République Algérienne Démocratique et Populaire

Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

UNIVERSITÉ MOHAMED KHIDER, BISKRA

FACULTÉ des SCIENCES EXACTES et des SCIENCES de la NATURE et de la VIE

DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES

Mémoire présenté en vue de l'obtention du Diplôme **:**

MASTER en Mathématiques

Option : **Probabilités**

Par

Sekkal Hania

Titre :

L'existence et l'unicité des solutions pour les EDSPRs de type champ moyen.

Membres du Comité d'Examen :

Dr.	**GHERBAL Boulakhras**	UMKB	Encadreur
Dr.	**ABBA Abedelmajid**	UMKB	Président
Dr.	**BENABBA Fadhila**	UMKB	Examinateur

Juin 2019

Dédicace

Je dédie ce modeste travail :

- *A mes chers Parents.*
- *A touts ma familles.*
- *A mon mari Hamza.D.*
- *A tous mes professeurs.*
- *A touts mes amies.*
- *A toutes les personnes qui m'ont soutenu pour terminer ce travail .*

REMERCIEMENTS

Je remercie d'abord et avant tout Dieu qui m'a donné le couragr et la patience pour réaliser ce travail.

Je remercie mon encadreur Monsieur "**Gherbal Boulakhras"** pour ses conseils et ses orientations.

Je remercie également les membres du jury (Dr.**ABBA Abedelmajid** et Dr.**BENABBA Fadhila**)

Je remercie aussi au chef du département de mathématiques Monsieur "**Hafayed Mokhtar"**pour les efforts.

Je remercie également tous les professeurs qui nous ont étudiés sincérement.

Merci à tout.

Table des matières

Introduction

Dans ce mémoire de master, on s'intéresse au problème d'existence et d'unicité des solutions pour les systèmes gouvernés par les équations différentielles stochastiques progressives rétrogrades non linéaire de type champ moyen suivantes :

$$\begin{cases} dX_t = b(t, X_t, \mathbb{E}[X_t])dt + \sigma(t, X_t, \mathbb{E}[X_t])dW_t \\ -dY_t = f(t, X_t, \mathbb{E}[X_t], Y_t, \mathbb{E}[Y_t], Z_t, \mathbb{E}[Z_t])dt - Z_t dW_t. \\ X_0 = x, Y_T = g(X_T, \mathbb{E}[X_T]), \end{cases}$$

où $(W_t)_{t\geq 0}$ un mouvement Brownien défni dans un espace de probabilité complet $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ et b, et f sont des fonctions mesurables.

Le coefficient b s'appelle le drift, σ s'appelle la diffusion de l'EDS et f s'appelle le générateur de l'EDSR.

Ce mémoire est composé de trois chapitres :

Le premier chapitre : On donne quelques génératités de calcul stochastique, et quelques définitions qui sont nécessaires pour la suite de ce mémoire, comme processus stochastique, filtration, mesurabilité, adaptation, mouvement Brownien, martingale, intégrale stochastique, processus d'Itô, formule d'Itô.

Le deuxième chapitre : L'objectif de ce chapitre est de définir les équations differencilles stochastiques rétrogrades, et nous montrerons le résultat classique d'existence et d'unicité des solutions dans le cas Lipschitz.

Le troisième chapitre : Dans ce chapitre, on étude un type des équations différentielles stochastiques progréssives rétrogrades non linéaires ce type s'appel le champ moyen, on va présenter le résultat d'existence et d'unicité des solutions pour des systèmes dérigés par des équations différentielles stochastiques progréssives rétrogrades non linéaires, de type champ moyen.

Chapitre 1

Rappels de calcul stochastique

1.1 Généralités.

Dans ce chapitre on dans quelques généralites de calcul stochastique.

Définition 1.1.1 *(**Processus stochastique**). Soit T un ensemble. On appelle processus stochastique indexé par T et à valeurs dans $\mathbb{R}^d$ une famille $(X_t)_{t\in T}$ d'applications mesurables de $(\Omega, \mathcal{F})$ dans $\mathbb{R}^d$, $B(\mathbb{R}^d)$ telle que pour tout $t \in T$, X_t est une variable aléatoire.*

Définition 1.1.2 *(**Filtration**). Une filtration est une famille croissante de sous tribus de $\mathcal{F}$, c'est-'a-dire telle que $\mathcal{F}_t \subset \mathcal{F}_s$ pour tout $t \geq s$.*

Définition 1.1.3 *(**Processus mesurable**). Un processus X est dit mesurable si l'application $(t, \omega) \longmapsto X_t(\omega)$ de $\mathbb{R}_+ \times \Omega$ dans $\mathbb{R}^d$ est mesurable par rapport aux tribus $B(\mathbb{R}_+) \otimes \mathcal{F}$ et $B(\mathbb{R}^d)$.*

Définition 1.1.4 *(**Progressivement mesurable**). Un processus X est progressivement mesurable par rapport à $\{\mathcal{F}_t\}_{t\geq 0}$ si, pour tout $t \geq 0$, l'application $(s, \omega) \longmapsto X_s\ (\omega)$ de $[0, t] \times \Omega$ dans $\mathbb{R}^d$ est mesurable par rapport à $B([0, t]) \otimes \mathcal{F}_t$ et $B(\mathbb{R}^d)$.*

Remarque 1.1.1 *Un processus progressivement mesurable est mesurable et adapté.*

Définition 1.1.5 ***(Processus adapté).*** *Un processus stochastique $X = (X_t, t \geq 0)$ est dit adapté par rapport à une flltration $\mathcal{F}_t$ (ou bien $\mathcal{F}_t$-adapté) si X_t est $\mathcal{F}_t$-mesurable pour tout t.*

1.1.1 Mouvement Brownien.

Définition 1.1.6 *(**Mouvement Brownien**). On appelle un mouvement Brownien standard tout processus stochastique W_t à valeurs réelles tel que :*

1. $\mathbb{P} - p.s.\ t \longmapsto W_t(\omega)$ est continue.
2. Pour $0 \leq s < t$, $W_t - W_s$ est indépendant de la tribu $\sigma\{W_u, u \leq s\}$ et de loi gaussienne centrée de variance $t - s$.
3. $W_0 = 0$, $\mathbb{P} - p.s.$

Pour tout $t > 0$, la variable aléatoire W_t suite la loi gaussienne centrée de variance t donc de densité $(2\pi t)^{-1/2} exp\{-x^2/(2t)\}$. On dit qu'un mouvement Brownien (MB dans la suite) part d'un point x si $W_0 = x$.

Remarque 1.1.2 *On dit que W est un $\{\mathcal{F}_t\}_{t\geq 0}$–MB si W est un processus continu, adapté à la filtration $\{\mathcal{F}_t\}_{t\geq 0}$, vérifiant*

$$\forall u \in \mathbb{R}, \forall 0 \leq s \leq t, \mathbb{E}\left[e^{iu(W_t - W_s)}/\mathcal{F}_s\right] = exp^{-u^2(t-s)/2}.$$

Proposition 1.1.1 *soit W un MB standard.*

1. Pour tout $s > 0$, $\{W_t + s - W_s\}_{t\geq 0}$ est un MB indépendant de $\sigma\{W_u, u \leq s\}$.
2. $-W$ est aussi un MB .
3. Pour tout $c > 0$, $\{cW_t/c^2\}_{t\geq 0}$ est un MB.
4. Le processus défini par $X_0 = 0$ et $X_t = tW_{1/t}$ est un MB.

Martingales.

Définition 1.1.7 ***(Martingale).*** *Un processus X à valeurs réelles est une martingale par rapport à la filtration $\{\mathcal{F}_t\}_{t\geq 0}$ si :*

1. Pour tout $t \geq 0$, X_t est $\mathcal{F}_t$–mesurable.
2. Pour tout $t \geq 0$, X_t- est intégrable.
3. Pour
$$0 \leq s \leq t, \mathbb{E}\left[X_t/\mathcal{F}_s\right] = X_s.$$

Remarque 1.1.3 *Si W est un MB, alors $\{W_{t^2} - t\}_{t\geq 0}$ et $\{exp\left(\sigma W_t - \sigma^2 t/_2\right)\}_{t\geq 0}$ sont des martingales.*

1.1.2 Espérance conditionnelle par rapport à une tribu

Soit X une variable aléatoire réelle (v.a.r), (intégrable) déflnie sur $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ et G une sous-tribu de $\mathcal{F}$. L'espérance conditionnelle $\mathbb{E}\left[X \backslash G\right]$ de X quand G est l'unique variable aléatoire telle que :

a) G-mesurable.

b)
$$\int_A \mathbb{E}\left[X \backslash G\right] d\mathbb{P} = \int_A X d\mathbb{P}; \forall A \in G.$$

1.1.3 Propriétés de l'espérance conditionnelle

a) <u>Linéarité</u>. Soit a et b deux constantes.

$$\mathbb{E}\left[(aX + bY \backslash G)\right] = a\mathbb{E}\left[X \backslash G\right] + b\mathbb{E}\left[Y \backslash G\right].$$

b) <u>Croissance</u>. Soit X et Y deux (v. a) telles que $X \leq Y$. Alors :

$$\mathbb{E}\left[X \diagdown G\right] \leq \mathbb{E}\left[Y \diagdown G\right].$$

c)

$$\mathbb{E}\left[\mathbb{E}\left[X\backslash G\right]\right] = \mathbb{E}\left[X\right].$$

d) Si X est G-mesurable,

$$\mathbb{E}\left[X\backslash G\right] = X.$$

e) Si Y est G-mesurable,

$$\mathbb{E}\left[XY\backslash G\right] = Y\mathbb{E}\left[X\backslash G\right].$$

f) Si X est indépendante de G,

$$\mathbb{E}\left[X\backslash G\right] = \mathbb{E}\left[X\right].$$

g) Si G est la tribu grossiére (composée de l'ensemble vide et de Ω),

$$\mathbb{E}\left[X\backslash G\right] = \mathbb{E}\left[X\right].$$

h) Si G et H sont deux tribus telles que $H \subset G$ alors

$$\mathbb{E}\left[X/H\right] = \mathbb{E}\left[\mathbb{E}\left[X\backslash H\right]\backslash G\right] = \mathbb{E}\left[\mathbb{E}\left[X\backslash G\backslash H\right]\right].$$

On note souvent

$$\mathbb{E}\left[\mathbb{E}\left[X\backslash H)\backslash G\right]\right] = \mathbb{E}\left[X\backslash H\backslash G\right].$$

i) Si (X,Y) sont indépendantes, et Φ une fonction borélienne bornée,

$$\mathbb{E}\left[\Phi(X,Y)\backslash Y\right] = \left[\mathbb{E}\left[\Phi(X,y)\right]\right]_{y=Y}.$$

Cette derniére égalité signifie que, pour calculer l'espérence conditionelle $\mathbb{E}\left[\Phi(X,Y)\backslash Y\right]$ lorsque les variables X et Y sont indépendantes, on explicite la fonction Ψ telle que $\Psi(y) = \mathbb{E}\left[\Phi(X,y)\right]$, puis on remplace y par Y pour obtenir la (v.a) $\Psi(Y)$.

1.2 Intégrale de Wiener

On note $\mathbb{L}^2(\mathbb{R}_+)$ l'ensemble des fonctions boréliennes f de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}$ de carré intégrable, c'est-à-dire telle que

$$\int_0^\infty \mid f(s) \mid^2 ds < 1.$$

Remarque 1.2.1 $\mathbb{L}_2(\mathbb{R}_+)$ *est un espace de Hilbert pour la norme*

$$\|f\|_2 = \left(\int_0^\infty f^2 ds\right)^{1/2},$$

Pour $f = 1_{]u,v]}$, on pose

$$\int_0^\infty f(s)dWs = W(v) - W(u).$$

Soit f une fonction en escalier, de la forme

$$f(x) = \sum_{i=1}^{i=n} f_{i-1} 1_{]t_{j+1},ti]},$$

on pose

$$\int_0^\infty f\ (s)dWs = \sum_{i=1}^{i=n} f_{i-1}(W_{t_i} W_{t_{i-1}}).$$

La variable aléatoire

$$I(f) = \int_0^\infty f(s)dW_s.$$

est une variable gaussienne d'espérance nulle et de variance égale à

$$\int_0^\infty f_2(s)ds.$$

1. $I(f)$ est gaussienne car le processus W est gaussien, aussi $I(f)$ est centrée car W est centré et

$$Var(I(f)) = \sum_{i=1}^{i=n} f_{i-1}^2 Var(W_{t_i} - W_{t_{i-1}})$$
$$= \sum_{i=1}^{i=n} f_{i-1}^2 (t_i - t_{i-1}) = \int_0^\infty f^{2\prime}(s)ds = \|f\|_2.$$

2. L'intégrale est linéaire :

$$I(f+g) = I(f) + I(g).$$

Si f et g sont deux fonctions en escalier

$$E(I(f)I(g)) = \int_0^\infty f(s)g(s)ds.$$

Théorème 1.2.1 *Soit* $f \in L^2_{loc}$ *et* $M_t = \int_0^t f(s)dW_s$. *Alors*

a) Le processus M est une martingale continue et la (v.a) M_t est d'espérance 0 et de variance égale à

$$\int_0^t f^2(s)ds.$$

b) Le processus M est un processus gaussien centré de covariance

$$\int_0^{t\hat{}s} f^2(u)du,$$

et à accroissements indépendants.

c) Le processus

$$(M_t^2 - \int_0^t f^2(s)ds, 0 \leq t),$$

est une martingale.

d) Si f et g sont dans $\mathbb{L}^2_{loc}$, on a :

$$\mathbb{E}\left[\int_0^t f(u)dW_u \cdot \int_0^s g(u)dW_u\right] = \int_0^{t\hat{}s} f(u)g(u)du.$$

1.2.1 Intégration par parties

Théorème 1.2.2 *Si* f *est une fonction de classe* C^1, *donc*

$$\int_0^t f(s)dW_s = f(t)W_t - \int_0^t \acute{f}(s)W_s ds.$$

Proposition 1.2.1 *Le processus* $X_t e^{-bt}$ *est une martingale.*

1.3 Intégrales stochastique

On veut généraliser l'intégrale de Wiener et de déflnir l'intégrale $\int_0^\infty \theta_s dW_s$ pour des processus stochastiques θ.

