République Algérienne Démocratique et Populaire

Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

UNIVERSITÉ MOHAMED KHIDER, BISKRA

FACULTÉ des SCIENCES EXACTES et des SCIENCES de la NATURE et de la VIE

DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES

Mémoire présenté en vue de l'obtention du Diplôme **:**

MASTER en Mathématiques

Option : **Probabilités**

Par

Yahiaoui Henia

Titre :

Relation entre PM et PD pour les problèmes de contrôle optimal récursif

Membres du Comité d'Examen :

Dr.	**CHIGHOUB Farid**	U. Biskra	Président
Dr.	**LAKHDARI Imad Eddine**	U. Biskra	Encadreur
Dr.	**ABBA Abedelmajid**	U. Biskra	Examinateur

Juin 2019

Dédicace

Je dédie ce humble travail :

A Mes chers Parents.

A mes soeurs et mes fréres.

A toute la famille : Yahiaoui.

A toute mes amies :SOLTANE Lyamna,Selma,Nadia

A toute la promotion de mathématiques.

REMERCIEMENTS

La vie n'est pas plus belle qu'un moment où l'homme enquête Maya Mele Et le frisson du succès est le plus grand de toute vie et nous sont la cueillette du fruit du succès que nous devons aller de l' avant redevables à la fois nous ont aidés à atteindre ce que nous avons atteint

Par conséquent, remerciant le début du crédit au Dieu Tout-Puissant qui m'a aidé

J'adresse également mes remerciements et ma gratitude à mes parents et à mes frères pour leur bon soutien dans cette vie.

Je tiens également mes remerciements à ***LAKHDARI*** *mon professeur , mon encadreur* ***Imad Eddine*** *dirigée et motivée.*

J'adresse également mes remerciements et ma reconnaissance au chef du département de mathématique ***Hafayed Mokhtar****, qui lui témoigne mon respect.*

Merci et appréciation à les membres du comité qui ont la discussion s'il vous plaît lire ce message.

Je voudrais également exprimer mes remerciements et ma gratitude à mes collègues et collègues du département de mathématiques . ... Dieu nous les a récompensés comme bons .

Table des matières

Introduction

Les équations différentielles stochastiques rétrogrades non linéaire (**EDSRs**) ont été introduit par Pardoux et Peng [12]. Indépendamment, Duffie et Epstein [4] ont introduit les **EDSRs** dans un contexte économique, ils ont présenté une formulation différentielle stochastique d'utilité récursif.

Le problème de contrôle optimal dans le cas où le coût fonctionnel est décrit par la solution d'une **EDSR** est appelé problème de contrôle optimal stochastique récursif. Dans ce cas, les systèmes de contrôle deviennent stochastique avant-arrière (**FBSDES**). Ce type de problème a trouvé des applications importantes dans des problèmes réels tels que l'économie mathématique, les mathématique financière, et l'ingénierie (voir Schroder et Skiadas [16], El Karoui et al.[5, 6], Ji et Zhou [9], Williams [21] et Wang et Wu [22]).

Il est bien connu que le principe du maximum de Pontryagin et la programmation dynamique de Bellman sont deux outils importants pour résoudre les problèmes de contrôle optimal stochastiques (voir le célèbre livre Yong et Zhou [26]). Pour les problèmes de contrôle optimal stochastique récursif, Peng [14] a été obtenu un principe maximum lorsque le domaine de contrôle est convexe. Et puis Xu [25], étudié le cas de domaine de contrôle non convexe, mais il a besoin supposer que le coefficient de diffusion ne contient pas la variable de contrôle. Le principe du maximum pour un contrôle optimal stochastique récursif avec sauts de poisson, et leurs applications en finance, ont été étudiés par Shi et Wu [17], où le domaine de contrôle est convex.

Pour une autre approche importante - la programmation dynamique - pour étudier les problèmes de contrôle optimal stochastiques récursif, Peng [13] (voir aussi Peng [15]) d'abord obtenu le principe de programmation dynamique généralisée et a introduit une équation Hamilton-Jacobi-Bellman généralisé (HJB) qui est une équation différentielle partielle parabolique de second-ordre (**EDP**).

Une question naturelle se pose donc : existe-t-il des relations entre ces deux méthodes ? Un tel sujet a été discuté intuitivement par Bismut [3] et Bensoussan [2], puis étudié par de nombreux chercheurs. Dans certaines conditions de différentiabilité, la relation entre le principe du maximum et la programmation dynamique est essentiellement la relation entre les dérivés de la fonction de valeur et la solution de l'équation adjointe de l'état optimal.

La relation entre le principe du maximum et la programmation dynamiqueont ont été étudiés par Yong et Zhou [26]. Zhou [29], a obtenu le lien entre le principe du maximum et la programmation dynamique en utilisant la théorie de viscosité (voir aussi Yong et Zhou [26]), sans supposer que la fonction de valeur est lisse. Pour la diffusion avec sauts, la relation entre le principe du maximum et la programmation dynamique ont été les premiers donnés par Framstad et al.[7, 8] dans certaines conditions de difféntiabilité, puis Shi et Wu [18] ont éliminé ces restrictions dans le cadre des solutions de viscosité. Pour les problèmes de contrôle optimal stochastique singulier, la relation entre le principe du maximum et la programmation dynamique ont été donnés par Bahlali et al. [1]. Pour le modèle de diffusion à sauts de régime markovien, la relation entre le principe du maximum et la programmation dynamique était donné par Zhang et al. [27].

Notre objectif dans ce mémoire est de faire une étude détaillée sur le lien entre le principe de programmation dynamique (**PD**) et le principe du maximum (**PM**) pour les problèmes de contrôle optimal récursif. Cette étude est basé sur le travail de Shi et Yu [19] *(*J. Shi and Z. Yu, Relationship between maximum principle and dynamic programming for stochastic recursive optimal control problems and applications, Mathematical Problems in Engineering 2013 (2013)).

Nous présentons notre mémoire de la manière suivante :

Dans le premier chapitre, nous commencons par présenter un rappel sur le calcul stochastique (Processus stochastiques, calcul d'Itô, l'existence et l'unicité d'une équation différentielle stochastique (EDS)).
Dans le deuxième chapitre, nous donnons une formulation générale d'un problème de contrôle optimal récursif, puis nous étudions ce problème par le principe de programmation dynamique et le principe du maximum stochastique (condition nécessaire et suffisante d'optimalité).
Le dernier chapitre, contient la contribution essentielle de notre travail : Le lien entre les deux principes .

Chapitre 1

Généralité sur le calcul stochastique

1.1 Processus stochastique

Définition 1.1.1 (Processus stochastique) *un processus stochastique est une famille $X = (X_t)_{t\in T}$ de variables aléatoires à valeur dans un espace mesurable $(\Omega, \mathcal{F})$ est indéxée par le temps t. Le paramétre de temps t variant dans I.*

1. *Si t fixe : X_t est un v.a définie sur $(\Omega, \mathcal{F})$ à valeur dans $(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d))$.*
2. *Si ω fixe : X_t appelé la trajectoire de $(X_t)_{t\in T}$ associée à ω.*

Remarque 1.1.1

1. *Si $I \subseteq \mathbb{N}$, on dit que le processus a temp discret.*
2. *Si $I \subseteq \mathbb{R}$, on dit que le processus a temp continue.*

Définition 1.1.2 (Filtration) *une filtration $\mathcal{F}= (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ sur $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ est une famille croissante de sous-tribus $\mathcal{F}$: $\mathcal{F}_s \subset \mathcal{F}_t \subset \mathcal{F}$ pour tous $0 \leq s \leq t$ dans T.*

1. *Le quadruplet $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{F}= (\mathcal{F}_t)_{t\in T}, \mathbb{P})$est appelé espace de probabilité filtré.*
2. *On dit que la filtration est naturelle (ou canonique) de processus X si*

$$\mathcal{F}_t^X = \sigma(X_s, 0 \leq s \leq t), \qquad t \in T,$$

c'est la plus petite σ-algébre par rapport à laquelle X_s est mesurable pour tous $0 \leq s \leq t$.

3. *On dit qu'une filtration $\mathcal{F}= (\mathcal{F}_t)_{t\in T}$ est continue à droite si*

$$\mathcal{F}_{t^+} := \cap_{s\geq t}\mathcal{F}_s = \mathcal{F}_t.$$

Définition 1.1.3 (Processus adapté) *Un processus $(X_t)_{t\in[0,T]}$ est dit adapté par rapport à $\mathcal{F}$ si pour tout $t \in T$, X_t est $\mathcal{F}_t$-mesurable.*

Définition 1.1.4 (Processus a trajectoire continue) *un processus (X_t) est a trajectoire continue ou simplement processus continue si*

$$P(\{\omega \in \Omega; t \to X_t(\omega) \textit{ est continue}\}) = 1$$

Définition 1.1.5 (Processus progressivement mesurable) *Un processus $(X_t)_{t\in I}$ est dit progressivement mesurable par rapport à $\mathcal{F}$ si pour tout $t \in T$ l'application $(s, \omega) \to X_s(\omega)$ est mesurable sur $[0, t] \times \Omega$ muni de la tribu produit $\mathcal{B}([0, t]) \otimes \mathcal{F}_t$.*

Définition 1.1.6 (Processus càdlàg) - *Un processus X est dit càdlàg (continue à droite et pourvu de limite à gauche) si ses trajectoires sont continues à droite et prouvues de limite à gauche pour presque tout ω.*

Remarque 1.1.2 *Un processus progressivement mesurable est mesurable et adapté.*

Proposition 1.1.1 *Si X est un processus stochastique dont les trajectoires sont continués à droite (ou à gauche), alors X est mesurable et progressivement mesurables s'il est de plus adapté.*

1.1.1 Processus de Markov

Définition 1.1.7 *On dit que le processus X_t est de Markov par rapport a une filtration canonique $\mathcal{F}_t$ si pour tout fonction F définie sur $\mathbb{R}^n$,et pour tout $t_1 \leq t_2 \leq ... \leq t_n$:*

$$\mathbb{E}\left[F\left(X_{s+t_1}, X_{s+t_2}, ..., X_{s+t_n}\right)/\mathcal{F}_s\right] = \mathbb{E}\left[F\left(X_{s+t_1}, X_{s+t_2}, ..., X_{s+t_n}\right)/X_s\right],$$

si pour tout fonction f borélienne bornée et pour tous s et t, tels que $s \leq t$:

$$\mathbb{E}\left[F\left(X_t\right)/\mathcal{F}_s\right] = \mathbb{E}\left[F\left(X_t\right)/X_s\right].$$

Proposition 1.1.2 *Soit $x \in \mathbb{R}^n$, soient $0 \leq r \leq s \leq t$. On a*

$$X_s^{r,x} = X_t^{s,X_s^{r,x}}, \quad P-p.s.$$

Définition 1.1.8 (Mouvement Brownien) *On appelle $\mathcal{F}_t$-mouvement brownien un processus stochastique à valeurs réelles et à trajectoires continues qui vérifier :*

(i) *Pour tout $t \geq 0$, X_t est $\mathcal{F}_t$-mesurable.*

(ii) *Si $s \leq t$, $X_t - X_s$ est indépendant de la tribu $\mathcal{F}_s$.*

(iii) *Si $s \leq t$, la loi de $X_t - X_s$ est identique à celle de $X_{t-s} - X_0 = X_{t-s}$.*

Définition 1.1.9 *Un mouvement brownien est dit standard si :*

$$W_0 = 0, \quad P-p.s, \qquad \mathbb{E}[W_t] = 0 \quad et \quad \mathbb{E}[W_t^2] = t.$$

Lorsque l'on parlera de mouvement brownien sans autre précision, il s'agira d'un mouvement brownien standard.

