République Algérienne Démocratique et Populaire

Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

UNIVERSITÉ MOHAMED KHIDER, BISKRA

FACULTÉ des SCIENCES EXACTES et des SCIENCES de la NATURE et de la VIE

DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES

Mémoire présenté en vue de l'obtention du Diplôme **:**

MASTER en Mathématiques

Option : **Probabilités**

Par

Soltane Lyamna

Titre :

Principe du Maximum Stochastiques avec Information Partielle

Membres du Comité d'Examen :

Dr.	**LAKHDARI Imad Eddine**	UMKB	Précident
Dr.	**KORICHI Fatiha**	UMKB	Encadreur
Dr.	**BEROUIS Nassima**	UMKB	Examinateur

Juin 2019

Didicace

Je dédie ce humble travail :

A Mes chers Parents.

A mes soeurs et mes fréres.

A toute la famille : Soltane.

A toute mes amies :YAHIAOUI Henia

A toute la promotion de mathématiques.

Soltane Lyamna, Juint 2019.

Remerciements

La vie n'est pas plus belle qu'un moment où l'homme enquête Maya Mel e Et le frisson du succès est le plus grand de toute vie et nous sont la cueillette du fruit du succès que nous devons aller de l' avant redevables à la fois nous ont aidés à atteindre ce que nous avons atteint

Par conséquent, remerciant le début du crédit au Dieu Tout-Puissant qui m'a aidé

J'adresse également mes remerciements et ma gratitude à mes parents et à mes frères pour leur bon soutien dans cette vie.

Je tiens également mes remerciements à Korichi mon professeur , mon superviseur Fatiha dirigée et motivée

J'adresse également mes remerciements et ma reconnaissance au Professeur CHala Adel, qui lui témoigne mon respect.

Merci et appréciation à les membres du comité qui ont la discussion s'il vous plaît lire ce message.

Je voudrais également exprimer mes remerciements et ma gratitude à mes collègues et collègues du département de mathématiques . ... Dieu nous les a récompensés comme bons .

Introduction

Dans ce travail, notre objectif est d'obtenir un principe du maximum stochastique pour un système gouverné par équation différentielle stochastique avec information partielle. Ce genre de problème qui a des applications potentielles en finance mathématique et économie mathématique.

On cosidère un problème de contrôle stochastique, où le système gouverné par une équation différentielle stochastique contrôlé de la forme suivante :

$$\begin{cases} dX(t) & = b(t, X(t), u(t))\, dt + \sigma(t, X(t), u(t))\, dB(t) \\ & + \int\limits_{\mathbb{R}^n_*} \theta(t, X(t), u(t), z)\, \tilde{N}(dt, dz); 0 \leq t \leq T; \\ X(0) & = x \in \mathbb{R}^n. \end{cases}$$

Où les fonctions b, σ, θ sont des fonctions données,

et $B(t) = (B_1(t), ..., B_k(t))^T$ et $\eta(t) = (\eta_1(t), ..., \eta_n(t))^T$ sont des mouvements Browniens n-dimensionnel.

Le contrôle $u(t)$ est un processus $(\mathcal{G}_t)_{t\in[0,T]}$ -adaptée à valeurs dans un ensemble $U \subset \mathbb{R}^k$;

$$\mathcal{G}_t \subseteq \mathcal{F}_t, ; \text{ pour tout } t. \tag{1}$$

Soit $A = A_{\mathcal{G}}$ une famille de processus $u(t)$ de contrôle $\mathcal{G}_t$-adapté tels que :

$$u(t) = u(t, \omega) : [0, T] \times \Omega \longmapsto U.$$

La fonction de coût à maximiser, sur l'ensemble des contrôles admissible U, à la forme suivant :

$$J(u) = E\left[\int_0^T f(t, X(t), u(t))\,dt + g(X(T))\right];\ \ u \in A; \tag{2}$$

où f et g sont des fonctions de classe C^1 vérifient la condition suivante :

$$E\left[\int_0^T |f(t, X(t), u(t))|\,dt + |g(X(T))|\right] < \infty;\ \ u \in A. \tag{3}$$

et $X(t)$ est la trajéctoire du systemème contrôlé par $u(t)$.

Le problème du contrôle partiel avec information est de trouver $\Phi_{\mathcal{G}}$, et $u^* \in A$ tels que :

$$\Phi_{\mathcal{G}} = \sup_{u\in A} J(u) = J(u^*). \tag{4}$$

Nous soulignons qu'en raison de la nature générale de la filtration partielle de l'information $\mathcal{G}_t$, nous ne pouvons pas utiliser la programmation dynamique et les équations Hamilton-Jacobi-Bellman (HJB) pour résoudre le problème. Ainsi, notre problème doit être distingué de partiel problèmes de contrôle d'observation.

Pour de tels problèmes, il existe déjà une littérature riche et des versions d'un principe du maximum correspondant ont été développées par de nombreux auteurs.

Le suite de ce travail est organisée de la manière suivante :

Le premier est un chapitre introductif permettant d'ntroduire les outils essentiels pour le reste des chapitres. Nous commencons par des généralités sur les processus stochastique, espérance conditionnelles et leurs propriétés ainsi que les mouvements Browniens et martingale stochastique et l'equation différentielle stochastique.

Dans le deuxième chapitre nous allons présenter le corps principal de ce mémoire. Nous allons étudier les conditions nécessaires et suffisantes d'optimalité avec information partielle vérifiées par un contrôle optimal donné.

Et dans le dernier chapitre nous donnons une application de ce type de système en mathimatique finance.

Chapitre 1

Rappels sur le calcul stochastique

Dans ce chapitre, nous allons rappeler des notions essentielles en théorie des processus stochastiques, nous donnons les outils nécessaires et les notions de base pour le calcul stochastique

1.1 Processus stochastique

Définition 1.1 (Variable aléatoire) *Toute application mesurable X d'un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ dans un espace (E, ξ) définit une variable aléatoire. X vérifie donc la propriété de mesurabilité :*

$$\forall B \in \xi; X^{-1}(B) \in \mathcal{F}.$$

Définition 1.2 (Processus stochastique) *Soit T un ensemble.On appelle processus stochastique indexé par T et à valeurs dans $\mathbb{R}^d$ une famille $(X_t)_{t \in T}$ d'applications mesurables de $(\Omega, \mathcal{F})$ dans$\left(\mathbb{R}^d, B\left(\mathbb{R}^d\right)\right)$; pour tout $t \in T, X_t$ est une variable aléatoire.*

Remarque 1.1 *Dans ce travail, nous posons $T = \mathbb{N}$ ce qui correspond aux processus à temps discret, $T = R_+$ ou $T = [0, a]$ pour les processus à temps continu.*
Pour simplifier les énoncés qui suivent sont donnés avec $T = R_+$; pour alléger l'écriture, nous noterons un processus X plutôt que $(X_t)_{t \geq 0}$.

Définition 1.3 (Tribu engendré) *La tribu engendrée par une famille d'ensemble A est la plus petite tribu contenant cette famille, on la note $\sigma(A)$.*

Elle est l'intersection de toutes les tribus contenant A.

Définition 1.4 (Filtration) *Une filtration est une famille croissante de sous tribus de $\mathcal{F}$,c'est-à-dire telle que $\mathcal{F}_t \subset \mathcal{F}_s$ pour tout $t \leq s$.*

On demande souvent que les ensembles négligeables soient contenus dans $\mathcal{F}_0$.

On parle d'hypothéses habituelles si

- Les ensembles négligeables sont contenus dans $\mathcal{F}_0$.

- La filtration est continue à droite au sens où $\mathcal{F}_t = \underset{s>t}{\cap} \mathcal{F}_s$.

- Une filtration G est dite plus grosse que $\mathcal{F}$ si $\mathcal{F}_t \subset G_t; \forall t$.

Définition 1.5 (Mesurable) *un processus (X_t) est mesurable si l'application suivante $(t, \omega) \longmapsto X_t(\omega)$ de $\big(\mathbb{R}_+ \times \Omega, \mathcal{B}(\mathbb{R}_+) \otimes \mathcal{F}\big)$ dans (E, ξ) est mesurable.*

Définition 1.6 (Processus a trajectoire continue) *un processus (X_t) est a trajectoire continue ou simplement processus continue si*

$$P(\{\omega \in \Omega; t \longmapsto X_t(\omega) \text{ est continue}\}) = 1$$

Définition 1.7 (Processus progressivement mesurable) *Un processus $(X_t)_{t\in I}$ est dit progressivement mesurable par rapport à $\mathcal{F}$ si pour tout $t \in T$ l'application $(s, \omega) \longmapsto X_s(\omega)$ est mesurable sur $[0, t] \times \Omega$ muni de la tribu produit $\mathcal{B}([0, t]) \otimes \mathcal{F}_t$.*

Définition 1.8 (Processus càdlàg) *- Un processus X est dit càdlàg (continue à droite et pourvu de limite à gauche) si ses trajectoires sont continues à droite et prouvues de limite à gauche pour presque tout ω.*

Remarque 1.2 *Un processus progressivement mesurable est mesurable et adapté.*

Proposition 1.1 *Si X est un processus stochastique dont les trajectoires sont continués à droite (ou à gauche), alors X est mesurable et progressivement mesurable s'il est de plus adapté.*

Définition 1.9 (Processus adapté) *Un processus* $(X_t)_{t\in[0,T]}$ *est dit adapté par rapport à* $\mathcal{F}$ *si pour tout* $t \in T$, X_t *est* $\mathcal{F}_t$*-mesurable.*

Le processus X est dit processus prévisible pour la filtration $\mathcal{F}_t$, ou $\mathcal{F}_t$-prévisible si $\forall t \in \mathbb{N}$, X_t est $\mathcal{F}_{t-1}$-mesurable.

Remarque 1.3 *Un processus prévisible est nécessairement adapté.*

Définition 1.10 (Accroissement stationnaire) *Soit* X *un processus stochastique adapté la fonction* $(\mathcal{F}_t)_{t\leq 0}$*.On dit que :*

1. X *est accroissement indépendant, si pour tous* $s \leq t$; *la variable aléatoire* $X_t - X_s$ *est indépendante de* $\mathcal{F}_t^X = \sigma\left(X_u; u \leq s\right)$.
2. X *est accroissement stationnaire ; si la loi de variable aléatoire* $X_t - X_s$ *; pour* $s \leq t$; *ne dépend que de* $t-s$, $X_t - X_s \backsim X_{t-s} - X_0$; $\forall s \leq t$.

Définition 1.11 (Processus croissante) *Un processus* $X = (X_t; t \geq 0)$ *est un processus croissante si* $X_0 = 0$ *et* $t \longmapsto X_t$ *est une fonction croissante, c'est-à-dire*

$$X_t\left(\omega\right) \leq X_s\left(\omega\right); \forall t \leq s. \ P.s.$$

Définition 1.12 (Processus Gaussiens) *Un processus* X *est gaussien si toute combinaison linéaire finie de* $(X_t; t \geq 0)$ *est une variable aléatoire gaussienne, c'est-à-dire :*
$\forall\ n \in \mathbb{N}$, $\forall t_i, 1 \leq i \leq n$; $\forall a_i$, $;\sum_{i=1}^{n} a_i X_{t_i}$*.est une variable gaussienne.*
Un processus gaussien est caractérisé par deux fonctions :

son espérance : $t \longmapsto m(t) = E[X_t]$

et sa covariance : $(s,t) \longmapsto \Gamma(s,t) = E[(X_t - m(t))(X_s - m(s))]$.