1.3.1 Cas de processus étagés

On dit qu'un processus θ est étagé (ou élémentaire) s'il existe une suite de réels t_j, telles que $0 \leq t_0 \leq t_1 .... \leq t_n$ et une suite de variables aléatoires θ_j telles que θ_j soit $\mathcal{F}_{t_j}$-mesurable, appartienne à $\mathbb{L}^2(\Omega)$ et que $\theta_t = \theta_j$ pour tout $t\ \epsilon]t_j, t_{j+1}]$, soit

$$\theta_s\ (\omega) = \textstyle\sum_{j=0}^{n-1} = \theta_j\ (\omega) 1_{]t_j,t_{j+1}]}(s).$$

On déflnit alors :

$$\textstyle\int_0^\infty \theta_s dW_s = \sum_{j=0}^{n-1} \theta_j (W_{t_{j+1}} - W_{t_j}).$$

On a

$$\mathbb{E}\left[\textstyle\int_0^\infty \theta_s dW_s\right] = 0\ et\ Var\ \left(\textstyle\int_0^\infty \theta_s dW_s\right) = \mathbb{E}\left[\textstyle\int_0^\infty \theta_s^2 ds\right].$$

On obtient

$$\textstyle\int_0^t \theta_s dW_s = \displaystyle\sum_{j=0}^{n-1} \theta_j (W_{t_{j+1} \wedge t} - W_{t_j \wedge t}).$$

Remarque 1.3.1 *Si* $T_j; 0 \leq T_0 \leq T_1 ..... \leq T_n$ *est une suite croissante de temps d'arrêt, si* $\theta_s = \theta_j 1_{]T_j,T_{j+1}]}(s)$ *oú* θ_j *est une suite de variables aléatoires telles que* θ_j *soit* $\mathcal{F}_{T_j}$ *mesurable, appartienne á* $\mathbb{L}^2(\Omega)$*, on déflnit alors :*

$$\textstyle\int_0^t \theta_s dWs = \displaystyle\sum_{j=0}^{n-1} \theta_j (W_{T_{j+1} \wedge t} - W_{T_j \wedge t}).$$

1.3.2 Cas général

On définit les processus continus á gauche limités à droite (cáglád) de carré intégrable appartenant à $\mathbb{L}^2(\Omega \times \mathbb{R}^+)$ comme l'ensemble Δ des processus θ adaptés cáglád , $(\mathcal{F}_t)$-adaptés tels que

$$\|\theta\|^2 \overset{déf}{=} \mathbb{E}\left[\int_0^t \theta_t^2 dt\right] < \infty.$$

On dit que θ_n converge vers θ dans $\mathbb{L}^2(\Omega \times \mathbb{R}^+)$ si $\|\theta - \theta^n\|^2 \ \to 0$ quand $n \to \infty$. L'application $\theta \mapsto \|\theta\|$ déflnie une norme qui fait de Δ un espace complet.

Alors on peut déflnir $\int_0^\infty \theta_s dW_s$ pour tous les processus θ de Δ : on approche θ par des processus étagés,

soit

$$\theta = \lim_{n\to\infty} \theta_n,$$

oú

$$\theta_n = \sum_{j=1}^{k(n)} \tilde{\theta}^n 1]t_j, t_{j+1}],$$

avec $\tilde{\theta}^n \in \mathcal{F}_{t_j}$ la limite étant au sens de $\mathbb{L}^2(\Omega \times \mathbb{R})$.

L'intégrale $\int_0^\infty \theta_s dW_s$ est alors la limite dans $\mathbb{L}^2(\Omega)$ des sommes

$$\sum_{j=1}^{k(n)} \tilde{\theta}^n (W_{t_{j+1}} - W_{t_j}),$$

dont l'espérance est 0 et la variance

$$\mathbb{E}[\textstyle\sum_j \tilde{\theta}^2 (t_{j+1} - t_j)].$$

On a alors :

$$\mathbb{E}\left[\int_0^\infty \theta_s dW_s\right] = 0 \text{ et } \mathbb{E}\left[\int_0^\infty \theta_s dW_s\right]^2 = \mathbb{E}\left[\int_0^\infty \theta_s^2 ds\right].$$

On note

$$\int_0^\infty \theta_s dW_s \overset{déf}{=} \int_0^\infty \theta_s \mathbf{1}_{[0,t]}(s) dW_s.$$

Si θ est étagé

$$\int_0^\infty \theta_s dW_s = \sum_i \theta_i (W_{t_i+1\wedge t} - W_{t_i\wedge t}).$$

Plus généralement, si τ est un temps d'arrêt, le processus $1_{]0;\tau]}(t)$ est adapté et on déflnit :

$$\int_0^{\tau\wedge t} \theta_s dW_s = \int_0^t \theta_s 1_{]0;\tau]}(s) dW_s.$$

1.4 Propriétés

On note par Γ l'ensemble $\mathbb{L}^2_{loc}(\Omega \times \mathbb{R}^+)$ des processus θ, adaptés, cáglád et vériflant

$$\mathbb{E}\left[\int_0^\infty \theta_s^2(\omega) ds\right] < \infty, \forall t.$$

1) Linéarité.

Soit a et b des constantes et $(\theta_i, i = 1, 2)$ deux processus de Γ on a :

$$\int_0^t (a\ \theta_s^1 + b\ \theta_s^2) dW_s = a \int_0^t \theta_s^1 dW_s + b \int_0^t \theta_s^2 dW_s.$$

2) Propriétés de martingale

Soit $M_t = \int_0^t \theta_s dW_s$, où $\theta \in \Gamma$ alors :

a) Le processus M est une martingale á trajectoires continues.

b) Soit

$$N_t = (\int_0^t \theta_s dW_s)^2 - \int_0^t \theta_s^2 ds.$$

Le processus $(N_t; 0 \leq t)$ est une martingale.

1.5 Processus d'Itô

On dit qu'un processus X est un processus d'Itô s'il est défini sous la forme suivante :

$$X_t = x + \int_0^t b_s ds + \int_0^t \sigma_s dW_s,$$

oú b est un processus adapté tel que $\int_0^t \mid b_s \mid ds$ existe (au sens Lebesgue) $\mathbb{P} - p.s$, pour tout t, et σ un processus appartenant à Γ.

1.5.1 Propriétés

1. Si σ appartient à Γ alors on a :

a)

$$\mathbb{E}\left[X_t\right] = \mathbb{E}\left[X_0\right] + \int_0^t \mathbb{E}\left[b_s\right] ds.$$

b)

$$\mathbb{E}\left[X_t \diagup \mathcal{F}_s\right] = X_0 + \int_0^s b_u \ du + \mathbb{E}\left[\int_s^t b_u du \diagup \mathcal{F}_s\right] + \int_0^s \sigma_u \ dW_u = X_s + \mathbb{E}\left[\int_s^t b_u du \diagup \mathcal{F}_s\right].$$

2. Si $b \equiv 0$ et $\sigma \in \Gamma$ le processus X est une martingale continue. La réciproque est vraie, sous certaines conditions d'intégrabilité et de mesurabilité, toute martingale continue s'écrit comme suit

$$x + \int_0^t \phi_s dW_s,$$

telle que $\phi \in \Gamma$.

Théorème 1.5.1 ***(Formule d'Itô).***

Soient $(t, x) \rightarrow f(t, x)$ une fonction réelle deux fois différentiable en x et une fois différentiable en t et X est un processus de Itô. Alors on a la formule suivante :

$$f(t, X_t) = f(0, X_0) + \int_0^t f'(s, X_s) ds + \int_0^t f'(s, X_s) dX_s + \frac{1}{2} \int_0^t f''(s, Xs) d\langle X, X\rangle_s.$$

Chapitre 2

Equations différentielles stochastiques rétrogrades (EDSRs)

L'objectif de ce chapitre est de définir les équations differentielles stochastiques rétrogrades (EDSRs), et de montrer le résultat classique d'existence et d'unicité des solutions pour ce genre du système.

Notation

- $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espace de probabilité complet.
- (W_t) est un mouvement Brownien.
- $\{\mathcal{F}_t\}_{t\geq 0}$ est une filtration.
- $S^2(\mathbb{R}^k)$: espace vectoriel formé des processus Y, progressivement mesurables, à valeurs dans $\mathbb{R}^k$ tels que :

$$\|Y\|_{S^2}^2 := \mathbb{E}\left[\sup_{0\leq t\leq T} |Y_t|^2\right] < \infty,$$

et $S_c^2(\mathbb{R}^k)$ l'espace des processus continus appartenant à $S^2(\mathbb{R}^k)$.

- $M^2(\mathbb{R}^{k\times d})$: celui formé par les processus Z, progressivement mesurables, à valeurs dans $\mathbb{R}^{k\times d}$ tels que :

$$\|Z\|_{M^2}^2 := \mathbb{E}\left[\int_0^T \|Z_t\|^2 dt\right] < \infty,$$

remarquant que les espaces S^2, S_c^2 et M^2 sont des espaces de Banach pour les normes définies précédemment, et $B^2 := S_c^2(\mathbb{R}^k) \times M^2(\mathbb{R}^{k\times d})$ est un espace de Banach.

On definit l'EDSR suivante :

$$\begin{cases} dY_t &= -f(r, Y_r, Z_r)dr + Z_r dW_r, \qquad 0 \leq t \leq T \\ Y_T &= \xi, \end{cases} \tag{2.1}$$

telle que :

1. f est une appliquation définie sur $[0, T] \times \Omega \times \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^{k\times d}$ a valeurs dans $\mathbb{R}^k$.

2. Y ne dépend pas du futur $\left(Y_T \text{ soit adapté par rapport á la filtration } (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}\right)$.

3. Pour tout $(y, z) \in \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^{k\times d}$, le processus $\{f(t, y, z)\}_{0\leq t\leq T}$ soit progressivement mesurable. On considère également une variable.

4. ξ une variable aléatoire, mesurable par rapport à $\mathcal{F}_T$ et à valeurs dans $\mathbb{R}^k$ c'est-.á- dire variable aléatoire connue á l'instant T.

Remarque 2.0.1 .

1. f s'appelle le générateur de l'EDSR.

2. ξ s'appelle la condition terminale.

Une solution de l'EDSR (2.1) est un couple de processus $\{(Y_t, Z_t)\}_{0\leq t\leq T}$ vérifiant :

3. les processus Y et Z sont progressivement mesurables à valeurs respectivement dans $\mathbb{R}^k$ et $\mathbb{R}^{k\times d}$;

4. $\mathbb{P} - p.s.$

$$\int_0^T \left(|f(r, Y_r, Z_r)| + \|Z_r\|^2\right) dr < \infty.$$

5. $\mathbb{P} - p.s.$, on a :

$$Y_t = \xi + \int_t^T f(r, Y_r, Z_r)dr - \int_t^T Z_r dW_r, 0 \leq t \leq T.$$

Remarque 2.0.2 *1. Les intégrales de l'équation* (2.1) *étant bien définies.*

2. Y est une semi-martingale continue.

3. Y_0 est une quantité déterministe.

2.1 L'existences et l'unicité des solutions pour les EDSRs

On va donner un premier résultat d'existence et l'unicité des solutions pour des systèmes gouvernés par des équations différentielles stochastiques rétrogrades (EDSRs) et ce résultat est dû a Pardoux et Peng [6] dépuis 1990.