Proposition 1.1.3 *Soit W un mouvement brownien Standard :*

1. *Pour tout $t \geq 0, X_t = tW_{\frac{1}{t}}$, alors (X_t) est un MB.*

2. *Soit c réel positive* $(c > 0)$,*on a* $Z_t = cW_{\frac{t}{c^2}}$, *donc* (Z_t) *est un mouvement brownien.*
3. *Pour tout* $s > 0, \{W_{t+s} - W_s\}_{t \geq 0}$ *est un mouvement brownien indépendant de* $\sigma(W_u, u \leq s)$.

Théorème 1.1.1 *Un processus W est un mouvement brownien si c'est un processus Gaussien continue centré de fonction de covariance :*

$$cov(W_t, W_s) = \mathbb{E}(W_t W_s) = s \wedge t = \min(t, s).$$

Proposition 1.1.4 *Soit W un MB alors presque sûrement on a :*

– *W n'est pas différentiable en aucun point t.*

– *W n'est pas à variation finie en aucun point t.*

Définition 1.1.10 (Temp d'arrêt) *Une variable aléatoire* $\tau : \Omega \to \mathbb{R}_+$ *est un temp d'arrêt (par rapport a la filtration* $\mathcal{F} = (\mathcal{F}_t)_{t \in T}$ *si pour* $t \in T$ *:*

$$\{\tau \leq t\} := \{\omega \in \Omega \ / \ \tau(\omega) \leq t\} \in \mathcal{F}_t.$$

Définition 1.1.11 (Martingale) *Un processus* $(M_t)_{t \geq 0}$ *est dit martingale si :*

1. *Pour tout* $t \geq 0$, M_t *est* $\mathcal{F}_t-$*adapté ;*
2. *Pour tout* $t \geq 0$, M_t *est intégrable, i.e.* $\mathbb{E}(|M_t|) < \infty$;
3. *Pour tout* $s \leq t$, $\mathbb{E}(M_t / \mathcal{F}_s) = M_s, \quad P - p.s.$

On définit de manière similaire sur-martingale si (iii) *est remplacé par*

$$\mathbb{E}(M_t / \mathcal{F}_s) \leq M_s, , \quad P - p.s.$$

Et sous-martingale si (iii) *est remplacé par*

$$\mathbb{E}(M_t / \mathcal{F}_s) \geq M_s, \quad P - p.s.$$

Proposition 1.1.5 *Soit* $(W_t)_{t\geq 0}$ *un mouvement brownien*

(i) $W_t^2 - t$ *est une martingale.*

(ii) *Pour tout* $\sigma \in \mathbb{R}, \exp(\sigma W_t - \sigma^2 \frac{t}{2})$ *est une martingale.*

Remarque 1.1.3 *Le mouvement brownien standard* $(W_t, t \geq 0)$ *est une martingale par rapport à sa filtration naturelle* $\mathcal{F}_t^W = \sigma(W_s, s \leq t)$.

Théorème 1.1.2 (Théorème de représentation des martingales) *Soit* W_t *un mouvement brownien sur un espace de probabilité filtré* $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{F}= (\mathcal{F}_t)_{t\in T}, \mathbb{P})$,*et* M_t *une martingale* $\mathcal{F}_t$*-adapté. Alors, il existe un processus adapté* V_s *tel que :*

$$M_t = M(0) + \int_0^t V(s)dW_s, \quad P - p.s.$$

Définition 1.1.12 (Martingale local) *Soit* $(M_t)_{t\geq 0}$ *un processus* $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$*-adapté à trajectoire continue à droite. On dit que* $(M_t)_{t\geq 0}$ *est une martingale local s'il existe une suite croissante de temps d'arrêt* $\{\tau_n\}_{n\geq 1}$ *telle que* $\lim_{n\to\infty} \tau_n = \infty, \;\; P - p.s.$ *et pour tout* n, $M^{\tau_n} 1_{\tau_n > 0}$ *est une martingale.*

Théorème 1.1.3 (Inégalité de Burkholder-Davis-Gundy "BDG") *Soit* $p > 0$ *un réel. Il existe deux constantes* c_p *et* C_p *telle que, pour tout martingale local continue* X, *nulle en zéro,*

$$c_p \mathbb{E}\left[\langle X, X\rangle_\infty^{\frac{p}{2}}\right] \leq \mathbb{E}\left[\sup_{t\geq 0} |X_t|^p\right] \leq C_p \mathbb{E}\left[\langle X, X\rangle_\infty^{\frac{p}{2}}\right].$$

Remarque 1.1.4 *En particulier, si* $T > 0$,

$$c_p \mathbb{E}\left[\langle X, X\rangle_T^{\frac{p}{2}}\right] \leq \mathbb{E}\left[\sup_{[0,T]} |X_t|^p\right] \leq C_p \mathbb{E}\left[\langle X, X\rangle_T^{\frac{p}{2}}\right].$$

Définition 1.1.13 (Variation finie, bornée et quadratique) *Soit* $[0, T]$ *un intervalle et* $\pi_n = 0 \leq t_1 \leq t_2 \leq ... \leq t_n = T$, *une subdivision de* $[0, T]$ *de pas*

$$\|\pi_n\|_\infty = \max_{1\leq i\leq n} \left|t_i^n - t_{i-1}^n\right|.$$

On appelle variation infinitésimal d'ordre p d'un processus X indexé par $[0,T]$ associé a π_n :

$$V_T^p(\pi_n) = \sum_{i=1}^{n} \left| X_{t_i^n} - X_{t_{i-1}^n} \right|^p .$$

Si $V_T^p(\pi_n)$ admet une limite dans (en un certain sens) lorsque $\|\pi_n\|_\infty \to_{n\to\infty} 0$ et la limite ne dépond pas de la subdivision choisie, on appelle $V_T^p = \lim_{\|\pi_n\|_\infty \to 0} V_T^p(\pi_n)$ variation d'ordre p.

a) *Si $p = 1$, la limite V_T^1 est appelée vaiation totale de X*

- *Si $\forall T$, V_T^1 est fini on dit que X est à variation finie.*
- *Si $\forall T$, V_T^1 est borné on dit que X est à variation finie.*

b) *Si $p = 2$, la limite est appelée variation quadratique de X.*

1.2 Calcul d'Itô

1.2.1 Intégrale stochastique

L'intégrale d'Itô est un des outils fondamentaux du calcul stochastique.

Il s'agit d'une intégrale définie de façon similaire à l'intégrale de Riemann comme limite d'une somme de Riemann. Si on se donne un processus de Wiener (ou mouvement brownien), $W : [0,T] \times \Omega \to \mathbb{R}$ ainsi que $x : [0,T] \times \Omega \to \mathbb{R}$ un processus stochastique adapté à la filtration naturelle associée à W_t, alors l'intégrale d'Itô

$$\int_0^T \phi_s dW_s \text{ est définie par la limite en moyenne quadratique de} \sum_{i=0}^{n-1} \phi_i (W_{t_{i+1}} - W_{t_i}).$$

Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espace probabilité et W_t un mouvement sur cet espace, et la filtration naturelle du mouvement brownien $\mathcal{F}_t = \sigma(W_s, s \leq t)$.

l'objectif c'est définir l'intégrale $\int_0^t \phi_s dW_s$ pour des processus ϕ

1.Cas étagé

On dit ϕ est un processus étagé (ou élémentaire) s'il existe une suite de réels $t_i, 0 \leq t_0 \leq t_1 \leq ... \leq t_n$ et une suite de variable aléatoire ϕ_i telle que ϕ_i est $\mathcal{F}_{t_i}$-mesurables de carré intégrables $\phi_t = \phi_i$ pour tout $t \in]t_i, t_{i+1}]$, soit

$$\phi_s(\omega) = \sum_{i=0}^{n-1} \phi_i(\omega) 1_{]t_i, t_{i+1}]}(s).$$

On définit

$$\int_0^\infty \phi_s dW_s = \sum_{i=0}^{n-1} \phi_i (W_{t_{i+1}} - W_{t_i}).$$

On sais que

$$\mathbb{E}\left[\int_0^\infty \phi_s dW_s\right] = 0 \text{ et } Var\left[\int_0^\infty \phi_s dW_s\right] = \left[\int_0^\infty \phi_s^2 ds\right].$$

Alors

$$\int_0^t \phi_s dW_s = \sum_{i=0}^{n-1} \phi_i (W_{t_{i+1}\wedge t} - W_{t_i \wedge t}).$$

2.Cas général

Soit l'ensemble $\mathcal{L}^2(\Omega \times \mathbb{R}_+)$ des processus ϕ $\mathcal{F}_t$-adaptés càglàd (continus à gauche limite à droite).

Si ϕ un meilleur processus, il existe (ϕ_s^n) une suite de processus étagés telle que

$$\mathbb{E}\left[\int_0^t (\phi_s^n - \phi_s^2) ds\right] \to 0,$$

quand n tend vers ∞.

Ainsi, pour tout $t > 0$ il existe une v.a $I_t(\phi) = \int_0^\infty \phi_s dW_s$ de carré intégrable.

On va montrer que

$$\mathbb{E}\left[\int_0^\infty \phi_s dW_s\right] = 0.$$

On a :

$$I_t(\phi) = \int_0^{\infty} \phi_s dW_s = \sum_{i=0}^{n-1} \phi_i (W_{t_{i+1}} - W_{t_i}),$$

$I_t(\phi)$ est gaussien, car (W_t) est un processus gaussien alors

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[I_t(\phi)\right] &= \mathbb{E}\left[\sum_{i=0}^{n-1} \phi_i (W_{t_{i+1}} - W_{t_i})\right], \\
&= \sum_{i=0}^{n-1} \phi_i \mathbb{E}(W_{t_{i+1}} - W_{t_i}), \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Comme $\mathbb{E}(W_{t_{i+1}} - W_{t_i}) = 0$ car $(W_{t_{i+1}} - W_{t_i})$ sont à acroissement indépendantes.