La fonction $\Gamma(s,t)$ *est de type positif au sens ; où* $\forall\ n \in \mathbb{N}$,$\forall t_i, 1 \leq i \leq n; \forall a_i$,

$$\sum_{j;i=1}^{n} a_i a_j \Gamma(t_i t_j) \geq 0 \ .$$

1.2 Espérance conditionnelle

Définition 1.13 (Probabilité conditionnelle) *Soit A et B deux évènements (sous-ensembles de Ω).*

On définit la probabilité conditionnelle de A quand B par :

$$P(A/B) = \frac{P(A\cap B)}{P(B)};\ \textit{pour tout } B \textit{ tel que } P(B) \neq 0.$$

Définition 1.14 (Espérance conditionnelle par rapport à un évènement) *Soit X une variable aléatoire réelle intégrable. Un espérance conditionnelle de X sachant B :*

$$E[X/B] = \frac{1}{P(B)}\int_B XdP = \sum_i x_i \frac{P(X=x_i\cap B)}{P(B)}.$$

Définition 1.15 (Espérance conditionnelle) *Soit G une sous-tribu de $\mathcal{F}$. L'espérance conditionnelle de X sachant G ; $E[X/G]$ est l'unique variable aléatoire telle que :*

1. *$E[X/G]$ est G-mesurable.*
2. *$\forall A \in G; \int_A E[X/G]\, dP = \int_A XdP.$*

Proposition 1.2 *Soient X, Y deux variables aléatoires réelles appartenent $L^2(\Omega, \mathcal{F}, P)$, Soit G et G' deux sous-tribus de $\mathcal{F}$ telle que $G \subset G'$.*

On a alors :

1. ***Linéarité :*** *$E[aX + bY/G] = aE[X/G] + bE[Y/G]$. où a et b deux constantes.*
2. ***Croissance :*** *Si $X < Y$; alors $E[X/G] < E[Y/G]$.*
3. ***Positivité :*** *Si $X > 0$; alors $E[X/G] > 0$.*
4. *$E[E[X/G]] = E[X]$.*
5. *Si X est G-mesurable ; alors $E[XY/G] = XE[Y/G]$.*
6. *Si X est G-mesurable ; alors $E[X/G] = X$.*
7. *Si X est indépendante de G ; alors $E[X/G] = E[X]$.*

8. $E\left[X/\left\{\Omega,\phi\right\}\right]=E\left[X\right].$

9. $E\left[E\left[X/G'\right]/G\right]=E\left[X/G\right].$

1.3 Martingale

Définition 1.16 (Martingale) *On dit que un procrssus stochastique $\{X_t\}_{t\geq 0}$ adapté à la filtration $\{\mathcal{F}_t\}_{t\geq 0}$,est une martingale si :*

$$\forall s<t; E\left[X_t/\mathcal{F}_s\right]=X_s.$$

On parlera de sous-martingale si : $E\left[X_t/\mathcal{F}_s\right]\geq X_s$.
Et de sur-martingale si : $E\left[X_t/\mathcal{F}_s\right]\leq X_s$.

Définition 1.17 (Temps d'arrêt) *Un temps d'arrêt par rapport à une filtration $\{\mathcal{F}_t\}_{t\geq 0}$; est une variable aléatoire $\tau:\Omega\longrightarrow[0;+\infty]$ telle que :*

$$\{\tau\leq t\}=\{\omega\in\Omega/\tau(\omega)\leq t\}\in\mathcal{F}_t;\forall t\geq 0.$$

Pour tout temps d'arrêt τ on définit :

$$\mathcal{F}_\tau=\{A\in\mathcal{F}/A\cap\{\tau\leq t\}\in\mathcal{F}_t;\forall t\geq 0\}.$$

Définition 1.18 ***(Martingale locale)*** *Soit X un processus càdlàg adapté.On dit que c'est une **martingale locale** s'il existe une suite de temps d'arrêt T_n croissante vers l'infini telle que pour tout n le processus arrêté X^{T_n} soit une martingale.*

1.4 Mouvement Brownien

Définition 1.19 (Mouvement Brownien standard) *Soit $\mathcal{F}_t$ une filtration, X est un processus ;*

on dit que X est un $\mathcal{F}$-mouvement Brownien (standard) s'il vérifiant :

(i) *X est $\mathcal{F}$-adapté.*

(ii) *$X_0 = 0$ P.p.s.*

(iii) *X est continue, i.e. .$t \longmapsto X_t(\omega)$ est continue pour P-presque tout $\omega \in \Omega$.*

(iv) *X est à accroissement indépendant : $X_t - X_s$ est indépendant de $\mathcal{F}_s$ pour tous $t; s \in [0; T]$ tels que $s \leq t$.*

(v) *X est à accroissement stationnaire et gaussiens :*

$X_t - X_s \backsim N(0; t-s)$ pour tous $s; t \in [0; T]$ tels que $s \leq t$.

Proposition 1.3 (Scaling) *Soit $(X_t; t \geq 0)$ un mouvement Brownien standard alors :*

1. *Le processus $(-X_t; t \geq 0)$ est un mouvement Brownien.*
2. *Le processus $\left(\frac{1}{c}X_{c^2t}; t \geq 0\right)$ est un mouvement Brownien.*
3. *Le processus $\left(tX_{\frac{1}{t}}; t \geq 0\right)$ est un mouvement Brownien.*

Proposition 1.4 (Mouvement Brownien et martigale) *Si $(X_t; t \geq 0)$ un mouvement Brownien standard alors :*

1. X_t est un $\mathcal{F}_t$-martingale.
2. $X_t^2 - t$ est un $\mathcal{F}_t$-martingale.
3. $\exp\left(\alpha X_t - \frac{\alpha^2}{2}t\right)$ est un $\mathcal{F}_t$-martingale.

Définition 1.20 (Processus de lévy) *Considérons un processus* $(X_t)_{t\geq 0}$ *à valeurs dans* $\mathbb{R}$ *(ou dans* $\mathbb{R}^d$*) qui vérifie les trois propriétés suivantes :*

1. $X_0 = 0 \quad P.s.$
2. X_t *est à accroissements indépendants, i.e.*

   pour tous $0 \leq s \leq t$*, la variable* $X_t - X_s$ *est indépendante de* $(X_r, 0 \leq r \leq s)$
3. X_t *est à acroissement stationnaire, i.e.*

   pour tous $0 \leq s \leq t$*, la variable* $X_t - X_s$ *à même loi que* X_{t-s}.
4. X_t *est stochastiquement continu, i.e.*

   pour tous $\mathcal{G} > 0$ *et* $t \geq 0$,

$$\lim_{h\to 0} P\left(|X_{t+h} - X_t| > \mathcal{G}\right) = 0.$$

On peut remarquer que (**1**),(**2**) et (**3**) implique qu'il suffit de vérifier **(iiii)** pour $t = 0$.

Remarque 1.4 ***-1-*** *Si* X_t *est un processus de Lévy, alors* X_t *est une loi infiniment divisible pour tout* $t \geq 0$.

-2- *La somme de deux processus de Lévy est un processus deLévy.*

-3- *Toute mouvement Brownien* $X = \{X_t, t \geq 0\}$ *est un processus de Lévy.*

1.5 Intégrale stochastique

Définition 1.21 *L' intégrale stochastique d'un processus élémentaire $\theta \in \mathcal{G}$; est la variable aléatoire définie par*

$$\int_0^t \theta_s dB_s = \sum_{i=0}^{k} \theta_i \left(B_{t_{i+1}} - B_{t_i}\right) + \theta_i \left(B_t - B_{t_k}\right), \;\; sur \;\;]t_k, t_{k+1}[\,;$$

soit

$$\int_0^t \theta_s dB_s = \sum_{i=0}^{n} \theta_i \left(B_{t\wedge t_{i+1}} - B_{t\wedge t_i}\right).$$

On associe donc à $\theta \in \mathcal{G}$ le processus $\left(\int_0^T \theta_s dB_s\right)_{0\leq t\leq T}$.

Remarque 1.5 *On définit naturellement*

$$\int_s^t \theta_u dB_u = \int_0^t \theta_u dB_u - \int_0^s \theta_u dB_u \;.$$

Proposition 1.5 (Propriétés de l'intégrale Stochastique sur $\mathcal{G}$) *Sur l'ensemble des processus élémentaires $\mathcal{G}$,l'intégrale stochastique satisfait les propriétés*

(1) $\theta \longmapsto \int_0^T \theta_s dB_s$ est linéaire.

(2) $t \longmapsto \int_0^T \theta_s dB_s$ est continue $p.s.$

(3) $\left(\int_0^T \theta_s dB_s\right)_{0\leq t\leq T}$ est un processus $\mathcal{F}_t$-adapté.

(4) $E\left[\int_0^T \theta_s dB_s\right] = 0$, et $var\left(\int_0^T \theta_s dB_s\right) = E\left[\int_0^T \theta_s^2 ds\right]$.

(5) propriété d'isométrie : $E\left[\left(\int_0^T \theta_s dB_s\right)^2\right] = E\left[\int_0^T \theta_s^2 ds\right]$

(6) De manière plus générale, on a

$$E\left[\int_0^t \theta_\nu dB_\nu / \mathcal{F}_s\right] = 0$$

et

$$E\left[\left(\int_s^t \theta_\nu dB_\nu\right)^2 / \mathcal{F}_s\right] = E\left[\int_s^t \theta_\nu^2 d\nu / \mathcal{F}_s\right].$$

(7) On a même le résultat plus général

$$E\left[\left(\int_s^t \theta_\nu dB_\nu\right)\left(\int_s^u \phi_\nu dB_\nu\right) / \mathcal{F}_s\right] = E\left[\int_s^{t\wedge u} \theta_\nu \phi_\nu d\nu / \mathcal{F}_s\right].$$

(8) $\left(\int_0^T \theta_s dB_s\right)_{0\leq t\leq T}$ est une $\mathcal{F}$-martingale

(9) Le processus $\left(\left(\int_0^T \theta_s dB_s\right)^2 - \int_0^T \theta_s^2 ds\right)_{0\leq t\leq T}$ est une $\mathcal{F}$-martingale.

(10) la variation quadratique de l'intégrale stochastique est donnée par

$$\left\langle \int_0^t \theta_s dB_s \right\rangle = \int_0^t \theta_s^2 ds.$$

(11) La covariation quadratique entre deux intégrales stochastiques est donnée par

$$\left\langle \int_0^t \theta_s dB_s, \int_0^u \phi_s dB_s \right\rangle = \int_0^{t\wedge u} \theta_s \phi_s ds.$$

1.6 Processus d'Itô

Définition 1.22 (Processus d'Itô) *On appelle processus d'Itô un processus X à valeurs réelles tel que :*

$$P-p.s.; \forall 0 \leq t \leq T; X_t = X_0 + \int_0^t b(s)\, ds + \int_0^t \sigma(s)\, dB_s.$$

où X_0 est $\mathcal{F}_0$–mesurable, b et σ sont deux processus progressivement mesurables vérifiant les conditions, $P-p.s.$

$$\int_0^T |b(s)|\, ds < \infty.$$

et

$$\int_0^T |\sigma(s)|^2\, ds < \infty.$$

Le coefficient b est le drift ou la dérive, σ est le coefficient de diffusion.

L'ecriture $dX_t = b(t)\, dt + \sigma(t)\, dB_t$ est unique.