Proposition 2.1.1 *Supposons qu'il existe un processus* $\{f_t\}_{0\leq t\leq T}$ *, positif, appartenant à* $M^2(\mathbb{R})$ *et une constante positive* λ *telle que :*

$$\forall (t,y,z) \in [0,T]\times\ \mathbb{R}^k \times\ \mathbb{R}^{k\times d}, |f(t,y,z)| \leq f_t + \lambda(|y| + \|z\|).$$

Si $\{(Y_t,Z_t)\}_{0\leq t\leq T}$ est une solution de l'EDSR (2.1) telle que $Z\in M^2$ alors Y appartient à S_c^2.

Lemme 2.1.1 *Soient* $Y\in S^2(\mathbb{R}^k)$ *et* $Z\in M^2(\mathbb{R}^{k\times d})$*. Alors*

$$\left\{\int_0^T Y_s Z_s dW_s, t\in[0,T]\right\},$$

est une martingale uniformément intégrable.

Le cas Lipschitz

On suppose que le générateur f vérifié les deux conditions suiventes :

(H) : Il existe une constante λ telle que $\mathbb{P}-p.s.$,

1. Condition de Lipschitz en (y,z) : pour tout $t,y,\acute{y},z,\acute{z}$

$$|f(t,y,z) - f(t,\grave{y},\acute{z})| \leq \lambda(|y-\acute{y}\ | + \|z-\acute{z}\|).$$

2. Condition d'intégrabilité :

$$\mathbb{E}(\mid \xi \mid^2 + \int_0^T |f(r,0,0)|^2 dr) < +\infty.$$

Nous commençons par un cas très simple, celui où f ne dépend ni de y ni de z (i.e), on se donne ξ de carré intégrable et un processus $\{F_t\}_{0\leq t\leq T}$ dans $M^2(\mathbb{R}^k)$ et on veut trouver une solution de l'EDSR,

$$Y_t = \xi + \int_t^T F_r dr - \int_t^T Z_r dW_r, 0 \leq t \leq T. \tag{2.2}$$

Lemme 2.1.2 *Soient* $\xi \in \mathbb{L}^2(\mathcal{F}_T)$ *et* $\{F_t\}_{0\leq t\leq T} \in M^2(\mathbb{R}^k)$. *L'EDSR* (2.2) *(possède une unique solution* (Y,Z) *telle que* $Z \in M^2$.

Démonstration : Supposons dans un premier temps que (Y,Z) soit une solution vérifiant que $Z \in M^2$. Si on prend l'espérance conditionnelle sachant $\mathcal{F}_t$, on a nécessairement, Y_t est donner par

$$Y_t = \mathbb{E}\left[\xi + \int_t^T F_r dr \setminus \mathcal{F}_t\right].$$

On définit donc Y à l'aide de la formule précédente et il reste à trouver Z. Remarquons que, d'après le théorème de Fubini, comme F est progressivement mesurable, $\int_0^t F_r dr$ est un processus adapté à la filtration $\{\mathcal{F}_t\}_{t\in[0,T]}$, en fait dans S_c^2 puisque F est de carré intégrable. On a alors, pour tout $t \in [0,T]$,

$$Y_t = \mathbb{E}\left[\xi + \int_0^T F_r dr \setminus \mathcal{F}_t\right] - \int_0^t F_r dr := M_t - \int_0^t F_r dr.$$

M est une martingale Brownienne, via le théorème de représentation des martingales Browniennes on construit un processus Z appartenant à M^2 tel que :

$$Y_t = M_t - \int_0^t F_r dr = M_0 + \int_0^t ZrdW_r - \int_0^t F_r dr.$$

On vérifie facilement que (Y, Z) ainsi construit est une solution de l'EDSR étudiée puisque comme $Y_T = \xi$.

$$\begin{aligned} Y_t - \xi &= M_0 + \int_0^t Z_r dW_r - \int_0^t F_r dr - (M_0 + \int_0^T Z_r dW_r - \int_0^T F_r dr) \\ &= \int_t^T F_r dr - \int_t^T Z_r dW_r. \end{aligned}$$

L'unicité est évidente pour les solutions vérifiant $Z \in M$.

Théorème 2.1.1 *Pardoux–Peng. Sous l'hypothèse (H), l'EDSR* (2.1) *possède une solution unique* (Y, Z) *telle que* $Z \in M^2$.

Démonstration : Nous utilisons un argument de **point fixe** dans l'espace de Banach B^2 en construisant une application Ψ de B^2dans lui-même de sorte que $(Y, Z) \in B^2$ est solution de l'EDSR (2.1) si et seulement si c'est un point fixe de Ψ.
Pour (U, V) élément de B^2, on définit $(Y, Z) = \Psi(U, V)$ comme étant la solution de l'EDSR :

$$Y_t = \xi + \int_t^T f(r, U_r, V_r) dr - \int_t^T Z_r dW_r, 0 \leq t \leq T.$$

Remarquons que cette dernière EDSR possède une unique solution qui est dans B^2. En effet, posons $F_r = f(r, U_{r,} V_r)$. Ce processus appartient à M^2 puisque, f étant Lipschitz,

$$|F_r| \leq |f(r, 0, 0)| + \lambda |U_r| + \lambda \|V_r\|,$$

et ces trois derniers processus sont de carré intégrable. Par suite, nous pouvons appliquer le Lemme (2.1.2) pour obtenir une unique solution (Y, Z) telle que $Z \in M^2$. (Y, Z) appartient à B^2 :
L'intégrabilité de Z est obtenue par construction et, d'après la Proposition précédente, Y appartient à S_c^2.
L'application Ψ de B^2 dans lui-même est donc bien définie.

Soient (U, V) et $(\acute{U}, \acute{V})$ deux éléments de B^2 et

$$(Y, Z) = \Psi(U, V), (\acute{Y}, \acute{Z}) = \Psi(\acute{U}, \acute{V}).$$

Notons

$y = Y - \acute{Y}$ et $z = Z - \acute{Z}$. On a, $y_T = 0$ et

$$dy_t = -\{f(t, U_t, V_t) - f(t, \acute{U}_t, \acute{V_t})\}dt + z_t dW_t.$$

On applique la formule de Itô à $e^{\alpha t|}|y_t|^2$ pour obtenir

$$\begin{aligned} de^{\alpha t}|y_t|^2 \quad &= \alpha e^{\alpha t}|y_t|^2 dt - 2e^{\alpha t} y_t \cdot \{f(t, U_t, V_t) - f(t, \acute{U}_t, \acute{V_t})\}dt \\ &+ 2e^{\alpha t} y_t \cdot z_t dW_t + e^{\alpha t}\|z_t\|^2 dt. \end{aligned}$$

Par conséquent, intégrant entre t et T , on obtient :

$$\begin{aligned} e^{\alpha t}|y_t|^2 + \int_t^T e^{\alpha r}\|z_r\|^2 dr \quad &= \int_t^T e^{\alpha r}(-\alpha|y_r|^2 + 2y_r \cdot \{f(r, U_r, V_r) - f(r, \grave{U}_r, \grave{V}_r)\})dr \\ &- \int_t^T 2e^{\alpha r} y_r \cdot z_r dW_r, \end{aligned}$$

et, comme la fonction f est Lipschitzienne il vient si en notant par u et v pour $U - \acute{U}$ et $V - \acute{V}$ (respectivement), que :

$$\begin{aligned} e^{\alpha r}|y_t|^2 + \int_t^T e^{\alpha r}\|z_r\|^2 dr \leq \int_t^T e^{\alpha r}(-\alpha|y_r|^2 + 2\lambda|y_r \mid\mid u_r| + 2\lambda|y_r|\|v_r\|)dr \\ - \int_t^T 2e^{\alpha r} y_r z_r dW_r. \end{aligned}$$

Pour tout $\varepsilon > 0$, on a $2ab \leq a^2/\varepsilon + \varepsilon b^2$ (l'inégalité de Yong), et donc, l'inégalité précédente devient :

$$\begin{aligned} &e^{\alpha t}|y_t|^2 + \int_t^T e^{\alpha r}\|z_r\|^2 dr \leq \int_t^T e^{\alpha r}(-\alpha + 2\lambda^2/\varepsilon)|y_r|^2 dr \\ &- \int_t^T 2e^{\alpha r} y_r \cdot z_r dW_r + \varepsilon \int_t^T e^{\alpha r}(|u_r|^2 + \|v_r\|^2)dr. \end{aligned}$$

et prenant $\alpha = 2\lambda^2/\varepsilon$, et notant par

$$R_\varepsilon = \varepsilon \int_0^T e^{\alpha r}(|u_r|^2 + \|v_r\|^2)dr,$$

on a

$$\forall t \in [0,T], e^{\alpha t}|y_t|^2 + \int_t^T e^{\alpha r}\|z_r\|^2 dr \leq R_\varepsilon - 2\int_t^T e^{\alpha r} y_r \cdot z_r dW_r. \tag{2.2}$$

D'après le Lemme (2.1.1), la martingale locale $\left\{\int_0^t e^{\alpha r} y_r \cdot z_r dW_r\right\}_{t\in[0,T]}$ est en réalité une martingale nulle en 0 puisque Y, $\acute{Y}$ appartiennent à S^2 et Z, $\acute{Z}$ appartiennent à M^2.
En particulier, prenant l'espérance – ce qui fait partir l'intégrale stochastique via la remarque précédente –, on obtient facilement, pour $t = 0$,

$$\mathbb{E}\left[\int_0^T e^{\alpha r}\|z_r\|^2 dr\right] \leq \mathbb{E}[R_\varepsilon]. \tag{2.3}$$

Revenant à l'inégalité (2.3), les inégalités Burkholder-Davis-Gundy fournissent – avec C universelle –

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left[\sup_{0\leq t\leq T} e^{\alpha t}|y_t|^2\right] &\leq \mathbb{E}[R_\varepsilon] + C\mathbb{E}\left[\left(\int_0^T e^{2\alpha r}|y_r|^2\|z_r\|^2 dr\right)^{1/2}\right] \\ &\leq \mathbb{E}[R_\varepsilon] + C\mathbb{E}\left[\sup_{0\leq t\leq T} e^{\alpha t/2}|y_t|\left(\int_0^T e^{\alpha r}\|z_r\|^2 dr\right)^{1/2}\right],\end{aligned}$$

puis, comme $ab \leq a^2/2 + b^2/2$,

$$\mathbb{E}\left[\sup_{0\leq t\leq T} e^{\alpha t}|y_t|^2\right] \leq \mathbb{E}[R_\varepsilon] + \tfrac{1}{2}\mathbb{E}\left[\sup_{0\leq t\leq T} e^{\alpha t}|y_t|^2\right] + \tfrac{C^2}{2}\mathbb{E}\left[\int_0^T e^{\alpha r}\|z_r\|^2 dr\right].$$

Prenant en considération l'inégalité (2.4), on obtient finalement

$$\mathbb{E}\left[\sup_{0\leq t\leq T} e^{\alpha t}|y_t|^2 + \int_0^T e^{\alpha r}\|z_r\|^2 dr\right] \leq (3 + C^2)\mathbb{E}[R_\varepsilon],$$

et par suite, revenant à la définition de R_ε,

$$\mathbb{E}\left[\sup_{0\leq t\leq T} e^{\alpha t}|y_t|^2 + \int_0^T e^{\alpha r}\|z_r\|^2 dr\right] \leq \varepsilon(3+C^2)(1\vee T)\mathbb{E}\left[\sup_{0\leq t\leq T} e^{\alpha t}|u_t|^2 + \int_0^T e^{\alpha r}\|v_r\|^2 dr\right].$$

Prenons ε tel que $\varepsilon(3+C^2)(1\vee T) = \frac{1}{2}$, de sorte que l'application Ψ est alors une contraction stricte de B^2dans lui-même si on le munit de la norme

$$\|(U,V)\|_\alpha = \mathbb{E}\left[(\sup_{0\leq t\leq T} e^{\alpha t}|U_t|^2 + \int_0^T e^{\alpha r}\|V_r\|^2 dr)^{1/2}\right],$$

qui en fait un espace de Banach – cette dernière norme étant équivalente à la norme usuelle correspondant au cas $\alpha = 0$.

Ψ possède donc un unique point fixe, ce qui assure l'existence et etl'unicité d'une solution de l'EDSR (2.1) dans B^2.

On obtient ensuite une unique solution vérifiant $Z \in M^2$ puisque la Proposition précédente implique qu'un telle solution appartient à B^2.

Le rôle de Z : Nous allons voir que le rôle de Z, plus précisément celui du terme $\int_0^T Z_r dW_r$ est de rendre le processus Y adapté et que lorsque ceci n'est pas nécessaire Z est nul.