Pour montrer que

$$var[I_t(\phi)] = \mathbb{E}\left[\int_0^{\infty} \phi_s^2 ds\right].$$

En effet, on a

$$\begin{aligned}
var[I_t(\phi)] &= \mathbb{E}(I_t(\phi)^2) - \mathbb{E}(I_t(\phi))^2, \\
&= \mathbb{E}(I_t(\phi)^2), \\
&= \mathbb{E}\left[\int_0^{\infty} \phi_s^2 dW_s\right], \\
&= \mathbb{E}\left[\left(\sum_{i=0}^{n-1} \phi_i (W_{t_{i+1}} - W_{t_i})\right)^2\right], \\
&= \sum_{i=0}^{n-1} (\phi_i)^2 \mathbb{E}\left[(W_{t_{i+1}} - W_{t_i})^2\right], \\
&= \sum_{i=0}^{n-1} (\phi_i)^2 (t_{i+1} - t_i), \\
&= \int_0^{\infty} \phi_s^2 ds.
\end{aligned}$$

1.2.2 Propriétés d'intégrale stochastique

Il y'a quelque propriétés sur l'intégrale stochastique les plus important sont :

1. Linéairité :
$$\int_0^t \left(a\phi_s^1 + b\phi_s^2\right) dW_s = a\int_0^t \phi_s^1 dW_s + b\int_0^t \phi_s^2 dW_s.$$

2. Additivité : pour $0 \leq s \leq u \leq t \leq T$
$$\int_s^t \phi_v dW_v = \int_s^u \phi_v dW_v + \int_u^t \phi_v dW_v.$$

3. Propriétés de martingale :Pour tout processue ϕ les processus :
$$t \rightarrow I_t(\phi), \quad \text{et} \quad t \rightarrow I_t(\phi)^2 - \int_0^t \phi_s ds,$$
sont des $(\mathcal{F}_t^W)$ -martingale continues.
$$\mathbb{E}[(I_t(\phi) - I_s(\phi))^2/\mathcal{F}_s^W] = \mathbb{E}\left[\int_0^t \phi_u^2 du/\mathcal{F}_s^W\right].$$

4. Si $(x_t)_{0\leq t\leq T}$ est un processus $\mathcal{F}_t$-adapté et $\mathbb{E}(\int_0^T |x_s|^2 ds) < +\infty$, on a l'inégalité :
$$\mathbb{E}\left[\sup_{0\leq t\leq T}\left|\int_0^t |x_s|^2 dW_s\right|^2\right] \leq 4\left(\int_0^T |x_s|^2 ds\right),$$

5. Isométrie :
$$\mathbb{E}\left[\left(\int_0^t \phi_s dW_s\right)^2\right] = \mathbb{E}\left(\int_0^t \phi_s^2 ds\right).$$

1.2.3 Processus d'Itô

Définition 1.2.1 (processus d'Itô) *Un processus d'Itô est un processus de la forme*
$$X_t = X_0 + \int_0^t \varphi_s ds + \int_0^t \theta_s dW_s \quad P - p.s,$$

avec X_0 est $\mathcal{F}_0$-mesurable, φ et θ deux processus $\mathcal{F}_t$-adapté vérifiant les conditions d'intégrabilité :

$$\int_0^t |\varphi_s|\, ds < +\infty \quad et \quad \int_0^t \|\theta_s\|^2\, ds < +\infty.$$

Où Le coefficient φ est le drift ou la dérivée et θ est le coefficient de diffusion.

On note de manière infinitésimale :

$$dX_t = \varphi_s ds + \theta_s dW_s.$$

1.2.4 Formule d'Itô

Théorème 1.2.1 (première formule d'Itô) *Soit f une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, de classe C^2 à dérivées bornées. Alors*

$$f(X_t) = f(X_0) + \int_0^t f'(X_s)dX_s + \frac{1}{2}\int_0^t f''(X_s)ds,$$

Théorème 1.2.2 (deuxième formule d'Itô) *Soit f une fonction de C^2, on a alors :*

$$f(X_t) = f(X_0) + \int_0^t f'(X_s)\varphi_s ds + \int_0^t f'(X_s)\theta_s dW_s + \frac{1}{2}\int_0^t f''(X_s)\theta_s^2 ds.$$

La notation infinitésimale de cette relation est donc :

$$df(X_t) = f'(X_s)dX_s + \frac{1}{2}\int_0^t f''(X_s)d\langle X\rangle_s.$$

Remarque 1.2.1 *La formule d'Itô s'énonce également dans le cas multidimentionnel (ie $\varphi(t)$, $\theta(t)$, $W(t)$ sont des matrices)*

$$\begin{aligned} f(t, X_t) = {} & f(0, X_0) + \textstyle\int_0^t f_s(s, X_s)\, \varphi_s ds + \int_0^t f_x(s, X_s)\, \varphi_s ds \\ & + \frac{1}{2}\operatorname{tr}\left[\theta(s)^T f(s, X(s))\, \theta(s)\right] + \textstyle\int_0^t f_x(s, X_s)\, \theta_s dW_s. \end{aligned}$$

Proposition 1.2.1 (Formule d'intégration par parties) *Si X et Y sont des processus d'Itô, alors*

$$X_tY_t = X_0Y_0 + \int_0^t X_s dY_s + \int_0^t Y_s dX_s + \langle X, Y\rangle_t .$$

Cette formule est connue sous le nom d'intégration par partie.

1.3 Equations différentielles stochastiques(EDS)

Une équation différentielle stochastique (EDS) est une perturbation de l'équation différentielle ordinaire (EDO) avec un terme aléatoire modélisant un bruit autour de phénomène déterministe, la parturbation la plus simple est l'ajout d'un brownien.

Définition 1.3.1 *Une équation différentielle stochastique (EDS) donnée par :*

$$x_t = x + \int_0^t b(s, x_s)ds \; + \int_0^t \sigma(x_s)dW_s,$$

ou sous forme

$$\begin{cases} dx_t = b(t, x_t)dt + \sigma(t, x_t)dW_t, \\ x_0 = x, \end{cases} \tag{1.1}$$

où $\{W; t \geq 0\}$ est un mouvement brownien d-dimensionnel. Le coefficient $b(t, x_t)$ de dt est appelé dérive et le coefficient $\sigma(t, x_t)$ de dW_t est appelé terme de diffusion.

Pour trouver une solution (forte) à l'équation (1.1) signifie trouver une processus stochastique (x_t) $t \geq 0$ continue $\mathcal{F}_t$-adapté qui vérifie :

1. Pour tout $t \geq 0$, les intégrales $\int_0^t b(s, x_s)ds$ et $\int\limits_0^t \sigma(s, x_s)dW_s$ sont bien définies :

$$\int\limits_0^t |b(s, x_s)|\, ds < +\infty \text{ et } \int\limits_0^t |\sigma(s, x_s)|^2\, ds < +\infty, \quad P - p.s.$$

2. (x_t), $t \geq 0$ vérifie (1.1) :

$$x_t = x + \int_0^t b(s, x_s)ds \; + \int_0^t \sigma(s, x_s)dW_s, \quad P - p.s.$$

1.3.1 Existence et unicité

Le théorème dessous donne les conditions suffisantes sur b et σ pour avoir un résultat l'existence et l'unicité du solution de l'équation (1.1).

Théorème 1.3.1 (d'existence et d'unicité) *Si b et σ sont des fonctions continues telles qu'il existe $C < +\infty$:*

1. *Conditons de lipschitz : $|b(t,x) - b(t,y)| + |\sigma(t,x) - \sigma(t,y)| \leq C\,|x - y|$.*
2. *Conditons de coissance linéaire ; $|b(t,x) - \sigma(t,x)| \leq C(1 + |x|)$.*
3. *$\mathbb{E}(x^2) < +\infty$.*

Alors : pour tout $t \geq 0$ l'équation (1.1) admet solution unique dans $[0,T]$. D'autre part la solution $(x_s)_{0\leq s\leq T}$ vérifie

$$\mathbb{E}(\sup_{0\leq s\leq T} |x_s|^2) < +\infty.$$

Preuve. a- Pour démontrer l'existence d'une solution forte, on définit l'espace S_c^2 par :

$$S_c^2 = \left\{ \begin{array}{c} \text{les processus progressivement mesurables tel que } \mathbb{E}(\sup_{0\leq s\leq T} |x_s|^2) < +\infty \text{ continue,} \\ \text{muni de } \|x\| = \mathbb{E}\left(\left[\sup_{0\leq s\leq T} |x_s|^2\right]^{\frac{1}{2}} < +\infty\right). \end{array} \right\}$$

Pour $x \in S_c^2$ posons, pour tout $t \in [0,T]$

$$\Psi(x_t) = x + \int_0^t b(s, x_s)ds \; + \int_0^t \sigma(s, x_s)dW_s,$$

le processus $\Psi(x)$ est bien définie.et est continu si $x \in S_c^2$.

Soient x et y deux éléments de S_c^2 on utilisant le fait que $(a+b)^2 \leq 2a^2+2b^2$ on a pour tout $0 \leq t \leq u \leq T$,

$$|\Psi(x_t)-\Psi(y_t)|^2 \leq 2 \sup_{0\leq t\leq u} \left| \int_0^t \left(b(s,x_s)ds - b(s,y_s)\right) ds \right|^2 + 2 \sup_{0\leq t\leq u} \left| \int_0^t \left(\sigma(s,x_s)ds - \sigma(s,y_s)\right) dW_s \right|^2 .$$

En utilise les propriétés (4 et 5) de l'intégrale stochastique alors on obient

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left[\sup_{0\leq t\leq u} |\Psi(x_t)-\Psi(y_t)|^2\right] &\leq 2\mathbb{E}\left[\left(\int_0^u |b(s,x_s)ds - b(s,y_s)|\, ds\right)^2\right] \\ &+ 8\mathbb{E}\left[\int_0^u |\sigma(s,x_s)-\sigma(s,y_s)|^2\, ds\right].\end{aligned}$$

L'inégalité de Hölder donne alors la majoration

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left[\sup_{0\leq t\leq u} |\Psi(x_t)-\Psi(y_t)|^2\right] &\leq 2T\mathbb{E}\left[\int_0^u |b(s,x_s)-b(s,y_s)|^2\, ds\right] \\ &+ 8\mathbb{E}\left[\int_0^u |\sigma(s,x_s)ds-\sigma(s,y_s)|^2\, ds\right].\end{aligned}$$

Comme les fonction b et σ sont lipschiz

$$\mathbb{E}\left[\sup_{0\leq t\leq u} |\Psi(x_t)-\Psi(y_t)|^2\right] \leq 2c^2(T+4)\mathbb{E}\left[\int_0^u \sup_{0\leq t\leq r} |x_t-y_t|^2\, dr\right]. \tag{1.2}$$

De plus, notant 0 le processus nul, on a, comme $(a+b+c)^2 \leq 3(a^2+b^2+c^2)$,
$|\Psi(0)|^2 \leq 3x^2 + 3\sup_{0\leq t\leq T}\left|\int_0^t b(s,0)ds\right|^2 + 3\sup_{0\leq t\leq T}\left|\int_0^t \sigma(s,0)dW_s\right|^2$,
d'où l'on tire en utilisant l'inégalité de Doob et la croussance linéaire de b et σ,

$$\mathbb{E}\left[\sup_{0\leq t\leq T} |\Psi(0)|^2\right] \leq 3\left(\mathbb{E}(x^2) + C^2T^2 + 4C^2T\right), \tag{1.3}$$

Les estimations (1.2) et (1.3) montrant alors que le processus $\Psi(x)$ appartient à S_c^2 dés que x appartient à S_c^2.