1.7 Formule d'Itô

Théoème 1.1 (Première formule d'Itô) *Toute fonction $f \in C^2(\mathbb{R})$ à dérivée seconde bornée vérifie p.s.*

$$f(X_t) = f(X_0) + \int_0^t f'(X_s)\, dX_s + \frac{1}{2}\int_0^t f''(X_s)(\sigma(s))^2\, ds; \quad \forall t \leq T. \ .$$

Cette formule s'ecrit sous forme condensé

$$\begin{aligned} df(X_t) &= f'(X_t)\, dX_t + \tfrac{1}{2} f''(X_t)(\sigma(t))^2\, dt. \\ &= f'(X_t)(b(t)\, dt + \sigma(t)\, dB_t) + \tfrac{1}{2} f''(X_t)(\sigma(t))^2\, dt. \\ &= f'(X_t)\, b(t)\, dt + \tfrac{1}{2} f''(X_t)(\sigma(t))^2\, dt + f'(X_t)\, \sigma(t)\, dB_t \end{aligned}$$

Théoème 1.2 (deuxième formule d'Itô) *Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}$; de clace C^1 par rapport à t, de clace C^2par rapport à x, à dérivées bornées, on a :*

$$f(t, X_t) = f(0, X_0) + \int_0^t f_t'(s, X_s)\, ds + \int_0^t f_x'(s, X_s)\, dX_s + \frac{1}{2}\int_0^t f_{xx}''(s, X_s)(\sigma(s))^2\, ds; \qquad \forall t \leq T.$$

On peut écrire cette formule sous forme différentielle

$$\begin{aligned} df(t, X_t) &= f_t'(t, X_t)\, dt + f_x'(t, X_t)\, dX_t + \tfrac{1}{2} f_{xx}''(t, X_t)(\sigma(t))^2\, dt; \\ &= f_t'(t, X_t)\, dt + f_x'(t, X_t)(b(t)\, dt + \sigma(t)\, dB_t) + \tfrac{1}{2} f_{xx}''(t, X_t)(\sigma(t))^2\, dt; \\ &= \left(f_t'(t, X_t) + f_x'(t, X_t)\, b(t) + \tfrac{1}{2} f_{xx}''(t, X_t)(\sigma(t))^2\right) dt + f_x'(t, X_t)\, \sigma(t)\, dB_t. \end{aligned}$$

1.8 Equations différentielles stochastique

Définition 1.23 *Une equation différentielle stochastique (EDS) est une equation de la forme :*

$$\begin{cases} dX_t &= b(t, X_t)\, dt + \sigma(t, X_t)\, dB_t; \\ X_0 &= x. \end{cases} \tag{1.1}$$

Où $X_0 \in \mathbb{R}^n, X_t$ un mouvement Brownien,et $b(t, X_t)$ et $\sigma(t, X_t)$ sont des fonctions continues.

Définition 1.24 *Une solution forte de l'EDS (EDS) est un processus $X = \{X(t)\,; t \in [0, T]\}$ continu qui est $\mathcal{F}_t$-adapté,et tel que :*

1. $\displaystyle\int_0^T |b(s, X_s)|^2\, ds + \int_0^T |\sigma(s, X_s)|^2\, dB_s < \infty.$
2. *X vérifie (EDS).*

Théoème 1.3 (Condition d'existence et d'unicité d'une solution forte) *Supposons que, pour tous $x, y \in \mathbb{R}^d$,et $t \geq 0$; les fonctions b et σ satisfont les deux conditions suivantes*

1. *Condition de croissance linéaire :il existe une constante $C > 0$, telle que*

$$|b(t, x)| + ||\sigma(t, x)|| < C(1 + |x|).$$

2. *Condition de Lipshitz globale telle qu'il existe une constante* $L > 0$, *telle que :*

$$|b(t,x)\, b(t,y)| + ||\sigma(t,x)\, \sigma(t,y)|| < L\, |x-y|\,.$$

et de plus, la condition initiale $X_0 = x$ *est indépendante de* $(B_t)_{t\geq 0}$ *et est de carré intégrable (i.e) :* $E\left[|x|^2\right] < \infty$. *Alors, il existe une unique solution de l'EDS trajectoires continues pour tout* t. *De plus cette solution vérifie* $E\left[\sup\limits_t |X_t|^2\right] < \infty$.

Chapitre 2

Principe du maximum stochastique avec information partielle

2.1 Introduction

Soit $B(t) = (B_1(t), ..., B_k(t))^T$ et $\eta(t) = (\eta_1(t), ..., \eta_n(t))^T$ sont des mouvements Browniens n-dimensionnel, et saut de Lévy martingales pur n-indépendante, respectivement, sur un espace de probabilité filtré $(\Omega, \mathcal{F}, \{\mathcal{F}_t\}_{t\geq 0}, P)$.

Si $N_i(dt, dz)$ désigne la mesure de saut de $\eta_i(.)$ et $\nu_i(dz)$ désigne la mesure de Lévy sûr de $\eta_i(.)$, alors

$$\eta_i(t) = \int_{\mathbb{R}_*} z\tilde{N}_i(ds, dz); \tag{2.1}$$

où

$$\tilde{N}_i(ds, dz) = N_i(ds, dz) - \nu_i(dz)\, ds;$$

est la mesure de saut compensée de $\eta_i(.)$; $1 \leq i \leq n$; et supposon que

$$\int_{\mathbb{R}_*} z^2 \nu_i(dz) < \infty; \text{ pour } i = 1, ..., n \ . \tag{2.2}$$

On suppose que $X(t) = X^{(u)}(t) \in \mathbb{R}^n$, est un processus d'état et donné par une équation différentielle stochastique contrôlé de la forme suivante :

$$\begin{cases} dX(t) & = b(t, X(t), u(t))\, dt + \sigma(t, X(t), u(t))\, dB(t) \\ & \quad + \int\limits_{\mathbb{R}_*^n} \theta(t, X(t), u(t), z)\, \tilde{N}(dt, dz);\ 0 \leq t \leq T; \\ X(0) & = x \in \mathbb{R}^n. \end{cases}$$

Soit les fonctions b, σ, θ sont donnée par :

$$b:\quad [0,T] \times \mathbb{R}^n \times U \longrightarrow \mathbb{R}^n.$$

$$\sigma:\quad [0,T] \times \mathbb{R}^n \times U \longrightarrow \mathbb{R}^{n\times n}.$$

$$\theta:\quad [0,T] \times \mathbb{R}^n \times U \times \mathbb{R}_* \longrightarrow \mathbb{R}^{n\times n}.$$

Sont des classes C^1 par rapport à x et u, et $T > 0$ est une constante.

Le contrôle $u(t)$ est un processus $(\mathcal{G}_t)_{t\in[0,T]}$ -adaptée à valeurs dans un ensemble $U \subset \mathbb{R}^k$;

$$\mathcal{G}_t \subseteq \mathcal{F}_t, ;\ \text{pour tout } t. \tag{2.3}$$

Par exemple,ε_t pourrait être l'information δ-différée définie par

$$\mathcal{G}_t = \mathcal{F}_{(t-\delta)^+};\ t \geq 0. \tag{2.4}$$

où $\delta > 0$ est un retard constant donné.

Soit $A = A_{\mathcal{G}}$ une famille de processus de contrôle $\mathcal{G}_t$-adapté

$$u(t) = u(t, \omega) : [0, T] \times \Omega \longrightarrow U.$$

Supposons que une performance fonctionnelle

$$J(u(.)) = E\left[\int_0^T f(t, X(t), u(t))\, dt + g(X(T))\right];\ u \in A; \tag{2.5}$$

où

$$f: \quad [0,T] \times \mathbb{R}^n \times U \longrightarrow \mathbb{R}.$$
$$g: \quad \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}.$$

sont des fonctions de classe C^1 vérifier la condition suivante :

$$E\left[\int_0^T |f(t, X(t), u(t))|\, dt + |g(X(T))|\right] < \infty; \; u \in A. \tag{2.6}$$

Le problème du contrôle partiel de l'information est de trouver Φ_ε, et $u^* \in A$ tels que :

$$\Phi_{\mathcal{G}} = \sup_{u \in A} J(u(.)) = J(u^*(.)).$$

2.2 Principe du maximum avec information partielle suffisante

Dans cette section, nous énonçons et prouvons un principe du maximum avec information suffisant pour la problème de contrôle (2.6).

Soit $\mathcal{R}$ l'ensemble des informations $r : [0,T] \times \mathbb{R}_* \to \mathbb{R}^{n \times n}$ tel que

$$\int_{\mathbb{R}_*} |\theta_{ij}(t,x,u,z)\, r_{ij}(t,z)|\, \nu_j(dz) < \infty; \text{ pour tout } i,j,t,x. \tag{2.7}$$

Définir Hamiltonien $H : [0,T] \times \mathbb{R}^n \times U \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{n\times n} \times \mathcal{R} \to \mathbb{R}$ par

$$\begin{aligned} H(t,x,u,p,q,r) &= f(t,x,u) + b^T(t,x,u)\, p + tr\left(\sigma^T(t,x,u)\, q\right) \\ &+ \sum_{i,j=1}^{n} \int_{\mathbb{R}_*} \theta_{ij}(t,x,u,z)\, r_{ij}(t,z)\, \nu_j(dz). \end{aligned} \tag{2.8}$$

L'équation adjointe dans les processus inconnus $\mathcal{F}_t$ -prédictibles $p(t), q(t), r(t,z)$, est l'équation différentielle stochastique rétrograde suivante :

$$\begin{cases} dp\left(t\right) & =-\nabla_{x}H\left(t,X\left(t\right),u\left(t\right),p\left(t\right),q\left(t\right),r\left(t,.\right)\right)dt+q\left(t\right)dB\left(t\right) \\ & +\int\limits_{\mathbb{R}_{*}^{n}}r\left(t,z\right)\tilde{N}\left(dt,dz\right);0\leq t\leq T. \\ p\left(T\right) & =\nabla g\left(X\left(T\right)\right). \end{cases} \tag{2.9}$$

où $\nabla_{y}\phi\left(.\right)=\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y_{1}},...,\frac{\partial\varphi}{\partial y_{n}}\right)^{T}$ est la gradient $\varphi:\mathbb{R}^{n}\longrightarrow\mathbb{R}$ par rapport à $y=(y_{1},...,y_{n})$.
Nous pouvons maintenant énoncer notre premier résultat principal

Théoème 2.1 (Principe du maximum avec information partielle suffisante) *Soit $\hat{u}\in A$,avec le processus d'état correspondant $\hat{X}(t)=X^{(\hat{u})}(t)$,*
et supposons qu'il existe une solution $(\hat{p}(t),\hat{q}(t),\hat{r}(t,z))$ de l'équation adjointe correspondante (2.9) *satisfait :*

$$E\left[\int\limits_{0}^{T}\left(\hat{X}\left(t\right)-X^{\left(u\right)}\left(t\right)\right)^{T}\left\{\hat{q}\hat{q}^{T}\left(t\right)+\int\limits_{\mathbb{R}_{*}^{n}}rr^{T}\left(t,z\right)\nu\left(dz\right)\right\}\left(\hat{X}\left(t\right)-X^{u(t)}\left(t\right)\right)dt\right]<\infty. \tag{2.10}$$

$$E\left[\int\limits_{0}^{T}\hat{p}\left(t\right)^{T}\left\{\sigma\sigma^{T}\left(t,X\left(t\right),u\left(t\right)\right)+\int\limits_{\mathbb{R}_{*}^{n}}\theta\theta^{T}\left(t,X^{\left(u\right)}\left(t\right),u\left(t\right),z\right)\nu\left(dz\right)\right\}p\left(t\right)dt\right]<\infty;$$

pour tout $u\in A$.

$$\tag{2.11}$$

et

$$E\left[\int\limits_{0}^{T}\left|\nabla uH\left(t,\hat{X}\left(t\right),\hat{u}\left(t\right),\hat{p}\left(t\right),\hat{q}\left(t\right),\hat{r}\left(t,.\right)\right)\right|^{2}dt\right]<\infty. \tag{2.12}$$

De plus, supposons que pour tout $t\in[0,T]$,

$$H(t,x,u,\hat{p}(t),\hat{q}(t),\hat{r}(t,.))\text{ est concave in }x,u\text{ et }g(x)\text{ est concave in }x, \tag{2.13}$$

et

$$\begin{aligned}
&\text{(la condition maximale information partielle)} \\
&E\left[H\left(t,\hat{X}(t),\hat{u}(t),\hat{p}(t),\hat{q}(t),\hat{r}(t,.)\right)/\mathcal{G}_t\right] \\
&=\max_{u\in U}E\left[H\left(t,\hat{X}(t),u,\hat{p}(t),\hat{q}(t),\hat{r}(t,.)\right)/\mathcal{G}_t\right].
\end{aligned} \tag{2.14}$$

Alors $\hat{u}(t)$ est un contrôle optimal des informations partielles.

