma)$) : dans ce cas on pose :*

$$H(t) = H(t,1) = \ln\left(\frac{r - \mu + (\lambda - m)\sigma}{\lambda\sigma}\right) p.s.$$

3.4.3 EDS avec saut

Les modèles présentés ci-dessous sont du type Lévy exponentiels, c'est à dire que l'actif risqué S_t est décrit par :

$$S_t = S_0 e^{rt+X_t}$$

où r est le taux d'intérêt de l'actif non risqué et le processus X est un Lévy satisfaisant tel que e^X est une martingale (condition d'absence d'arbitrage). C'est donc à l'évolution des prix sous la probabilité risque neutre que l'on s'intéresse. Si le processus de Lévy X s'écrit :

$$X_t = \gamma t + \sigma B_t + \int_0^t \int_{|z|<1} z\widetilde{N}(dr,dz) + \int_0^t \int_{|z|\geq 1} zN(dr,dz).$$

La condition d'absence d'arbitrage est équivalente à :

$$\int_{|z|>1} e^z \nu(dz) < +\infty \text{ et } \gamma = -\sigma^2/2 - \int_{\mathbb{R}} \left(e^z - 1 - z\mathbf{1}_{\{|z|<1\}}\right)\nu(dz).$$

Modèle de Merton

Le modèle de Merton (1976) est l'une des premières applications de processus avec sauts en modélisation financière. Dans ce modèle, pour prendre en compte les discontinuités dans les cours d'actions, on rajoute des sauts gaussiens au logarithme du prix :

$$S_t = S_0 e^{rt+X_t}$$

avec :

$$X_t = \gamma t + \sigma B_t + \sum_{i=1}^{N_t} Y_i, \qquad Y_i \sim N\left(\mu, \delta^2\right).$$

L'avantage de ce modèle est d'avoir une formule en série pour la densité de probabilité du log-prix :

$$p_t\left(x\right) = e^{-\lambda t} \sum_{K=0}^{+\infty} \frac{\left(\lambda t\right)^K \exp\left(-\frac{\left(x-\gamma t-K\mu\right)^2}{2\left(\sigma^2 t+K\delta^2\right)}\right)}{K!\sqrt{2\pi\left(\sigma^2 t+K\delta^2\right)}}.$$

Processus variance-gamma

L'un des exemples les plus simples de processus de Lévy avec intensité infinie de sauts est le processus gamma, un processus aux accroissements indépendants et stationnaires tel que pour tout t, la loi p_t de X_t est la loi gamma de paramètres λ et ct :

$$p_t = \frac{\lambda^{ct}}{\Gamma\left(ct\right)} x^{ct-1} e^{-\lambda x}.$$

Le processus gamma est un processus de Lévy croissant dont la fonction caractéristique a une forme :

$$\mathbb{E}[e^{iuX_t}] = \left(1 - \frac{iu}{\lambda}\right)^{-ct}.$$

On démontre que la mesure de Lévy du processus gamma a une densité donnée par :

$$\nu\left(dx\right) = \frac{ce^{-\lambda x}}{x} \mathbf{1}_{\{x>0\}}.$$

A partir du processus gamma, on peut construire un modèle avec sauts très populaire : le processus variance gamma, qui est obtenu en changeant l'échelle de temps d'un mouvement brownien avec drift par un processus gamma :

$$Y_t = \mu X_t + \sigma B_{X_t}.$$

L'utilisation de Y pour modéliser le logarithme du prix d'action est habituellement justifiée en disant que le prix suit un mouvement Brownien géométrique sur une échelle de temps stochastique donnée par le processus gamma. Le processus variance gamma est un autre exemple du processus de Lévy avec intensité infinie de sauts, sa fonction caractéristique est donnée par :

$$\mathbb{E}[e^{iuY_t}] = \left(1 + \frac{\kappa\sigma^2 u^2}{2} - i\mu\kappa u\right)^{-\kappa t}$$

les paramètres ont l'interprétation intuitive suivante : σ est un paramètre d'échelle, μ est le paramètre d'asymétrie (skewness) et κ est le paramètre de kurtosis du processus (épaisseur des queues de la densité).

Remarque 3.4.2 *Il existe évidemment plusieurs autres exemples de EDS avec saut :*

- *Modèle NIG (Normal Inverse Gaussian),*
- *Kou,*
- *Generalized Hyperbolic,*
- *CGMY,*
- *Meixner, ..etc.*

Bibliographie

[1] Damien Lamberton, & Bernard Lapeyre (2012) : *Introduction au calcul stochastique appliqué à la finance*, 3$^{\text{éme}}$ édition, Ellipses.

[2] David Coupier : *Processus tochastique*, POLYTECH'LILLE.

[3] Domien Lamberton (2004) : *Processus stochastique, processus de poisson, chaînes de Markove et martingales*, DUNOD.

[4] Francis Comets, & Thierry Meyre (2006) : *Calcul stochastique et modéles de diffusions,cours et exercices corrigés*, DUNOD.

[5] Jeanblanc Monique (Septembre 2006) : *Cours de calcul stochastique*, Master 2IF EVRY.

[6] Jeanblanc Monique & Simon Thomas (Septembre 2005) : *Elements de calcul stochastique*, IRBID.

[7] Jean-François Le Gall (2013) : *Mouvement brownien, martingales et calcul stochastique*, Springer.

[8] Olivier Lévêque (Semestre d'hiver 2004-2005) : *Cours de probabilités et calcul stochastique*, EPFL.

[9] Rhodes Rémi (18 novembre 2010) : *Processus de Lévy et calcul stochastique.*

Annexe : Abréviations et Notations

Les différentes abréviations et notations utilisées tout au long de ce mémoire sont expliquées ci-dessous :

$\left(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}, \mathbb{P}\right)$	:	Espace de probabilité filtré.
$\left\|\cdot\right\|^2$	:	La norme carrée.
$p.s$	:	Presque sûrement.
$\mathbb{P}-p.s$	:	Prêsque sûrement pour la mesure de probabilité $\mathbb{P}$.
$(M.B)$	:	Mouvement Brownien standard.
$< X >_T$	:	Variation quadratique.
ν	:	Mesure de Lévy.
L^2	:	Espace du martingale de carré intégrable.
$f \in C^1$	:	f est dérivable et f' est continue.
$f \in C^2$	:	La dérivée seconde de f existe et elle est continue.
$\mathcal{M}^2\left[0, T\right]$	:	Ensemble de processus càglàd, $\mathcal{F}_t-$ adapté.
EDS	:	Equation différentielle stochastique.