2.2 Unicité :

Supposons que (Y,Z) et $(\hat{Y},\hat{Z})$ deux solutions de EDSR (2.1). On a pour tout $t \in [0,T]$,

$$\begin{aligned} &Y_t - \hat{Y}_t \\ &= \int_t^T \left\{ f(s,Y_s,Z_s,) - f(s,\hat{Y}_s,\hat{Z}_s) \right\} ds - \int_t^T \left\{ Z_s - \hat{Z}_s \right\} dW_s. \end{aligned} \tag{2.4}$$

En appliquant la formule d'Itô à $\mid Y_t - \hat{Y}_t \mid^2$, on trouve

$$d(\mid Y_t - \hat{Y}_t \mid^2) = 2 \mid Y_t - \hat{Y}_t \mid d(\mid Y_t - \hat{Y}_t \mid) + d\langle Y-\hat{Y}, Y-\hat{Y}\rangle_t.$$

Par passage à l'intégrale de t à T

$$
\begin{aligned}
&\mid Y_t-\hat{Y}_t\mid^2+\int_t^T \parallel Z_s-\hat{Z}_s\parallel^2 ds\\
&=2\int_t^T \langle Y_s-\hat{Y}_s, f(s,Y_s,Z_s)-f(s,\hat{Y}_s,\hat{Z}_s)\rangle ds+2\int_t^T (Y_s-\hat{Y}_s)(Z_s-\hat{Z}_s)dW_s.
\end{aligned}
$$

Par passage à l'espérance

$$
\begin{aligned}
&\mathbb{E}\left[\mid Y_t-\hat{Y}_t\mid^2\right]+\mathbb{E}\left[\int_t^T \parallel Z_s-\hat{Z}_s\parallel^2 ds\right]\\
&=2\mathbb{E}\left[\int_t^T \langle Y_s-\hat{Y}_s, f(s,Y_s,Z_s)-f(s,\hat{Y}_s,\hat{Z}_s)\rangle\right]
\end{aligned}
$$

Donc

$$
\begin{aligned}
&\mathbb{E}\left[\mid Y_t-\hat{Y}_t\mid^2\right]+\mathbb{E}\left[\int_t^T \parallel Z_s-\hat{Z}_s\parallel^2 ds\right]\leq\\
&+2K\mathbb{E}\left[\int_t^T \mid Y_s-\hat{Y}_s\mid (\mid Y_s-\hat{Y}_s\mid+\mid Z_s-\hat{Z}_s\mid)ds\right].
\end{aligned}
$$

Par l'inégalité de Yong on a

$$
\begin{aligned}
&\mathbb{E}\left[\mid Y_t-\hat{Y}_t\mid^2\right]+\mathbb{E}\left[\int_t^T \parallel Z_s-\hat{Z}_s\parallel^2 ds\right]\\
&\leq 2K^2\varepsilon^2\mathbb{E}\left[\int_t^T \mid Y_s-\hat{Y}_s\mid^2 ds\right]\\
&+\tfrac{2}{\varepsilon^2}\mathbb{E}\left[\int_t^T \mid Y_s-\hat{Y}_s\mid^2 ds\right]\\
&+\tfrac{2}{\varepsilon^2}\mathbb{E}\left[\int_t^T \parallel Z_s-\hat{Z}_s\parallel^2 ds\right]
\end{aligned}
$$

on posant $\frac{2}{\varepsilon^2}=\frac{1}{2}$,alors

$$
\begin{aligned}
&\mathbb{E}\left[\mid Y_t-\hat{Y}_t\mid^2\right]+\tfrac{1}{2}\mathbb{E}\left[\int_t^T \parallel Z_s-\hat{Z}_s\parallel^2 ds\right]\\
&\leq (8K^2+\tfrac{1}{2})\mathbb{E}\left[\int_t^T \mid Y_s-\hat{Y}_s\mid^2 ds\right].
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\mathbb{E}\left[\mid Y_t-\hat{Y}_t\mid^2\right]+\frac{1}{2}\mathbb{E}\left[\int_t^T \parallel Z_s-\hat{Z}_s\parallel^2 ds\right]\\
&\leq C\mathbb{E}\left[\int_t^T \mid Y_s-\hat{Y}_s\mid^2 ds\right],\ \text{avec } C=8K^2+\frac{1}{2}.
\end{aligned}
$$

Alors

$$\mathbb{E}\left[\sup_{t\in[0,T]} \mid Y_t - \hat{Y}_t \mid^2\right] + \frac{1}{2}\mathbb{E}\left[\int_t^T \parallel Z_s - \hat{Z}_s \parallel^2 ds\right]$$
$$\leq \grave{C}\ \mathbb{E}\left[\int_t^T \mid Y_s - \hat{Y}_s \mid^2 ds\right],\ \text{avec } C = 8K^2 + \frac{1}{2}.$$

On peut extraire deux inégalités :

$$\mathbb{E}\left[\sup_{0\leq t\leq T} \mid Y_t - \hat{Y}_t \mid^2\right] \leq c\mathbb{E}\left[\int_t^T \mid Y_s - \hat{Y}_s \mid^2 ds\right] \tag{2.5}$$

$$\frac{1}{2}\mathbb{E}\left[\int_t^T \parallel Z_s - \hat{Z}_s \parallel^2 ds\right] \leq C\mathbb{E}\left[\int_t^T \mid Y_s - \hat{Y}_s \mid^2 ds\right] \tag{2.6}$$

D'après l'inégalité de Granwall à (2.5)

on a $b = 0$, donc

$$\mathbb{E}\left[\sup_{0\leq t\leq T} \mid Y_t - \hat{Y}_t \mid^2\right] = 0. \tag{2.8}$$

Remplaçant (2.8) dans (2.6), on trouve

$$\mathbb{E}\left[\int_t^T \parallel Z_s - \hat{Z}_s \parallel^2 ds\right] = 0.$$

Donc

$$Y_t \equiv \hat{Y}_t,\ Z_s \equiv \hat{Z}_s$$

Ce qui prouve l'unicité.

Proposition 2.2.1 *Soit (Y, Z) la solution de l'EDSR (2.1) et soit τ un temps d'arrêt majoré par T. On suppose, outre l'hypothèse (H), que ξ est $\mathcal{F}_\tau$–mesurable et que $f(t, y, z) = 0$ dès que $t \geq \tau$. Alors $Y_t = Y_{t\wedge\tau}$ et $Z_t = 0$ si $t \geq \tau$.*

Chapitre 3

Existence et unicité des solutions pour les EDSPRs de type champ moyen

Dans ce chapitre, on s'interesse d'un nouveau type des équations différentielles stochastiques progréssives rétrogrades non linéaires, ce type s'appel **"champ moyen"** alors , on va présenter le résultat d'existence et d'unicité des solutions pour des systèmes d'équations différentielles stochastiques progréssives rétrogrades non linéaires, (EDSPRs par la suite) de type champ moyen.

3.1 Notation et définitions

- $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espace de probabilité complet.
- (W_t) est une mouvement Brownien.
- $\mathcal{F}_t$ est une filtraton.

On cherche à résoudre le système suivant :

$$\begin{cases} dX_t = b(t, X_t, \mathbb{E}[X_t])dt + \sigma(t, X_t, \mathbb{E}[X_t])dW_t \\ -dY_t = f(t, X_t, \mathbb{E}[X_t], Y_t, \mathbb{E}[Y_t], Z_t, \mathbb{E}[Z_t])dt - Z_t dW_t. \\ X_0 = x, Y_T = g(X_T, \mathbb{E}[X_T]), \end{cases}$$

telle que les fonctions suivantes soient mesurables et bornées :

$$\begin{cases} b : \Omega \times [0, T] \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n, \\ \sigma : \Omega \times [0, T] \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^{n \times d}, \\ g : \Omega \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m, \\ f : \Omega \times [0, T] \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^{m \times d} \times \mathbb{R}^{m \times d} \longrightarrow \mathbb{R}^m. \end{cases}$$

Ce système peut être interpréter sous forme intégrale comme suit

$$\begin{cases} X_t &= x + \int_0^t b(s, X_s, \mathbb{E}[X_s])ds + \int_0^t \sigma(s, X_s, \mathbb{E}[X_s])dW_s, t > 0, \\ Y_t &= g(X_T, \mathbb{E}[X_T]) + \int_t^T f(s, X_s, \mathbb{E}[X_s], Y_s, \mathbb{E}[Y_s], Z_s, \mathbb{E}[Z_s])ds \\ & \quad - \int_t^T Z_s dW_s;\ 0 \leq t \leq T. \end{cases} \tag{3.1}$$

Le système (3.1) et appelé équation différentielle stochastique progressive rétrograde (EDSPR) de type champ moyen. Telle que, le coeffcient b s'appelle le drift, σ s'appelle la diffusion de l'EDS et f s'appelle le générateur de l'EDSR.

– On travaillera avec deux espaces de processus :

– On notera tout d'abord $S^2(R^n)$ l'éspace vectoriel formé du processus X_t, progressivement mesurable, à valeurs dans R^n, telle que :

$$\| X_t \|_{S^2}^2 = \mathbb{E}\left[\sup_{0 \leq t \leq T} | X_t |^2\right] < \infty.$$

Et $S_c^2(R^n)$ le sous-éspace formé par les processus continus.

– Et ensuite $M^2(R^{m\times d})$ celui formé par le processus Z_t progressivement mesurables, à valeurs

dans $R^{n\times d}$, telle que :

$$\| Z_t \|_{M^2}^2 = \mathbb{E}\left[\int_0^T \mid Z_t \mid^2 dt\right] < \infty.$$

– Les espaces S^2 , S_c^2 et M^2 sont des éspaces de Banach pour les normes définies précedemment.

– Nous désignerons B^2 l'espace de Banach

$$S^2(R^n) \times S_c^2(R^n) \times M^2(R^{m\times d}).$$

Lemme 3.1.1 ***(Lemme de Granwall)***

Soit $g : [0,T] \to \mathbb{R}$ une fonction continue vérifant

$$\forall t \in [0,T], 0 \leq g(t) \leq \alpha(t) + \beta \int_0^t g(s)ds. \tag{3.2}$$

Pour une constante $\beta \geq 0$ et pour une fonction $\alpha : [0,T] \to \mathbb{R}$ intégrable par rapport à la mesure de Lebesgue, on a alors :

$$\forall t \in [0,T], g(T) \leq \alpha e^{\beta t}, \tag{3.3}$$

et si $\alpha = 0$ on a $g = 0$.

Définition 3.1.1 *On appelle solution du système des équations différentielles stochastiques progréssives rétrogrades (EDSPR) de type champ moyen (3.1), tout triple* (X, Y, Z) *de processus progressivement mesurables à valeurs* $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^{m\times d}$ *et de carré intégrable* *tels que :*

$$\begin{cases} X_t & = x + \int_0^t b(s, X_s, \mathbb{E}[X_s])ds + \int_0^t \sigma(s, X_s, \mathbb{E}[X_s])dW_s, \\ Y_t & = g(X_T, \mathbb{E}[X_T]) + \int_t^T f(s, X_s, \mathbb{E}[X_s], Y_s, \mathbb{E}[Y_s], Z_s, \mathbb{E}[Z_s])ds - \int_t^T Z_s dW_s. \end{cases} \tag{3.4}$$

3.2 Théoréme d'existance et d'unicité

Théorème 3.2.1 ***(Existence et unicité)***

Soient b, σ, f et g des fonctions boréliennes. On suppose qu'il existe une constante $K > 0$ telle que, pour tout $t \in [0, T]$, pour tout $(x_1, \grave{x}_1, x_2, \grave{x}_2, y_1, \grave{y}_1, y_2, \grave{y}_2, z_1, \grave{z}_1, z_2, \grave{z}_2) \in \mathbb{R}^{4n+4m+4m\times d}$:

1. Condition de Lipshitz

$$\begin{aligned} &\mid b(t, x_1, \grave{x}_1) - b(t, x_2, \grave{x}_2) \mid + \parallel \sigma(t, x_1, \grave{x}_1) - \sigma(t, x_2, \grave{x}_2) \parallel \\ &\leq K(\mid (x_1 - x_2) \mid + \mid \grave{x}_1 - \grave{x}_2 \mid), \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} &\parallel f(t, x_1, \grave{x}_1, y_1, \grave{y}_1, z_1, \grave{z}_1) - f(t, x_2, \grave{x}_2, y_2, \grave{y}_2, z_2, \grave{z}_2) \parallel \\ &\leq K(\mid (x_1 - x_2) \mid + \mid (\grave{x}_1 - \grave{x}_2) \mid + \mid (y_1 - y_2) + \mid (\grave{y}_1 - \grave{y}_2) \mid \\ &+ \parallel (z_1 - z_2) \parallel + \parallel (\grave{z}_1 - \grave{z}_2) \parallel). \end{aligned}$$

$$\mid g(x_1, \grave{x}_1) - g(x_2, \grave{x}_2) \mid \leq K(\mid x_1 - x_2 \mid + \mid \grave{x}_1 - \grave{x}_2 \mid).$$

2. Croissance linéaire :

$$\mid b(t, x, \grave{x}) \mid + \parallel \sigma(t, x, \grave{x}) \parallel \leq K(\mid (1 + \mid x \mid + \mid \grave{x} \mid).$$

et

$$\begin{aligned}&|\ (f(t,x,\grave{x},y,\grave{y},z,\grave{z})\ |\leq K(1+\mid x\mid+\mid \grave{x}\mid\\&+\mid y\mid+\mid \grave{y}\mid+\|z\|+\|\grave{z}\|).\end{aligned}$$

3.

$$\mathbb{E}\left[\int_0^T |f(s,0,0,0,0,0,0)|^2\right] ds<+\infty.$$

Alors, il existe une solution unique (X,Y,Z) de l'EDSPR de type champ moyen (3.4).