Proof. Choisissez $u \in A$ et considérez $J(u) - J(\hat{u}) = I_1 + I_2$,

d'apré (2.8) on a :

$$\begin{aligned}
f(t,x,u) &= H(t,x,u,p,q,r) - b^T(t,x,u)\,p - tr\left(\sigma^T(t,x,u)\,q\right) \\
&\quad -\sum_{i,j=1}^{n}\int_{\mathbb{R}_*}\theta_{ij}(t,x,u,z)\,r_{ij}(t,z)\,\nu_j(dz).
\end{aligned} \tag{2.15}$$

et (2.5) alors

$$\begin{aligned}
J(u(.)) - J(\hat{u}(.)) &= E\left[\int_0^T f(t,X(t),u(t))\,dt + g(X(T))\right] \\
&\quad -E\left[\int_0^T f\left(t,\hat{X}(t),\hat{u}(t)\right)dt + g\left(\hat{X}(T)\right)\right] \\
&= E\left[\int_0^T\left\{f(t,X(t),u(t)) - f\left(t,\hat{X}(t),\hat{u}(t)\right)\right\}dt\right] \\
&\quad -E\left[g(X(T)) - g\left(\hat{X}(T)\right)\right].
\end{aligned}$$

où

$$I_1 = E\left[\int_0^T\left\{f(t,X(t),u(t)) - f\left(t,\hat{X}(t),\hat{u}(t)\right)\right\}dt\right]. \tag{2.16}$$

et

$$I_2 = E\left[g\left(X(T) - g\left(\hat{X}(T)\right)\right)\right] \tag{2.17}$$

On remplace (2.15) dans (2.16), on obtient

$$\begin{aligned}
I_1 &= \mathbb{E}\left[\int_0^T \{H(t, X(t), u(t), p(t), q(t), r(t,.))\right.\\
&-b^T(t, X(t), u(t))\,p(t) - tr\left(\sigma^T(t, X(t), u(t))\,q(t)\right)\\
&-\sum_{i,j=1}^{n}\int_{\mathbb{R}_*}\theta_{ij}(t, X(t), u(t), z)\,r_{ij}(t,z)\,\nu_j(dz)\\
&-H\left(t, \hat{X}(t), \hat{u}(t), \hat{p}(t), \hat{q}(t), \hat{r}(t)\right)\\
&+b^T\left(t, \hat{X}(t), \hat{u}(t)\right)\hat{p}(t) + tr\left(\sigma^T(t, \hat{x}(t), \hat{u}(t))\,\hat{q}(t)\right)\\
&\left.+\sum_{i,j=1}^{n}\int_{\mathbb{R}_*}\theta_{ij}\left(t, \hat{X}(t), \hat{u}(t), z\right)\hat{r}_{ij}(t,z)\,\nu_j(dz)\right\}dt\Bigg]\\
&= \mathbb{E}\left[\int_0^T \{H(t, X(t), u(t), p(t), q(t), r(t,.))\right.\\
&\left.-\ H\left(t, \hat{X}(t), \hat{u}(t), \hat{p}(t), \hat{q}(t), \hat{r}(t)\right)\right\}dt\Big]\\
&-\mathbb{E}\left[\int_0^T \left\{b^T(t, X(t), u(t))\,p(t) - b^T\left(t, \hat{X}(t), \hat{u}(t)\right)\hat{p}(t)\right\}dt\right]\\
&-\mathbb{E}\left[\int_0^T \left\{tr\left(\sigma^T(t, X(t), u(t))\,q(t)\right) - tr\left(\sigma^T(t, \hat{x}(t), \hat{u}(t))\,\hat{q}(t)\right)\right\}dt\right]\\
&-E\left[\sum\nolimits_{i,j=1}^{n}\int_0^T\int_{\mathbb{R}_*}\{\theta_{ij}(t, X(t), u(t), z)\,r_{ij}(t,z)\right.\\
&-\ \theta_{ij}\left(t, \hat{X}(t), \hat{u}(t), z\right)\Big\}\,\hat{r}_{ij}(t,z)\,\nu_j(dz)\,\nu_j(dz)\,dt].
\end{aligned}$$

Notez que

$$I_1 = I_{1,1} - I_{1,2} - I_{1,3} - I_{1,4},$$

où

$$\begin{aligned}
I_{1,1} &= E\left[\int_0^T \{H(t, X(t), u(t), \hat{p}(t), \hat{q}(t), \hat{r}(t,.))\right.\\
&\left.-\ H\left(t, \hat{X}(t), \hat{u}(t), \hat{p}(t), \hat{q}(t), \hat{r}(t,.)\right)\right\}dt\Big].
\end{aligned} \tag{2.18}$$

$$I_{1,2} = E\left[\int_0^T \left\{b(t, X(t), u(t)) - b\left(t, \hat{X}(t), \hat{u}(t)\right)\right\}^T p(t)\,dt\right]. \tag{2.19}$$

$$I_{1,3} = E\left[\int_0^T tr\left[\left\{\sigma\left(t, X(t), u(t) - \sigma\left(t, \hat{X}(t), \hat{u}(t)\right)\right)\right\}^T \widehat{q}(t)\right] dt\right]. \tag{2.20}$$

$$\begin{aligned} I_{1,4} &= E\left[\sum_{i,j=1}^{n} \int_0^T \int_{\mathbb{R}_*} \{\theta_{i,j}(t, X(t), u(t), z)\right. \\ &\left. - \theta_{i,j}\left(t, \hat{X}(t), \hat{u}(t), z\right)\right\} \hat{r}_{i,j}(t,z)\, \nu_j(dz)\, dt\Big]. \end{aligned} \tag{2.21}$$

D'apré la théoréme 2.1 si on suppose que les fonctions g et $H(t, x, u, p, q, r)$ sont concave alors, $\hat{u}(.)$ est un contrôle optimal avec information partielle

Soit $u \in U$

$$\begin{aligned} J(u(.)) - J(\hat{u}(.)) &= \mathbb{E}\left[\int_0^T f(t, X(t), u(t))\, dt - f\left(t, \hat{X}(t), \hat{u}(t)\right) dt\right] \\ &- \mathbb{E}\left[g(X(T)) - g\left(\hat{X}(T)\right)\right]. \end{aligned}$$

En utilisant le fait que g est concave en X, on obtient

$$g(X(T)) - g\left(\hat{X}(T)\right) \leq g_x\left(\hat{X}(T)\right)\left(X(T) - \hat{X}(T)\right).$$

Alors

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\left[g(X(T)) - g\left(\hat{X}(T)\right)\right] &\leq \mathbb{E}\left[g_x\left(\hat{X}(T)\right)\left(X(T) - \hat{X}(T)\right)\right] \\ &\leq \mathbb{E}\left[\hat{p}(T)\left(X(T) - \hat{X}(T)\right)\right]. \end{aligned}$$

d'ou

$$\begin{aligned} J(u(.)) - J(\hat{u}(.)) &\leq \mathbb{E}\left[\int_0^T f(t, X(t), u(t))\, dt - f\left(t, \hat{X}(t), \hat{u}(t)\right) dt\right] \\ &+ \mathbb{E}\left[\hat{p}(T)\left(X(T) - \hat{X}(T)\right)\right]. \end{aligned}$$

Ainsi

$$\begin{aligned} J(u(.)) - J(\hat{u}(.)) &= \mathbb{E}\left[\int_0^T f(t, X(t), u(t))\, dt - f\left(t, \hat{X}(t), \hat{u}(t)\right) dt\right] \\ &+ \mathbb{E}\left[\hat{p}(T)\left(X(T) - \hat{X}(T)\right)\right]. \end{aligned} \tag{2.22}$$

Par la formule d'Itô, appliquée à $\left\langle \hat{p}(t), \left(X(T) - \hat{X}(T)\right)\right\rangle$, on obtient

$$\begin{aligned}
d\left[\hat{P}(T), \left(X(T) - \hat{X}(T)\right)\right] &= d\hat{p}(t)\left(X(t) - \hat{X}(t)\right) + \hat{p}(t)\, d\left(X(t) - \hat{X}(t)\right) \\
&+ d\left\langle \hat{p}(T), X(T) - \hat{X}(T)\right\rangle \\
&= -\nabla_x H\left(t, \hat{X}(t), \hat{u}(t), \hat{p}(t), \hat{q}(t), \hat{r}(t,.)\right)\left(X(t) - \hat{X}(t)\right) dt \\
&+ \hat{q}(t)\left(X(t) - \hat{X}(t)\right) dB(t) + \int_{\mathbb{R}_*^n} \hat{r}(t,z)\left(X(t) - \hat{X}(t)\right)\tilde{N}(dt,dz) \\
&+ \hat{p}(t)\left(b(t, X(t), u(t)) - b\left(t, \hat{X}(t), \hat{u}(t)\right)\right) dt \\
&+ \hat{p}(t)\left(\sigma(t, X(t), u(t)) - \sigma\left(t, \hat{X}(t), \hat{u}(t)\right)\right) dB(t) \\
&+ \hat{p}(t)\int_{\mathbb{R}_*^n}\left(\theta(t, X(t), u(t), z) - \theta\left(t, \hat{X}(t), \hat{u}(t), z\right)\right)\tilde{N}(dt,dz) \\
&+ \hat{q}(t)\left(\sigma(t, X(t), u(t)) - \sigma\left(t, \hat{X}(t), \hat{u}(t)\right)\right) dt \\
&+ \int_0^T \sum_{i,j=1}^n \int_{\mathbb{R}_*} \left(\theta_{i,j}(t, X(t), u(t), z_j)\right. \\
&\left. - \theta_{i,j}\left(t, \hat{X}(t), \hat{u}(t), z_j\right)\right)\hat{r}_{i,j}(t, z_j)\, v_j(dz_j)\, dt.
\end{aligned}$$

ainsi

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[\hat{P}(T), \left(X(T) - \hat{X}(T)\right)\right] = \; & -\mathbb{E}\left[\int_0^T \nabla_x H\left(t, \hat{X}(t), \hat{u}(t), \hat{p}(t), \hat{q}(t), \hat{r}(t,.)\right)\left(X(t) - \hat{X}(t)\right) dt\right] \\
& + \mathbb{E}\left[\int_0^T \hat{p}(t)\left(b(t, X(t), u(t)) - b\left(t, \hat{X}(t), \hat{u}(t)\right)\right) dt\right] \\
& + \mathbb{E}\left[\int_0^T \hat{q}(t)\left(\sigma(t, X(t), u(t)) - \sigma\left(t, \hat{X}(t), \hat{u}(t)\right)\right) dt\right] \\
& + \mathbb{E}\left[\int_0^T \sum_{i,j=1}^n \int_{\mathbb{R}_*} \left(\theta_{i,j}(t, X(t), u(t), z_j)\right.\right. \\
& \left.\left. - \theta_{i,j}\left(t, \hat{X}(t), \hat{u}(t), {}_j z\right)\right)\hat{r}_{i,j}(t, z_j)\, v_j(dz_j)\, dt\right]
\end{aligned} \tag{2.23}$$

