République Algérienne Démocratique et Populaire

Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

UNIVERSITÉ MOHAMED KHIDER, BISKRA

FACULTÉ des SCIENCES EXACTES et des SCIENCES de la NATURE et de la VIE

DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES

Mémoire présenté en vue de l'obtention du Diplôme **:**

MASTER en Mathématiques

Option : **Probabilités**

Par

SEBA Imane

Titre :

L'existence des équations différentilles stochastiques rétrogrades monotones

Membres du Comité d'Examen :

Dr.	**TABET Moufida**	UMKB	Président
Dr.	**GATT Rafika**	UMKB	Encadreur
Dr.	**AOUNE Salima**	UMKB	Examinateur

Juin 2019

Dédicace

Je dédie ce modeste travail

A *mes trés chèrs parents, mon pére* ***Mohamed Lahcen*** ♡ *et ma mère* **Hayat** ♡

A *l'esprit de mon grand-père (allh yarhmo)*

A *mes frères,* ***Mouslim*** ♡*,* ***Lakhder*** ♡ *et mes soeurs,* ***Meriem*** ♡*,* ***Khouloud*** ♡*,* **Salma** ♡

A *mon fiancé* ***Abd Elmadjid*** ♡

A *ma trés cher* **Soumia** ♡

A *toutes mes amies*

A *toutes ma famille*

A *tous ceux que m'ont en couragé à poursuivre mes études.*

REMERCIEMENTS

Je tiens à remercier tout d'abord ***ALLH*** *le tout puissant de m'avoir donné la foi et de m'avoir permis d'en arriver là.*

Je tiens à remercier tout particulièrement mon encadreur **Dr . Gatt Rafika** *pour sa grande disponibilité, ses conseils, ses idées et ses intuitions.*

Je veux exprimer tout mon respect aux membres du jury ***Dr. TABET Moufida*** et ***Dr. AOUNE salima***

Je tient aussi à remercier notre chef de département de mathématique "**Dr. HFEYED Mokhter**"

★ *Merci* ***Dr.lakhdari imade*** , ***Hind bourdji*** *et tout les enseignante du département de mathématique à l'université mohamed kheider.*

★ *Merci à* ***mes parents*** *pour tout ce qu'ils ont fait pour moi.*

★ *Merci* ***Abd Elmadjid, Mouslim, soumia.***

Table des matières

Introduction

La théorie des équations différentielles stochastiques rétrogrades (**EDSR** en abrégé), en anglais (BSDE), a connu un formidable développement à partir des années 1990. Ces équations ont été introduites dans **BISMUT.J** [10] pour la première fois en 1973 dans le cas lineaire. Le premier résultat dans le cas général a été publié en 1990 par **S.peng** et **E.Pardoux [11]**, résoudre une **EDSR** revient à déterminer un couple de processus noté $(Y_t, Z_t)_{t\geq 0}$ qui ne dépend que l'information connue jusqu'à l'instant t c'est à dire, on dit que les processus sont adaptés à la filtration Brownienne, et qui vérifie une équation de la forme suivante :

$$Y_t = \xi + \int_t^T f(s, Y_s, Z_s)\, ds - \int_t^T Z_s dW_s, \quad t \in [0, T]$$

avec W est un mouvement Brownien définie sur un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ et la condition terminal $Y_t = \xi$.

Dans ce mémoire je suit étudie les **EDSR** monotone, j'ai de prouver le résultats d'existence et d'unicité d'une solution dans le cas où le générateur est monotone.

Notre travail est structuré en trois chapitres :

. Le premier chapitre est un chapitre introductif où on a présenté quelques notions de calcul stochastique, en donnant les définitions et les propriétés des processus continues ainsi que leurs résultats principaux (processus stochastiques, mouvement brownien, martingales ...) qui sont nécessaires pour la suite de tout ce mémoire

. Dans le deuxième chapitre je donne la définition d'une **EDSR**, je aller montrer un premier résultat d'existence et d'unicité de la solution d'une **EDSR**, c'est le premier résultat d'existence et d'unicité pour les équations différentielles stochastiques rétrogrades (**EDSR**) dans le cas lipschitiziennes.

. Le troisième chapitre est étudie le théorème d'existence et d'unicité de la solution des **EDSR** dans le cas monotone, on utilise dans la démonstration de ce théorème la méthode du point fixe. On définit une suite de fonction h_n par produit de convolution telle que la fonction h est vérifie l'hypothèse de monotonie et pour cela je utidie les propriétés de h_n d'après on applique le théorème de Pardoux-Peng pour obtenir une unique solution (Y^n, Z^n) de l'EDSR

$$Y_t^n = \xi + \int_t^T h_n(s, Y_s^n)ds - \int_t^T Z_s^n dW_s, \quad \forall t \in [0, T] .$$

La suite (Y^n, Z^n) est une suite de cauchy dans espace de banach qui converge vers la solution (Y, Z) de l'EDSR

$$Y_t = \xi + \int_t^T f(s, Y_s, V_s)\, ds - \int_t^T Z_s dw_s, \quad \forall t \in [0, T]$$

Chapitre 1

Rappels sur le calcul stochastique

L'objet de la théorie des processus stochastique (ou aléatoires) est l'étude des phénomènes aléatoires dépendant du temps. Soit $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ un espace probabilié dont Ω est un espace abstrait et les élément son noté ω, l'ensemble T est appelé ensemble des temps.

Ce chapitre présente la notation générale de processus stochastique.

1.1 Généralités

Définition 1.1.1 (Tribu) *Une tribu (σ-algebra en Anglais) sur Ω est une famille de parties de Ω, contenant l'ensemble vide, stable par passage au complémentaire, union dénombrable et intersection dénombrable.*

Une tribu contient donc l'espace Ω.

Un espace mesurable est un espace muni d'une tribu.

Définition 1.1.2 (Filtration) *Une filtration (ou flot d'information) $(\mathcal{F}_t)_{t\in T}$ est une famille croissante de sous tribus de $\mathcal{F}$ i,e : $\forall s, t \in T, s \leq t \Rightarrow \mathcal{F}_s \subset \mathcal{F}_t$.*

La famille croissante de sous tribus $G_t^x = \sigma(X_s; s \leq t, s \in T)$ s'appelle la filtration naturelle *de x c'est à dire (c-à-d) la plus petite sous tribu de $\mathcal{F}$ qui rend mesurable toutes les applications $\omega \mapsto X_s(\omega)$ pour tout $s \leq t, s \in T$.*

On dit alors que $(\Omega, \mathcal{F}, P, (\mathcal{F}_t)_{t \in T})$ est un espace probabilisé filtré.

Définition 1.1.3 (Espace de probabilité complet) *L'espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, P)$*

est dit complet si : pour tout

$t \geq 0$ et pour tout $A \subset \Omega$ négligeable, A est contenu dans $\mathcal{F}$.

Définition 1.1.4 *On dit alors que l'espace probabilisé filtré $(\Omega, \mathcal{F}, P, (\mathcal{F}_t)_{t \in T})$ complet si : pour tout $t \geq 0$ et pour tout $A \subset \Omega$ négligeable, A est contenu dans $\mathcal{F}$.*

Définition 1.1.5 (Processus stochastique) *Un processus stochastique $X = (X_t)_{t \in T}$ est une famille de variables aléatoires (abreviation : v.a) X_t indexée par un ensemble T. Où $T = \mathbb{N}, \mathbb{Z}, [0, T], \mathbb{R}_+ ...$*

Un processus dépend de deux paramètres : $X_t(\omega)$ dépend de t (en général le temps) et de l'aléatoire $\omega \in \Omega$.

- *Pour $t \in T$ fixé, $\omega \in \Omega \mapsto X_t(\omega)$ est une v.a sur l'espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, P)$.*
- *Pour $\omega \in \Omega$ fixé, $t \in T \mapsto X_t(\omega)$ est une fonction à valeurs réelles appelée trajectoire du processus.*

Remarque 1.1.1 1. *Si $T \subseteq \mathbb{Z}$, on dit que le processus est à temps discret.*

2. *Si $T \subseteq \mathbb{R}$, on dit que le processus est à temps continu.*

Définition 1.1.6 (Processus mesurable) *Un processus $(X_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$ est dit mesurable si l'application : $X_t : (\mathbb{R}_+, \beta(\mathbb{R}_+) \times (\Omega, \mathcal{F})) \rightarrow (\mathbb{R}_n, \beta_{\mathbb{R}_n})$ est mesurable.*

Définition 1.1.7 (Processus continu) *Un processus $(X_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$ est dit continu si les application $t \mapsto X_t(\omega)$ sont continues pour presque tout ω.*

Définition 1.1.8 (Processus càdlàg) *Un processus est dit càdlàg (continu à droite, pourvu de limite à gauche) si ses trajectoires sont continues à droite, pourvues de limites à gauche.*

Définition 1.1.9 (Processus adapté) *Un processus stochastique* $(X_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$ *est* $(\mathcal{F}_t)_{t\in\mathbb{R}_+}-$*adapté si pour tout* $t \in \mathbb{R}^+$, *la variables aléatoires* X_t *est* $\mathcal{F}_t-$*mesurable.*

Définition 1.1.10 (Processus progressivement mesurable) *Un processus* $(X_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$ *est dit progressivement mesurable si :* $\forall T > 0$ *l'application* $X_t : \left([0,T], \beta_{[0,T]}\right) \times (\Omega, \mathcal{F}_T) \to (\mathbb{R}_n, \beta_{\mathbb{R}_n})$ *est mesurable.*

Remarque 1.1.2 *Un processus progressivement mesurable est mesurable et adapté.*

Définition 1.1.11 (Processus à variation finie) *Un processus* $X = (X_t, t \geq 0)$ *est dit à variation finie sur* $[0,t]$ *si :*

$$\sup_{t_i} \sum_i \left| X_{t_{i+1}} - X_{t_i} \right| < \infty.$$

Définition 1.1.12 (Temps d'arrêt) *Une variables aléatoires* $T : \Omega \to [0,\infty]$ *est un temps d'arrêt si l'évènement*

$$\{T \leq t\} = \{\omega \in \Omega; T(\omega) \leq t\} \in \mathcal{F}_t,\ \forall t,\ 0 \leq t < \infty.$$

Définition 1.1.13 (Produit de convolution) *Soit* $\varphi, \psi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ *deux fonctions mesurables, on appelle produit de convolution de* ξ *par* Ψ *la fonction*

$$(\varphi * \Psi)(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(t-x)\Psi(x)dx.$$

Théorème 1.1.1 (Théorème du point fixe métrique) *Soient* (E,d) *un espace métrique complet et* $\varphi : E \to E$ *une application contractante, i,e : lipschitzienne de rapport*

$0 < k < 1$. *Alors,* φ *admet un unique point fixe* $a \in E$. *De plus, pout tout point initial* $x_0 \in E$, *la suite itérée* $(x_p)_{p \in \mathbb{N}}$, *avec* $x_0 \in E$ *quelconque et* $x_{p+1} := \varphi(x_p)$ *converge vers* a.