Démonstration :

1. **L'existence** : Nous construisons la solution par la méthode **d'itération de Picard**. En défnissant la suite $(X^n,Y^n,Z^n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que $X_t^0=x$,$Y_0=Z_0=0$, et $(X^{n+1},Y^{n+1},Z^{n+1})$ est la solution du système d'équations différentielles stochastiques progressives rétrogrades de type champ moyen suivants :

$$\begin{cases} X_t^{n+1}= & x+\int_0^t b(s,X_s^n,\mathbb{E}\left[X_s^n\right])ds+\int_0^t \sigma(s,X_s^n,\mathbb{E}\left[X_s^n\right])dW_s,\\ Y_t^{n+1}= & g(X_T^n,\mathbb{E}\left[X_T^n\right])+\int_t^T f(s,X_s^n,\mathbb{E}\left[X_s^n\right],Y_s^n,\mathbb{E}\left[Y_s^n\right],Z_s^n,\mathbb{E}\left[Z_s^n\right])ds\\ & -\int_t^T Z_s^{n+1}dW_s.\end{cases}\tag{3.5}$$

Et telles que les intégrales stochastiques sont bien défnies car il est clair par récurrence que pour chaque n, X_t^{n+1} continu et adapté, donc le processus $\sigma(s,X_s^n,\mathbb{E}\left[X_s^n\right])$ l'est aussi.
– **Premièrement,** on montre l'existante de solution de l'EDS dans (3.1), pour $t\in[0,T]$, vérifant d'abord par récurrence sur n qu'il existe une constante C_n telle que pour tout $t\in[0,T]$.

$$\mathbb{E}\left[\mid X_t^n\mid^2\right]\leq C_n.\tag{3.6}$$

Supposons que $\mathbb{E}\left[\mid X_t^n\mid^2\right]\leq C_n$ et on montrer que

$$\mathbb{E}\left[\mid X_t^{n+1}\mid^2\right]\leq C_{n+1}.$$

On a :

$$\mid X_t^{n+1} \mid^2=\mid x + \int_0^t b(s, X_s^n, \mathbb{E}[X_s^n])ds + \int_0^t \sigma(s, X_s^n, \mathbb{E}[X_s^n])dW_s \mid^2,$$

comme $(a+b+c)^2 \leq 3(a^2+b^2+c^2)$, donc :

$$\mid X_t^{n+1} \mid^2 \leq 3 \left(\mid x \mid^2 + \left(\int_0^t \mid b(s, X_s^n, \mathbb{E}[X_s^n]) \mid ds \right)^2 \right. \\ \left. + \left(\int_0^t \parallel \sigma(s, X_s^n, \mathbb{E}[X_s^n]) \parallel dW_s \right)^2 \right).$$

Par passage a l'espérance, on obtient :

$$\begin{aligned} &\mathbb{E}\left[\mid X_t^{n+1} \mid^2\right] \leq 3 \left(\mid x \mid^2 + \mathbb{E}\left[\left(\int_0^t \mid b(s, X_s^n, \mathbb{E}[X_s^n]) \mid ds \right)^2 \right] \right. \\ &\left. + \mathbb{E}\left[\left(\int_0^t \parallel \sigma(s, X_s^n, \mathbb{E}[X_s^n]) \parallel dW_s \right)^2 \right] \right). \end{aligned} \tag{3.7}$$

Appliquant l'isométrie , le théorème de Fubini et la croissance linéaire, on obtient :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\left[\left(\int_0^t \sigma(s, X_s^n, \mathbb{E}[X_s^n]\, dW_s \right)^2 \right] &= \mathbb{E}\left[\int_0^t \parallel \sigma(s, X_s^n, \mathbb{E}[X_s^n]) \parallel^2 ds \right] \\ &\leq \mathbb{E}\left[\int_0^t K^2(1+ \mid X_s^n \mid^2 + \mathbb{E}[\mid X_s^n \mid^2])ds \right] \\ &\leq \int_0^t K^2(1 + \mathbb{E}[\mid X_s^n \mid^2] + \mathbb{E}[\mathbb{E}[\mid X_s^n \mid^2]])ds \\ &\leq \int_0^t K^2(1 + 2\mathbb{E}[\mid X_s^n \mid^2])ds. \end{aligned} \tag{3.8}$$

Et par l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on a

$$\begin{aligned} &\mathbb{E}\left[\left(\int_0^t b(s, X_s^n, \mathbb{E}[X_s^n])ds \right)^2 \right] \leq \mathbb{E}\left[(\int_0^t ds) \times (\int_0^t \mid b(s, X_s^n, \mathbb{E}[X_s^n]) \mid^2)ds \right] \\ &\leq T\mathbb{E}\left[\int_0^t K^2(1+ \mid X_s^n \mid^2 + \mathbb{E}[\mid X_s^n \mid^2])ds \right] \\ &\leq \int_0^t K^2(1 + 2\mathbb{E}[\mid X_s^n \mid^2])ds, \end{aligned} \tag{3.9}$$

remplaçant (3.9) et (3.8) dans (3.7) on trouve

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left[\mid X_t^{n+1}\mid^2\right] &\leq 3\left(\mid x\mid^2 + T\mathbb{E}\left[\int_0^t K^2(1+\mid X_s^n\mid^2 + \mathbb{E}\left[\mid X_s^n\mid^2\right])ds\right]\right.\\ &\qquad\left. + \int_0^t K^2(1+2\mathbb{E}\left[\mid X_s^n\mid^2\right])ds\right)\\ &\leq C + C\int_0^t \mathbb{E}\left[\mid X_t^n\mid^2\right]ds; \forall t\in[0,T], C>0.\end{aligned}$$

Ce qui prouve (3.6).

On va majorer par récurrence la quantité

$$\mathbb{E}\left[\sup_{0\leq t\leq T}\mid X_t^{n+1} - X_t^n\mid^2\right].$$

On a :

$$\begin{aligned}X_t^{n+1} - X_t^n &= x + \int_0^t b(s, X_s^n, \mathbb{E}(X_s^n))ds + \int_0^t \sigma(s, X_s^n, \mathbb{E}(X_s^n))dW_s\\ &-x - \int_0^t b(s, X_s^{n-1}, \mathbb{E}(X_s^{n-1}))ds - \int_0^t \sigma(s, X_s^{n-1}, \mathbb{E}(X_s^{n-1}))dW_s\\ &= \int_0^t \left(b(s, X_s^n, \mathbb{E}(X_s^n)) - b(s, X_s^{n-1}, \mathbb{E}(X_s^{n-1})\right)ds\\ &+ \int_0^t \left(\sigma(s, X_s^n, \mathbb{E}(X_s^n) - \sigma(s, X_s^{n-1}, \mathbb{E}(X_s^{n-1})\right)dW_s.\end{aligned}$$

En utilisant l'inégalité de Doob, on obtient

$$\begin{aligned}&\mathbb{E}\left[\sup_{0\leq s\leq t}\mid X_s^{n+1} - X_s^n\mid^2\right]\\ &\leq 2\mathbb{E}\left[\mid \int_0^t(\sigma(s, X_s^n, \mathbb{E}\left[X_s^n\right] - \sigma(s, X_s^{n-1}, \mathbb{E}\left[X_s^{n-1}\right])dW_s\mid^2\right]\\ &+2\mathbb{E}\left[\mid \int_0^t(b(s, X_s^n, \mathbb{E}\left[X_s^n\right]) - b(s, X_s^{n-1}, \mathbb{E}\left[X_s^{n-1}\right])ds\mid^2\right]\\ &\leq 2\mathbb{E}\left[\int_0^t \parallel \sigma(s, X_s^n, \mathbb{E}\left[X_s^n\right]) - \sigma(s, X_s^{n-1}, \mathbb{E}\left[X_s^{n-1}\right]) \parallel^2 ds\right]\\ &+2T\mathbb{E}\left[\int_0^t \mid b(s, X_s^n, \mathbb{E}\left[X_s^n\right]) - b(s, X_s^{n-1}, \mathbb{E}\left[X_s^{n-1}\right]\mid^2 ds\right].\end{aligned}$$

Comme les fonctions b et σ sont Lipshitziennes, on obtient pour $t\in[0,T]$,

$$\mathbb{E}\left[\sup_{0\leq s\leq t}\mid X_s^{n+1} - X_s^n\mid^2\right] \leq 4(1+T)K^2\mathbb{E}\left[\int_0^t \mid X_s^n - X_s^{n-1}\mid^2 ds\right].$$

Alors

$$\mathbb{E}\left[\sup_{0\leq s\leq t} \mid X_s^{n+1}-X_s^n \mid^2\right] \leq C\int_0^t \mathbb{E}\left[\sup_{0\leq r\leq s} \mid X_r^n - X_r^{n-1} \mid^2\right] ds \tag{3.10}$$

, où $C=4(1+T)K^2$.

Nous répétons la même méthode, en appliquant l'inégalité de Doob, à $\mid X_t^n - X_t^{n-1} \mid$ pour obtenir

$$\begin{aligned}
&\mid X_s^n - X_s^{n-1} \mid^2 \\
&\leq 2 \mid \int_0^s (\sigma(r, X_r^{n-1}, \mathbb{E}[X_r^{n-1}]) - \sigma(r, X_r^{n-2}, \mathbb{E}[X_r^{n-2}]))dW_r \mid^2 \\
&+2 \mid \int_0^s (b(r, X_r^{n-1}, \mathbb{E}[X_r^{n-1}]) - b(r, X_r^{n-2}, \mathbb{E}[X_r^{n-2}]))dr \mid^2 \\
&\leq 2\int_0^s \parallel \sigma(r, X_r^{n-1}, \mathbb{E}[X_r^{n-1}]) - \sigma(r, X_r^{n-2}, \mathbb{E}[X_r^{n-2}]) \parallel^2 dr \\
&+2T\int_0^s \mid (b(r, X_r^{n-1}, \mathbb{E}[X_r^{n-1}]) - b(r, X_r^{n-2}, \mathbb{E}[X_r^{n-2}]) \mid^2 dr.
\end{aligned}$$

Comme les fonctions b et σ sont Lipshitziennes, on obtient

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}\left[\sup_{0\leq r\leq s} \mid X_r^n - X_r^{n-1} \mid^2\right] \leq C\int_0^s \mathbb{E}\left[\mid X_r^{n-1} - X_r^{n-2} \mid^2\right] dr \\
&\leq C\int_0^s \mathbb{E}\left[\sup_{0\leq k\leq r} \mid X_k^{n-1} - X_k^{n-2} \mid^2\right] dr.
\end{aligned} \tag{3.11}$$

En remplaçant (3.11) à (3.10), on trouve:

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}\left[\sup_{0\leq s\leq t} \mid X_s^{n+1} - X_s^n \mid^2\right] \leq C\int_0^t \mathbb{E}\left[\sup_{0\leq r\leq s} \mid X_r^n - X_r^{n-1} \mid^2\right] ds \\
&\leq C\int_0^t (C\int_0^s \mathbb{E}\left[\sup_{0\leq k\leq r} \mid X_k^{n-1} - X_k^{n-2} \mid^2\right] dr)ds \\
&\leq C^2\mathbb{E}\left[\sup_{0\leq k\leq r} \mid X_k^{n-1} - X_k^{n-2} \mid^2\right] \int_0^t (\int_0^s dr)ds \\
&\leq C^2\mathbb{E}\left[\sup_{0\leq k\leq r} \mid X_k^{n-1} - X_k^{n-2} \mid^2\right] \int_0^t s\ ds \\
&\leq C^2\mathbb{E}\left[\sup_{0\leq k\leq r} \mid X_k^{n-1} - X_k^{n-2} \mid^2\right] \left[\frac{s^2}{2}\right]_0^t \\
&\leq C^2\frac{T^2}{2}\mathbb{E}\left[\sup_{0\leq k\leq r} \mid X_k^{n-1} - X_k^{n-2} \mid^2\right].
\end{aligned}$$