On remplace (2.23) dans (2.22),on obtient

$$\begin{aligned} J(u(.)) - J(\hat{u}(.)) = & -\mathbb{E}\left[\int_0^T \nabla_x H\left(t, \hat{X}(t), \hat{u}(t), \hat{p}(t), \hat{q}(t), \hat{r}(t,.)\right)\left(X(t) - \hat{X}(t)\right) dt\right] \\ & +\mathbb{E}\left[\int_0^T \hat{p}(t)\left(b(t, X(t), u(t)) - b\left(t, \hat{X}(t), \hat{u}(t)\right)\right) dt\right] \\ & +\mathbb{E}\left[\int_0^T \hat{q}(t)\left(\sigma(t, X(t), u(t)) - \sigma\left(t, \hat{X}(t), \hat{u}(t)\right)\right) dt\right] \\ & +\mathbb{E}\left[\int_0^T \sum\nolimits_{i,j=1}^n \int_{\mathbb{R}_*} (\theta_{i,j}(t, X(t), u(t), z_j)\right. \\ & \left. - \theta_{i,j}\left(t, \hat{X}(t), \hat{u}(t),_j z\right)\right) \hat{r}_{i,j}(t, z_j) v_j(dz_j) dt\Big] \\ & +\mathbb{E}\left[\int_0^T f(t, X(t), u(t)) dt - f\left(t, \hat{X}(t), \hat{u}(t)\right) dt\right]. \end{aligned}$$

Alors

$$\begin{aligned} J(u(.)) - J(\hat{u}(.)) = & -\mathbb{E}\left[\int_0^T \nabla_x H\left(t, \hat{X}(t), \hat{u}(t), \hat{p}(t), \hat{q}(t), \hat{r}(t,.)\right)\left(X(t) - \hat{X}(t)\right) dt\right] \\ & +\mathbb{E}\left[\int_0^T \left(f(t, X(t), u(t)) + \hat{p}(t) b(t, X(t), u(t)) + \hat{q}(t) \sigma(t, X(t), u(t))\right.\right. \\ & \left.\left. + \sum\nolimits_{i,j=1}^n \int_{\mathbb{R}_*} \theta_{i,j}(t, X(t), u(t), z) \hat{r}_{i,j}(t, z) v_j(dz)\right) dt\right] \\ & -\mathbb{E}\left[\int_0^T \left(f\left(t, \hat{X}(t), \hat{u}(t)\right) + \hat{p}(t) b\left(t, \hat{X}(t), \hat{u}(t)\right) + \hat{q}(t) \sigma\left(t, \hat{X}(t), \hat{u}(t)\right)\right.\right. \\ & \left.\left. + \sum\nolimits_{i,j=1}^n \int_{\mathbb{R}_*} \theta_{i,j}\left(t, \hat{X}(t), \hat{u}(t), z\right) \hat{r}_{i,j}(t, z) v_j(dz)\right) dt\right]. \end{aligned}$$

Alors

$$\begin{aligned} J(u(.)) - J(\hat{u}(.)) = & -\mathbb{E}\left[\int_0^T \nabla_x H\left(t, \hat{X}(t), \hat{u}(t), \hat{p}(t), \hat{q}(t), \hat{r}(t,.)\right)\left(X(t) - \hat{X}(t)\right) dt\right] \\ & +\mathbb{E}\left[\int_0^T \left(\nabla_x H(t, X(t), u(t), \hat{p}(t), \hat{q}(t), \hat{r}(t,.))\right.\right. \\ & \left.\left. -\nabla_x H\left(t, \hat{X}(t), \hat{u}(t), \hat{p}(t), \hat{q}(t), \hat{r}(t,.)\right)\right) dt\right] \end{aligned} \tag{2.24}$$

Par concavité nous trouvons :

$$\begin{aligned} & H(t, X(t), u(t), \hat{p}(t), \hat{q}(t), \hat{r}(t,.)) - H\left(t, \hat{X}(t), \hat{u}(t), \hat{p}(t), \hat{q}(t), \hat{r}(t,.)\right) \\ & \leq \nabla_x H\left(t, \hat{X}(t), \hat{u}(t), \hat{p}(t), \hat{q}(t), \hat{r}(t,.)\right)^T \left(X(t) - \hat{X}(t)\right) \\ & +\nabla_u H\left(t, \hat{X}(t), \hat{u}(t), \hat{p}(t), \hat{q}(t), \hat{r}(t,.)\right)^T (u(t) - \hat{u}(t)). \end{aligned} \tag{2.25}$$

et

$$\begin{aligned} J(u(.)) - J(\hat{u}(.)) = & \ \mathbb{E}\left[\int_0^T \nabla_x H\left(t, \hat{X}(t), \hat{u}(t), \hat{p}(t), \hat{q}(t), \hat{r}(t,.)\right) dt\right] \\ & -\mathbb{E}\left[\int_0^T \nabla_x H(t, X(t), u(t), \hat{p}(t), \hat{q}(t), \hat{r}(t,.)) dt\right] \\ & \leq -\mathbb{E}\left[\int_0^T \nabla_x H\left(t, \hat{X}(t), \hat{u}(t), \hat{p}(t), \hat{q}(t), \hat{r}(t,.)\right)\left(X(t) - \hat{X}(t)\right) dt\right] \end{aligned}$$

On remplace (2.25) dans (2.24) ,on obtient

$$\begin{aligned} J(u(.)) - J(\hat{u}(.)) \leq & -\mathbb{E}\left[\int_0^T \nabla_x H\left(t, \hat{X}(t), \hat{u}(t), \hat{p}(t), \hat{q}(t), \hat{r}(t,.)\right)\left(X(t) - \hat{X}(t)\right) dt\right] \\ & +\mathbb{E}\left[\int_0^T \nabla_x H\left(t, \hat{X}(t), \hat{u}(t), \hat{p}(t), \hat{q}(t), \hat{r}(t,.)\right)\left(X(t) - \hat{X}(t)\right) dt\right] \\ & +\mathbb{E}\left[\int_0^T \nabla_u H\left(t, \hat{X}(t), \hat{u}(t), \hat{p}(t), \hat{q}(t), \hat{r}(t,.)\right)(u(t) - \hat{u}(t)) dt\right]. \end{aligned}$$

Alors

$$J(u(.)) - J(\hat{u}(.)) \leq \mathbb{E}\left[\int_0^T \nabla_u H\left(t, \hat{X}(t), \hat{u}(t), \hat{p}(t), \hat{q}(t), \hat{r}(t,.)\right)(u(t) - \hat{u}(t))\, dt\right]. \tag{2.26}$$

et on utilisant le fait que $u \longmapsto E\left[H\left(t, \hat{X}(t), \hat{u}(t), \hat{p}(t), \hat{q}(t), \hat{r}(t,.)\right)/\mathcal{G}_t\right]$; $u \in U$, admette un maximum

en $u = \widehat{u}(t)$ et $u(t)$, $\widehat{u}(t)$ sont $\mathcal{G}_t$-mrsurables, on se débrouille (2.12)

$$\begin{aligned} 0 &\geq \nabla_u E\left[H\left(t, \hat{X}(t), \hat{u}(t), \hat{p}(t), \hat{q}(t), \hat{r}(t,.)\right)/\mathcal{G}_t\right]^T_{u=\widehat{u}(t)} (u(t) - \hat{u}(t)). \\ &= E\left[\nabla_u H\left(t, \hat{X}(t), \hat{u}(t), \hat{p}(t), \hat{q}(t), \hat{r}(t,.)\right)^T (u(t) - \hat{u}(t))/\mathcal{G}_t\right]. \end{aligned} \tag{2.27}$$

En combinant (2.26) et (2.27), on obtient

$$J(u(.)) - J(\hat{u}(.)) \leq 0.$$

ainsi

En combinant (2.9),(2.10),(2.18),(2.25) et (2.27), on obtient

$$\begin{aligned} I_{1,1} &\leq E\left[\int_0^T \nabla_x H\left(t, \hat{X}(t), \hat{u}(t), \hat{p}(t), \hat{q}(t), \hat{r}(t,.)\right)^T \left(X(t) - \hat{X}(t)\right) dt\right] \\ &\leq -E\left[\int_0^T \left(X(t) - \hat{X}(t)\right)^T d\hat{p}(t)\right] = -J_1, \end{aligned}$$

aussi, puisque g est concave, nous obtenons, par la formule d'Itô,

$$\begin{aligned}
I_2 &= E\left[g\left(X\left(T\right)\right) - g\left(\hat{X}\left(T\right)\right)\right] \leq E\left[\nabla g\left(\hat{X}\left(T\right)\right)^T\left(X\left(T\right) - \hat{X}\left(T\right)\right)\right] \\
&= E\left[\left(X\left(T\right) - \hat{X}\left(T\right)\right)^T \hat{p}\left(T\right)\right] \\
&= E\left[\int_0^T \left(X\left(T\right) - \hat{X}\left(T\right)\right)^T\left(-\nabla_x H\left(t, \hat{X}\left(t\right), \hat{u}\left(t\right), \hat{p}\left(t\right), \hat{q}\left(t\right), \hat{r}\left(t,.\right)\right)\right) dt\right] \\
&+ \int_0^T \hat{p}\left(t\right)^T\left\{b\left(t, X\left(t\right), u\left(t\right)\right) - b\left(t, \hat{X}\left(t\right), \hat{u}\left(t\right)\right)\right\} dt \\
&+ \int_0^T tr\left[\left\{\sigma\left(t, X\left(t\right), u\left(t\right) - \sigma\left(t, \hat{X}\left(t\right), \hat{u}\left(t\right)\right)\right)\right\}^T \hat{q}\left(t\right)\right] dt \\
&+ \int_0^T \sum_{i,j=1}^{n} \int_{\mathbb{R}_*}\left\{\theta_{ij}\left(t, X\left(t\right), u\left(t\right), z_j\right) - \theta_{ij}\left(t, \hat{X}\left(t\right), \hat{u}\left(t\right), z_j\right)\right\} \hat{r}_{ij}\left(t, z_j\right) \nu\left(dz_j\right) dt \\
&= J_1 + I_{1,2} + I_{1,3} + I_{1,4}.
\end{aligned}$$

En ajoutant ce qui précéde, nous obtenons

$$\begin{aligned}
J\left(u\left(.\right)\right) - J\left(\hat{u}\left(.\right)\right) &= I_1 + I_2 \\
&= I_{1,1} - I_{1,2} - I_{1,3} - I_{1,4} + I_2 \\
&\leq -J_1 - I_{1,2} - I_{1,3} - I_{1,4} + J_1 + I_{1,2} + I_{1,3} + I_{1,4} \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Comme ceci est valable pour tout $u \in A$, le résultat suit. ■

2.3 Principe du maximum avec information partielle nécessaire

Dans cette section, nous repons à cette question :

Si $\hat{u}$ est optimal, satisfait-il (2.14) ?