On définit alors par récurrence une suit de processus de S_c^2 en posant

$$x_0 = 0, \quad \text{et}, \quad x^{n+1} = \Psi(x^n), \text{ pour } n \geq 0.$$

On obtient (1.2), pour tout $n \geq 0$ notant par K à la place de $2c^2(T+4)$,

$$\mathbb{E}\left[\sup_{0\leq t\leq T}\left|x_t^{n+1} - x_t^n\right|^2\right] \leq \frac{K^nT^n}{n!}\mathbb{E}\left[\sup_{0\leq t\leq T}\left|x_t^1\right|^2\right],$$

et notant D le majorant de l'inégalité (1.3),

$$\mathbb{E}\left[\sup_{0\leq t\leq T}\left|x_t^{n+1} - x_t^n\right|^2\right] \leq D\frac{K^nT^n}{n!}.$$

Il résulte de cette dernière inégalité que

$$\sum_{n\geq 0}\left\|\sup_{0\leq t\leq T}\left|x_t^{n+1} - x_t^n\right|^2\right\|_{L^1} \leq \sum_{n\geq 0}\left\|\sup_{0\leq t\leq T}\left|x_t^{n+1} - x_t^n\right|^2\right\|_{L^2} \leq \sqrt{D}\frac{(KT)^{n/2}}{\sqrt{n!}} < \infty.$$

Alors le série $\sum_{n\geq 0}\sup_{0\leq t\leq T}\left|x_t^{n+1} - x_t^n\right|$ converge $P-p.s$ et donc, $P-p.s$, x^n converge uniformément sur $[0,T]$ vers un processus continue. De plus $x \in S_c^2$. On vérifier que x est solution de l'EDS (1.1) en passant à la limite dans la définition $x^{n+1} = \Psi(x^n)$.

Si x et y deux solution de (1.1) dans S_c^2 alors : $x = \Psi(x_t)$ et $y = \Psi(y_t)$.L'inégalité (1.2) alors donne pour tout $u \in [0T]$,

$$\mathbb{E}\left[\sup_{0\leq t\leq u}|x_t - y_t|^2\right] \leq 2C^2(T+4)\mathbb{E}\left[\int_0^u \sup_{0\leq t\leq r}|x_s - y_s|^2\right]dr,$$

le lemme de Gronwall donne

$$\mathbb{E}\left[\sup_{0\leq t\leq T}|x_t - y_t|^2\right] = 0,$$

ce si implique que x et y sont indistinguables i.e. $P(x_t = y_t, \forall 0 \leq t \leq T)$. ■

Chapitre 2

Principe de programmation dynamique et principe du maximum

2.1 Formulation du problème

Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espace de probabilité complet , $\{W(t)\}_{t\geq 0}$ un mouvement Brownien standard de d-dimensionnel. Pour $t \geq 0$ fixé, la filtration $\{\mathcal{F}_s^t\}_{s\geq t}$ s'écrit sous la forme $\mathcal{F}_s^t = \sigma\{W(r) - W(t); t \leq r \leq s\} \vee \mathcal{N}$, où $\mathcal{N}$ contient tous les ensembles de P-nul en $\mathcal{F}$ et $\sigma_1 \vee \sigma_2$ désigne $\sigma-$champ généré par $\sigma_1 \cup \sigma_2$. En particulier, si $t = 0$, on écrit $\mathcal{F}_s = \mathcal{F}_s^t$. Soit $T > 0$ fini et $U \subset \mathbb{R}^K$ non vide, convexe. On notes par $\mathbb{R}^n$ l'espace Ecludian de n dimension, par $\mathbb{R}^{n\times d}$ l'espace des matrices de dimension $n \times d$. On note par $\mathcal{S}^n$ l'espace des matrices symétriques de dimension $n \times n$. Le produit scalaire et la norme dans l'espace Ecludienne sont notés par $\langle \cdot, \cdot \rangle$, $|\cdot|$ respectivement. $\top$ est la transposé d'une matrice.
Pour $(t, x) \in [0, T) \times \mathbb{R}^n$, on considère $X^{t,x;u}(\cdot) \in \mathbb{R}^n$ donné par l'EDS contrôlé suivante :

$$\begin{cases} dX^{t,x;u}(s) = b\left(s, X^{t,x,u}(s), u(s)\right) ds + \sigma\left(s, X^{t,x,u}(s), u(s)\right) dW(s), \\ X^{t,x,u}(t) = x, \qquad s \in [t, T], \end{cases} \tag{2.1}$$

où b :$[0, T] \times \mathbb{R}^n \times \mathbf{U} \to \mathbb{R}^n, \sigma : [0, T] \times \mathbb{R}^n \times \mathbf{U} \to \mathbb{R}^{n\times d}$ sont des fonctions donnés.

On note par $\mathcal{U}\left[t,T\right]$ l'ensemble de processus $\left\{\mathcal{F}_s^t\right\}_{s\geq t}$ adaptés. Pour $u\left(\cdot\right)\in\mathcal{U}\left(\left[t,T\right]\right)$ et $x\in\mathbb{R}^n$, le processus $X^{t,x;u}\left(\cdot\right)$ est appelé solution de 2.1, si et seulement si, il est $\mathcal{F}_s^t-$ adapté et 2.1 est vérifiée. Le contrôle $u\left(\cdot\right)\in\mathcal{U}\left(\left[t,T\right]\right)$ est un contrôle admissible et $\left(X^{t,x;u}\left(\cdot\right),u\left(\cdot\right)\right)$ est une paire admissible.

Nous supposons ce qui suit :

(**H1**) b,σ sont uniformément continus en (s,x,u), et il existe une constante $C>0$ telle que pour tout $s\in\left[0,T\right],x,\widehat{x}\in\mathbb{R}^n,u,\widehat{u}\in\mathbf{U}$,

$$\begin{aligned}\left|b\left(s,x,u\right)-b\left(s,\widehat{x},\widehat{u}\right)\right|+\left|\sigma\left(s,x,u\right)-\sigma\left(s,\widehat{x},\widehat{u}\right)\right|&\leq C\left(\left|x-\widehat{x}\right|+\left|u-\widehat{u}\right|\right),\\ \left|b\left(s,x,u\right)\right|\ +\left|\sigma\left(s,x,u\right)\right|&\leq C\left(1+\left|x\right|\right).\end{aligned}\tag{2.2}$$

Pour tout $u\left(\cdot\right)\in\mathcal{U}\left(\left[t,T\right]\right)$, et sous l'hypotèse (**H1**), l'EDS 2.1 admet une solution unique $X^{t,x,u}\left(\cdot\right)$ (pour plus de détails voir Yong et Zhou [26]). Ensuite, nous introduisons l'EDSR contrôlée suivante associe a l'EDS 2.1 :

$$\begin{cases}-dY^{t,x;u}\left(s\right)=f\left(s,X^{t,x,u}\left(s\right),Y^{t,x,u}\left(s\right),Z^{t,x,u}\left(s\right),u\left(s\right)\right)ds\\ \qquad\qquad -Z^{t,x,u}\left(s\right)dW\left(s\right),\quad s\in\left[t,T\right],\\ Y^{t,x,u}\left(T\right)=\phi\left(X^{t,x,u}\left(T\right)\right).\end{cases}\tag{2.3}$$

où $f:\left[0,T\right]\times\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}^d\times\mathbf{U}\longrightarrow\mathbb{R}$, Φ :$\mathbb{R}^n\longrightarrow\mathbb{R}$ sont des fonctions données.

(**H2**) f,ϕ, sont uniformément continues en (s,x,y,z,u) et il existe une constante $C>0$ telle que pour tout $s\in[0,T],x,\widehat{x}\in\mathbb{R}^n,y,\widehat{y}\in\mathbb{R},z,\widehat{z}\in\mathbb{R}^d,u,\widehat{u}\in\mathbf{U}$,

$$\begin{aligned}\left|f\left(s,x,y,z,u\right)-f\left(s,\widehat{x},\widehat{y},\widehat{z},\widehat{u}\right)\right|&\leq C\left(\left|x-\widehat{x}\right|+\left|y-\widehat{y}\right|+\left|z-\widehat{z}\right|+\left|u-\widehat{u}\right|\right),\\ \left|f\left(s,x,0,0,u\right)\right|+\left|\phi\left(x\right)\right|&\leq C\left(1+\left|x\right|\right),\\ \left|\phi\left(x\right)-\phi\left(\widehat{x}\right)\right|&\leq C\left|x-\widehat{x}\right|.\end{aligned}\tag{2.4}$$

Alors pour tout $u\left(\cdot\right)\in\mathcal{U}\left(\left[t,T\right]\right)$, et sous l'hypotèse (**H2**), l'EDSR 2.3 admet une solution unique $(Y^{t,x,u}(\cdot), Z^{t,x,u}(\cdot))$ (voir Pardoux et Peng [12] ou Yong et Zhou [26]).

La fonction de coût est donnée par

$$J(t,x;u(\cdot)) := -Y^{t,x;u}(s)\mid_{s=t}, \quad (t,x) \in [0,T] \times \mathbb{R}^n. \tag{2.5}$$

Notre problème de contrôle optimal stochastique récursif est le suivant :

Problème 2.1.1 (PCOSR) *Pour tout* $(t,x) \in [0,T) \times \mathbb{R}^n$ *, minimiser* 2.5 *associée de l'equation* $(1)-(3)$ *sur* $\mathcal{U}([t,T])$.

2.2 Principe de programmation dynamique

Dans cette section, on va etudier le principe de programmation dynamique pour résoudre le problème (**PCOSR**).