De même façon que (3.10) et (3.11) ; on peur trouver :

$$\mathbb{E}\left[\sup_{0\leq k\leq r} \mid X_k^{n-1} - X_k^{n-2} \mid^2\right] \leq C \int_0^r \mathbb{E}\left[\sup_{0\leq l\leq k} \mid X_l^{n-2} - X_l^{n-3} \mid^2\right] dk. \tag{3.12}$$

En remplaçant (3.10) et (3.11) à (3.12), on obtient

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}\left[\sup_{0\leq s\leq t} \mid X_s^{n+1} - X_s^{n} \mid^2\right] \leq C \int_0^t \mathbb{E}\left[\sup_{0\leq r\leq s} \mid X_r^{n} - X_r^{n-1} \mid^2\right] ds \\
&\leq C^2 \int_0^t (\int_0^s \mathbb{E}\left[\sup_{0\leq k\leq r} \mid X_k^{n-1} - X_k^{n-2} \mid^2\right] dr) ds \\
&\leq C^3 \int_0^t (\int_0^s (\int_0^r \mathbb{E}\left[\sup_{0\leq l\leq k} \mid X_l^{n-2} - X_l^{n-3} \mid^2\right] dk) dr) ds \\
&\leq C^3 \mathbb{E}\left[\sup_{0\leq l\leq k} \mid X_l^{n-2} - X_l^{n-3} \mid^2\right] \int_0^t (\int_0^s (\int_0^r dk)\ dr) ds \\
&\leq C^3 \mathbb{E}\left[\sup_{0\leq l\leq k} \mid X_l^{n-2} - X_l^{n-3} \mid^2\right] \int_0^t (\int_0^s r\ dr) ds \\
&\leq C^3 \mathbb{E}\left[\sup_{0\leq l\leq k} \mid X_l^{n-2} - X_l^{n-3} \mid^2\right] \int_0^t \tfrac{s^2}{2} ds \\
&\leq \tfrac{C^3 T^3}{3!} \mathbb{E}\left[\sup_{0\leq l\leq k} \mid X_l^{n-2} - X_l^{n-3} \mid^2\right].
\end{aligned}$$

On répète cette méthode plusieurs fois, on trouve :

$$\mathbb{E}\left[\sup_{0\leq s\leq T} \mid X_s^{n+1} - X_s^{n} \mid^2\right] \leq \tfrac{C^n T^n}{n!} \mathbb{E}\left[\sup_{0\leq s\leq T} \mid X_s^{1} - X_s^{0} \mid^2\right] \leq D \tfrac{C^n T^n}{n!}. \tag{3.13}$$

En appliquant l'inégalité de Tchebychev, on a

$$\mathbb{P}\left[\sup_{0\leq s\leq T} \mid X_s^{n+1} - X_s^{n} \mid > \tfrac{1}{2^{n+1}}\right] \leq D \tfrac{T^n C^n}{n!} / (\tfrac{1}{2^{n+1}})^2 = 4D \tfrac{(4TC)^n}{n!}.$$

Il vient que

$$\sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{P}\left[\sup_{0\leq s\leq T} \mid X_s^{n+1} - X_s^{n} \mid > \tfrac{1}{2^{n+1}}\right] \leq \sum_{n=0}^{\infty} D \tfrac{C^n}{n!} / (\tfrac{1}{2^{n+1}})^2 = 4D \sum_{n=0}^{\infty} \tfrac{(4C)^n}{n!}. = 4De^{4TC} < \infty.$$

Ce qu'implique d'après le Lemme de Borel-Cantelli

$$\mathbb{P}\left[\sup_{0\leq s\leq T} \mid X_s^{n+1} - X_s^n \mid > \frac{1}{2^{n+1}}, \forall n \in \mathbb{N}\right] = 0.$$

Ce que signifer que

$$\mathbb{P}\left[\sup_{0\leq s\leq T} \mid X_s^{n+1} - X_s^n \mid \leq \tfrac{1}{2^{n+1}}, \forall n \in \mathbb{N}\right] = 1,$$

c'est-à-dire :

$$\sup_{0\leq s\leq T} \mid X_s^{n+1} - X_s^n \mid \leq \tfrac{1}{2^{n+1}}, \forall n \geq n_0, \text{ pour certaine } n_0 \in \mathbb{N}. \tag{3.14}$$

Avec probabilité égale à 1. Passons à la somme on trouve :

$$\sup_{0\leq s\leq T} \mid X_s^m - X_s^n \mid \leq \sum_{k=m\wedge n-1}^{m\vee n} \sup_{0\leq t\leq T} \mid X_s^{k+1} - X_s^k \mid \leq \sum_{k=m\wedge n-1}^{\infty} \tfrac{1}{2^{k+1}} \leq \tfrac{1}{2^{m\wedge n}}.$$

Pour $m \wedge n \geq n_0(\omega)$, où $m \vee n = max\ \{m, k\}$. Alors le processus $(X^n)_{n=1}^{\infty}$ est une suite de Cauchy, donc convergente. Alors il existe un processus continu $(X_t)_{t\ \in[0,T]}$, tel que :

$$\sup_{0\leq t\leq T} \mid X_t^n - X_t \mid \rightarrow 0\,; \text{ quand } n \rightarrow \infty, \text{ avec probabilité } 1. \tag{3.15}$$

Donc, $\mathbb{P} - p.s$, X_n converge vers un processus continu X_t. On vérifie très facilement que X_t est une solution de l'EDS dans (3.4) en passant à la limite dans l'équation prégressive dans le système (3.1).

–Donc en passant à résoudre la deuxième équation de récurrence pour Y^n .

Prouvons maintenant que la suite (Y^n, Z^n) est une suite de Cauchy dans l'espace de Banach B^2.

En appliquant la formule d'Itô à $e^{\alpha t} \mid Y_t^{n+1} - Y_t^n \mid^2$,

$$
\begin{aligned}
& d(e^{\alpha t} \mid Y_t^{n+1} - Y_t^n \mid^2) \\
& = \alpha e^{\alpha t}(Y_t^{n+1} - Y_t^n)^2 dt + 2e^{\alpha t}(Y_t^{n+1} - Y_t^n) d(Y_t^{n+1} - Y_t^n) \\
& + e^{\alpha t} d\langle Y_t^{n+1} - Y_t^n, Y_t^{n+1} - Y_t^n \rangle_t \\
& = \alpha e^{\alpha t}(Y_t^{n+1} - Y_t^n)^2 dt - 2\langle e^{\alpha t}(Y_t^{n+1} - Y_t^n)^2, \\
& f(t, X_t^n, \mathbb{E}\left[X_t^n\right], Y_t^n, \mathbb{E}\left[Y_t^n\right], Z_t^n, \mathbb{E}\left[Z_t^n\right]) \\
& - f(t, X_t^{n-1}, \mathbb{E}\left[X_t^{n-1}\right], Y_t^{n-1}, \mathbb{E}\left[Y_t^{n-1}\right], Z_t^{n-1}, \mathbb{E}\left[Z_t^{n-1}\right]) \rangle dt \\
& + 2\langle e^{\alpha t}(Y_t^{n+1} - Y_t^n)^2, Z_t^{n+1} - Z_t^n \rangle dW_t + e^{\alpha t}(Z_t^{n+1} - Z_t^n)^2 dt.
\end{aligned}
$$

En passant à l'intégrale entre t et T, on obtient

$$
\begin{aligned}
& e^{\alpha T} \mid g(X_T^n, \mathbb{E}\left[X_T^n\right]) - g(X_T^{n-1}, \mathbb{E}\left[X_T^{n-1}\right]) \mid^2 - e^{\alpha t} \mid Y_t^{n+1} - Y_t^n \mid^2 \\
& = \alpha \int_t^T e^{\alpha s} \mid Y_s^{n+1} - Y_s^n \mid^2 ds - 2 \int_t^T \langle e^{\alpha s}(Y_s^{n+1} - Y_s^n)^2, \\
& f(s, X_s^n, \mathbb{E}(X_s^n), Y_s^n, \mathbb{E}(Y_s^n), Z_s^n, \mathbb{E}(Z_s^n)) \\
& - f(s, X_s^{n-1}, \mathbb{E}(X_s^{n-1}), Y_s^{n-1}, \mathbb{E}(Y_s^{n-1}), Z_s^{n-1}, \mathbb{E}(Z_s^{n-1})) \rangle ds \\
& + 2 \int_t^T \langle e^{\alpha s}(Y_s^{n+1} - Y_s^n)^2, Z_s^{n+1} - Z_s^n \rangle dW_s + \int_t^T e^{\alpha s} \parallel Z_s^{n+1} - Z_s^n \parallel^2 ds.
\end{aligned}
$$

Donc

$$
\begin{aligned}
& e^{\alpha t} \mid Y_t^{n+1} - Y_t^n \mid^2 + \alpha \int_t^T e^{\alpha s} \mid Y_s^{n+1} - Y_s^n \mid^2 ds + \int_t^T e^{\alpha s} \parallel Z_s^{n+1} - Z_s^n \parallel^2 ds \\
& = e^{\alpha T} \mid g(X_T^n, \mathbb{E}\left[X_T^n\right]) - g(X_T^{n-1}, \mathbb{E}\left[X_T^{n-1}\right]) \mid^2 \\
& + 2 \int_t^T \langle e^{\alpha s}(Y_s^{n+1} - Y_s^n)^2, f(s, X_s^n, \mathbb{E}\left[X_s^n\right], Y_s^n, \mathbb{E}\left[Y_s^n\right], Z_s^n, \mathbb{E}\left[Z_s^n\right]) \\
& - f(s, X_s^{n-1}, \mathbb{E}\left[X_s^{n-1}\right], Y_s^{n-1}, \mathbb{E}\left[Y_s^{n-1}\right], Z_s^{n-1}, \mathbb{E}\left[Z_s^{n-1}\right]) \rangle ds \\
& - 2 \int_t^T \langle e^{\alpha s}(Y_s^{n+1} - Y_s^n)^2, Z_s^{n+1} - Z_s^n \rangle dW_s.
\end{aligned}
$$

Par passage à l'espérance et utilisant le fait que f est Lipshitzienne en (x, y, z), on a :

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}\left[e^{\alpha t} \mid Y_t^{n+1} - Y_t^n \mid^2\right] + \alpha\mathbb{E}\left[\int_t^T e^{\alpha s} \mid Y_s^{n+1} - Y_s^n \mid^2 ds\right] + \mathbb{E}\left[\int_t^T e^{\alpha s} \left\| Z_s^{n+1} - Z_s^n \right\|^2 ds\right] \\
&\leq K\mathbb{E}\left[e^{\alpha T} \mid X_T^n - X_T^{n-1} \mid^2\right] \\
&+2K\mathbb{E}\left[\int_t^T e^{\alpha s} \mid Y_s^{n+1} - Y_s^n \mid (\mid X_s^n - X_s^{n-1} \mid + \mid \mathbb{E}\left[X_s^n\right] - \mathbb{E}\left[X_s^{n-1}\right] \mid\right. \\
&\left.+ \mid Y_s^n - Y_s^{n-1} \mid + \mid \mathbb{E}\left[Y_s^n\right] - \mathbb{E}\left[Y_s^{n-1}\right] \mid + \left\| Z_s^n - Z_s^{n-1} \right\| + \left\| \mathbb{E}\left[Z_s^n\right] - \mathbb{E}\left[Z_s^{n-1}\right] \right\|\right].
\end{aligned}$$

Ce qui implique (d'après l'inégalité de Yong) $(2ab \leq \frac{1}{\varepsilon^2}a^2 + \varepsilon^2 b^2)$

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}\left[e^{\alpha t} \mid Y_t^{n+1} - Y_t^n \mid^2\right] + \mathbb{E}\left[\int_t^T e^{\alpha s} \parallel (Z_s^{n+1} - Z_s^n) \parallel^2 ds\right] \\
&\leq K\mathbb{E}\left[e^{\alpha T} \mid X_T^n - X_T^{n-1} \mid^2\right] - \alpha\mathbb{E}\left[\int_t^T e^{\alpha t} \mid Y_s^{n+1} - Y_s^n \mid^2 ds\right] \\
&+K^2\varepsilon^2\mathbb{E}\left[\int_t^T e^{\alpha s} \mid Y_s^{n+1} - Y_s^n \mid^2 ds\right] \\
&+\tfrac{1}{\varepsilon^2}\mathbb{E}\left[\int_t^T e^{\alpha s}(\mid X_s^n - X_s^{n-1} \mid + \mid \mathbb{E}\left[X_s^n\right] - E\left[X_s^{n-1}\right] \mid + \mid Y_s^n - Y_s^{n-1} \mid\right. \\
&\left. + \mid \mathbb{E}\left[Y_s^n\right] - \mathbb{E}\left[Y_s^{n-1}\right] \mid + \parallel Z_s^n - Z_s^{n-1} \parallel + \parallel \mathbb{E}\left[Z_s^n\right] - \mathbb{E}\left[Z_s^{n-1}\right] \parallel)^2 ds\right]
\end{aligned}$$