Supposons qui :

(A1) Pour tout t, h tel que $0 \leq t < t + h \leq T$, tous $i = 1, ..., k$; et tous bornés $\mathcal{G}_t$-mesurable

$\alpha = \alpha(\omega)$, le controle $\beta(s) = (0, ..., \beta_i(s), 0, ..., 0) \in U \subset \mathbb{R}^k$;

avec

$$\beta_i(s) = \alpha_i \chi_{[t,t+h]}(s); \; s \in [0, T];$$

appartient à $A_{\mathcal{G}}$.

(A2) Pour tout $u, \beta \in A_{\mathcal{G}}$ avec β borné; il existe $\delta > 0$ tel que $u + y\beta \in A_{\mathcal{G}}$; pour tout $y \in (-\delta, \delta)$.

Pour u,$\beta \in A_{\mathcal{G}}$ avec β borné.

On définie le processus $Y(t) = Y^{(u,\beta)}(t)$ par :

$$Y(t) \;\; = \tfrac{d}{dy} X^{(u+y\beta)}(t) \,|_{y=0} = (Y_1(t), ..., Y_n(t))^T. \tag{2.28}$$

Notez que $Y(0) = 0$; et

$$dY_i(t) \;\; = \lambda_i(t)\,dt + \sum_{j=1}^{n} \xi_{ij}(t)\,dB_j(t) + \sum_{j=1}^{n} \int_{\mathbb{R}_*} \xi_{ij}(t,z)\,\tilde{N}_j(dt,dz). \tag{2.29}$$

où

$$\lambda_i(t) = \nabla_x b_i(t, X(t), u(t))^T Y(t) + \nabla_u b_i(t, X(t), u(t))^T \beta(t). \tag{2.30}$$

$$\xi_{ij}(t) = \nabla_x \sigma_{ij}(t, X(t), u(t))^T Y(t) + \nabla_u \sigma_{ij}(t, X(t), u(t))^T \beta(t). \tag{2.31}$$

$$\xi_{ij}(t,z) = \nabla_x \theta_{ij}(t, X(t), u(t))^T Y(t) + \nabla_u \theta_{ij}(t, X(t), u(t))^T \beta(t). \tag{2.32}$$

Théoème 2.2 (Principe du maximum avec information partielle nécessaire) *Supposons que $\hat{u} \in A_{\mathcal{G}}$ soit un maximum local pour $J(u)$, en ce sens que pour tout borné $\beta \in A_{\mathcal{G}}$ il existe $\delta > 0$; tel que $\hat{u} + y\beta \in A\varepsilon$; pour tout $y \in (-\delta, \delta)$; et*

$$h(y) = J(\hat{u} + y\beta); \; y \in (-\delta, \delta); \tag{2.33}$$

est maximal à $y = 0$.

Supposons qu'il existe une solution $\hat{p}(t), \hat{q}(t), \hat{r}(t,.)$ de l'équation adjointe associée (**2.9**), c'est-à-dire

$$\begin{cases} d\hat{p}(t) & = -\nabla_x H\left(t, \hat{X}(t), \hat{u}(t), \hat{p}(t), \hat{q}(t), \hat{r}(t,.)\right) dt + \hat{q}(t) dB(t) \\ & + \int\limits_{\mathbb{R}_*^n} r(t,z) \tilde{N}(dt,dz);\ 0 \leq t \leq T \\ \hat{p}(T) & = \nabla g\left(\hat{X}(T)\right);\ \text{où}\ \ \hat{X} = X^{(\hat{u})}. \end{cases} \tag{2.34}$$

De plus, supposons que, si $\hat{Y}(t) = Y^{(\hat{u},\beta)}(t)$ et $\hat{\lambda}_i$ et $\hat{\xi}_{ij}$ sont les coefficients correspondants (voir (**2.29**)-(**2.33**)),puis

$$E\left[\hat{Y}(t)^T \left\{\hat{q}\hat{q}^T(t) + \int\limits_{\mathbb{R}_*} rr^T(t,z)\nu(dz)\right\} \hat{Y}(t) dt\right] < \infty. \tag{2.35}$$

$$E\left[\int\limits_0^T \hat{p}(t)^T \left\{\xi\xi^T\left(t, \hat{X}(t), \hat{u}(t)\right) + \int\limits_{\mathbb{R}_*} \theta\theta^T\left(t, \hat{X}(t), \hat{u}(t), z\right)\nu(dz)\right\} \hat{p}(t) dt\right] < \infty. \tag{2.36}$$

Alors $\hat{u}$ est un point stationnaire pour $E[H/\mathcal{G}_t]$, en ce sens que pour a.a.$t \in [0,T]$ on avoir

$$E\left[\nabla_u H\left(t, \hat{X}(t), \hat{u}(t), \hat{p}(t), \hat{q}(t), \hat{r}(t,.)\right)/\mathcal{G}_t\right] = 0. \tag{2.37}$$

Proof. Mettez $\hat{X}(t) = X^{(\hat{u})}(t)$. Puis avec h comme dans (2.33) nous avons

d'aprés (2.5) et (2.33) nous obtenons

$$\begin{aligned} h(0) &= J(\hat{u}(.)) \\ &= \mathbb{E}\left[\int\limits_0^T f\left(t, \hat{X}(t), \hat{u}(t)\right) dt + g\left(\hat{X}(T)\right)\right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 0 = h'(0) &= E\left[\int\limits_0^T \nabla_x f\left(t, \hat{X}(t), \hat{u}(t)\right)^T \tfrac{d}{dy} X^{(\hat{u}+y\beta)}(t)\,|_{y=0} dt\right. \\ &\left. + \int\limits_0^T \nabla_u f\left(t, \hat{X}(t), \hat{u}(t)\right)^T \beta(t) dt + \nabla g\left(\hat{X}(T)\right)^T \tfrac{d}{dy} X^{(\hat{u}+y\beta)}(T)\,|_{y=0}\right]. \end{aligned} \tag{2.38}$$

car

$$\acute{u}(t) = \lim_{y \to 0} \frac{\hat{u}(t) - u(t)}{y} = \lim_{y \to 0} \frac{\hat{u} + y\beta - \hat{u}}{y} = \beta(t).$$

d'aprés (2.28) on trouve

$$\begin{aligned} 0 = h'(0) \quad &= E\left[\int_0^T \nabla_x f\left(t, \hat{X}(t), \hat{u}(t)\right)^T \hat{Y}(t)\, dt \right. \\ &\left. + \int_0^T \nabla_u f\left(t, \hat{X}(t), \hat{u}(t)\right)^T \beta(t)\, dt + \nabla g\left(\hat{X}(T)\right)^T \hat{Y}(T)\right]. \end{aligned} \tag{2.39}$$

Par (2.34),(2.35),(2.36) et par la formule d'Itô, appliquée à $\left\langle \hat{p}^T(T), \hat{Y}(T) \right\rangle$, on obtient

$$\begin{aligned} d\left[\hat{p}(T)\hat{Y}(T)\right] \quad &= (d\hat{p}(t))\hat{Y}(t) + \hat{p}(t)\left(d\hat{Y}(t)\right) + d\left\langle \hat{p}(t), \hat{Y}(t) \right\rangle \\ &= \left(-\nabla_x H\left(t, \hat{X}(t), \hat{u}(t), \hat{p}(t), \hat{q}(t), \hat{r}(t,.)\right)\right)\hat{Y}(t)\, dt + \hat{q}(t)\hat{Y}(t)\, dB(t) \\ &+ \int_{\mathbb{R}_*^n} r(t,z)\hat{Y}(t)\tilde{N}(dt,dz) \\ &+ \hat{p}(t)\left(\nabla_x b_i\left(t, \hat{X}(t), \hat{u}(t)\right)\hat{Y}(t) + \nabla_u b_i\left(t, \hat{X}(t), \hat{u}(t)\right)\beta(t)\right) dt \\ &+ \sum_{j=1}^n \hat{p}(t)\left(\nabla_x \sigma_{ij}\left(t, \hat{X}(t), \hat{u}(t)\right)\hat{Y}(t) + \nabla_u \sigma_{ij}\left(t, \hat{X}(t), \hat{u}(t)\right)\beta(t)\right) dB_j(t) \\ &+ \sum_{j=1}^n \hat{p}(t)\int_{\mathbb{R}_*} \hat{r}_{ij}(t,z)\left(\nabla_x \theta_{ij}\left(t, \hat{X}(t), \hat{u}(t), z\right)\hat{Y}(t)\right. \\ &\left. + \nabla_u \theta_{ij}\left(t, \hat{X}(t), \hat{u}(t), z\right)\beta(t)\right)\tilde{N}(dt,dz) \\ &+ \sum_{j=1}^n \hat{q}(t)\left(\nabla_x \sigma_{ij}\left(t, \hat{X}(t), \hat{u}(t)\right)\hat{Y}(t) + \nabla_u \sigma_{ij}\left(t, \hat{X}(t), \hat{u}(t)\right)\beta(t)\right) dt \\ &+ \sum_{j=1}^n \int_{\mathbb{R}} \hat{r}_{ij}(t,z)\left(\nabla_x \theta_{ij}\left(t, \hat{X}(t), \hat{u}(t), z\right)\hat{Y}(t) + \nabla_u \theta_{ij}\left(t, \hat{X}(t), \hat{u}(t), z\right)\beta(t)\right) dt. \end{aligned}$$

ainsi

$$
\begin{aligned}
E\left[\nabla g\left(\hat{X}(T)\right)^{T}\hat{Y}(T)\right] &= E\left[\hat{p}^{T}(T)\,\hat{Y}(T)\right] \\
&= E\left[\int_{0}^{T}\sum_{i=1}^{n}\left\{\hat{p}_{i}(t)\left(\nabla_{x}b_{i}\left(t,\hat{X}(t),\hat{u}(t)\right)^{T}\hat{Y}(t)\right.\right.\right. \\
&\left.+\ \nabla_{u}b_{i}\left(t,\hat{X}(t),\hat{u}(t)\right)^{T}\beta(t)\right) \\
&+\hat{Y}_{i}(t)\left(-\nabla_{x}H\left(t,\hat{X}(t),\hat{u}(t),\hat{p}(t),\hat{q}(t),\hat{r}(t,.)\right)\right)_{i} \\
&+\sum_{i=1}^{n}\hat{q}_{ij}(t)\left(\nabla_{x}\sigma_{ij}\left(t,\hat{X}(t),\hat{u}(t)\right)^{T}\hat{Y}(t)+\nabla_{u}\sigma_{ij}\left(t,\hat{X}(t),\hat{u}(t)\right)^{T}\beta(t)\right) \\
&+\sum_{j=1}^{n}\int_{\mathbb{R}_{*}}\hat{r}_{ij}(t,z)\left(\nabla_{x}\theta_{ij}\left(t,\hat{X}(t),\hat{u}(t),z\right)^{T}\hat{Y}(t)\right. \\
&\left.\left.\left.+\ \nabla_{u}\theta_{ij}\left(t,\hat{X}(t),\hat{u}(t),z\right)^{T}\beta(t)\right)\right\}dt\right].
\end{aligned}
\tag{2.40}
$$

où

$$
\begin{aligned}
\nabla_{x}H(t,x,u,p,q,r) &= \nabla_{x}f(t,x,u)+\sum_{j=1}^{n}\nabla_{x}b_{j}(t,x,u)\,p_{j}+\sum_{k,j=1}^{n}\nabla_{x}b_{kj}(t,x,u)\,q_{kj} \\
&+\sum_{k,j=1}^{n}\int_{\mathbb{R}_{*}}\nabla_{x}\theta_{kj}(t,x,u,z)\,r_{kj}(t,z)\,\nu_{j}(dz).
\end{aligned}
\tag{2.41}
$$

et

$$
\begin{aligned}
\nabla_{u}H(t,x,u,p,q,r) &= \nabla_{u}f(t,x,u)+\sum_{j=1}^{n}\nabla_{u}b_{j}(t,x,u)\,p_{j}+\sum_{k,j=1}^{n}\nabla_{u}b_{kj}(t,x,u)\,q_{kj} \\
&+\sum_{k,j=1}^{n}\int_{\mathbb{R}_{*}}\nabla_{u}\theta_{kj}(t,x,u,z)\,r_{kj}(t,z)\,\nu_{j}(dz).
\end{aligned}
\tag{2.42}
$$