Nous définissons la fonction de valeur comme suit :

$$\begin{cases} V(t,x) := \inf\limits_{u(.)\in\mathcal{U}[t,T]} J(t,x;u(\cdot)), & (t,T) \in [0,T] \times \mathbb{R}^n, \\ V(T,x) = -\phi(x), & x \in \mathbb{R}^n. \end{cases} \tag{2.6}$$

Tout $\overline{u}(.) \in \mathcal{U}([t,T])$ atteint l'infimum ci-dessus est appelé contrôle optimal et les solutions correspondantes $\overline{X}^{t,x;\overline{u}}(\cdot)$ à l'équation 2.1 et $(\overline{Y}^{t,x;\overline{u}}(\cdot), \overline{Z}^{t,x;\overline{u}}(\cdot))$ à l'équation 2.3 sont appelés états optimaux.

Remarque 2.2.1 *Puisque* b, σ, f, g *sont des fonctions déterministes et à partir de [[15], Proposition* 5.1 *de Peng], et sous* $(\mathbf{H1})-(\mathbf{H2})$, *la fonction de valeur ci-dessus est une fonction déterministe. Donc, notre définition* 2.6 *est significative.*

Nous introduisons l'équation $\boldsymbol{HJB}$ généralisée suivante :

$$\begin{cases} -v_s\left(t,x\right)+\sup\limits_{u\in\mathbf{U}} G\left(t,x,-v(t,x),-v_x(t,x),-v_{xx}(t,x),u\right)=0, \quad (t,x)\in[0,T)\times\mathbb{R}^n, \\ v(T,x)=-\phi(x), \qquad \forall x\in\mathbb{R}^n, \end{cases} \tag{2.7}$$

où la fonction Hamiltonienne généralisée G :$[0,T]\times\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n\times\mathcal{S}^n\times\mathbf{U}\longrightarrow\mathbb{R}$ est définie

$$\begin{aligned} G\left(t,x,r,p,A,u\right) &:= \frac{1}{2}tr\left\{\sigma\left(t,x,u\right)^{\intercal}A\sigma\left(t,x,u\right)\right\} \\ &\quad + \left\langle p,b\left(t,x,u\right)\right\rangle + f\left(t,x,r,\sigma\left(t,x,u\right)^{\intercal}p,u\right). \end{aligned} \tag{2.8}$$

Nous avons le résultat suivante.

Lemme 2.2.1 (Théorème de vérification stochastique) *Sous l'hypothèse* $(\mathbf{H1})-(\mathbf{H2})$, *et pour* $(t,x)\in[0,T)\times\mathbb{R}^n$ *fixé. On suppose que* $V\in C^{1,2}\left([0,T]\times\mathbb{R}^n\right)$ *est une solution de* 2.7 , *alors*

$$\begin{aligned} V\left(t,x\right)\leq J\left(t,x;u\left(.\right)\right), &\qquad \forall u\left(.\right)\in\mathcal{U}\left[t,T\right], \\ &\qquad (t,x)\in[0,T]\times\mathbb{R}. \end{aligned} \tag{2.9}$$

De plus, $\left(\overline{X}^{t,x,\overline{u}}\left(\cdot\right),\bar{u}\left(\cdot\right)\right)$ *est optimal pour le problème (*$\boldsymbol{PCOSR}$*) si et seulement si*

$$\begin{aligned} &G\left(s,\overline{X}^{t,x;\overline{u}}\left(s\right),-V\left(s,\overline{X}^{t,x;\overline{u}}\left(s\right)\right),-V_x\left(s,\overline{X}^{t,x;\overline{u}}\left(s\right)\right),-V_{xx}\left(s,\overline{X}^{t,x;\overline{u}}\left(s\right)\right),\bar{u}\left(s\right)\right) \\ &=\max_{u\in U} G\left(s,\overline{X}^{t,x;\overline{u}}\left(s\right),-V\left(s,\overline{X}^{t,x;\overline{u}}\left(s\right)\right),-V_x\left(s,\overline{X}^{t,x;\overline{u}}\left(s\right)\right),-V_{xx}\left(s,\overline{X}^{t,x;\overline{u}}\left(s\right)\right),u\right), \\ &p.p.\ s\in\left[t,T\right],P-p.s \end{aligned} \tag{2.10}$$

Preuve. *Pour tout* $u\left(\cdot\right)\in\mathcal{U}\left(\left[t,T\right]\right)$ *avec l'état de correspondante* $X^{t,x;u}\left(\cdot\right)$, *en appliquant la formule d'Itô à* $V\left(s,X^{t,x;u}\left(s\right)\right)$, *nous obtenons*

$$
\begin{aligned}
& V(t,x) \\
& = -\mathbb{E}\phi\left(X^{t,x;u}(T)\right) - \mathbb{E}\int_t^T \Big\{ V_s\left(s, \overline{X}^{t,x;\overline{u}}(s)\right) + \langle V_x\left(s, X^{t,x;u}(s)\right), b\left(s, X^{t,x;u}(s), \right. \\
& \left. u(s)\right)\rangle + \tfrac{1}{2} tr(\sigma\left(s, X^{t,x;u}(s), u(s)\right)^{\intercal} \times V_{xx}\left(s, X^{t,x;u}(s)\right) \times \sigma\left(s, X^{t,x;u}(s), u(s)\right) \Big\}\, ds \\
& = -\mathbb{E}\phi\left(X^{t,x;u}(T)\right) - \mathbb{E}\int_t^T \{ V_s\left(s, X^{t,x;u}(s)\right) \\
& \qquad - V_x\left(s, X^{t,x;u}(s)\right), -V_{xx}\left(s, X^{t,x;u}(s)\right), u(s)) - f\left(s, X^{t,x;u}(s), \right. \\
& \qquad \left. -V\left(s, X^{t,x;u}(s)\right), -\sigma\left(s, X^{t,x;u}(s), u(s)\right)^{\intercal} \times V_x\left(s, X^{t,x;u}(s)\right), u(s)\right) \}\, ds \\
& = J\left(t,x;u(\cdot)\right) + \mathbb{E}\int_t^T \{ -V_s\left(s, X_s^{t,x;u}\right) + G\left(s, X^{t,x;u}(s), -V\left(s, X^{t,x;u}(s)\right), \right. \\
& \qquad \left. -V_x\left(s, X^{t,x;u}(s)\right), -V_{xx}\left(s, X^{t,x;u}(s)\right), u(s)\right) \}\, ds \\
& \le J\left(t,x;u(\cdot)\right) + \mathbb{E}\int_t^T \Big\{ -V_s\left(s, X^{t,x;u}(s)\right) + \max_{u\in U} G\left(s, X^{t,x;u}(s), -V\left(s, X^{t,x;u}(s)\right), \right. \\
& \left. -V_x(s, X^{t,x;u}(s)), -V_{xx}\left(s, X^{t,x;u}(s)\right), u\right) \}\, ds \\
& = J\left(t,x;u(\cdot)\right).
\end{aligned}
\tag{2.11}
$$

Donc 2.9 est vérifie. Ensuite, en appliquant l'inégalité ci-dessus à $\left(\overline{X}^{t,x;\overline{u}}(\cdot), \overline{u}(\cdot)\right)$, *nous avons*

$$
\begin{aligned}
V(t,x) = J\left(t,x;\overline{u}(\cdot)\right) + \mathbb{E}\int_t^T \Big\{ & -V_s\left(s, \overline{X}^{t,x;\overline{u}}(s)\right) + G(s, \overline{X}^{t,x;\overline{u}}(s), -V\left(s, \overline{X}^{t,x;\overline{u}}(s)\right), \\
& -V_x\left(s, \overline{X}^{t,x;\overline{u}}(s)\right), -V_{xx}\left(s, \overline{X}^{t,x;\overline{u}}(s)\right), \overline{u}(s)) \Big\}\, ds.
\end{aligned}
\tag{2.12}
$$

Le résultat souhaite immédiatement du fait que

$$-V_s\left(s,\overline{X}^{t,x;\overline{u}}(s)\right)+G\left(s,\overline{X}^{t,x;\overline{u}}(s),-V\left(s,\overline{X}^{t,x;\overline{u}}(s)\right),-V_x\left(s,\overline{X}^{t,x;\overline{u}}(s)\right),\right.$$
$$\left.-V_{xx}\left(s,\overline{X}^{t,x;\overline{u}}(s)\right),\overline{u}(s)\right)\leq 0\,, \tag{2.13}$$

ce qui est convenable à l'équation de ***HJB*** *généralisée* 2.7 . ■

2.3 Principe du maximum

Pour énoncer le principe du maximum, nous considérons l'EDS 2.1 et l'EDSR 2.3 en tant que FBSDE contrôlé :

$$\begin{cases} dX^{t,x;u}(s)=b\left(s,X^{t,x;u}(s),u(s)\right)ds \\ \qquad\qquad +\sigma\left(s,X^{t,x;u}(s),u(s)\right)dW(s)\,, \\ -dY^{t,x;u}(s)=f\left(s,X^{t,x;u}(s),Y^{t,x;u}(s),Z^{t,x;u}(s),u(s)\right)ds \\ \qquad\qquad -Z^{t,x;u}(s)\,dW(s)\,, \qquad s\in[t,T]\,, \\ X^{t,x,;u}(t)=x, \qquad Y^{t,x;u}(T)=\phi\left(X^{t,x;u}(T)\right). \end{cases} \tag{2.14}$$

Ce type de système de contrôle a été étudié par Peng [14], et un principe du maximum a été obtenu. Afin de mentionner son résultat, nous avons besoin de l'hypothèse suivante.
(**H3**) b,σ,φ sont continument différenciables en (x,u) et f est continument différenciable en (x,y,z,u). De plus $b_x,\sigma_x,f_x,f_y,f_z,b_u,\sigma_u,f_u$ sont bornés et il existe un constant $C>0$ tel que

$$|\phi_x(x)|\leq C\left(1+|x|\right), \qquad \forall x\in\mathbb{R}^n. \tag{2.15}$$

Soit $\left(\overline{X}^{t,x;\overline{u}}(\cdot), \overline{Y}^{t,x;\overline{u}}(\cdot), \overline{Z}^{t,x;\overline{u}}(\cdot), \overline{u}(\cdot)\right)$ est optimal. On note par

$$\begin{aligned}
\overline{b}(s) &:= b\left(s, \overline{X}^{t,x;\overline{u}}(s), \overline{u}(s)\right), \\
\overline{\sigma}(s) &:= b\left(s, \overline{X}^{t,x;\overline{u}}(s), \overline{u}(s)\right), \qquad s \in [0,T], \\
\overline{f}(s) &:= f\left(s, \overline{X}^{t,x;\overline{u}}(s), \overline{Y}^{t,x;\overline{u}}(s), \overline{Z}^{t,x;\overline{u}}, \overline{u}(s)\right),
\end{aligned} \tag{2.16}$$

et des notations similaires sont utilisées pour toutes dérivées.