Théorème 1.1.2 (de Fubini) *Soit* $f : E_1 \times E_2 \to \mathbb{R}$ *une fonction mesurable. Alors, pour tout* $x \in E_1$, *la fonction*

$$y \in E_2 \mapsto \int f(x, y)\, dm_1(x)$$

est mesurable et

$$\int \left\{ \int f(x,y) dm_1(x) \right\} dm_2(y) = \int \left\{ \int f(x, y)\, dm_2(y) \right\} dm_1(x).$$

1.2 Espérence conditionnelle

Définition 1.2.1 *Soit* $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ *et* $(\mathcal{F}_t)$ *une filtration et* G *une sous-tribu de* $\mathcal{F}$ *l'espérance conditionnelle* $E(X \backslash G)$ *de* X *sachant* G *est l'unique variable aléatoire :*

1. $G-$*mesurable.*

2. $\int\limits_A E(X \backslash G) dp = \int\limits_A X dp$, $\forall A \in G$.

Propriété 1.2.1 *Soit* X, Y *de variable aléatoire appartenant à* $L^2(\Omega, \mathcal{F}, P)$, *soit* G *une sous-tribu de* $\mathcal{F}$, *on a alors :*

1. *Linéarité : soit* a *et* b *deux constantes :* $E(aX + bY \backslash G) = aE(X \backslash G) + bE(X \backslash G)$.

2. *Si* X *est* $G-$*mesurable alors :* $E(X \backslash G) = X$.

3. *Si* Y *est* $G-$*mesurable alors :* $E(XY \backslash G) = YE(X \backslash G)$.

4. *Si* X *est indépendant de* G *alors :* $E(X \backslash G) = E(X)$.

1.3 Mouvement brownien

Définition 1.3.1 *On dit qu'un processus stochastique* $(W_t, t \geq 0)$ *est un mouvement brownien (standard) si :*

1. $P(W_0 = 0) = 1$.

2. $\forall s \leq t$, $W_t - W_s$ *est une variable réelle de loi gaussienne, centrée de variance* $(t-s)$ *i.e :* $W_t - W_s \sim N(0,t)$.

3. $\forall n$, $\forall t_i$, $0 \leq t_0 \leq t_1 \leq ... \leq t_n$, *les variables* $(W_{t_n} - W_{t_{n-1}}, ..., W_{t_1} - W_{t_0}, W_{t_0})$*sont indépendantes.*

1.4 Martingales

Définition 1.4.1 *Soit* $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}, P)$ *un espace de probabilité filtré. Un processus* $(M_t)_{t \geq 0}$ *est dit martingale (respectivement une sous martingale, sur martingale) si pour tout* $t \geq 0$:

1. M_t *est* $\mathcal{F}_t-$*mesurable.*

2. M_t *est intégrable (i.e :* $E\,|M_t| < \infty$*).*

3. $\forall t \geq s \geq 0$, $E(M_t \backslash \mathcal{F}_s) = M_s$ *(respectivement* $E(M_t \backslash \mathcal{F}_s) \geq M_s$, $E(M_t \backslash \mathcal{F}_s) \leq M_s$*).*

Définition 1.4.2 (Martingales locale) *Un processus* M *adapté est une martingale locale s'il existe une suite croissante de temps d'arrêt* τ_n *telle que :* $\tau_n \to \infty$ *et* $(M_{t \wedge \tau_n}, t \geq 0)$ *est martingale pour tout* n.

Définition 1.4.3 (Semi-martingale) *Une semi-martingale est un processus càdlàg adapté* X *admettent une décomposition de la forme :*

$$X = X_0 + M + A. \tag{1.1}$$

Où M *est martingale locale càdlàg null en* 0 *et* A *est un processus adapté à variation finie et nul en* 0. *Une semi-martingale continue est une semi-martingale telle que dans* *la décomposition* (1.1), M *et* A *sont continus une telle décomposition où* M *et* A *sont continus, est unique.*

Propriété 1.4.1 *Soit* W_t *est un mouvement brownien ssi :*

1. $(W_t, t \geq 0)$ *est une martingale.*

2. $\{W_t^2 - t,\ 0 \leq t < \infty\}$ *est une martingale.*

Théor■me 1.4.1 (Théorème de représentation des martingales) *Soit* $(\mathcal{F}_t)_{0\leq t\leq T}$ *la filtration naturelle du mouvement brownien standard* $(W_t)_{0\leq t\leq T}$*, soit* M *une martingale continue de carré intégrable par rapport à* $(\mathcal{F}_t)_{0\leq t\leq T}$*. Alors il existe un processus adapté* H*, tel que :*

$$E(\int_0^T H_s^2 ds) < \infty$$

et pour tout $t \in [0, T]$

$$M_t = M_0 + \int_0^T H_s dW_s \quad P - p.s$$

1.5 Quelques inégalités

Théor■me 1.5.1 (Burkholder-Davis-Gundy "BDG") *Soit* $p \in \,]0, \infty[$ *. Il existe deux constantes* c_p *et* C_p *telle que, pour toute martingale continue* M*, nul en* 0*.*

$$c_p E\left[\langle M, M\rangle_\infty^{\frac{p}{2}}\right] \leq E\left[\sup_{t\geq 0} |M_t|^p\right] \leq C_p E\left[\langle M, M\rangle_T^{\frac{p}{2}}\right].$$

Remarque 1.5.1 *En particulier, si* $T > 0$,

$$c_p E\left[\langle M, M\rangle_T^{\frac{p}{2}}\right] \leq E\left[\sup_{0\leq t\leq T} |M_t|^p\right] \leq C_p E\left[\langle M, M\rangle_T^{\frac{p}{2}}\right].$$

Lemme 1.5.1 (de Gronwall) *Soit* $g : [0, T] \to \mathbb{R}$ *une fonction vérifiant :*

$$\forall t \in [0, T], \quad 0 \leq g(t) \leq \alpha(t) + \beta \int_0^t g(s)\, ds$$

pour une constante $\beta \geq 0$ *et pour une fonction* $\alpha : [0, T] \to \mathbb{R}$ *intégrable par rapport à la mesure de Lebèsgue. On a alors :*

$$\forall t \in [0, T], \quad 0 \leq g(t) \leq \alpha(t) + \beta \int_0^t \alpha(s) e^{\beta(t-s)} ds$$

L'intérêt est notamment que g *n'apparaît qu'une seule fois dans la nouvelle inéquation , en particulier, si* α *est une fonction constante, on trouve :*

$$\forall t \in [0, T], \quad g(t) \leq \alpha e^{\beta t}$$

et si $\alpha = 0$, *on a* $g = 0$.

Théorème 1.5.2 (Inégalité de Doob) *Soit* $N = (N_t)_{t \in T}$ *une sous-martingale positive ou une martingale, càdlàg. Alors pour tout temps d'arrêt* τ *à valeurs dans* T, *on a :*

$$P\left[\sup_{0 \leq t \leq T} |N_t| \geq \lambda\right] \leq \frac{E|N_t|}{\lambda}, \forall \lambda > 0.$$

Lemme 1.5.2 (Inégalité de Hölder) *Soit* X *et* Y *deux v.a. Si* $X \in L^p, Y \in L^q$ *avec* $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, *alors :*

$$E[|XY|] \leq \|X\|_p \|Y\|_q .$$

1.6 Intégrabilité uniforme

Définition 1.6.1 *On dit qu'une collection* $\{X_i\}_{i\in I}$ *de v.a est uniformément intégrable si :*

$$\lim_{M\to\infty}\left(\sup_{i\in I} E\left(|X_i|\,1_{\{|X_i|>M\}}\right)\right)=0.$$

Définition 1.6.2 *Soit* $1\leq p\leq\infty$. *Si* X_n *converge dans* L^p, *la famille* $|X|^p_{n\geq 0}$ *uniformément intégrable.*

Théor■me 1.6.1 *Soit* X_n *une suite de v.a réeles convergent en probabilité. Alors* X_n *converge dans* L^p *ssi : la famille* $|X_n|^p$ *est uniformément intégrable.*

Théorème de Lebesgue dominé

Théor■me 1.6.2 *Soit* f_n *une suite de fonctions intégrables qui converge (simplement) vers une fonctions* f $(f_n(x)\to f(x)\,,\forall x)$. *S'il existe* g *intégrable telle que.* $|f_n(x)|\leq g(x)\,,$ $\forall x$*,alors :* $\int_{\mathbb{R}} f_n(x)\,dx$ *converge vers* $\int_{\mathbb{R}} f(x)dx$.

1.7 L'intégrale stochastique

On se donne un espace $(\Omega,\mathcal{F},P)$ et un mouvement brownien W sur cet espace, on désigne par $\mathcal{F}_t=\sigma(W_s,s\leq t)$ la filtration naturelle du mouvement Brownien.

Définition 1.7.1 *On définir l'intégrale stochastique (L'intégrale d'Itô) de la forme :*

$$\int_0^t X_s dW_s$$

simultanément pour tous $t\in[0,T]\,,$ *où* $(X_s)_{s\geq 0}$ *est processus stochastique et* $(W_s)_{s\geq o}$ *est un mouvement Brownien.*

Propriété 1.7.1 *Soit X et Y des processus stochastiques et W_s mouvement Brownien, alors on a :*

1. *Linéarité :* $\int_0^t (X_s + Y_s) dW_s = \int_0^t X_s dW_s + \int_0^t Y_s dW_s$ *et* $\int_0^t (cX_s) dW_s = c\int_0^t X_s dW_s$.

2. *Si* $\int_0^T E(X_t^2)dt < \infty$, *alors pour tout* $t \leq T$: $E(\int_0^t X_s dW_s) = 0$ *et* $E((\int_0^t X_s dW_s)^2) = \int_0^t E(X_s^2)ds$. *De plus, le processus* $\left\{\int_0^t X_s dW_s\right\}_{t\geq 0}$ *est une martingale.*

1.7.1 Processus d'Itô

Définition 1.7.2 *On appelle processus d'Itô, un processus X à valeurs réelles tel que :*

$$\forall 0 \leq t \leq T \quad X_t = X_0 + \int_0^t b_s ds + \int_0^t \sigma_s dW_s \quad P - p.s$$

où X_0 est $\mathcal{F}_0-$mesurable, b et σ sont deux processus progressivement mesurables vérifiant les conditions

$$\int_0^t |b_s|\, ds < \infty \ \text{ et } \int_0^t \|\sigma_s\|^2 \, ds < \infty.$$

Théor■me 1.7.1 (Formule d'Itô) *Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}$ de classe C^1 par rapport à t, de classe C^2 par rapport à x, à dérivées bornées, on a :*

$$f(t, x) = f(0, X_0) + \int_0^t f'_x(s, X_s)dX_s + \int_0^t f'_s(s, X_s)ds + \frac{1}{2}\int_0^t f''_{xx}(s, X_s)\sigma_s^2 ds.$$

Chapitre 2

Equations différentielles stochastiques rétrogrades Lipschitzien

2.1 Vocabulaire et notations

2.1.1 Présentation du problème

La théorie des équations différentielles stochastiques rétrogrades (**EDSR** en abrégé) a connu un grand développement, grâce notamment à ses diverses applications dans plusieurs domaines. Formellement, les **EDSR** sont des équations différentielles stochastiques où l'on se donne la condition terminale.