Combiné avec (2.36) et (2.38),(2.39),cela donne

$$\begin{aligned} 0 &= E\left[\int_0^T \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial u_i} f\left(t, \hat{X}(t), \hat{u}(t)\right) + \sum_{j=1}^n \left(\hat{p}_j(t)\right) \frac{\partial}{\partial u_i} b_j\left(t, \hat{X}(t), \hat{u}(t)\right)\right. \\ &+ \sum_{k=1}^n \hat{q}_{kj}(t) \frac{\partial}{\partial u_i} \sigma_{kj}\left(t, \hat{X}(t), \hat{u}(t)\right) + \\ &\int_{\mathbb{R}_*} \hat{r}_{kj}(t,z) \frac{\partial}{\partial u_i} \theta_{kj}\left(t, \hat{X}(t), \hat{u}(t), z\right) \nu_j(dz) \} \beta_i(t)\, dt \\ &= E\left[\int_0^T \nabla_u H\left(t, \hat{X}(t), \hat{u}(t), \hat{p}(t), \hat{q}(t), \hat{r}(t,.)\right)^T \beta(t)\, dt\right]. \end{aligned} \tag{2.43}$$

Fixez $t \in [0,T]$ et appliquez ce qui précède à $\beta = (0, ..., \beta_i, ..., 0)$ où

$$\beta_i(s) = \alpha_i \chi_{[t,t+h]}(s)\,;\ \ s \in [0,T]\,. \tag{2.44}$$

où $t + h \leq T$ et $\alpha_i = \alpha_i(\omega)$ est borné, $\mathcal{G}_t$-mesurable. Alors

$$E\left[\int_t^{t+h} \frac{\partial}{\partial u_i} H\left(s, \hat{X}(s), \hat{u}(s), \hat{p}(s), \hat{q}(s), \hat{r}(s,.)\right) \alpha_i ds\right] = 0.$$

La différenciation par rapport à h à $h = 0$ donne

$$E\left[\frac{\partial}{\partial u_i} H\left(t, \hat{X}(t), \hat{u}(t), \hat{p}(t), \hat{q}(t), \hat{r}(t,.)\right) \alpha_i\right] = 0.$$

Comme ceci est valable pour tous α_i les $\mathcal{G}_t$- mesurables, nous concluons que l'utilisation de (2.12)

$$E\left[\frac{\partial}{\partial u_i} H\left(t, \hat{X}(t), \hat{u}(t), \hat{p}(t), \hat{q}(t), \hat{r}(t,.)\right) / \mathcal{G}_t\right] = 0.$$

comme réclamé.

■

Chapitre 3

Une application dans la finance mathématique

Nous donnons une extension d'information partielle.

Supposons que nous avons un marché avec les deux possibilités d'investissement suivantes :

(i) Un actif sans risque, où le prix unitaire $S_0(t)$ au temps t est donné par :

$$\begin{cases} dS_0(t) & = \rho_t S_0(t)dt; \\ S_0(0) & = 1. \end{cases} \tag{3.1}$$

(ii) Un actif risqué, où le prix unitaire $S_1(t)$ au temps t est donné par :

$$\begin{cases} dS_1(t) & = S_1(t^-) \left[\alpha_t dt + \beta_t dB_t + \int\limits_{\mathbb{R}_*} \gamma(t,z) \tilde{N}(dt,dz) \right]; \\ S_1(0) & > 0. \end{cases} \tag{3.2}$$

Ici ρ_t,α_t,β_t et $\gamma(t,z)$ sont des fonctions déterministes bornées, et supposons que :

$$\alpha_t > \rho_t; \text{ et } \Lambda_t := \beta_t^2 + \int\limits_{\mathbb{R}_*} \gamma^2(t,z)\nu(dz) \geq \mathcal{G} > 0; \text{ pour tout } t \in [0,T] \tag{3.3}$$

Pour certains $\mathcal{G} > 0$, où $T > 0$ est une constante.

Supposons que

$$\gamma(t,z) > -1; \quad \text{pour tout } t, z. \tag{3.4}$$

Cela garantit que $S_1(t) > 0$ pour tout t.

Soit $\mathcal{G}_t \subseteq \mathcal{F}_t$ une sous-filtration.

Sur ce marché un portefeuille est un processus $\mathcal{G}_t$-prédictible $w(t) = (u_0(t), u_1(t)) \in \mathbb{R}^2$ nombre de parts détenues au moment t de l'actif sans risque et de l'actif risqué, respectivement.

Le processus de richesse correspondant $X(t) = X^{(w)}(t)$ est défini par :

$$dX^{(w)}(t) = u_0(t)dS_0(t) + u_1(t)dS_1(t). \tag{3.5}$$

Laisser

$$u(t) = u_1(t)S_1(t). \tag{3.6}$$

Notez le montant investi dans l'actif risqué au temps t et écrivez $X^{(u)}(t) = X^{(w)}(t)$.

Le portefeuille $u(t)$ est $\mathcal{G}$-admissible si $u(t)$ est $\mathcal{G}_t$-prédictible et que la richesse,

le processus $\{X^{(u)}(t)\}_{t\in[0,T]}$ est borné inférieur. L'ensemble des portefeuilles éligibles est notée $A_{\mathcal{G}}$.

Si $u \in A_{\mathcal{G}}$ alors l'équation de la richesse correspondante peut être écrite :

$$\begin{cases} dX^{(u)}(t) & = \{\rho_t X^{(u)}(t) + (\alpha_t - \rho_t)u(t)\}dt + \beta_t u(t)dB(t) \\ & \qquad + \int\limits_{\mathbb{R}} \gamma(t,z)u(t)\tilde{N}(dt,dz); \\ & \qquad X^{(u)}(0) = x > 0. \end{cases} \tag{3.7}$$

Le problème de la sélection de portefeuille information moyenne-variance information partielle est de trouver le portefeuille $\hat{u} \in A_{\mathcal{G}}$ qui minimise la variance

$$Var X^{(u)}(T) = E[(X^{(u)}(T) - E[X^{(u)}(T)])^2]. \tag{3.8}$$

à condition que

$$E[X^{(u)}(T)] = A. \tag{3.9}$$

où A est une constante donnée. Au moyen de la méthode des multiplicateurs de Lagrange, nous voyons

que le problème est équivalent à minimiser

$$E[(X^{(u)}(T) - a)^2].$$

où a est une constante donnée.

Cela équivalent à nouveau au problème de trouver $\hat{u} \in A_{\mathcal{G}}$ tel que

$$\sup_{u \in A_\varepsilon} E\left[-\tfrac{1}{2}\left(X^{(u)}(T) - a)^2\right)\right] = E\left[-\tfrac{1}{2}\left(X^{(\hat{u})}(T) - a)^2\right)\right]. \tag{3.10}$$

Pour résoudre ceci, nous écrivons le Hamiltonien

$$\begin{aligned} H(t,x,u,p,q,r) &= \{\rho_t x + (\alpha_t - \rho_t)u\}p + \beta_t uq \\ &+u\int_{\mathbb{R}_*} \gamma(t,z)r(t,z)\nu(dz). \end{aligned} \tag{3.11}$$

et l'équation de l'adjointe s'écrit sous la forme

$$\begin{cases} dp(t) &= -\rho_t p(t)dt + q(t)dB(t) + \displaystyle\int_{\mathbb{R}_*} r(t,z)\tilde{N}(dt,dz);\ t \in (0,T) \\ p(T) &= -X(T) + a, \end{cases} \tag{3.12}$$

On va maintenant chercher une solution $p(t)$ de l'équation adjointe précédente sous la forme

$$p(t) = \varphi_t X(t) + \psi_t, \tag{3.13}$$

où φ_t et ψ_t sont des fonctions déterministes et différenciables.

Puis par la formule d'Itô

$$
\begin{aligned}
dp(t) &= \varphi_t' X(t)dt + dX(t)\varphi_t + \psi_t' dt \\
&= \left[\varphi_t' X(t) + \psi_t'\right] dt + \varphi_t dX(t) \\
&= \varphi_t \left[\{\rho_t X^{(u)}(t) + (\alpha_t - \rho_t)u(t)\}dt + \beta_t u(t)dB(t) + \int_{\mathbb{R}} \gamma(t,z)u(t)\tilde{N}(dt,dz) \right] \\
&+ \left[X(t)\varphi_t' + \psi_t'\right] dt \\
&= [\varphi_t\rho_t X(t) + \varphi_t(\alpha_t - \rho_t)u(t) + X(t)\varphi_t' + \psi_t']dt \\
&+ \varphi_t\beta_t u(t)dB(t) + \varphi_t u(t) \int_{\mathbb{R}_*} \gamma(t,z)\, \tilde{N}(dt,dz).
\end{aligned}
\tag{3.14}
$$

En comparant (3.12) et (3.14) on obtient

$$
\varphi_t\rho_t X(t) + \varphi_t(\alpha_t - \rho_t)u(t) + X(t)\varphi_t' + \psi_t' = -\rho_t(\varphi_t X(t) + \psi_t),
\tag{3.15}
$$

$$
q(t) = \varphi_t\beta_t u(t).
\tag{3.16}
$$

et

$$
r(t,z) = \varphi_t\gamma(t,z)u(t).
\tag{3.17}
$$

Soit $\hat{u}(t) \in A_{\mathcal{G}}$ un contrôle optimal pour un candidat, et soit $\hat{X}(t), \hat{p}(t), \hat{q}(t)$ et $\hat{r}(t,z)$ les solutions correspondantes de (3.7) et (3.12).