Nous introduisons l'équation adjointe FBSDE :

$$\begin{cases}
-dp(s) = \left[\overline{b}_x(s)^\intercal p(s) - \overline{f}_x(s)^\intercal q(s) + \overline{\sigma}_x(s) k(s)\right] ds - k(s) dW(s), \\
dq(s) = \overline{f}_y(s)^\intercal q(s) ds + \overline{f}_z(s)^\intercal q(s) dW(s), \qquad\qquad s \in [t,T], \\
p(T) = -\phi_x\left(\overline{X}^{t,x;\overline{u}}(T)\right)^\intercal q(T), \qquad\qquad q(t) = 1,
\end{cases} \tag{2.17}$$

et la fonction hamiltonienne $H : [0,T] \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d \times \mathbf{U} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{n\times d} \longrightarrow \mathbb{R}$ est définie comme

$$\begin{aligned}
H(t,x,y,z,u,p,q,k) := &\langle p, b(t,x,u)\rangle - \langle q, f(t,x,y,z,u)\rangle \\
&+ tr\left[\sigma(t,x,u)^\intercal k\right].
\end{aligned} \tag{2.18}$$

Sous l'hypothèses $(\mathbf{H1}) - (\mathbf{H3})$, l'équation différentielle stochastique en 2.17 admet une solution unique évidente $p(\cdot)$, de plus l'équation différentielle stochastique rétrograde en 2.17 admet une solution unique $(q(\cdot), k(\cdot))$. Nous appelons p, q, k les processus adjoints. Ensuite, le résultat suivante .

Lemme 2.3.1 (Condition nécessaire d'optimalité) *Sous l'hypothèses* $(\mathbf{H1}) - (\mathbf{H3})$ *et* $(t,x) \in [0,T) \times \mathbb{R}^n$ *fixé. Supposons que* $\overline{u}(\cdot)$ *est un contrôle optimal pour le problème (**PCOSR**), et* $\left(\overline{X}^{t,x;\overline{u}}(\cdot), \overline{Y}^{t,x;\overline{u}}(\cdot), \overline{Z}^{t,x;\overline{u}}(\cdot)\right)$ *est l'état optimal correspondant . Soit*

$(p(\cdot), q(\cdot), k(\cdot))$ *les processus adjoints, alors*

$$\left\langle H_u\left(s, \overline{X}^{t,x;\overline{u}}(s), \overline{Y}^{t,x;\overline{u}}(s), \overline{Z}^{t,x;\overline{u}}(s), \overline{u}(s), p(s), q(s), k(s)\right), u-\overline{u}(s)\right\rangle \geq 0, \tag{2.19}$$
$$\forall u \in \mathbf{U}, \qquad p.p.\ s \in [t,T], P-p.s.$$

Preuve. C'est une conséquence de [Théorème 4.4, Peng [14]]. Nous pouvons prouver que dans certaines conditions de convexité supplémentaires , la condition nécessaire mentionnée ci-dessus dans le lemme 2.3.1 est également suffisante. ■

Lemme 2.3.2 (Condition suffisante d'optimalité) *Sous l'hypothèses* $(\mathbf{H1})-(\mathbf{H3})$, *supposons que* $\overline{u}(\cdot)$ *est un contrôle admissible et* $\left(\overline{X}^{t,x;\overline{u}}(\cdot), \overline{Y}^{t,x;\overline{u}}(\cdot), \overline{Z}^{t,x;\overline{u}}(\cdot)\right)$ *est l'état correspondant, avec* $Y(T)=M_T^{\intercal}X(T), M_T\in\mathbb{R}^n$ *. Soit* $(p(\cdot), q(\cdot), k(\cdot))$ *sont les processus adjoints . Supposons que la fonction hamiltonienne* H *est convexe dans* (x,y,z,u), *alors* $\overline{u}(\cdot)$ *est un contrôle optimal du problème (**PCOSR**) s'il est satisfait 2.19 .*

Preuve. Pour tout $u(\cdot)\in\mathcal{U}[t,T]$ avec l'état correspondant $(X^{t,x;u}(\cdot), Y^{t,x;u}(\cdot), Z^{t,x;u}(\cdot))$. On utilison la remarque 2.2.1 et pour tout $t\in[0,T]$ fixé, nous avons

$$\begin{aligned} J(t,x;\overline{u}(t)) - J(t,x;u(t)) &= Y^{t,x;u}(t) - Y^{t,x;\overline{u}}(t) \\ &= \mathbb{E}\left[Y^{t,x;u}(t) - Y^{t,x;\overline{u}}(t)\right]\cdot \end{aligned} \tag{2.20}$$

On appliquons la formule d'Itô à $\left\langle \overline{Y}^{t,x;\overline{u}}(s) - Y^{t,x;u}(s), q(s)\right\rangle + \left\langle \overline{X}^{t,x;\overline{u}}(s) - X^{t,x;u}(s), p(s)\right\rangle$, remarquer 2.14 , 2.17 et

$$\overline{Y}^{t,x;\overline{u}}(T) - Y^{t,x;u}(T) = M_T^{\intercal}\left(\overline{X}^{t,x;\overline{u}}(T) - X^{t,x;u}(T)\right),$$
$$p(T) = -M_T q(T),$$

on obtient

$$
\begin{aligned}
&\mathbb{E}\left(\overline{Y}^{t,x;\overline{u}}(T)-Y^{t,x;u}(T)\right)q(T)-\mathbb{E}\left(\overline{Y}^{t,x;\overline{u}}(t)-Y^{t,x;u}(t)\right)q(t)\\
&+\mathbb{E}\left\langle\overline{X}^{t,x;\overline{u}}(T)-X^{t,x;u}(T),p(T)\right\rangle-\mathbb{E}\left\langle\overline{X}^{t,x;\overline{u}}(t)-X^{t,x;u}(t),p(t)\right\rangle\\
&=-\mathbb{E}\left[\overline{Y}^{t,x;\overline{u}}(t)-Y^{t,x;u}(t)\right]\\
&=\mathbb{E}\int_t^T\left\{\left\langle\overline{Y}^{t,x;\overline{u}}(s)-Y^{t,x;u}(s),\overline{f}_y(s)^{\intercal}q(s)\right\rangle+\left\langle\overline{Z}^{t,x;\overline{u}}(s)-Z^{t,x;u}(s),\overline{f}_z(s)^{\intercal}q(s)\right\rangle\right.\\
&\qquad-\left\langle\overline{f}(s)-f\left(s,X^{t,x;u}(s),Y^{t,x;u}(s),Z^{t,x;u}(s),u(s),\right),q(s)\right\rangle\\
&\qquad+\left\langle\overline{X}^{t,x;\overline{u}}(s)-X^{t,x;u}(s),-\overline{b}_x(s)^{\intercal}p(s)+\overline{f}_x(s)^{\intercal}q(s)-\overline{\sigma}_x(s)k(s)\right\rangle\\
&\qquad\left.+\left\langle\overline{b}(s)-b\left(s,X^{t,x;u}(s),u(s)\right),p(s)\right\rangle+tr\left[\left(\overline{\sigma}(s)-\sigma\left(s,X^{t,x;u}(s),u(s)\right)\right)^{\intercal}k(s)\right]\right\}ds\\
&=\mathbb{E}\int_t^T\left\{H\left(s,\overline{X}^{t,x;\overline{u}}(s),\overline{Y}^{t,x;\overline{u}}(s),\overline{Z}^{t,x;\overline{u}}(s),\overline{u}(s),\ p(s),q(s),k(s)\right)\right.\\
&\qquad-H\left(s,X^{t,x;u}(s),Y^{t,x;u}(s),Z^{t,x;u}(s),u(s),p(s),q(s),k(s)\right)\\
&\qquad-\left\langle H_x\left(s,\overline{X}^{t,x;\overline{u}}(s),\overline{Y}^{t,x;\overline{u}}(s),\overline{z}^{t,x;\overline{u}}(s),\overline{u}(s),p(s),q(s),k(s)\right),\overline{X}^{t,x;\overline{u}}(s)-X^{t,x,u}(s)\right\rangle\\
&\qquad-\left\langle H_y\left(s,\overline{X}^{t,x;\overline{u}}(s),\overline{Y}^{t,x;\overline{u}}(s),\overline{Z}^{t,x;\overline{u}}(s),\overline{u}(s),p(s),q(s),k(s)\right),\overline{Y}^{t,x;\overline{u}}(s)-Y^{t,x;u}(s)\right\rangle
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&-\left\langle H_z\left(s,\overline{X}^{t,x;\overline{u}}(s),\overline{Y}^{t,x;\overline{u}}(s),\overline{Z}^{t,x;\overline{u}}(s),\overline{u}(s),p(s),q(s),k(s)\right)\right.\\
&\left.\left.,\overline{Z}^{t,x;\overline{u}}(s)-Z^{t,x;u}(s)\right\rangle\right\}ds.
\end{aligned}
\tag{2.21}
$$

Puisque H est convexe (x,y,z,u), et par 2.19 on obtient

$$
\begin{aligned}
&J\left(t,x;\overline{u}\left(t\right)\right)-J\left(t,x;u\left(t\right)\right)\\
&\quad\leq\mathbb{E}\int_t^T\Big\langle H_u\Big(s,\overline{X}^{t,x;\overline{u}}\left(s\right),\overline{Y}^{t,x;\overline{u}}\left(s\right),\overline{Z}^{t,x;\overline{u}}\left(s\right),\overline{u}\left(s\right),\\
&\qquad\qquad p\left(s\right),q\left(s\right),k\left(s\right)\Big),\overline{u}\left(s\right)-u\left(s\right)\Big\rangle\leq 0.
\end{aligned}
\tag{2.22}
$$

Alors $\overline{u}\left(.\right)$ est vraiment le contrôle optimal du problème (**PCOSR**). ■

Chapitre 3

Relation entre principe du maximum et principe de programmation dynamique

Dans ce chapitre, on va étudier la relation entre le principe du maximum et la programmation dynamique. C'est-à-dire la relation entre la fonction de valeur V, la fonction d'hamiltonien généralisée G et les processus adjoints p, q, k . Le résultat principale est le théorème suivante :

Théorème 3.0.1 *Sous l'hypothèses* $(\mathbf{H1})-(\mathbf{H3})$ *et* $(t,x) \in [0,T] \times \mathbb{R}^n$ *fixé, on suppose que* $\overline{u}(\cdot)$ *est un contrôle optimal pour le problème (**PCOSR**), et* $\left(\overline{X}^{t,x;\overline{u}}(\cdot), \overline{Y}^{t,x;\overline{u}}(\cdot), \overline{Z}^{t,x;\overline{u}}(\cdot)\right)$ *est l'état optimal correspondant, soient* $(p(\cdot), q(\cdot), k(\cdot))$ *les processus adjoints.*