Pour comprendre bien qu'est ce que une edsr il faut formuler d'une façon correcte la notion de solution adapteé à une **EDSR**.

Dans ce paragraphe, on va donner, en résumé, un petit aperçu sur les **EDSR**, le théorème d'existence et d'unicité de la solution.

Soit $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}, P)$ un espace probabilisé filtré et ξ une variable aléatoire mesurable par rapport à $\mathcal{F}_T$, où T désigne un temps terminal.

Considèrons le problème suivant :

$$\begin{cases} Y_t' &= -f(t,Y) \\ Y_T &= \xi \end{cases}, \forall t \in [0,T]. \tag{2.1}$$

Ce problème est l'instant terminal $T > 0$, la condition finale ξ est une variable aléatoire $\mathcal{F}_T-$adapté. posant le processus Y sont $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}-$adaptéc'est à dire que pour tout $t \in [0,T]$ Y_t ne dépende pas du future après l'instant t pour résoudre ce problème, on va prendre le cas le plus simple où $f \equiv 0$, alors (2.1) devient :

$$\begin{cases} Y_t' &= 0 \\ Y_T &= \xi \end{cases}, \forall t \in [0,T],$$

$\Rightarrow$

$$\begin{cases} Y_t &= cte \\ Y_T &= \xi \end{cases}, \forall t \in [0,T],$$

et comme $Y_t = cte = Y_T \Rightarrow Y_t = \xi$.

mais $Y_t = \xi$ n'est pas adapté si ξ n'est pas déterministe, la meilleure approximation de la solution, adapté qu'on peut prendre (par exemple dans L^2) est la martingale $Y_t = E(\xi/\mathcal{F}_t)$.

Si on travaille avec la filtration naturelle d'un mouvement brownien et d'après le théorème de représentation des martingales browniennes (1.4.1), on construire un processus Z de carré intégrable et adapté, tel que :

$$Y_t = E(\xi/\mathcal{F}_t) = E(\xi) + \int_0^t Z_s dW_s.$$

D'autre part, si $t = T$:

$$Y_t = E(\xi) + \int_0^T Z_s dW_s.$$

En effet,

$$\begin{aligned} Y_t - Y_T &= E(\xi) + \int_0^t Z_s dW_s - \left[E(\xi) + \int_0^T Z_s dW_s \right] \\ &= \int_0^t Z_s dW_s - \int_0^T Z_s dW_s \\ &= -\int_0^T Z_s dW_s. \end{aligned}$$

$\Rightarrow$

$$\begin{aligned} Y_t &= Y_T - \int_t^T Z_s dW_s \\ &= \xi - \int_t^T Z_s dW_s, \end{aligned}$$

alors,

$$\begin{cases} Y_t & = \xi - \int_t^T Z_s dW_s \\ Y_T & = \xi \end{cases} , \forall t \in [0, T]. \tag{2.2}$$

On dérive (2.2) :

$$\begin{cases} -dY_t & = -Z_t dW_t \\ Y_T & = \xi \end{cases} , \forall t \in [0, T].$$

Par conséquent, comme une seconde variable apparaît, pour obtenir la plus grande généralité, on permet à f dépendre du processus Z, l'équation devient alors :

$$\begin{cases} -dY_t & = f(t, Y_t, Z_t)dt - Z_t dW_t \\ Y_T & = \xi \end{cases} , \forall t \in [0, T].$$

ou de façon équivalente, sous forme intégrale,

$$Y_t = \xi + \int_t^T f(s, Y_s, Z_s)ds - \int_t^T Z_s dW_s, t \in [0, T].$$

2.1.2 Notation

On se donne $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ un espace de probabilité complet et W un mouvement Brownien d-dimensionnel sur cet espace. On notera $\{\mathcal{F}_t\}_{t\geq 0}$ la filtration naturelle du mouvement Brownien W.

On note aussi :

. $S^2(\mathbb{R}^k)$: l'espace vectoriel formé des processus Y, progressivement mesurables, à valeurs dans $\mathbb{R}^k$, tel que :

$$\|Y\|_{S^2}^2 := E\left[\sup_{0\leq t\leq T} |Y_t|^2\right] < \infty.$$

. $S_c^2(\mathbb{R}^k)$: le sous espace formé par le processus continus.

. $M^2(\mathbb{R}^{k\times d})$: l'espace vectoriel formé, par les processus Z progressivement mesurables, à valeurs dans $\mathbb{R}^{k\times d}$, tels que :

$$\|Z\|_{M^2}^2 := E\left[\int_0^T \|Z_t\|^2 dt\right] < \infty,$$

où si $Z \in \mathbb{R}^{k\times d}$, $\|Z_t\|^2 = trace(ZZ^*)$. $M^2(\mathbb{R}^{k\times d})$ désigne l'ensemble des classes d'équivalence de $M^2(\mathbb{R}^{k\times d})$.$\mathbb{R}^k$ et $\mathbb{R}^{k\times d}$ seront souvent omis, les espace S^2, S_c^2 et M^2 sont des espaces de Banach pour les normes définies précédemment. Nous désignerons B^2 l'espace de Banach $S_c^2(\mathbb{R}^k) \times M^2(\mathbb{R}^{k\times d})$.

Remarque 2.1.1 *Nous nous donnons une application aléatoire* f

$$f : [0,T] \times \Omega \times \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^{k\times d} \to \mathbb{R}^k$$

telle que, pour tout $(y,z) \in \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^{k\times d}$*, le processus* $\{(f(t,y,z))\}_{0\leq t\leq T}$ *soit progressivement mesurable, et* ξ *une variable aléatoire mesurable par rapport à* $\mathcal{F}_T$ *et à valeurs dans* $\mathbb{R}^k$.

Définition 2.1.1 *On définir une équation différentielle stochastique rétrograde est une équation de la forme :*

$$\begin{cases} -dY_t & = f(t,Y_t,Z_t)dt - Z_t dW_t \\ Y_T & = \xi \end{cases}, \forall t \in [0,T],$$

ou se forme intégrale

$$Y_t = \xi + \int_t^T f(s,Y_s,Z_s)\,ds - \int_t^T Z_s dW_s, t \in [0,T] \qquad (2.3)$$

- *La fonction f s'appelle le générateur de l'EDSR.*
- T : *temps final.*
- ξ : *condition terminale (v.a* $\mathcal{F}_t-$*mesurable).*
- $(Y(t), Z(t))$ *: les inconnues adaptées.*

Définition 2.1.2 *Une solution de l'EDSR (2.3) est un couple de processus* $\{(Y_t,Z_t)\}_{0\leq t\leq T}$ *vérifiant :*

1. Y *et* Z *sont progressivement mesurables à valeurs respectivement dans* $\mathbb{R}^k$ *et* $\mathbb{R}^{k\times d}$.

2. $\int_0^T \left\{|f(s,Y_s,Z_s)| + \|Z_s\|^2\right\} ds < \infty,\ P-p.s.$

3. On : $Y_t = \xi + \int_t^T f(s,Y_s,Z_s)\,ds - \int_t^T Z_s dW_s,\ 0\leq t\leq T,\ P-p.s.$

Remarque 2.1.2 *1. Les intégrales de l'équation (2.3) sont bien définies.*

2. Le processus Y est progressivement mesurable, il est adapté et donc en particulier Y_0 est une quantité déterministe.

3. Y_t de (2.3) est une semi martingale continue.

Proposition 2.1.1 *Supposons qu'il existe un processus $\{f_t\}_{0\leq t\leq T}$, positif, appartenant à $M^2(\mathbb{R})$ et une constante positive λ tels que :*

$$\forall (t,y,z)\in[0,T]\times\mathbb{R}^k\times\mathbb{R}^{k\times d}, |f(t,y,z)|\leq f_{t+\lambda}(|y|+\|Z\|)$$

Si $\{(y_t,z_t)\}_{0\leq t\leq T}$ est une solution de l'EDSR (2.3) telle que $Z\in M^2$, alors Y appartient à S_c^2.

Preuve. Le résultat se déduit principalement du lemme de Gronwall (1.5.1) et du fait que Y_0 est déterministe. En effet, on a, pour tout

$$t\in[0,T], Y_t = Y_0 - \int_0^t f(s,Y_s,Z_s)\,ds + \int_0^t Z_s dW_s,$$

et par suite, utilisant l'hpothèse sur f,

$$\mid Y_t \mid \leq \mid Y_0 \mid + \int_0^T (f_s+\lambda \parallel Z_s \parallel)\,ds + \sup_{0\leq t\leq T} \mid \int_0^t Z_s dW_s \mid + \lambda\int_0^t \mid Y_s \mid ds.$$

Posons

$$\xi = \mid Y_0 \mid + \int_0^T (f_s+\lambda \parallel Z_s \parallel)\,ds + \sup_{0\leq t\leq T} \mid \int_0^t Z_s dW_s \mid .$$

Par hypothèse,Z appartient à M^2 et donc, via l'inégalité de Doob (1.5.2), le troisième terme est de carré intégrable ; il en est de même pour $\{f_t\}_{0\leq t\leq T}$, et Y_0,est déterministe donc de carré intégrable ; il s'en suit que ξ est une variable aléatoire de carré intégrable. Comme Y est un processus continu-cf. remarque précédente, le lemme de Gronwall (1.5.1) fournit l'inégalité $\sup\limits_{0\leq t\leq T} \mid Y_t \mid \leq \xi e^{\lambda T}$ qui montre que Y appartient à S^2. ■

Remarque 2.1.3 *Le résultat est encore valable lorsque $\|f.\|_1$ est une variable aléatoire de carré intégrable.*

Finissons par un résultat d'intégrabilité qui nous servira à plusieurs reprise.

Lemme 2.1.1 *Soient $Y \in S^2\left(\mathbb{R}^k\right)$ et $Z \in M^2(\mathbb{R}^{k\times d})$. Alors $\left\{\int_0^t Y_s.Z_s dW_s,\ t\in[0,T]\right\}$ est une martingale uniformément intégrable.*

Preuve. En appliquant l'inégalité B-D-G (1.5.1), il existe une constante positive C telle que :

$$\begin{aligned}E\left[\sup_{0\le t\le T}\left|\int_0^t Y_s Z_s dW_s\right|\right] &\le CE\left[\left(\int_0^T |Y_s|^2\|Z_s\|^2 ds\right)^{\frac{1}{2}}\right]\\ &\le CE\left[\sup_{0\le t\le T}|Y_t|\left(\int_0^T \|Z_s\|^2 ds\right)^{\frac{1}{2}}\right]\end{aligned}$$

et par suite en appliquant inégalité : $ab\le \frac{a^2}{2}+\frac{b^2}{2}$, on obtient :

$$E\left[\sup_{0\le t\le T}\left|\int_0^t Y_s Z_s dW_s\right|\right]\le C'\left(E\left[\sup_{0\le t\le T}|Y_t|^2\right]+E\left[\int_0^T\|Z_s\|^2 ds\right]\right)$$

et comme $Y\in S^2\left(\mathbb{R}^k\right)$, $Z\in M^2\left(\mathbb{R}^{K\times d}\right)$, Alors :

$$E\left[\sup_{0\le t\le T}\left|\int_0^t Y_s Z_s dW_s\right|\right]<\infty.$$

■

2.1.3 Le résultat de pardoux-peng dans le cas lipschitz

Dans ce paragraphe, nous allons montrer un premier résultat d'existence et d'unicité. Ce résultat est dû à **E-Paradoux** et **S.Peng** [**11**].