Comme $(a+b+c+d+e+f)^2 \leq 6(a^2+b^2+c^2+d^2+e^2+f^2)$ alors, on obtient

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}\left[e^{\alpha t} \mid Y_t^{n+1} - Y_t^n \mid^2\right] + \mathbb{E}\left[\int_t^T e^{\alpha s} \parallel Z_s^{n+1} - Z_s^n \parallel^2 ds.\right] \\
&\leq K\mathbb{E}\left[e^{\alpha T} \mid X_T^n - X_T^{n-1} \mid^2\right] + (K^2\varepsilon^2 - \alpha)\mathbb{E}\left[\int_t^T e^{\alpha s} \mid Y_s^{n+1} - Y_s^n \mid^2 ds\right] \\
&+\tfrac{6}{\varepsilon^2}\mathbb{E}\left[\int_t^T e^{\alpha s} \mid X_s^n - X_s^{n-1} \mid^2 ds\right] + \tfrac{6}{\varepsilon^2}\mathbb{E}\left[\int_t^T e^{\alpha s} \mid Y_s^n - Y_s^{n-1} \mid^2 ds\right] \\
&+\tfrac{6}{\varepsilon^2}\mathbb{E}\left[\int_t^T e^{\alpha s} \parallel Z_s^n - Z_s^{n-1} \parallel^2 ds\right] + \tfrac{6}{\varepsilon^2}\mathbb{E}\left[\int_t^T e^{\alpha s}\mathbb{E}\left[\mid X_s^n - X_s^{n-1} \mid^2\right] ds\right] \\
&+\tfrac{6}{\varepsilon^2}\mathbb{E}\left[\int_t^T e^{\alpha s}\mathbb{E}\left[\mid Y_s^n - Y_s^{n-1} \mid^2\right] ds\right] + \tfrac{6}{\varepsilon^2}\mathbb{E}\left[\int_t^T e^{\alpha s}\mathbb{E}\left[\parallel Z_s^n - Z_s^{n-1} \parallel^2\right] ds\right]
\end{aligned}$$

alors d'après le théoreme de Fubini :

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}\left[e^{\alpha t} \mid Y_t^{n+1} - Y_t^n \mid^2\right] + \mathbb{E}\left[\int_t^T e^{\alpha s} \parallel Z_s^{n+1} - Z_s^n \parallel^2 ds.\right] \\
&\leq K\mathbb{E}\left[e^{\alpha T} \mid X_T^n - X_T^{n-1} \mid^2\right] + (K^2\varepsilon^2 - \alpha)\mathbb{E}\left[\int_t^T e^{\alpha s} \mid Y_s^{n+1} - Y_s^n \mid^2 ds\right] \\
&+\tfrac{12}{\varepsilon^2}\mathbb{E}\left[\int_t^T e^{\alpha s} \mid X_s^n - X_s^{n-1} \mid^2 ds\right] + \tfrac{12}{\varepsilon^2}\mathbb{E}\left[\int_t^T e^{\alpha s} \mid Y_s^n - Y_s^{n-1} \mid^2 ds\right] \\
&+\tfrac{12}{\varepsilon^2}\mathbb{E}\left[\int_t^T e^{\alpha s} \parallel Z_s^n - Z_s^{n-1} \parallel^2 ds\right]
\end{aligned}$$

On choisit α et ε tel que $\frac{12}{\varepsilon^2}=\frac{1}{12}$et $144K^2-\alpha=0$, alors :

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}\left[e^{\alpha t}\mid Y_t^{n+1}-Y_t^n\mid^2\right]+\mathbb{E}\left[\int_t^T e^{\alpha s}\parallel Z_s^{n+1}-Z_s^n\parallel^2 ds\right]\\
&\leq K\mathbb{E}\left[e^{\alpha T}\mid X_T^n-X_T^{n-1}\mid^2\right]\\
&+\tfrac{1}{12}\mathbb{E}\left[\int_t^T e^{\alpha s}(\mid X_s^n-X_s^{n-1}\mid^2+\mid Y_s^n-Y_s^{n-1}\mid^2+\parallel Z_s^n-Z_s^{n-1}\parallel^2)ds\right].
\end{aligned}$$

Donc pour $t=0$, trouve :

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}\left[\sup_{0\leq t\leq T}e^{\alpha t}\mid Y_t^{n+1}-Y_t^n\mid^2\right]+\mathbb{E}\left[\int_0^T e^{\alpha s}\parallel Z_s^{n+1}-Z_s^n\parallel^2 ds\right]\\
&\leq K\mathbb{E}\left[e^{\alpha T}\mid X_T^n-X_T^{n-1}\mid^2\right]+\tfrac{c}{12}(\mathbb{E}\left[\sup_{0\leq t\leq T}e^{\alpha t}(\mid X_t^n-X_t^{n-1}\mid^2)\right]\\
&+\mathbb{E}\left[\sup_{0\leq t\leq T}e^{\alpha t}\mid Y_t^n-Y_t^{n-1}\mid^2\right]+\mathbb{E}\left[\int_0^T e^{\alpha t}\parallel Z_s^n-Z_s^{n-1}\parallel^2)ds\right]).
\end{aligned}\tag{3.16}$$

Nous répétons la même méthode, en appliquant la formule d'Itô à $e^{\alpha t}\mid Y_t^n-Y_t^{n-1}\mid^2$, pour obtenir

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}\left[\sup_{0\leq t\leq T}e^{\alpha t}\mid Y_t^n-Y_t^{n-1}\mid^2\right]+\mathbb{E}\left[\int_0^T e^{\alpha s}\parallel Z_s^n-Z_s^{n-1}\parallel^2 ds\right]\\
&\leq \grave{K}\mathbb{E}\left[e^{\alpha T}\mid X_T^{n-1}-X_T^{n-2}\mid^2\right]+\tfrac{c'}{12}(\mathbb{E}\left[\sup_{0\leq t\leq T}e^{\alpha t}(\mid X_t^{n-1}-X_t^{n-2}\mid^2)\right]\\
&+\mathbb{E}\left[\sup_{0\leq t\leq T}e^{\alpha t}\mid Y_t^{n-1}-Y_t^{n-2}\mid^2\right]+\mathbb{E}\left[\int_0^T e^{\alpha s}\parallel Z_s^{n-1}-Z_s^{n-2}\parallel^2 ds\right]).
\end{aligned}\tag{3.17}$$

En remplaçant (3.17) dans (3.16) on a

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}\left[\sup_{0\leq t\leq T}e^{\alpha t}\mid Y_t^{n+1}-Y_t^n\mid^2\right]+\mathbb{E}\left[\int_0^T e^{\alpha s}\parallel Z_s^{n+1}-Z_s^n\parallel^2 ds\right]\\
&\leq K\mathbb{E}\left[e^{\alpha T}\mid X_T^n-X_T^{n-1}\mid^2\right]+\grave{K}\mathbb{E}\left[e^{\alpha T}\mid X_T^{n-1}-X_T^{n-2}\mid^2\right]\\
&+\tfrac{c}{12}\mathbb{E}\left[\sup_{0\leq t\leq T}e^{\alpha t}(\mid X_t^n-X_t^{n-1}\mid^2)\right]+\tfrac{c'}{12}\mathbb{E}\left[\sup_{0\leq t\leq T}e^{\alpha t}(\mid X_t^{n-1}-X_t^{n-2}\mid^2)\right]\\
&+\tfrac{c'}{12^2}(\mathbb{E}\left[\sup_{0\leq t\leq T}e^{\alpha t}\mid Y_t^{n-1}-Y_t^{n-2}\mid^2\right]+\mathbb{E}\left[\int_0^T e^{\alpha s}\parallel Z_s^{n-1}-Z_s^{n-2}\parallel^2 ds\right]).
\end{aligned}$$

On répète cette méthode plusieurs fois

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}\left[\sup_{0\leq t\leq T} e^{\alpha t} \mid Y_t^{n+1} - Y_t^n \mid^2\right] + \mathbb{E}\left[\int_0^T e^{\alpha s} \parallel Z_s^{n+1} - Z_s^n \parallel^2 ds\right] \\
&\leq C(\mathbb{E}\left[e^{\alpha T} \mid X_T^n - X_T^{n-1} \mid^2\right] + \mathbb{E}\left[e^{\alpha T} \mid X_T^{n-1} - X_T^{n-2} \mid^2\right] + ... \\
&...\mathbb{E}\left[e^{\alpha t}(\mid X_T^1 - X_T^0 \mid^2)\ \right] + \grave{C}(\mathbb{E}\left[\sup_{0\leq t\leq T} e^{\alpha t}(\mid X_t^n - X_t^{n-1} \mid^2)\ \right] \\
&+\mathbb{E}\left[\sup_{0\leq t\leq T} e^{\alpha t}(\mid X_t^{n-1} - X_t^{n-2} \mid^2)\ \right] .... + \mathbb{E}\left[\sup_{0\leq t\leq T} e^{\alpha t} \mid X_t^1 - X_t^0 \mid^2\right]) \\
&+\frac{C\prime}{12^n}(\mathbb{E}\left[\sup_{0\leq t\leq T} e^{\alpha t} \mid Y_t^n - Y_t^{n-1} \mid^2\right] \\
&+\mathbb{E}\left[\sup_{0\leq t\leq T} e^{\alpha t} \mid Y_t^{n-1} - Y_t^{n-2} \mid^2\right] + ...\mathbb{E}\left[\sup_{0\leq t\leq T} e^{\alpha t} \mid Y_t^1 - Y_t^0 \mid^2\right] \\
&+\mathbb{E}\left[\int_0^T e^{\alpha t} \parallel Z_s^n - Z_s^{n-1} \parallel^2) ds\right] \\
&+\mathbb{E}\left[\int_0^T e^{\alpha s} \parallel Z_s^{n-1} - Z_s^{n-2} \parallel^2 ds\right] ..... + \mathbb{E}\left[\int_0^T e^{\alpha s} \parallel Z_s^1 - Z_s^0 \parallel^2 ds\right]).
\end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}\left[\sup_{0\leq t\leq T} e^{\alpha t} \mid Y_t^{n+1} - Y_t^n \mid^2\right] + \mathbb{E}\left[\int_0^T e^{\alpha s} \parallel Z_s^{n+1} - Z_s^n \parallel^2 dt\right] \\
&\leq \frac{D}{12^n} \to 0 \text{ quand } \ n \to \infty.
\end{aligned}$$

Par conséquent, $(X^n, Y^n, Z^n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy, donc convergente. Alors, il existe un triple de processus stochastique $(X_t, Y_t, Z_t) \in B^2$, tel que :

$\mathbb{E}\left[\sup_{0\leq t\leq T} \mid X_t^n - X_t \mid^2\right] \to 0, \mathbb{E}\left[\sup_{0\leq t\leq T} \mid Y_t^n - Y_t \mid^2\right]$ et $\mathbb{E}\left[\int_0^T \parallel Z_s^{n+1} - Z_s^n \parallel^2 dt\right] \to 0$, quand $n \to \infty$, avec une probabilité égale à 1. C'est-à-dire :

$$\underset{n\to\infty}{lim} X^n = X, \underset{n\to\infty}{lim} Y^n = Y, \underset{n\to\infty}{lim} Z^n = Z.$$

Il est facile de vérifer que (X, Y, Z) est une solution de l'EDSPR (3.4) il suffit de faire une passage à la limite dans l'EDSPR de type champ moyen (3.5).