Si $V \in C^{1.2}([0,T]\times\mathbb{R}^n)$ *,alors*

$$\begin{aligned}
&V_s\left(s,\overline{X}^{t,x;\overline{u}}(s)\right)\\
&=G\left(s,\overline{X}^{t,x;\overline{u}}(s),-V\left(s,\overline{X}^{t,x;\overline{u}}(s)\right),-V_x\left(s,\overline{X}^{t,x;\overline{u}}(s)\right),-V_{xx}\left(s,\overline{X}^{t,x;\overline{u}}(s)\right),\overline{u}(s)\right)\\
&=\max_{u\in U}G\left(s,\overline{X}^{t,x;\overline{u}}(s),-V\left(s,\overline{X}^{t,x;\overline{u}}(s)\right),-V_x\left(s,\overline{X}^{t,x;\overline{u}}(s)\right),-V_{xx}\left(s,\overline{X}^{t,x;\overline{u}}(s)\right),u\right),
\end{aligned} \tag{3.1}$$

p.p. $s\in[t,T]$, $P-p.s.$ *De plus si* $V\in C^{1,3}([0,T]\times\mathbb{R}^n)$ *et* V_{sx} *est également continu, alors*

$$\begin{aligned}
&p(s)=V_x\left(s,\overline{X}^{t,x;\overline{u}}(s)\right)^{\intercal}q(s), \qquad\qquad \forall s\in[t,T],P-p.s,\\
&k(s)=\Big\{V_{xx}(s,\overline{X}^{t,x;\overline{u}}(s))^{\intercal}\overline{\sigma}(s)+V_x(s,\overline{X}^{t,x;\overline{u}}(s))^{\intercal}\\
&\qquad\times f_z\left(s,\overline{X}^{t,x;\overline{u}}(s),-V\left(s,\overline{X}^{t,x;\overline{u}}(s)\right),-V_x\left(s,\overline{X}^{t,x;\overline{u}}(s)\right)\overline{\sigma}(s),\overline{u}(s)\right)\Big\}q(s),\\
&p.p.\ s\in[t,T],P-p.s.,
\end{aligned} \tag{3.2}$$

où

$$\begin{aligned}
q(s)=\exp\Big\{&\int_t^s\Big[f_y\left(r,\overline{X}^{t,x;\overline{u}}(r),-V\left(r,\overline{X}^{t,x;\overline{u}}(r)\right),-V_x\left(r,\overline{X}^{t,x;\overline{u}}(r),\overline{u}(r)\right)\overline{\sigma}(r),\overline{u}(r)\right)\\
&-\frac{1}{2}\left|f_z\left(r,\overline{X}^{t,x;\overline{u}}(r),-V\left(r,\overline{X}^{t,x;\overline{u}}(r)\right),-V_x\left(r,\overline{X}^{t,x;\overline{u}}(r)\right)\times\overline{\sigma}(r),\overline{u}(r)\right)\right|^2\Big]dr\\
&+\int_t^s f_z\left(r,\overline{X}^{t,x;\overline{u}}(r),-V\left(r,\overline{X}^{t,x;\overline{u}}(r)\right),-V_x\left(r,\overline{X}^{t,x;\overline{u}}(r)\right)\times\overline{\sigma}(r),\overline{u}(r)\right)dW(r)\Big\}.
\end{aligned} \tag{3.3}$$

Preuve. L'équation 3.3 peut être obtenu en résolvant directement l'EDS en 2.17 . Maintenant reste prouver 3.2 . Par [Théorème 5.4 de Peng [15]] , pour fixe $t\in[0,T)$, il est facile d'obtenir

$$\begin{aligned} V\left(s, \overline{X}^{t,x;\overline{u}}(s)\right) &= -\overline{Y}^{t,x;\overline{u}}(s) \\ &= -\mathbb{E}\left[\int_s^T \overline{f}(r)\,dr + \phi\left(\overline{X}^{t,x;\overline{u}}(T)\right) \mid \mathcal{F}_s^t\right], \\ &\forall s \in [t,T], P - p.s. \end{aligned} \tag{3.4}$$

Définissons une martingale de carré intégrable adapté à la filtration $\mathcal{F}_s^t$

$$m(s) := -\mathbb{E}\left[\int_t^T \overline{f}(r)\,dr + \phi\left(\overline{X}_T^{t,x;\overline{u}}\right) \mid \mathcal{F}_s^t\right], \qquad s \in [t,T], \tag{3.5}$$

ainsi , par le théorème de représentation des martingale (voir Yong et Zhou [26]) , il existe un $M(\cdot) \in L^2_{\mathcal{F}}\left([t,T];\mathbb{R}^d\right)$ unique satisfaisant

$$m(s) = m(t) + \int_t^s M(r)\,dW(r), \tag{3.6}$$

où $t \in [0,T)$ est fixé. Puis

$$V\left(s, \overline{X}^{t,x;\overline{u}}(s)\right) = -\int_t^T \overline{f}(r)\,dr - \int_t^T M(r)\,dW(r) + V\left(T, \overline{X}^{t,x;\overline{u}}(T)\right). \tag{3.7}$$

D'autre part , en appliquant la formule d'Itô à $V\left(s, \overline{X}^{t,x;\overline{u}}(s)\right)$, nous obtenons

$$\begin{aligned} dV\left(s, \overline{X}^{t,x;\overline{u}}(s)\right) &= \{V_s\left(s, \overline{X}^{t,x;\overline{u}}(s)\right) + \left\langle V_x\left(s, \overline{X}^{t,x;\overline{u}}(s)\right), \overline{b}(s)\right\rangle \\ &+ \frac{1}{2} tr\left(\overline{\sigma}(s)^\intercal V_{xx}\left(s, \overline{X}^{t,x;\overline{u}}(s)\right)\overline{\sigma}(s)\right)\}ds \\ &+ V_x\left(s, \overline{X}^{t,x;\overline{u}}(s)\right)^\intercal \overline{\sigma}(s)\,dW(s). \end{aligned} \tag{3.8}$$

En comparant les deux égalités ci-dessus, on conclure que

$$
\begin{aligned}
&V_s\left(s,\overline{X}^{t,x;\overline{u}}(s)\right)+\left\langle V_x\left(s,\overline{X}^{t,x;\overline{u}}(s)\right),\overline{b}(s)\right\rangle+\frac{1}{2}tr\left(\overline{\sigma}(s)^{\intercal}V_{xx}\left(s,\overline{X}^{t,x;\overline{u}}(s)\right)\overline{\sigma}(s)\right)=\overline{f}(s),\\
&V_x\left(s,\overline{X}^{t,x;\overline{u}}(s)\right)^{\intercal}\overline{\sigma}(s)=M(s),\qquad p.p.\ s\in[t,T],P-p.s. \qquad (3.9)
\end{aligned}
$$

Par l'unicité de la solution à EDSR 2.3 , nous avons

$$
\begin{aligned}
&\overline{Y}^{t,x;\overline{u}}(s)=-V\left(s,\overline{X}^{t,x;\overline{u}}(s)\right),\\
&\overline{Z}^{t,x;\overline{u}}(s)=-V_x\left(s,\overline{X}^{t,x;\overline{u}}(s)\right)^{\intercal}\overline{\sigma}(s),\qquad p.p.\ s\in[t,T],P-p.s. \qquad (3.10)
\end{aligned}
$$

Puisque $V\in C^{1,2}([0,\ T]\times R^n)$, elle vérifie l'équation de HJB généralisée 2.7 , ce qui implique 3.1 . Aussi, par 2.7 , nous avons

$$
\begin{aligned}
0=&-V_s\left(s,\overline{X}^{t,x;\overline{u}}(s)\right)+G\left(s,\overline{X}^{t,x;\overline{u}}(s),-V\left(s,\overline{X}^{t,x;\overline{u}}(s)\right),-V_x\left(s,\overline{X}^{t,x;\overline{u}}(s)\right),\right.\\
&\left.-V_{xx}\left(s,\overline{X}^{t,x;\overline{u}}(s)\right),\overline{u}(s)\right)\\
&\geq-V_s(s,x)+G(s,x,-V(s,x),-V_x(s,x),-V_{xx}(s,x),\overline{u}(s)),\qquad \forall x\in\mathbb{R}^n \quad (3.11)
\end{aligned}
$$

Par conséquent, si $V\in C^{1,3}([0,T]\times\mathbb{R}^n)$ et V_{sx} est également continu, alors

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial x}\{-V_s(s,x)+G(s,x,-V(s,x),-V_x(s,x),-V_{xx}(s,x),\overline{u}(s))\}\,|_{x=\overline{X}^{t,x;\overline{u}}(s)}=0,\\
&\forall s\in[t,T]. \qquad (3.12)
\end{aligned}
$$

C'est équivalent à (rappel 2.8), pour tout $s \in [t, T]$

$$\begin{aligned}
0 &= -V_{sx}\left(s, \overline{X}^{t,x;\overline{u}}(s)\right) - V_{xx}\left(s, \overline{X}^{t,x;\overline{u}}(s)\right)\overline{b}(s) - \overline{b}_x(s)^{\intercal} V_x\left(s, \overline{X}^{t,x;\overline{u}}(s)\right) \\
&- \frac{1}{2}tr\left(\overline{\sigma}(s)^{\intercal} V_{xxx}\left(s, \overline{X}^{t,x;\overline{u}}(s)\right)\overline{\sigma}(s)\right) - \overline{\sigma}_x(s)^{\intercal} V_{xx}\left(s, \overline{X}^{t,x;\overline{u}}(s)\right)\overline{\sigma}(s) \\
&+ f_x\left(s, \overline{X}^{t,x;\overline{u}}(s), -V\left(s, \overline{X}^{t,x;\overline{u}}(s)\right), -V_x\left(s, \overline{X}^{t,x;\overline{u}}(s)\right)\overline{\sigma}(s), \overline{u}(s)\right) \\
&- f_y\left(s, \overline{X}^{t,x;\overline{u}}(s), -V\left(s, \overline{X}^{t,x;\overline{u}}(s)\right), -V_x\left(s, \overline{X}^{t,x;\overline{u}}(s)\right)\overline{\sigma}(s), \overline{u}(s)\right) \times V_x\left(s, \overline{X}^{t,x;\overline{u}}(s)\right) \\
&- f_z\left(s, \overline{X}^{t,x;\overline{u}}(s), -V\left(s, \overline{X}^{t,x;\overline{u}}(s)\right), -V_x\left(s, \overline{X}^{t,x;\overline{u}}(s)\right)\overline{\sigma}(s), \overline{u}(s)\right) \\
&\times \left[V_{xx}\left(s, \overline{X}^{t,x;\overline{u}}(s)\right)\overline{\sigma}(s) + V_x\left(s, \overline{X}^{t,x;\overline{u}}(s)\right)\overline{\sigma}_x(s)\right], \qquad (3.13)
\end{aligned}$$