Voici les hypothèses sous lesquelles nous travailler.

(**L**) : Il existe une constante λ telles que $P-p.s$

1. condition de Lipschitz en (y,z) : pour tout $t,y,y',z,z\prime$

$$|f(t,y,z)-f(t,y',z\prime)|\leq\lambda(|y-y\prime|+\|z-z'\|);$$

2.condition d'intégrabilité :

$$E\left[|\xi|^2+\int_0^T|f(s,0,0)|^2\,ds\right]<\infty.$$

Nous commençons par un cas trés simple, celui où f ne dépend ni de y ni de z $i.e.$ on se donne ξ de carré intégrable et un processus $\{F_t\}_{0\leq t\leq T}$ dans $M^2\left(\mathbb{R}^k\right)$ et on veut trouver une solution de l'**EDSR**

$$Y_t=\xi+\int_t^T F_s ds-\int_t^T Z_s dW_s,\qquad 0\leq t\leq T. \tag{2.4}$$

Lemme 2.1.2 *Soient $\xi\in L^2(\mathcal{F}_T)$ et $\{F_t\}_{0\leq t\leq T}\in M^2\left(\mathbb{R}^k\right)$. L'**EDSR** (2.4) possède une unique solution (Y,Z) telle que $Z\in M^2$.*

Preuve. Supposons dans un premier temps que (Y,Z) soit une solution vérifiant $Z\in M^2$. Si on prend l'espérance conditionnelle sachant $\mathcal{F}_t$,on a nécessairement ,

$$Y_t=E\left(\xi+\int_t^T F_s ds\mid\mathcal{F}_t\right).$$

On définit donc Y à l'aide de la formule précédente et il reste à trouver Z. Remarquons que, d'aprés le théorème de Fubini (1.1.2), comme F est progressivement mesurable, $\int_0^t F_s ds$ est un processus adapté à la filtration $\{\mathcal{F}_t\}_{t\in[0,T]}$; en fait dans S_c^2 puisque F est de carré intégrable. On a alors, pour tout $t \in [0, T]$,

$$Y_t = E\left(\xi + \int_0^T F_s ds \mid \mathcal{F}_t\right) - \int_0^t F_s ds := M_t - \int_0^t F_s ds.$$

M est une martingale brownienne ; via le théorème de représentation des martingales brownienne (1.4.1) on construit un processus Z appartenant à M^2 tel que :

$$Y_t = M_t - \int_0^t F_s ds = M_0 + \int_0^t Z_s dW_s - \int_0^t F_s ds.$$

On vérifie facilement que (Y, Z) ainsi construit est une solution de l'**EDSR** étudiée puisque comme $Y_T = \xi$,

$$\begin{aligned} Y_t - \xi &= M_0 + \int_0^t Z_s dW_s - \int_0^t F_s ds - \left(M_0 + \int_0^T Z_s dW_s - \int_0^T F_s ds\right) \\ &= \int_t^T F_s ds - \int_t^T Z_s dW_s. \end{aligned}$$

L'unicité est évidente pour les solutions vérifiant $Z \in M^2$. ■

Nous montrons à présent le théorème de Pardoux et Peng.

Théor■me 2.1.1 *PARDOUX-PENG 90. Sous l'hypothèse* (L)*, l'**EDSR (2.3)** possède une unique solution* (Y, Z) *telle que* $Z \in M^2$*.*

Preuve. Nous utilisons un argument du point fixe dans l'espace de Banach B^2 en construisant une application Ψ de B^2 dans lui-même de sorte que $(Y, Z) \in B^2$ est solution de l'**EDSR (2.3)** si et seulement si c'est un point fixe de Ψ.

Pour (U, V) élément de B^2, on définit $(Y, Z) = \Psi(U, V)$ comme étant la solution de l'**EDSR :**

$$Y_t = \xi + \int_t^T f(r, U_r, V_r)\, dr - \int_t^T Z_r dW_r, \qquad 0 \leq t \leq T.$$

On remarqueque cette dernière **EDSR** possède une unique solution qui est dans B^2. En effet, posons $F_s = f(s, U_s, V_s)$. Ce processus appartient à M^2 puisque, f étant Lipschitz,

$$| F_s | \leq | f(s,0,0) | + \lambda | U_s | + \lambda \| V_s \|,$$

et ces trois derniers processus sont de carré intégrable. Par suite, nous pouvons appliquer le Lemme (2.1.2) pour obtenir une unique solution (Y, Z) telle que $Z \in M^2$. (Y, Z) appartient à B^2 : l'intégralité de Z est obtenue par construction et, d'aprés la proposition (2.1.1), Y appartient à S_c^2.

L'application Ψ de B^2 dans lui-même est donc bien définie.

Soient (U, V) et (U', V') deux éléments de B^2 et $(Y, Z) = \Psi(U, V), (Y', Z') = \Psi(U', V')$.

Notons $y = Y - Y'$ et $z = Z - Z'$. On a $y_T = 0$ et

$$dy_t = -\{f(t, U_t, V_t) - f(t, U'_t, V'_t)\} dt - z_t dW_t.$$

On applique la formule d'Itô à $e^{\alpha t} | y_t |^2$ pour obtenir :

$$d\left(e^{\alpha t} | y_t |^2\right) = \alpha e^{\alpha t} | y_t |^2 dt - 2e^{\alpha t} y_t . \{f(t, U_t, V_t) - f(t, U'_t, V'_t)\} dt + 2e^{\alpha t} y_t . z_t dW_t + e^{\alpha t} \| z_t \|^2 dt.$$

Par conséquent, intégrant entre t et T, on obtient :

$$\begin{aligned} e^{\alpha t} | y_t |^2 + \int_t^T e^{\alpha s} \| z_s \|^2 ds &= \int_t^T e^{\alpha s} \left(-\alpha | y_s |^2 + 2y_s . \{f(s, U_s, V_s) - f(s, U'_s, V'_s)\}\right) ds \\ &- \int_t^T 2e^{\alpha s} y_s . z_s dW_s, \end{aligned}$$

et, comme f est Lipschitz, il vient, notant u et v pour $U - U'$ et $V - V'$ respectivement,

$$\begin{aligned} e^{\alpha t} | y_t |^2 + \int_t^T e^{\alpha s} \| z_s \|^2 ds &\leq \int_t^T e^{\alpha s} (-\alpha | y_s |^2 + 2\lambda | y_s || u_s | + 2\lambda | y_s ||| v_s \|) ds \\ &- \int_t^T 2e^{\alpha s} y_s . z_s dW_s. \end{aligned}$$

Pour tout $\varepsilon > 0$, on a $2ab \leq a^2/\varepsilon + \varepsilon b^2$, et donc, l'inégalité précédente donne

$$\begin{aligned} e^{\alpha t} \mid y_t \mid^2 + \int_t^T e^{\alpha s} \parallel z_s \parallel^2 ds &\leq \int_t^T e^{\alpha s}(-\alpha 2\lambda^2/\varepsilon) \mid y_s \mid^2 ds - \int_t^T 2e^{\alpha s} y_s.z_s dW_s \\ &+\varepsilon \int_t^T e^{\alpha s} \left(\mid u_s \mid^2 + \parallel v_s \parallel^2 \right) ds, \end{aligned}$$

et prenant $\alpha = 2\lambda^2/\varepsilon$, on a, notant $R_\varepsilon = \varepsilon \int_t^T e^{\alpha s} \left(\mid u_s \mid^2 + \parallel v_s \parallel^2 \right) ds$,

$$\forall t \in [0,T], \qquad e^{\alpha t} \mid y_t \mid^2 + \int_t^T e^{\alpha s} \parallel z_s \parallel^2 ds \leq R_\varepsilon - 2\int_t^T e^{\alpha s} y_s.z_s dW_s. \tag{2.5}$$

D'aprés le Lemme (2.1.1), la martingale locale $\left\{ \int_t^T e^{\alpha s} y_s.z_s dW_s. \right\}_{t\in[0,T]}$ en réalité est une martingale nulle en 0 puisque Y, Y' appartiennent à M^2.

En particulier, prenant l'espérance - ce qui fait partir l'intégrale stochastique via la remarque précédente, on obtient facilement, pour $t = 0$,

$$E\left[\int_0^T e^{\alpha s} \parallel z_s \parallel^2 ds \right] \leq E\left[R_\varepsilon \right]. \tag{2.6}$$

Revenant à l'inégalité (2.5), les inégalités **BDG (1.5.1)** fournissent - avec C universelle -,

$$E\left[\sup_{0\leq t\leq T} e^{\alpha t} \mid y_t \mid^2 \right] \leq E\left[R_\varepsilon \right] + CE\left[\left(\int_0^T e^{2\alpha s} \mid y_s \mid^2 \parallel z_s \parallel^2 ds \right)^{\frac{1}{2}} \right],$$

puis , comme $ab \leq a^2/2 + b^2/2$,

$$E\left[\sup_{0\leq t\leq T} e^{\alpha t} \mid y_t \mid^2 \right] \leq E\left[R_\varepsilon \right] + \frac{1}{2} E\left[\sup_{0\leq t\leq T} e^{\alpha t} \mid y_t \mid^2 \right] + \frac{C^2}{2} E\left[\int_0^T e^{\alpha s} \parallel z_s \parallel^2 ds \right].$$

Prenant en considération l'inégalité (2.6), on obtient finalement

$$E\left[\sup_{0\leq t\leq T} e^{\alpha t} \mid y_t \mid^2 + \int_0^T e^{\alpha s} \parallel z_s \parallel^2 ds \right] \leq \left(3 + C^2 \right) E\left[R_\varepsilon \right],$$

et par suite, revenant à la définition de R_ε,

$$E\left[\sup_{0\le t\le T} e^{\alpha t} \mid y_t \mid^2 + \int_0^T e^{\alpha s} \parallel z_s \parallel^2 ds\right] \le \varepsilon \left(3+C^2\right)(1\vee T)\, E\left[\sup_{0\le t\le T} e^{\alpha t} \mid u_t \mid^2 + \int_0^T e^{\alpha s} \parallel v_s \parallel^2 ds\right]$$

Prenons ε tel que $\varepsilon\left(3+C^2\right)(1\vee T) = 1/2$, de sorte que l'application Ψ est alors une contraction stricte de B^2 dans lui-même si on le munit de la norme

$$\parallel (U,V) \parallel_\alpha = E\left[\sup_{0\le t\le T} e^{\alpha t} \mid U_t \mid^2 + \int_0^T e^{\alpha s} \parallel V_s \parallel^2 ds\right]^{\frac{1}{2}},$$

qui en fait un espace de Banach - cette dernière norme étant équivalente à la norme usuelle correspondant au cas $\alpha = 0.\Psi$ possède donc un unique point fixe, ce qui assure l'existance et l'unicité d'une solution de l'**EDSR (2.3)** dans B^2.