Alors

$$\begin{aligned}
E\left[H\left(t,\hat{X}(t),u,\hat{p}(t),\hat{q}(t),\hat{r}(t,.)\right)/\mathcal{G}_t\right] &= E\left[\{\rho_t\hat{X}(t)+(\alpha_t-\rho_t)u\}\hat{p}(t)+\beta_t u\hat{q}(t)\right.\\
&\left.+u\int_{\mathbb{R}_*}\gamma(t,z)\hat{r}(t,z)\nu(dz)/\mathcal{G}_t\right]\\
&= E\left[\rho_t\hat{X}(t)\hat{p}(t)/\mathcal{G}_t\right]\\
&+E\left[(\alpha_t-\rho_t)u\hat{p}(t)+\beta_t u\hat{q}(t)\right.\\
&\left.+u\int_{\mathbb{R}_*}\gamma(t,z)\hat{r}(t,z)\nu(dz)/\mathcal{G}_t\right]\\
&= \rho_t E\left[\hat{X}(t)\hat{p}(t)/\mathcal{G}_t\right]\\
&+uE\left[(\alpha_t-\rho_t)\hat{p}(t)+\beta_t\hat{q}(t)+\int_{\mathbb{R}_*}\gamma(t,z)\hat{r}(t,z)\nu(dz)/\mathcal{G}_t\right].
\end{aligned}$$

Comme il s'agit d'une expression linéaire en u, on suppose que le coefficient de u doit disparaître,c'est à dire

$$\begin{aligned}
0 &= \mathbb{E}\left[(\alpha_t-\rho_t)\hat{p}(t)+\beta_t\hat{q}(t)+\int_{\mathbb{R}_*}\gamma(t,z)\hat{r}(t,z)\nu(dz)/\mathcal{G}_t\right]\\
&= \mathbb{E}\left[(\alpha_t-\rho_t)\hat{p}(t)/\mathcal{G}_t\right]+E\left[\beta_t\hat{q}(t)/\mathcal{G}_t\right]+\mathbb{E}\left[\int_{\mathbb{R}_*}\gamma(t,z)\hat{r}(t,z)\nu(dz)/\mathcal{G}_t\right]\\
&= (\alpha_t-\rho_t)\mathbb{E}[\hat{p}(t)/\mathcal{G}_t]+\beta_t\mathbb{E}[\hat{q}(t)/\mathcal{G}_t]+\int_{\mathbb{R}_*}\gamma(t,z)\mathbb{E}[\hat{r}(t,.)/\mathcal{G}_t]\nu(dz).
\end{aligned}$$

En remplaçant, (3.16) et (3.17) dans l'égalité précédente, on obtient

$$(\alpha_t-\rho_t)(\varphi_t\mathbb{E}[\hat{X}(t)/\mathcal{G}_t]+\psi_t)+\hat{u}(t)\varphi_t[\beta_t^2+\int_{\mathbb{R}_*}\gamma^2(t,z)\nu(dz)]=0.$$

alors

$$\hat{u}(t)\varphi_t[\beta_t^2+\int_{\mathbb{R}_*}\gamma^2(t,z)\nu(dz)] = -(\alpha_t-\rho_t)(\varphi_t\mathbb{E}[\hat{X}(t)/\mathcal{G}_t]+\psi_t),$$

et cela donne la solution candidate

$$\hat{u}\left(t\right)=\tfrac{-(\alpha_t-\rho_t)(\varphi_t E[\widehat{X}(t)/\mathcal{G}_t]+\psi_t)}{\varphi_t\Lambda_t}; \tag{3.18}$$

avec Λ_t donné par (3.3) . en utilisant (3.15) on a :

$$\mathbb{E}\left[\left(\varphi_t\rho_t\hat{X}(t)+\varphi_t(\alpha_t-\rho_t)\hat{u}(t)+\hat{X}(t)\varphi_t^{'}+\psi_t^{'}\right)/\mathcal{G}_t\right] \;\; =\mathbb{E}\left[-\rho_t(\varphi_t\hat{X}(t)+\psi_t)/\mathcal{G}_t\right],$$

$$\varphi_t\rho_t\mathbb{E}\left[\hat{X}(t)/\mathcal{G}_t\right]+\varphi_t(\alpha_t-\rho_t)\hat{u}(t)+\mathbb{E}\left[\hat{X}(t)/\mathcal{G}_t\right]\varphi_t^{'}+\psi_t^{'} \;\; =-\rho_t(\varphi_t\mathbb{E}\left[\hat{X}(t)/\mathcal{G}_t\right]+\psi_t),$$

$$\left(\varphi_t\rho_t+\varphi_t^{'}\right)\mathbb{E}\left[\hat{X}(t)/\mathcal{G}_t\right]+\rho_t(\varphi_t\mathbb{E}\left[\hat{X}(t)/\mathcal{G}_t\right]+\psi_t)+\psi_t^{'} \;\; =-\varphi_t(\alpha_t-\rho_t)\hat{u}(t),$$

$$\hat{u}(t) \;\; =\tfrac{\left(\varphi_t\rho_t+\varphi_t^{'}\right)\mathbb{E}\left[\hat{X}(t)/\mathcal{G}_t\right]+\rho_t(\varphi_t\mathbb{E}\left[\hat{X}(t)/\mathcal{G}_t\right]+\psi_t)+\psi_t^{'}}{-\varphi_t(\alpha_t-\rho_t)}. \tag{3.19}$$

En combinant (3.18) et (3.19) nous obtenons

$$\tfrac{-(\alpha_t-\rho_t)(\varphi_t E[\widehat{X}(t)/\mathcal{G}_t]+\psi_t)}{\varphi_t\Lambda_t} \;\; = \tfrac{\left(\varphi_t\rho_t+\varphi_t^{'}\right)\mathbb{E}\left[\hat{X}(t)/\mathcal{G}_t\right]+\rho_t(\varphi_t\mathbb{E}\left[\hat{X}(t)/\mathcal{G}_t\right]+\psi_t)+\psi_t^{'}}{-\varphi_t(\alpha_t-\rho_t)},$$

alors

$$(\alpha_t-\rho_t)^2(\varphi_t E[\widehat{X}\left(t\right)/\mathcal{G}_t]+\psi_t) \;\; =\left(\left(\varphi_t\rho_t+\varphi_t^{'}\right)\mathbb{E}\left[\hat{X}(t)/\mathcal{G}_t\right]+\rho_t(\varphi_t\mathbb{E}\left[\hat{X}(t)/\mathcal{G}_t\right]+\psi_t)+\psi_t^{'}\right)\Lambda_t,$$

en comparant les termes contenant $\mathbb{E}\left[\hat{X}(t)/\mathcal{G}_t\right]$, on obtient

$$\text{EDO}\begin{cases}(\alpha_t-\rho_t)^2\varphi_t-\left(2\varphi_t\rho_t+\varphi_t^{'}\right)\Lambda_t & =0;\\ (\alpha_t-\rho_t)^2\psi_t-\left(\rho_t\psi_t+\psi_t^{'}\right)\Lambda_t & =0;\end{cases}$$

qui équivalent à

$$\begin{cases} \varphi_t' &= \left(\frac{(\alpha_t-\rho_t)^2}{\Lambda_t} - 2\rho_t\right)\varphi_t; \quad \varphi_t\left(T\right) = -1; \\ \psi_t' &= \left(\frac{(\alpha_t-\rho_t)^2}{\Lambda_t} - \rho_t\right)\psi_t; \quad \psi_t\left(T\right) = a. \end{cases}$$

Nous pouvons maintenant détermination de φ_t et ψ_t alors :

$$\varphi_t = -\exp\left(\int_t^T \left\{\frac{(\alpha_s-\rho_s)^2}{\Lambda_s} - 2\rho_s\right\} ds\right);\ 0 \le t \le T. \tag{3.20}$$

$$\psi_t = a\exp\left(\int_t^T \left\{\frac{(\alpha_s-\rho_s)^2}{\Lambda_s} - \rho_s\right\} ds\right);\ 0 \le t \le T. \tag{3.21}$$

Satisfait toutes les exigences du théorème 2.1 alors $\hat{u}\left(t\right)$ est le portefeuille optimal basé sur le flux d'information $\mathcal{G}_t$.

Théoème 3.1 *Le portefeuille optimal $\hat{u} \in A$ pour le moyen d'information partiel*

Le problème de sélection du portefeuille de variance (3.8)-(3.9) est donné par (3.18)-(3.21).

Conclusion

Dans ce mémoire, nous avons étudie le principe maximum stochastique avec l'information partielle pour un systéme gouverné par une équation différentielle stochastique dans le cas où le coefficient de diffusion dépende de la variable du contrôle stochastique.

Nous avons présenté les conditions nécessaires et les conditions suffisentes d'optimalité de ce type et on a donnée une application de ce probléme dans la finance mathematique et on conclus que, malgré le caractére des informations partielles non-markovien, il est possible d'établire un principe du maximal pour de telles problémes de contrôle stochastique.

Bibliographie

[1] A. Bensoussan (1983) Principe maximal et approches de la programmation dynamique de l'optimum contrôle des diffusions partiellement observées. Stochastics 9, 169-222.

[2] RJ Elliott ; M. Kohlmann (1989) Le principe variationnel pour un contrôl optimal des diffusions avec des informations partielles. Systèmes et lettres de contrôle 12, 63–89.

[3] N. Framstad ; B. Øksendal ; A. Sulem (2001) Principe Maximum Stochastique pour Optimal Contrôle des diffusions de sauts et des applications au financement. Preprint 22, Université d'Oslo.

[4] H. Jin ; X. Zhou. Les problèmes de Markowitz en temps continu sur un marché incomplet,avec portefeuilles tendus. Manuscipt 2005.

[5] M. Kohlmann. Conditions d'optimalité dans le contrôle optimal des processus de saut - Résumé étendu. Proceedings in Operation Research, 7 (sixième assemblée annuelle, Deutsch. Gesellsch. Operation Res., Christian-Albrechts-Univ., Kiel, 1977), 48–57, Physica, Wizburg, 1978.

[6] Romuald ELIE & Idris KHARROUBI :Calcul Stochastique appliqué à la finance.

[7] J.Monique(2010) :Cours de Calcul Stochastique Master 2IFERY.

[8] Jean-François le Gall (2013),Mouvement brownien,martingales et Calcul Stochastique,Springer-Verlag Berlin Heidelberg.

[9] F-SAOUDI(2014),Principe de Maximum Stochastique sous l'information partielle,university de Biskra.

Annexe A : Abréviations et Notations

$(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$	Espace de probabilité ;
$\left(\Omega, \mathcal{F}, \{\mathcal{F}_t\}_{t\geq 0}, \mathbb{P}\right)$	Espace de probabilité filtré ;
$B(t)$	Mouvement Brownien ;
$\eta(t)$	Saut de Lévy martingale ;
$N_i(dt, dz)$	La mesure de saut ;
$\nu_i(dz)$	La mesure de Lévy sur de $\eta_i(t)$;
$\tilde{N}(ds, dz)$	La mesure de saut compensée de$\eta_i(t)$;
$X(t)$	Un processus d'état ;
b, σ, θ	Des fonctions de classes C^1 ;
$u(t)$	Contrôle adapted ;
A	Famille de contrôle adapted ;
$J(.)$	Fonction de coût ;
$H(t, x, u; p; q, r)$	Hamiltonien,.
$(p(t), q(t), r(t, z))$	Les processus adjoints,
HJB	Hamilton-Jacobi-Billman ;
$\hat{u}(t)$	Controle optimale des informations partielles ;
$S_0(t), S_1(t)$	Le prix unitaires
$\rho_t, \alpha_t, \beta_t\ , \gamma(t, z)$	Sont des fonctions déterministes bornées,
Var	La variance ;
$E[.]$	L'espérance
φ_t, ψ_t	Des fonctions déterministes et différenciables ;