2. L'unicite : Nous prouvons l'unicité de solution de système (3.4)

1. Supposons que (X, Y, Z) et $(\hat{X}, \hat{Y}, \hat{Z})$ deux solutions de (3.4) pour tout $t \in [0, T]$,

$$\begin{aligned} X_t - \hat{X}_t &= \int_0^t \left\{ b(s, X_s, \mathbb{E}[X_s]) - b(s, \hat{X}_s, \mathbb{E}\left[\hat{X}_s\right]) \right\} ds \\ &- \int_0^t \left\{ \sigma(s, X_s, \mathbb{E}[X_s]) - \sigma(s, \hat{X}_s, \mathbb{E}\left[\hat{X}_s\right]) \right\} dW_s, \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} &Y_t - \hat{Y}_t = g(X_T, \mathbb{E}[X_T]) - g(\hat{X}_T, \mathbb{E}\left[\hat{X}_T\right]) \\ &+ \int_t^T \left\{ f(s, X_s, \mathbb{E}[X_s], Y_s, \mathbb{E}[Y_s], Z_s, \mathbb{E}[Z_s]) - f(s, \hat{X}_s, \mathbb{E}\left[\hat{X}_s\right], \hat{Y}_s, \mathbb{E}\left[\hat{Y}_s\right], \hat{Z}_s, \mathbb{E}\left[\hat{Z}_s\right]) \right\} ds \\ &- \int_t^T \left\{ Z_s - \hat{Z}_s \right\} dW_s. \end{aligned} \tag{3.18}$$

Comme $(a+b)^2 \leq 2a^2 + 2b^2$, alors

$$\begin{aligned} &\mathbb{E}\left[\mid X_t - \hat{X}_t \mid^2 \right] \leq 2\mathbb{E}\left[\mid \int_0^t \left\{ b(s, X_s, \mathbb{E}[X_s]) - b(s, \hat{X}_s, \mathbb{E}\left[\hat{X}_s\right]) \right\} ds \mid^2 \right] \\ &+ 2\mathbb{E}\left[\mid \int_0^t \left\{ \sigma(s, X_s, \mathbb{E}[X_s]) - \sigma(s, \hat{X}_s, \mathbb{E}\left[\hat{X}_s\right]) \right\} dW_s \mid^2 \right], \end{aligned}$$

D'après inégalité de Cauchy, Schwarz on a :

$$\begin{aligned} &\mathbb{E}\left[\mid \int_0^t \left\{ b(s, X_s, \mathbb{E}[X_s]) - b(s, \hat{X}_s, \mathbb{E}\left[\hat{X}_s\right]) \right\} ds \mid^2 \right] \\ &\leq T\mathbb{E}\left[\int_0^t \mid \left\{ b(s, X_s, \mathbb{E}[X_s]) - b(s, \hat{X}_s, \mathbb{E}\left[\hat{X}_s\right]) \right\} \mid^2 ds \right] \\ &\leq TK^2 \int_0^t \mathbb{E}\left[|X_s - \hat{X}_s|^2 \right] ds. \end{aligned}$$

Et par l'isométrie d'Itô on a,

$$\begin{aligned} &\mathbb{E}\left[\mid \int_0^t \left\{ \sigma(s, X_s, \mathbb{E}[X_s]) - \sigma(s, \hat{X}_s, \mathbb{E}\left[\hat{X}_s\right]) \right\} dW_s \mid^2 \right] \\ &\leq \mathbb{E}\left[\int_0^t \parallel \sigma(s, X_s, \mathbb{E}[X_s]) - \sigma(s, \hat{X}_s, \mathbb{E}\left[\hat{X}_s\right]) \parallel^2 ds \right] \\ &\leq K^2 \int_0^t \mathbb{E}\left[|X_s - \hat{X}_s|^2 \right] ds. \end{aligned}$$

Donc

$$
\begin{aligned}
&\mathbb{E}\left[\mid X_t-\hat{X}_t\mid^2\right] \leq 2TK^2\int_0^t \mathbb{E}\left[|X_s-\hat{X}_s|^2\right]ds + 2K^2\int_0^t \mathbb{E}\left[|X_s-\hat{X}_s|^2\right]ds\\
&=(2TK^2+2K^2)\int_0^t \mathbb{E}\left[|X_s-\hat{X}_s|^2\right]ds\\
&=C\int_0^t \mathbb{E}\left[|X_s-\hat{X}_s|^2\right]ds \text{ où } C=2(TK^2+K^2).
\end{aligned}
$$

Soit

$$
\phi(t)=\mathbb{E}\left[\mid X_t-\hat{X}_t\mid^2\right], \phi(t)\leq C\int_0^t \phi(s)ds\forall t\in[0,t]. \tag{3.19}
$$

Utilisant le lemme de Granwall, avec $C_0=0$ implique $\phi=0$, on trouve

$$
\mathbb{E}\left[\mid X_s-\hat{X}_s\mid^2\right]=0.
$$

Revenant a (3.18), en appliquant la formule d'Itô à $\mid Y_t-\hat{Y}_t\mid^2$, on trouve

$$
d(\mid Y_t-\hat{Y}_t\mid^2)=2\mid Y_t-\hat{Y}_t\mid d(\mid Y_t-\hat{Y}_t\mid)+d\langle Y-\hat{Y},Y-\hat{Y}\rangle_t.
$$

Par passage à l'intégrale de t à T et l'espérance , on a

$$
\begin{aligned}
&\mathbb{E}\left[\mid Y_t-\hat{Y}_t\mid^2\right]+\mathbb{E}\left[\int_t^T \parallel Z_s-\hat{Z}_s\parallel^2 ds\right]\\
&=\mathbb{E}\left[\mid g(X_T,\mathbb{E}\left[X_T\right])-g(\hat{X}_T,\mathbb{E}\left[\hat{X}_T\right])\mid^2\right]\\
&+2\mathbb{E}\left[\int_t^T\langle Y_s-\hat{Y}_s, f(s,X_s,\mathbb{E}\left[X_s\right],Y_s,\mathbb{E}\left[Y_s\right],Z_s,\mathbb{E}\left[Z_s\right])\right.\\
&\left.-f(s,\hat{X}_s,\mathbb{E}\left[\hat{X}_s\right],\hat{Y}_s,\mathbb{E}\left[\hat{Y}_s\right],\hat{Z}_s,\mathbb{E}\left[\hat{Z}_s\right])\rangle\right].
\end{aligned}
$$

Donc

$$
\begin{aligned}
&\mathbb{E}\left[\mid Y_t-\hat{Y}_t\mid^2\right]+\mathbb{E}\left[\int_t^T \parallel Z_s-\hat{Z}_s\parallel^2 ds\right]\leq K^2\mathbb{E}\left[\mid X_T-\hat{X}_T\mid^2\right]\\
&+2K\mathbb{E}\left[\int_t^T \mid Y_s-\hat{Y}_s\mid(\mid X_s-\hat{X}_s\mid+\mid\mathbb{E}\left[X_s\right]-\mathbb{E}\left[\hat{X}_s\right]\mid+\mid Y_s-\hat{Y}_s\mid\right.\\
&\left.+\mid\mathbb{E}\left[Y_s\right]-\mathbb{E}\left[\hat{Y}_s\right]\mid+\mid Z_s-\hat{Z}_s\mid+\mid\mathbb{E}\left[Z_s\right]-\mathbb{E}\left[\hat{Z}_s\right]\mid)\right].
\end{aligned}
$$

Par l'inégalité de Yong on a

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}\left[\mid Y_t-\hat{Y}_t\mid^2\right]+\mathbb{E}\left[\int_t^T\parallel Z_s-\hat{Z}_s\parallel^2 ds\right]\\
&\leq K^2\mathbb{E}\left[\mid X_T-\hat{X}_T\mid^2\right]+2K^2\varepsilon^2\mathbb{E}\left[\int_t^T\mid Y_s-\hat{Y}_s\mid^2 ds\right]\\
&+\tfrac{6}{\varepsilon^2}\mathbb{E}\left[\int_t^T\mid X_s-\hat{X}_s\mid^2 ds\right]+\tfrac{6}{\varepsilon^2}\mathbb{E}\left[\int_t^T\mid Y_s-\hat{Y}_s\mid^2 ds\right]\\
&+\tfrac{6}{\varepsilon^2}\mathbb{E}\left[\int_t^T\parallel Z_s-\hat{Z}_s\parallel^2 ds\right]
\end{aligned}$$

on posant $\frac{6}{\varepsilon^2}=\frac{1}{2}$,alors

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}\left[\mid Y_t-\hat{Y}_t\mid^2\right]+\tfrac{1}{2}\mathbb{E}\left[\int_t^T\parallel Z_s-\hat{Z}_s\parallel^2 ds\right]\\
&\leq K^2\mathbb{E}\left[\mid X_T-\hat{X}_T\mid^2\right]+(24K^2+\tfrac{1}{2})\mathbb{E}\left[\int_t^T\mid Y_s-\hat{Y}_s\mid^2 ds\right]\\
&+\tfrac{1}{2}\mathbb{E}\left[\int_t^T\mid X_s-\hat{X}_s\mid^2 ds\right].
\end{aligned}$$

Par l'inégalité (3.19) on a :

$$\mathbb{E}\left[\mid X_s-\hat{X}_s\mid^2\right]=0,$$

alors $X_s=\hat{X}_s$ et $X_T=\hat{X}_T$,donc

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}\left[\mid Y_t-\hat{Y}_t\mid^2\right]+\frac{1}{2}\mathbb{E}\left[\int_t^T\parallel Z_s-\hat{Z}_s\parallel^2 ds\right]\\
&\leq C\mathbb{E}\left[\int_t^T\mid Y_s-\hat{Y}_s\mid^2 ds\right],\ \text{avec } C=24K^2+\frac{1}{2}.
\end{aligned}$$

On peut extraire deux inégalités :

$$\mathbb{E}\left[\sup_{0\leq t\leq T}\mid Y_t-\hat{Y}_t\mid^2\right]\leq C\mathbb{E}\left[\int_t^T\mid Y_s-\hat{Y}_s\mid^2 ds\right]\tag{3.20}$$

$$\frac{1}{2}\mathbb{E}\left[\int_t^T\parallel Z_s-\hat{Z}_s\parallel^2 ds\right]\leq C\mathbb{E}\left[\int_t^T\mid Y_s-\hat{Y}_s\mid^2 ds\right]\tag{3.21}$$

D'après l'inégalité de Granwall à (3.20) on a $b = 0$, donc

$$\mathbb{E}\left[\sup_{0\leq t\leq T} \mid Y_t - \hat{Y}_t \mid^2\right] = 0.$$

Le lemme de Granwall à nous donne

$$\mathbb{E}\left[\int_t^T \parallel Z_s - \hat{Z}_s \parallel^2 ds\right] = 0.$$

Donc

$$Y_t \equiv \hat{Y}_t,\ Z_s \equiv \hat{Z}_s$$

Ce qui prouve l'unicité.

Conclusion

Dans ce travail, on s'interesse au equations différentielle stochastique progréssives rétrogrades non linéaires de type champ moyen. En particulier, on démontre un résultat d'existence et d'unicité des solutions pour des systèmes gouvernés par des équations différentielles stochastiques progréssives rétrogrades non linéaires (EDSPRs) de type champ moyen où les coefficients du système ne dépond pas que du processus d'état mais aussi de son espérence mathématiques. Il est intéressant d'étudier les problèmes de contrôle optimal stochastique pour ce genre du systèmes, par exemple d'établir les conditions nécessaires et suffisantes d'optimalités pour des problèmes du contrôle gouvernés par des systèmes des équations différentielles stochastiques progréssives rétrogrades non linéaires (EDSPRs) de type champ moyen.

Bibliographie

[1] CHAOUCHKHOUANE Nassima, *Equations différentielles stochastiques rétrogrades de type champ moyen*, thèse de Doctorat, université Mohamed Khider de Biskra 2018.

[2] G. Barles, *Solutions de viscosité des équations de Hamilton-Jacobi*, Math. Appl, vol. 17, Springer-Verlag, Paris, 1994.

[3] Jean -Christophe Breton, *Processus stochastique*, M2 Mathématiques, Université de Rennes 1, Septembre-Décembre 2013.

[4] Monique Jeanblanc , *Cours de Calcul stochastique* Master 2IF EVRY, Septembre 2006.

[5] Nils Berglund, *Martingale et calcul stochastique*, Université d'Orléans, France, (2014).

[6] E. Pardoux and S. Peng, *Adapted solution of a backward stochastic differential equation*, Syst. Control Lett. 14(1) (1990), 55–61.

[7] Philippe BRIAND, *Equations Différentielles Stochastiques Rétrogrades*, Université Savoie Mont Blanc, France, 2001.

[8] Philippe BRIAND, *Quelques résultats sur les équations différentielles stochastiques rétrogrades*, (2007).

[9] Silver Bonnabel, *Mouvement Brownien et intégrale d'itô*, Paris, MINES Paris Tech, France, (2012).

Annexe : Abréviations et Notations

Les différentes abréviations et notations utilisées tout au long de ce mémoire sont expliquées ci-dessous.

$v.a$	:	variable aléatoire.
$v.a.r$	:	variable aléatoire rélle .
$B(\mathbb{R}^d)$	:	tribu borélienne.
MB	:	mouvement Brownien.
$\mathbb{P}-p.s$	:	Presque sûrement pour la de probabilité $\mathbb{P}$.
sup	:	Supérieur.
inf	:	Inférieur.
lim	:	limit.
$\langle .,. \rangle$	:	Pr oduit scalaire dans $\mathbb{R}^d$.