On obtient ensuite une unique solution vérifiant $Z \in M^2$ puisque la proposition (2.1.1) implique qu'un telle solution appartient à B^2. ■

Remarque 2.1.4 *1. A partir de maintenant et sans plus insister, l'expression ‹‹ la solution de l'**EDSR** ›› signifiera la solution de l'**EDSR** vérifiant $Z \in M^2$.*

2. Nous allons voir que le rôle de Z, plus précisément celui du terme $\int_t^T Z_s dW_s$ est de rendre le processus Y adapté et que lorsque ceci n'est pas nécessaire Z est nul.

2.1.4 Le rôle de Z

Proposition 2.1.2 *Soit (Y,Z) la solution de l'EDSR (2.3) et soit τ un temps d'arrêt majoré par T. On suppose, outre l'hypothèse (L), que ξ est $\mathcal{F}_\tau-$mesurable et que $f(t,y,z) = 0$ dès que $t \ge \tau$.*

Alors $Y_t = Y_{t\wedge\tau}$ et $Z_t = 0$ si $t \ge \tau$.

Preuve. On a, P-p.s,

$$Y_t = \xi + \int_t^T f\left(s, Y_s, Z_s\right) ds - \int_t^T Z_s dW_s \quad , \ 0 \leq t \leq T.$$

et donc, pour $t = \tau$, comme $f(t, y, z) = 0$ dès que $t \geq 0$,

$$Y_\tau = \xi + \int_\tau^T f\left(s, Y_s, Z_s\right) ds - \int_\tau^T Z_s dW_s \ = \xi - \int_\tau^T Z_s dW_s.$$

Il vient alors $Y_\tau = E(\xi|\mathcal{F}_\tau) = \xi$ et par suite $\int_\tau^T Z_s dW_s = 0$ d'où l'on tire que

$$E\left[\left(\int_\tau^T Z_s dW_s\right)^2\right] = E\left[\int_\tau^T \left\|Z_s\right\|^2 ds\right] = 0,$$

et finalement que $Z_s 1_{s \geq \tau} = 0$.

Il s'en suit immédiatement que, si t$\geq \tau$, $\mathrm{Y}_t = \mathrm{Y}_\tau$, puisque par hypothèse,

$$Y_\tau = Y_t + \int_\tau^t f\left(s, Y_s, Z_s\right) ds - \int_\tau^t Z_s dW_s \ = Y_t + 0 - 0,$$

ce qui termine la preuve. ■

Chapitre 3

Equations différentielles stochastiques rértogrades monotone

3.1 Existence des EDSRs monotone

3.1.1 Position du problème

Ici la condition de lipchitz par rapport à la variable y peut être remplacée par une condition de monotonie, ce qui est sujet de travail publié par **S.PENG** dans [12] puis ensuite par **R.DARLING** et **E.PARDOUX** dans [13]. Cette hypothèse de monotonie est très employée, il permet de manipuler les EDSR avec un temps finale aléatoire et d'autre part d'affaiblir l'hypothèse de croissance sur f par rapport à y, pour cela considérons un mouvement brownien de dimension n, défini sur un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ complet.

Soit $f : \Omega \times [0, T] \times \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^{d \times n} \to \mathbb{R}^d$ une fonction aléatoire telle que pour tout (y, z) le processus $\{f(t, y, z)\}_{0 \leq t \leq T}$ soit progressivement mesurable et soit ξ une variable aléatoire $\mathcal{F}_T$ mesurable et on considère les hypothèses suivantes qu'on note (Hyp) :

Hyp :

il existe des constantes $k \geq 0$, $\mu \in \mathbb{R}$, $c \geq 0$ et un processus progressivement mesurable, $\{f_t\}_{0 \leq t \leq T}$, positive, tel que P-p.s.

1. $\forall (t, y), \forall (z, z'), |f(t, y, z) - f(t, y, z')| \leq k \|z - z'\|$.

2. Monotonie en y : pour tout t, y, $\forall (y, y')$,

$$(y - y')(f(t, y, z) - f(t, y', z)) \leq \mu |y - y'|^2 .$$

3. croissance linéaire en (y, z) : $\forall (t, y, z)$,

$$|f(t, y, z)| \leq f_t + C|y| + K\|z\| .$$

4. continuité en y : pour tout couple $(t, z), y \to f(t, y, z)$ est continue.

5. la v.a ξ est $\mathcal{F}_t$ mesurable et $E\left[|\xi|^2 + \int_0^T f_t^2 dt\right] < \infty$

Remarque 3.1.1 *On peut signaler tout d'abord que si $y \to f(y)$ est $K-$lipschitz en y alors elle est monotone avec $\mu = K$, mais l'inverse n'est pas toujours vrai.*

Exemple 3.1.1 *La fonction réelle $y \to -\sqrt{y^+}$ est monotone avec* 0 *pour constante μ mais n'est pas lipschitz.*

. Notre objectif est annonce la théorème d'existence et d'unicité des solution de l'EDSR

$$Y_t = \xi + \int_t^T f(s, Y_s, Z_s) ds - \int_t^T Z_s dW_s, \ 0 \leq t \leq T, \tag{3.1}$$

lorsque (ξ, f) vérifie l'hypothèse (Hy).

Pour cela, on va donner quelques estimation ≪ à priori ≫ concernant les solution des EDSRs qu'on va les utiliser pour la démonstration de ce théorème. ! ?

Remarquons ensuite que sous l'hypothèse (Hy), si (Y, Z) est solution de l'EDSR (3.1) alors Y appartient à S^2 dès que Z appartient à M^2. C'est une conséquence directe de la proposition (2.1.1).

Proposition 3.1.1 *Soit* $\xi \in L^2(\mathcal{F}_T)$. *Supposons qu'il existe des constantes* μ, K *et un processus* $\{f_t\}_{0\leq t\leq T}$ *appartenant à* $M^2(\mathbb{R}^+)$ *tels que, P-p.s.*

$$\forall (t,y,z), \qquad y.f(t,y,z) \leq |y|\, f_t + \mu\,|y|^2 + K\,|y|\,\|z\|. \tag{3.2}$$

Soit $(Y,Z) \in B^2$ *solution de l'EDSR (3.1). Alors, il existe une constante universelle* C_u *telle que*

$$E\left[\sup_{0\leq t\leq T} e^{\alpha t}|Y_t|^2 + \int_0^T e^{\alpha t}\|Z_t\|^2 dt\right] \leq C_u E\left[e^{\alpha t}|\xi|^2 + \left(\int_0^T e^{\alpha\frac{t}{2}} f_t dt\right)^2\right],$$

avec $\alpha = 2(\mu + K^2)$. *De plus, on a, pour tout* $t \in [0,T]$, *notant* $\gamma = 1 + 2\mu + K^2$,

$$|Y_t|^2 \leq E\left(e^{\gamma(T-t)}|\xi|^2 + \int_t^T e^{\gamma(s-t)} f_s^2 ds \backslash \mathcal{F}_t\right).$$

Remarque 3.1.2 *Si* f *vérifie l'hypothèse* (Hy), *on peut prendre* $f_t = |f(t,0,0)|$. *On peut également noter, pour le second point, que dès que* ξ *et* f_t *sont bornés par une constante* M,

$$\sup_{0\leq t\leq T}|Y_t|^2 \leq M^2 C(\gamma,T).$$

On peut toujours prendre $C(\gamma,T) = (1+T)\,e^{\gamma+T}$ *et si* $\gamma \geq 1$, $C(\gamma,T) = 2e^{\gamma T}$ *convient aussi.*

Preuve. On applique la formule d'Itô à $e^{\alpha t}|Y_t|^2$, avec $\alpha \in \mathbb{R}$ pour obtenir :

$$e^{\alpha t}|Y_t|^2 + \int_t^T e^{\alpha s}\|Z_s\|^2 ds = e^{\alpha T}|\xi|^2 + \int_t^T e^{\alpha s}(-\alpha|Y_s|^2 + 2Y_s.f(s,Y_s,Z_s))ds - \int_t^T 2e^{\alpha s}Y_s.Z_s dW_s.$$

D'aprés l'hypothèse (3.2) et l'inégalité $2ab \leq \xi a^2 + \frac{b^2}{\xi}$, on obtient si $\xi = 1$:

$$\forall (t, y, z),\ 2y.f\,(t, y, z) \leq \left(1 + 2\mu + K^2\right) |y|^2 + f_t^2 + \|Z\|^2$$

$\alpha = \gamma = 1 + 2\mu + K^2$, on trouve donc :

$$e^{\gamma t} |Y_t|^2 \leq e^{\gamma T} |\xi|^2 + \int_t^T e^{\gamma s} f_s^2 ds - 2 \int_t^T e^{\gamma s} Y_s.Z_s dW_s.$$

IL reste à conditionner par rapport à $\mathcal{F}_t$ pour obtenir la seconde partie de la proposition.