où

$$tr\left(\overline{\sigma}^{\intercal} V_{xxx}\overline{\sigma}\right) := \left(tr\left(\overline{\sigma}^{\intercal}\left((V_x)^1\right)_{xx}\overline{\sigma}\right), ..., tr\left(\overline{\sigma}^{\intercal}\left((V_x)^n\right)_{xx}\overline{\sigma}\right)\right)^{\intercal}, \qquad (3.14)$$

$$\left((V_x)^n, ..., (V_x)^n\right)^{\intercal} = V_x$$

D'autre part ,on appliquant la formule d'Itô à $V_x\left(s, \overline{X}^{t,x;\overline{u}}(s)\right)$, nous obtenons

$$\begin{aligned}
dV_x\left(s, \overline{X}^{t,x;\overline{u}}(s)\right) &= -\Big\{\overline{b}_x(s)^{\intercal} V_x\left(s, \overline{X}^{t,x;\overline{u}}(s)\right) + \overline{\sigma}_x(s)^{\intercal} \times V_{xx}\left(s, \overline{X}^{t,x;\overline{u}}(s)\right)\overline{\sigma}(s) \\
&- f_x\left(s, \overline{X}^{t,x;\overline{u}}(s), -V\left(s, \overline{X}^{t,x;\overline{u}}(s)\right), -V_x\left(s, \overline{X}^{t,x;\overline{u}}(s)\right)\overline{\sigma}(s), \overline{u}(s)\right) \\
&+ f_y\left(s, \overline{X}^{t,x;\overline{u}}(s), -V\left(s, \overline{X}^{t,x;\overline{u}}(s)\right), -V_x\left(s, \overline{X}^{t,x;\overline{u}}(s)\right)\overline{\sigma}(s), \overline{u}(s)\right) \\
&\times V_x\left(s, \overline{X}^{t,x;\overline{u}}(s)\right) + f_z\left(s, \overline{X}^{t,x;\overline{u}}(s), -V\left(s, \overline{X}^{t,x;\overline{u}}(s)\right)\right. \\
&\left.-V_x\left(s, \overline{X}^{t,x;\overline{u}}(s)\right)\overline{\sigma}(s), \overline{u}(s)\right) \times \Big[V_{xx}\left(s, \overline{X}^{t,x;\overline{u}}(s)\right)\overline{\sigma}(s) \\
&+V_x\left(s, \overline{X}^{t,x;\overline{u}}(s)\right)\overline{\sigma}_x(s)\Big]\Big\} ds + V_{xx}\left(s, \overline{X}^{t,x;\overline{u}}(s)\right)^{\intercal}\overline{\sigma}(s)\, dW(s)
\end{aligned}$$

$$(3.15)$$

Notez que $V_x\left(T,\overline{X}^{t,x;\overline{u}}(T)\right)=-\phi_x(\overline{X}^{t,x;\overline{u}}(T))$,on appliquant à nouveau la formule d'Itô à $V_x\left(s,\overline{X}^{t,x;\overline{u}}(s)\right)^\intercal q(s)$, nous avons

$$\begin{aligned}
dV_x\left(s,\overline{X}^{t,x;\overline{u}}(s)\right)^\intercal q(s) = &\Big\{-\overline{b}_x(s)^\intercal V_x\left(s,\overline{X}^{t,x;\overline{u}}(s)\right)q(s)+f_x\left(s,\overline{X}^{t,x;\overline{u}}(s),-V\left(s,\overline{X}^{t,x;\overline{u}}(s)\right),\right.\\
&\left.-V_x\left(s,\overline{X}^{t,x;\overline{u}}(s)\right)\overline{\sigma}(s),\overline{u}(s)\right)^\intercal q(s)-\overline{\sigma}_x(s)^\intercal\Big[V_{xx}\left(s,\overline{X}^{t,x;\overline{u}}(s)\right)^\intercal\overline{\sigma}(s)\\
&+V_x\left(s,\overline{X}^{t,x;\overline{u}}(s)\right)^\intercal\times f_z(s,\overline{X}^{t,x;\overline{u}}(s),-V\left(s,\overline{X}^{t,x;\overline{u}}(s)\right),\\
&-V_x\left(s,\overline{X}^{t,x;\overline{u}}(s)\right)\overline{\sigma}(s),\overline{u}(s))\Big]q(s)\Big\}ds\\
&+\Big\{V_{xx}\left(s,\overline{X}^{t,x;\overline{u}}(s)\right)^\intercal\overline{\sigma}(s)+V_x\left(s,\overline{X}^{t,x;\overline{u}}(s)\right)^\intercal\\
&\times f_z(s,\overline{X}^{t,x;\overline{u}}(s),-V\left(s,\overline{X}^{t,x;\overline{u}}(s)\right),\\
&-V_x\left(s,\overline{X}^{t,x;\overline{u}}(s)\right)\overline{\sigma}(s),\overline{u}(s)\Big)\Big\}\times q(s)\,dW(s) \qquad (3.16)
\end{aligned}$$

Par conséquent, l'unicité des solutions à l'équation adjointe 2.17 , nous obtenons 3.2 ■

Bibliographie

[1] K. Bahlali, F. Chighoub and B. Mezerdi, On the relationship between the stochastic maximum principle and dynamic programming in singular stochastic control, Stochastics An International Journal of Probability and Stochastic Processes 84 (2012), no. 2-3, 233-249.

[2] A. Bensoussan, "Lectures on stochastic control," Nonlinear filtering and stochastic control, Springer, 1982, pp. 1-62.

[3] J. M. Bismut, An introductory approach to duality in optimal stochastic control, SIAM review 20 (1978), no. 1, 62-78.

[4] D. Duffie and L. G. Epstein, Stochastic differential utility, Econometrica : Journal of the Econometric Society (1992), 353-394.

[5] N. El Karoui, S. Peng and M. C. Quenez, Backward stochastic differential equations in finance, Mathematical Finance 7 (1997), no. 1, 1-71.

[6] N. El Karoui, S. Peng and M. Quenez, A dynamic maximum principle for the optimization of recursive utilities under constraints, The Annals of Applied Probability 11 (2001), no. 3, 664-693.

[7] N. C. Framstad, B. Øksendal and A. Sulem, Sufficient stochastic maximum principle for the optimal control of jump diffusions and applications to finance, Journal of Optimization Theory and Applications 121 (2004), no. 1, 77-98.

[8] N. C. Framstad, B. Øksendal, and A. Sulem, “Errata corrige. Sufcient stochastic maximum principle for the optimal control of jump diffusions and applications to

fnance," Journal of Optimization Teory and Applications, vol. 124, no. 2, pp. 511–512, 2005.

[9] S. Ji and X. Y. Zhou, A maximum principle for stochastic optimal control with terminal state constraints, and its applications, Communications in Information & Systems 6 (2006), no. 4, 321-338.

[10] M. Kohlmann and X. Y. Zhou, Relationship between backward stochastic differential equations and stochastic controls : A linear-quadratic approach, SIAM Journal on Control and Optimization 38 (2000), no. 5, 1392-1407.

[11] J. Li and S. Peng, Stochastic optimization theory of backward stochastic differential equations with jumps and viscosity solutions of hamilton–jacobi–bellman equations, Nonlinear Analysis : Theory, Methods & Applications 70 (2009), no. 4, 1776-1796.

[12] E. Pardoux and S. Peng, Adapted solution of a backward stochastic differential equation, Systems & control letters 14 (1990), no. 1, 55-61.

[13] S. Peng, A generalized dynamic programming principle and hamilton-jacobi-bellman equation, Stochastics : An International Journal of Probability and Stochastic Processes 38 (1992), no. 2, 119-134.

[14] S. Peng, Backward stochastic differential equations and applications to optimal control, Applied Mathematics and Optimization 27 (1993), no. 2, 125-144.

[15] S. Peng, "Backward stochastic differential equations-stochastic optimization theory and viscosity solutions of hjb equations, topics on stochastic analysis (in chinese), edited by ja yan, sg peng, sz fang and lm wu," Science Press, Beijing, 1997.

[16] M. Schroder and C. Skiadas, Optimal consumption and portfolio selection with stochastic differential utility, Journal of Economic Theory 89 (1999), no. 1, 68-126.

[17] J. Shi and Z. Wu, Maximum principle for partially-observed optimal control of fully-coupled forward-backward stochastic systems, Journal of Optimization Theory and Applications 145 (2010), no. 3, 543-578.

[18] J. T. Shi and Z. Wu, Relationship between mp and dpp for the stochastic optimal control problem of jump diffusions, Applied Mathematics & Optimization 63 (2011), no. 2, 151-189.

[19] J. Shi and Z. Yu, Relationship between maximum principle and dynamic programming for stochastic recursive optimal control problems and applications, Mathematical Problems in Engineering 2013 (2013).

[20] G. Wang and Z. Wu, The maximum principles for stochastic recursive optimal control problems under partial information, IEEE Transactions on Automatic control 54 (2009), no. 6, 1230-1242.

[21] N. Williams, On dynamic principal-agent problems in continuous time, University of Wisconsin, Madison (2009).

[22] Z. Wu and Z. Yu, Dynamic programming principle for one kind of stochastic recursive optimal control problem and hamilton–jacobi–bellman equation, SIAM Journal on Control and Optimization 47 (2008), no. 5, 2616-2641.

[23] Z. Wu, A general maximum principle for optimal control of forward–backward stochastic systems, Automatica 49 (2013), no. 5, 1473-1480.

[24] Z. Xun yu, A unified treatment of maximum principle and dynamic programming in stochastic controls, Stochastics : An International Journal of Probability and Stochastic Processes 36 (1991), no. 3-4, 137-161.

[25] W. Xu, Stochastic maximum principle for optimal control problem of forward and backward system, The ANZIAM Journal 37 (1995), no. 2, 172-185.

[26] J. Yong and X. Y. Zhou, Stochastic controls : Hamiltonian systems and hjb equations, vol. 43, Springer Science & Business Media, 1999.

[27] L. Zhang, Stochastic verification theorem of forward–backward controlled systems for viscosity solutions, Systems & control letters 61 (2012), no. 5, 649-654.

[28] X. Zhang, R. J. Elliott and T. K. Siu, A stochastic maximum principle for a markov regime-switching jump-diffusion model and its application to finance, SIAM Journal on Control and Optimization 50 (2012), no. 2, 964-990.

[29] X. Zhou, Maximum principle, dynamic programming, and their connection in deterministic control, Journal of Optimization Theory and Applications 65 (1990), no. 2, 363-373.

[30] X. Y. Zhouf, The connection between the maximum principle and dynamic programming in stochastic control, Stochastics : An International Journal of Probability and Stochastic Processes 31 (1990), no. 1-4, 1-13.