Et comme précédent par l'hypothèses (3.2) et utilisant l'inégalité $2ab \leq \xi a^2 + \frac{b^2}{\xi}$, on obtient si $\xi = 2$:

$$2y.f(t, y, z) \leq 2\left(\mu + K^2\right) |y|^2 + 2\,|y|\, f_t^2 + \frac{\|z\|^2}{2},$$

on prend $\alpha = 2\left(\mu + K^2\right)$ ce qui implique,

$$e^{\alpha t} |Y_t|^2 + \frac{1}{2} \int_t^T e^{\alpha s} \|Z_s\|^2 ds \leq e^{\alpha T} |\xi|^2 + 2 \int_t^T e^{\alpha s} |Y_s| .f_s ds - 2 \int_t^T e^{\gamma s} Y_s.Z_s dW_s. \quad (3.3)$$

Prenant l'espérance, on obtient facilement, pour $t = 0$,

$$E\left[\int_0^T e^{\alpha s} \|Z_s\|^2 ds\right] \leq 2E\left[e^{\alpha T} |\xi|^2 + 2 \int_0^T e^{\alpha s} |Y_s|\, f_s ds\right], \quad (3.4)$$

Renvenant à l'inégalité (3.3), les inégalités BDG (1.5.1) fournissent - avec C universelle -,

$$\begin{aligned} E(\sup_{0\leq t\leq T} e^{\alpha t} |Y_t|^2) &\leq 2E\left[e^{\alpha T} |\xi|^2 + 2 \int_0^T e^{\alpha s} |Y_s|\, f_s ds\right] + C^2 E\left[\int_0^T e^{\alpha s} \|Z_s\|^2 ds\right] \\ &\leq 2(1 + C^2) E\left[e^{\alpha T} |\xi|^2 + 2 \int_0^T e^{\alpha s} |Y_s|\, f_s ds\right] \quad (3.5) \end{aligned}$$

(3.4) + (3.5) donne :

$$E(\sup_{0\leq t\leq T} e^{\alpha t} |Y_t|^2 + \int_0^T e^{\alpha s} \|Z_s\|^2 ds) \leq 2(2 + C^2) E\left[e^{\alpha T} |\xi|^2 + 2 \int_0^T e^{\alpha s} |Y_s|\, f_s ds\right].$$

Pour finir la preuve de la proposition, il suffit de remarque que :

$$
\begin{aligned}
4(2+C^2)E\left[\int_0^T e^{\alpha s}\left|Y_s\right| f_s ds\right] &\leq 4(2+C^2)E\left[\sup_{0\leq t\leq T} e^{\frac{\alpha t}{2}}\left|Y_t\right|^2 \int_0^T e^{\alpha s/2} f_s ds\right] \\
&\leq \frac{1}{2}E\left[\sup_{0\leq t\leq T} e^{\alpha t}\left|Y_t\right|^2\right] + 8(2+C^2)^2 E\left[\left(\int_0^T e^{\alpha s/2} f_s ds\right)^2\right],
\end{aligned}
$$

finalement on obtient :

$$
E\left[\sup_{0\leq t\leq T} e^{\alpha t}\left|Y_t\right|^2 + \int_0^T e^{\alpha s}\left\|Z_s\right\|^2 ds\right] \leq C_u E\left[e^{\alpha T}\left|\xi\right|^2 + \left(\int_0^T e^{\alpha s/2} f_s ds\right)^2\right],
$$

avec $C_u = 16(2+C^2)^2$.

La proposition précédente possède le corollaire important suivant. ■

Corollaire 3.1.1 *Soient* (ξ, f) *et* (ξ', f') *vérifiant* (Hy) *avec des constantes* (μ, K, C), (μ', K', C') ; *soient* (Y, Z) *et* $(Y', Z\prime)$ *des solution des EDSR associées telles que* Z, Z' *appartiennent à* M^2*. Il existe une constante universelle* C_u *telle que*

$$
E\left[\sup_{0\leq t\leq T} e^{\alpha t}\left|\delta Y_t\right|^2 + \int_0^T e^{\alpha t}\left\|\delta Z_t\right\|^2 dt\right] \leq C_u E\left[e^{\alpha T}\left|\delta\xi\right|^2 + \left(\int_0^T e^{\frac{\alpha t}{2}}\left|\delta f\left(t, Y\prime, Z'\right)\right| dt\right)^2\right],
$$

avec $\alpha = 2\left(\mu + K^2\right)$ *et les notations classiques* $\delta Y = Y - Y'$, $\delta Z = Z - Z'$, $\delta\xi = \xi - \xi'$ *de même que* $\delta f(t, y, z) = f(t, y, z) - f'(t, y, z)$.

Preuve. Remarquons que sous les hypothèses (Hy) dès que $Z \in M^2$, (Y, Z) solution de l'EDSR de paramètres ξ et $f \in B^2$. Notons que $(\delta Y, \delta Z)$ est solution de l'EDSR de paramètres $\delta\xi$ et

$$
g(t, y, z) = f(t, y + Y_t', z + Z_t') - f'(t, Y_t', Z_t'),
$$

et on écrit :

$$
\begin{aligned}
y.g(t, y, z) &= y.(f(t, y + Y_t', z + Z_t') - f(t, Y_t', z + Z_t')) + y.(f(t, Y_t', z + Z_t') - f(t, Y_t', Z_t')) \\
&\quad + y.(f(t, Y_t', Z_t') - f'(t, Y_t', Z_t')),
\end{aligned}
$$

On a : d'après la monotonie,

$$y.(f(t, y + Y_t', z + Z_t') - f(t, Y_t', z + Z_t')) \leq \mu |y|^2,$$

et comme f et lipschitz,

$$y.(f(t, Y_t', z + Z_t') - f(t, Y_t', Z_t')) \leq K |y| \|z\|,$$

et on a :

$$y.(f(t, Y_t', Z_t') - f'(t, Y_t', Z_t')) \leq |y| |\delta f(t, Y_t', Z_t')|$$

Alors,

$$y.g(t, y, z) \leq \mu |y|^2 + K |y| \|z\| + |y| |\delta f(t, Y_t', Z_t')|.$$

Il suffit d'appliquer la proposition précédente pour conclure. ■

3.1.2 Existence et unicité sous (Hy)

Proposition 3.1.2 *Sous* (Hy)*, pour tout processus* $V \in M^2$*, l'EDSR*

$$Y_t = \xi + \int_t^T f(s, Y_s, V_s)\, ds - \int_t^T Z_s dW_s, \ 0 \leq t \leq T$$

possède une unique solution telle que $Z \in M^2$.

Preuve. La démonstration se décompose en deux parties :

Partie 01 : Cas ou ξ et $\sup_t h_t$ bornés par un réel M.

D'abord nous traitons le cas d'un générateur f indépendant de Z. Soit $V \in M^2$, Notons $h(t, y) = f(t, y, V_t)$. Notre but est de construire une solution pour l'EDSR suivante :

$$Y_t = \xi + \int_t^T h(s, Y_s)\, ds - \int_t^T Z_s dW_s, \ \forall t \in [0, T] \tag{3.6}$$

La fonction h vérifie (Hy) puisque :

- $|h(t,y)| \leq h_t + C|y|$; où $h_t = f_t + K\|V_t\|$ appartient à M^2;
- $(y-y').(h(t,y)-h(t,y')) \leq \mu |y-y'|^2$;
- $y \mapsto h(t;y)$ est continue ;
- ξ est de carré intégrable.

Notons tout d'abord que l'on peut supposer que $\mu = 0$ sans perte de généralité puisque (Y,Z) est solution de l'EDSR (3.6) si et seulement si $(Y'_t, Z'_t) = (e^{\mu t}Y_t, e^{\mu t}Z_t)$ est solution de l'EDSR de paramètres (ξ', h') où $\xi' = e^{\mu T}\xi$ et $h'(t,y) = e^{\mu t}h(t, e^{-\mu t}y) - \mu y$. Or (ξ', h') vérifie (Hy) avec $\mu' = 0$, $h'_t = e^{\mu t}h_t$ et $C' = C + |\mu|$. ou suppose donc que $\mu = 0$.

L'EDSR de paramètres (ξ', h') est obtenue à partir de la formule d'Ito appliquée à $e^{\mu t}Y_t$. ξ et $sup_t h_t$ bornés par un réel M. On considère alors une fonction $\rho : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}_+$, de classe C^∞ dont le support est la boule unité et telle que $\int \rho(\mu)\, d\mu = 1$. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.On note $\rho_n(\mu) = n^k \rho(n\mu)$. Soit d'autre part $\theta_n : \mathbb{R}^k \to [0,1]$, C^∞, telle que :

$$\theta_n = \begin{cases} 1 & \text{si } |y| \leq n, \\ 0 & \text{si } |y| \geq n+1. \end{cases}$$

On définit enfin, pour $n \geq 1$,

$$h_n(t,y) = \rho_n * \theta_n h(t,.)(y) = \int_{\mathbb{R}^k} \rho_n(y-u)\theta_n(u)h(t,u)du = \int_{\mathbb{R}^k} \rho_n(u)\theta_n(y-u)h(t,y-u)du.$$

La première chose à remarquer est que $y \mapsto h_n(t,y)$ est de classe C^∞ à support compact : en fait, $h_n(t,y) = 0$ dès que $|y| > n+2$ (pour tout (t,w)).

De plus, d'après l'hypothèse de croissance de h, on a :

$$|h_n(t,y)| \leq \int_{\mathbb{R}^k} \rho_n(u)\, |h(t,y-u)|\, du \leq \int_{\mathbb{R}^k} \rho_n(u)(h_t + C|y| + C|u|)du,$$

et comme le support de ρ est la boule unité et ($\int\limits_{\mathbb{R}^k} \rho_n(u)du = \int\limits_{\mathbb{R}^k} n^k\rho(nu)du$, on pose $nu = u'$, donc $du = \frac{du'}{n^k}$ ce qui implique que $\int\limits_{\mathbb{R}^k} \rho_n(u)du = \int\limits_{\mathbb{R}^k} \rho_n(u\prime)du' = 1$), on obtient :

$$|h_n(t,y)| \leq (M+C) + C\,|y|\,. \tag{3.7}$$

Alors $h_n(t,0)$ est un processus borné par $M+C$.

D'autre part on a : $\triangledown h_n(t,y) = 0$, si $|y| > n+2$ et pour $|y| \leq n+2$,

$$\|\triangledown h_n(t,y)\| \leq \left\| \int\limits_{\mathbb{R}^k} \triangledown \rho_n(u) \otimes \theta_n(y-u)h(t,y-u)du \right\| \leq \int\limits_{\mathbb{R}^k} |\triangledown \rho_n(u)|\,(h_t + C\,|y| + C\,|u|)du,$$

comme le support de ρ est inclus dans la boule unité et

$$\int\limits_{\mathbb{R}^k} |\triangledown \rho_n(u)|\,du = \int\limits_{\mathbb{R}^k} \left|\triangledown n^k \rho(nu)\right| du = n \int\limits_{\mathbb{R}^k} n^k\,|\triangledown \rho(nu)|\,du,$$

on pose $nu = u'$ donc $du = \frac{du'}{n^k}$ ce qui implique que $\int\limits_{\mathbb{R}^k} |\triangledown \rho_n(u)|\,du = n \int\limits_{\mathbb{R}^k} |\triangledown \rho(u')|\,du'$, on a :

$$\|\triangledown h_n(t,y)\| \leq n((M+C) + C\,|y|) \int\limits_{\mathbb{R}^k} |\triangledown \rho(u')|\,du' \leq ((M+C) + C\,|y|)n^2,$$

donc

$$\sup_y \|\triangledown h_n(t,y)\| \leq C'n^2.$$

h_n est dérivable est ces dérivés sont bornée donc elle est lipschitz en y. Alors d'après le Théorème (2.1.1) l'EDSR

$$Y_t^n = \xi + \int_t^T h_n(s, Y_s^n)ds - \int_t^T Z_s^n dW_s, \quad \forall t \in [0,T]\,,$$

à une solution unique (Y^n, Z^n) dans B^2. On a :

$$y.h_n(t,y) = \int_{\mathbb{R}^k} \rho_n(u)\theta_n(y-u)y.h(t,y-u)du,$$

et $y.h(t,y-u) = y.(h(t,y-u) - h(t,-u)) + y.h(t,-u) \leq 0 + (M + C|u|)|y|$. (D'après la monotonie en y) alors

$$y.h_n(t,y) \leq \int_{\mathbb{R}^k} \rho_n(u)\left[(M + C|u|)|y|\right]du,$$

comme le support de ρ inclus dans la boule unité on obtient :

$$y.h_n(t,y) \leq \left[(M + C|u|)|y|\right] \int_{\mathbb{R}^k} \rho_n(u)du \leq (M + C)|y|.$$

De plus $h_n(t,0) \leq (M + C)$, alors la remarque (3.1.2) conduit à

$$\sup_n \sup_t |Y_t^n|^2 \leq 2(C + M)^2 \exp\{T\}. \tag{3.8}$$

La fonction h_n n'est pas nécessairement monotone dans tout l'espace (ce que l'on voulait faire au départ) mais h_n est monotone dans la boule de centre 0 et de rayon $n-1$. En effet, si $|y| \leq n-1$,

$$h_n(t,y) = \int_{|u|\leq 1} \rho_n(u)\theta_n(y-u)h(t,y-u)du = \int_{|u|\leq 1} \rho_n(u)h(t,y-u)du,$$

puisque $\theta_n(x) = 1$ si $|x| \leq n$. par suite, si $|y| \leq n-1$ et $|y'| \leq n-1$, alors, comme h est monotone,

$$(y-y').(h_n(t;y) - h_n(t;y')) = \int \rho_n(u)(y-y').(h(t,y-u) - h(t,y'-u))du \leq 0. \ (\mu = 0).$$

On remarque que h_n n'est pas monotone dans tout l'espace mais elle est monotone dans la boule de centre 0 et de rayon $n-1$. Nous allons à présent montrer que la suite (Y^n, Z^n)

converge dans B^2, pour cela prenons, $m \geq n \geq 1 + a$ où $a = \sqrt{2}(M + C)\exp(T/2)$. La formule d'Itô donne, si on note $\delta Y = Y^m - Y^n$,

$$|\delta Y_t|^2 + \int_t^T \|\delta Z_s\|^2 \, ds = 2\int_t^T \delta Y_s . \{h_m(s, Y_s^n)\} \, ds - 2\int_t^T \delta Y_s . \delta Z_s dW_s.$$

On ne peut pas appliquer directement les estimations à priori car les fonctions h_m et h_n ne sont pas globalement monotones. Toutefois, h_m est monotone dans la boule de rayon $m-1$; comme $m-1 \geq a$, Y_s^m et Y_s^n appartiennent à cette boule d'après l'estimation (3.8). Par suite,

$$\begin{aligned} \delta Y_s . \{h_m(s, Y_s^m) - h_n(s, Y_s^n)\} &\leq \delta Y_s . \{h_m(s, Y_s^m) - h_m(s, Y_s^n)\} + \delta Y_s . \{h_m(s, Y_s^n) - h_n(s, Y_s^n)\} \\ &\leq 0 + 2a \sup_{|y| \leq a} |h_m(t, y) - h_n(t, y)| \qquad (3.9) \end{aligned}$$

il vient alors,

$$|\delta Y_t|^2 + \int_t^T \|\delta Z_s\|^2 \, ds \leq 4a \int_0^T \sup_{|y| \leq a} |h_m(t, y) - h_n(t, y)| \, ds - 2\int_t^T \delta Y_s . \delta Z_s dW_s. \qquad (3.10)$$

Prenant l'espérance, on obtient facilement, pour $t = 0$,

$$E\left[\int_0^T \|\delta Z_s\|^2 \, ds\right] \leq 4aE\left[\int_0^T \sup_{|y| \leq a} |h_m(s, y) - h_n(s, y)| \, ds\right]. \qquad (3.11)$$

$E(\int_0^T \delta Y_s . \delta Z_s dW_s) = 0$, puisque $\int_0^T \delta Y_s . \delta Z_s dW_s$ est une martingale.

Revenant à l'inégalité (3.10) pour obtenir :

$$\begin{aligned} E\left[\sup_{0 \leq t \leq T} |\delta Y_t|^2\right] + E\left[\int_0^T \|\delta Z_s\|^2 \, ds\right] &\leq 4aE\left[\int_0^T \sup_{|y| \leq a} |h_m(s, y) - h_n(s, y)| \, ds\right] \\ &\quad + 2E\left[\sup_{0 \leq t \leq T} \left|\int_0^T \delta Y_s . \delta Z_s dW_s\right|\right]. \end{aligned}$$

D'après les inégalités BDG (1.5.1) et l'inégalité $ab \leq \frac{a^2}{2} + \frac{b^2}{2}$, on obtient :

$$\begin{aligned} E\left[\sup_{0\leq t\leq T} |\delta Y_t|^2\right] & \leq 4aE\left[\int_0^T \sup_{|y|\leq a} |h_m(s,y) - h_n(s,y)|\, ds\right] + \frac{1}{2}E\left[\sup_{0\leq t\leq T}\left(\delta\, |Y_t|^2\right)\right] \\ & + \frac{C^2}{2}E\left[\left(\int_0^T \|\delta Z_s\|^2\, ds\right)\right], \end{aligned}$$

ce qui implique,

$$E\left[\sup_{0\leq t\leq T} |\delta Y_t|^2\right] \leq 4a\left(2 + C^2\right) E\left[\int_0^T \sup_{|y|\leq a} |h_m(s,y) - h_n(s,y)|\, ds\right], \tag{3.12}$$

(3.11) + (3.12) donne :

$$E\left[|\delta Y_t|^2 + \int_0^T \|\delta Z_s\|^2\, ds\right] \leq cE\left[\int_0^T \sup_{|y|\leq a} |h_m(s,y) - h_n(s,y)|\, ds\right],$$

avec $c = 4a(2 + C^2)$.

Comme la fonction $y \mapsto h(t,y)$ est continue, $h_n(t,\cdot)$ converge vers $h_n(t,\cdot)$ uniformément sur les compacts $\lambda \otimes P-$presque partout.

De plus, d'après la majoration (3.7), on a :

$$\sup_{|y|\leq a} |h_m(t,y) - h_n(t,y)| \leq 2\left(M + C + C_a\right).$$

On applique donc le théorème de convergence dominée de lebesgue (1.6.2),

$$\begin{aligned} E\left[\lim_{n,m\to\infty} \int_0^T \sup_{|y\leq a|} |h_m(s,y) - h_n(s,y)|\, ds\right] & = E\left[\int_0^T \lim_{n,m\to\infty} \sup_{|y\leq a|} |h_m(s,y) - h(s,y)\right. \\ & \left. + h(s,y) - h_n(s,y)|\, ds\right] \\ & \leq \left[E\int_0^T \lim_{n,m\to\infty} \sup_{|y\leq a|} |h_m(s,y) - h(s,y)|\right. \\ & \left. + \sup_{|y\leq a|} |h(s,y) - h_n(s,y)|\, ds\right] = 0 \end{aligned}$$

Ce qui implique,

$$\lim_{n,m\to\infty}\|Y^m-Y^n\|_{S^2}^2=0,\quad \text{et}\quad \lim_{n,m\to\infty}\|Z^m-Z^n\|_{M^2}^2=0.$$

Alors la suite (Y^n,Z^n) est de cauchy dans l'espace de banach B^2. Soit (Y,Z) la limite de cette suite. On va passer à la limite terme à terme dans l'EDSR dirigée par h_n, pour montrer que (Y,Z) est bien solution de l'EDSR (3.6).

$\lim\limits_{n\to\infty} E\left[|Y_t^n-Y_t|^2\right]\leq \lim\limits_{n\to\infty} E\left[\sup_t|Y_t^n-Y_t|^2\right]=0$, d'après l'inégalité de Doob (1.5.2) on trouve :

$\lim\limits_{n\to\infty} E\left[\left|\int_t^T(Z_s^n-Z_s)\,dW_s\right|^2\right]\leq 4\lim\limits_{n\to\infty} E\left[\int_0^T\|(Z_s^n-Z_s)\|^2\,ds\right]=0.$

Alors on déduit que Y_t^n converge vers Y_t et $\int_t^T Z_s^n dW_s$ converge vers $\int_t^T Z_s dW_s$ dans L^2.

IL reste a montrer que $\int_t^T h_n(s,Y_s^n)ds\to\int_t^T h(s,Y_s)ds$, on a d'après l'inégalité de Hölder (1.5.2) :

$$\begin{aligned}E\left[\sup_t\left|\int_t^T\{h_n(s,Y_s^n)-h(s,Y_s)\}\,ds\right|^2\right] &= E\left[\sup_t\left|\int_t^T\{h_n(s,Y_s^n)-h(s,Y_s^n)\right.\right.\\ &\quad\left.\left.+h(s,Y_s^n)-h(s,Y_s)\}\,ds\right|^2\right]\\ &\leq 2TE\left[\int_t^T|h_n(s,Y_s^n)-h(s,Y_s^n)|^2\,ds\right]\\ &\quad+2TE\left[\int_t^T|h(s,Y_s^n)-h(s,Y_s)|^2\,ds\right],\end{aligned}$$

les deux termes tendent vers 0 car :

$\lim\limits_{n\to\infty}|h_n(s,Y_s^n)-h(s,Y_s^n)|\leq \lim\limits_{n\to\infty}\sup\limits_{|y\leq a|}|h_n(s,y)-h(s,y)|=0$, et comme la fonction $h(t,\cdot)$ est continue $h(t,Y_t^n)\to h\left(t,Y_t\right)$. Dans chacun des cas les dominations sont immédiates.

Partie 02 : Cas général.

On pose $\xi^p=\xi 1_{|\xi|\leq p}$, $h^p(t,y)=h(t,y)1_{h_t\leq p}$, telle que le couple (ξ^p,h^p) soit vérifier les hypothèses de l'étape précédente, pour tout $p\geq 1$

- h^p est continue.
- $y\to h^p(t,y)$ est continue.

- $|\xi^p| \leq p$, $|h^p(t,y)| \leq p + C|y|$.

donc, l'EDSR de paramètres (ξ^p, h^p) possède une unique solution dans B^2, (Y^p, Z^p).

D'après la condition de monotonie en y on a :

$$y.(h^p(t,y) - h^p(t,0)) \leq 0,$$

alors

$$y.h^p(t,y) \leq |y|\,|h^p(t,0)| \leq p\,|y|.$$

La remarque suivant la Proposition (3.1.1) montre alors que :

$$\sup_t |Y^p|^2 \leq 2p^2 e^T.$$

Pour montrer que la suite (Y^p, Z^p) est de cauchy dans B^2, on utilise les estimation à priori dans le corollaire (3.1.1) pour tout $q \leq p$,

$$E\left[\sup_{0\leq t\leq T} |\delta Y_t|^2 + \int_0^T \|\delta Z_t\|^2\,dt\right] \leq C_u E\left[\left(\int_0^T 1_{h_t>p}\,|h(t,Y_t^p)|\,dt\right)^2\right],$$

où : $\delta Y = Y^q - Y^p$, $\delta Z = Z^q - Z^p$, et

$$\begin{aligned} h^q(t,y_t^p) - h^p(t,y_t^p) &= h(t,y_t^p)1_{h_t\leq q} - h(t,y_t^p)1_{h_t\leq p} \\ &= h(t,y_t^p)1\,\{_{h_t\leq p}\} + h(t,y_t^p)1_{\{p<h_t\leq q\}} - h(t,y_t^p)1\,\{_{h_t\leq p}\} \\ &= h(t,y_t^p)1_{\{p<h_t\leq q\}}, \end{aligned}$$

et comme $\{p < h_t \leq q\} \subset \{h_t > p\}$ donc $1_{\{p<h_t\leq q\}} \leq 1_{\{h_t>p\}}$. Or

$$|h(t,Y_t^p)| \leq h_t + C\,|Y_t^p| \leq h_t + C\sqrt{2}pe^{T/2}.$$

Par suit,

$$|h(t,Y_t^p)|\,1_{h_t>p}\leq(1+C\frac{p}{h_t}\sqrt{2}e^{T/2})h_t1_{h_t>p}\leq(1+C\sqrt{2}e^{T/2})h_t1_{h_t>p},\qquad(\frac{p}{h_t}\leq 1).$$

L'inégalité de Hölder (1.5.2) :

$$E\left[\sup_{0\leq t\leq T}|\delta Y_t|^2+\int_0^T\|\delta Z_t\|^2\,dt\right]\leq C_uT(1+C\sqrt{2}e^{T/2})^2E\left[\int_0^T 1_{h_t>p}h_t^2dt\right],$$

$\lim\limits_{p\to\infty}E\left[\int_0^T 1_{h_t>p}h_t^2dt\right]=0$, ce qui implique,

$$\lim_{p,q\to\infty}\|Y^q-Y^p\|_{S^2}^2=0,\quad\text{et}\quad\lim_{p,q\to\infty}\|Z^q-Z^p\|_{M^2}^2=0.$$

Donc, (Y^p,Z^p) est une suite de cauchy dans l'espace de Banach B^2. On va montrer que la limite de la suite (Y^p,Z^p) est la solution de l'EDSR (3.6), on a :

$$Y_t^p=\xi^p+\int_t^T h^p(s,Y_s^p)ds-\int_t^T Z_s^pdW_s,\quad\forall t\in[0,T],$$

comme dans l'étape précédente, $(Y_t^p,\xi^p,\int_t^T Z_s^pdW_s)$ converge vers $(Y_t,\xi,\int_t^T Z_sdW_s)$ dans Z^2, il reste à montrer que $\int_t^T h^p(s,Y_s^p)ds$ converge vers $\int_t^T h(s,Y_s)ds$. Procédant de même que lors de la première étape, on a :

$$\begin{aligned}E\left[\sup_t\left|\int_t^T(h^p(s,Y_s^p)-h(s,Y_s))\,ds\right|^2\right]&\leq 2TE\left[\int_0^T|h^p(s,Y_s^p)-h(s,Y_s^p)|^2\,ds\right]\\&+2TE\left[\int_0^T|h(s,Y_s^p)-h(s,Y_s)|^2\,ds\right],\end{aligned}$$

le premier terme est majoré par :

$$E\left[\int_0^T |h^p(s,Y_s^p)-h(s,Y_s^p)|^2\,ds\right] = E\left[\int_0^T \left|h(s,Y_s^p)1_{h_t\leq p} - h(s,Y_s^p)1_{\{h_t\leq p\cup h_t>p\}}\right|^2 ds\right]$$
$$= E\left[\int_0^T 1_{h_t>p}\,|h(t,Y_s^p)|^2\,dt\right]$$
$$\leq T(1+C\sqrt{2}pe^{T/2})^2 E\left[\int_0^T 1_{h_t>p}h_t^2 dt\right],$$

qui tend vers 0.

Le second terme tend vers 0, car $h\left(s,Y_s^p\right) \to h\left(s,Y_s\right)$. De plus $(\left|h\left(s,Y_s^p\right)\right|^2)_{p\geq 1}$ est uniformément intégrable puisque $\left|h\left(s,Y_s^p\right)\right|^2 \leq 2(h_t^2 + C^2\left|Y_t^p\right|^2)$. Alors d'après le théorème (1.6.1) $h\left(s,Y_s^p\right) \to h\left(s,Y_s\right)$ dans L^2.

Donc en passant à la limite terme à terme dans L^2 dans l'EDSR dirigée par (ξ^p, h^p),

$$Y_t = \xi + \int_t^T h(s,Y_s)ds - \int_t^T Z_s dW_s, \quad \forall t\in[0,T].$$

∎

Théor∎me 3.1.1 *Sous (Hy), l'EDSR (3.1) possède une unique solution telle que $Z\in M^2$.*

Preuve. Nous utilisons dans ce démonstration un argument de point fixe.

L'unicité est évidente, il suffit en effet d'appliquer le corollaire (3.1.1). Pour l'existence nous utilisons un argument de point fixe basé sur la proposition précédent. Pour (u,v) élément de B^2, notons $(Y,Z)=\Psi\left(U,V\right)$ la solution de l'EDSR de la proposition précédente. Ψ est une application du Banach B^2 dans lui même. Si $(Y',Z')=\Psi\left(U',V'\right)$, les estimations à priori donnent, si $\alpha = 2\mu$,

$$\begin{aligned}
E\left[\sup_{0\leq t\leq T}|\delta Y_t|^2+\int_0^T\|\delta Z_t\|^2\,dt\right] &\leq C_u E\left[\left(\int_0^T e^{\alpha t/2}\left|f(t,Y_t,V_t)-f\left(t,Y_t,V_t'\right)\right|dt\right)^2\right]\\
&\leq C_u E\left[\left(\int_0^T \sup_{0\leq t\leq T} e^{\alpha t/2}\left|f(t,Y_t,V_t)-f\left(t,Y_t,V_t'\right)\right|dt\right)^2\right]\\
&\leq C_u e^{|\alpha|T} E\left[\left(\int_0^T \left|f(t,Y_t,V_t)-f\left(t,Y_t,V_t'\right)\right|dt\right)^2\right],
\end{aligned}$$

où δ a sa signification habituelle. Comme f est lipschitz en V l'inégalité devient :

$$E\left[\sup_{0\leq t\leq T}|\delta Y_t|^2+\int_0^T\|\delta Z_t\|^2\,dt\right]\leq C_u e^{|\alpha|T}E\left[\left(\int_0^T K\,\|\delta V_t\|\,dt\right)^2\right].$$

L'inégalité de Hölder (1.5.2) fornit alors :

$$E\left[\sup_{0\leq t\leq T}|\delta Y_t|^2+\int_0^T\|\delta Z_t\|^2\,dt\right]\leq C_u e^{|\alpha|T}K^2TE\left[\left(\int_0^T \|\delta V_t\|\,dt\right)^2\right],$$

cette dernière inégalité montre que Ψ est une contraction stricte si T suffisamment petit et fournit donc le résultat sous cette restriction. Dans le cas général, il suffit de subdiviser, l'intervalle de temps $[0,T]$ en un nombre fini d'intervalles de longueur convenable : on résout d'abord sur $[T-\eta,T]$. puis sur $[T-2\eta,T-\eta]$. ■

Conclusion

Le but principal de ce mémoire est étude l'existence de solution pour des EDSRs monotones. Ce travail est divisé en trois chapitre.

Dans le premier chapitre, on a donné généralités sur le calcul stochastique. Dans la deuxième on étudie les EDSR et donner le résultat d'existence et d'unicité établis par E.Pardoux et S.Peng dans le cas lipschitz. Dans le dernier chapitre on a remplacé la condition de lipschitz en y par une condition qu'on l'a appelé la condition de monotonie ou obtenons les EDSRs dans le cas monotone. La démonstration de se résultat est basé sur un argument de point fixe.

Bibliographie

[1] Briand, Ph, (2011). Équations Différentielles Stochastiques Rétrogrades.

[2] Mahieddine, Z, (2009 - 2010). Discrétisations et résolutions numériques des équations différentielles stochastiques rétrogrades. Mémoire de Magister. Université de Boumerdes.

[3] Lakhdari, I,(2012). Équations Différentielles Stochastiques Rétrogrades et applications en contrôle optimale. Mémoire de Magister, Université de Biskra.

[4] Jeanblanc, M,(2006). Cours de calcul stochastique. Cours de Master.

[5] Guillotion-Plantard, N, (2009). Introduction au calcul stochastique.

[6] Cristophe, J, (2018). Processus stochastiques. Université de Rennes 1.

[7] Pham, H, (2000). Optimisation et controle stochastique appliqués à la finance. Springer.

[8] Berglund, N, (2011). Martingales et calcul stochastique. Université d'orléans.

[9] Hervé, G. (2006). calcul statistique avancé.

[10] Bismut, J. (1973). Théorie probabiliste du contrôl des diffusions. Mem. Amer.

[11] Peng, S and Pardoux. (1990). Adapted solution of a backward stochastic differential equation. Systems & control letters, 14(1), p 55-61.

[12] Peng, S. (1991) Probabilistic interpretation for systems of quasilinear parabolic partial differential equations. Stochastics Stochastics. Rep, no. 1-2, 61-74.

[13] Darling, R and Pardoux, E. Backwards SDE with random terminal time and applications to semilinear elliptic PDE, Ann. Probab, no. 3, 1135-1159.

[14] Philippe,B.(2015). Calcul stochastique des martingales continues. Université pierre et marie curie, paris 6.

Annexe A : Abréviations et Notations

Les différentes abréviations et notations utilisées tout au long de ce mémoire sont expliquées ci-dessous :

$(\Omega, \mathcal{F}, P)$	:	Espace de probabilité.
$(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}, P)$	:	Espace de probabilité filtré.
$\mathbb{R}^k$	:	Espace réel euclidien de dimension k.
$\mathbb{R}^{k\times d}$	:	Ensemble des matrice réelles $k \times d$.
$E\left[X\right]$	:	L'espérance de la variable aléatoire X par rapport à une probabilité P.
$E\left[X \backslash B\right]$	:	L'espérance conditionnelle de X sachant B.
z^*	:	Désigne la transposée du vecteur z.
$trace(zz^*)$	:	Désigne la trace la matrice carrée (zz^*).
$P - p.s$	:	Est la notation presque sûrement pour la mesure de probabilité P.
sup	:	Désigne la superieur.
$EDSRs$	:	Les équation différentielle stochastique rétrograde.
W_t	:	Le mouvement brownien.
∇_g	:	Le gradient de la fonction g.
$\int$	:	Sumbole d'intégration.
$\Vert.\Vert$	:	Désigne la norme.
$\vert.\vert$	:	Désigne la valeur absolu.

e^x	:	Désigne la fonction exponentielle.
$\langle .,. \rangle$	:	Désigne le produit scalaire dans un espace de hilbert.
1_A	:	L'indicatrice de A.
$\sum$	:	Désigne la somme.
C^∞	:	L'ensemble des fonctions continues jusqu'à ∞.
$x \sim y$	:	x est équivalente à y.
L^2	:	L'espace des fonctions de carré intégrable.
$x \wedge y$	:	$\min(x, y)$.
$x \vee y$	:	$\max(x, y)$.