République Algérienne Démocratique et Populaire

Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

UNIVERSITÉ MOHAMED KHIDER, BISKRA

FACULTÉ des SCIENCES EXACTES et des SCIENCES de la NATURE et de la VIE

DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES

Mémoire présenté en vue de l'obtention du Diplôme **:**

MASTER en Mathématiques

Option : **Probabilités**

Par

GHANEM Hafsa

Titre :

Existence et Unicité des Solutions d'une Equation Intégrale Stochastique de Volterra

Membres du Comité d'Examen

Dr.	**GATT Rafika**	UMKB	Président
Dr.	**BOUGHERARA Saliha**	UMKB	Encadreur
Dr.	**ZAGHDOUDI Kadhem**	UMKB	Examinateur

Juin 2019

Dédicace

Je dédie ce simple travaille à : Mes précieux parents, pour leur aide et leur conceil,

Mes chers soeur et frères.

Mes amis.

A mon encadreure **Dr. Bougherara Saliha** et tout mes enseeigants

du faculté de mathématique et mes collégues de la promotion 2019.

REM

ERCIEMENTS

Je tiens tout d'abord à remercier Dieu le tout puissant et miséricordieux, qui ma donné la force et la patience d'accomplir ce Modeste travail.

En second lieu, je tiens à remercier mon encadreur **Dr. Bougherara Saliha**, son précieux conseil et son aide durant toute la période du travail.

Mes vifs remerciements vont également aux membres du jury : **Dr. GATT Rafika** et **Dr. ZAGHDOUDI Kadhem** pour l'intérêt qu'ils ont porté à ma recherche en acceptant d'examiner ma travail et de l'enrichir par leurs propositions.

Je désire aussi remercier le **professeur Mezerdi Brahim** d'avoir répondu à mes questions.

Je tiens également à remercier **Mr. Lalmi Foudil** pour son aide, **Lalmi Hassen** qui est la source d'une bonne ambiance de travail.

Enfin, je remercier ma famille et toutes les personnes qui ont participé de près ou de loin à la réalisation de ce travail.

Table des matières

Introduction

Les premières équations intégrales furent obtenues par Daniel Bernoulli vers 1730 dans l'étude des oscillations d'une corde tendue. Dans ce mémoire on étude l'existence et l'unicité de la solution d'une équation intégrale stochastique de Volterra, donc pour ce type d'équations il suffit d'étudier les équations différentielles stochastiques d'une part, et les équations intégrales de Volterra d'autre part.

Ce travail se décompose en trois chapitres :

- ▷ Le but du premier chapitre est d'étudier l'existence et l'unicité de l'équation intégrale de Volterra et de montrer quelles sont les méthodes analytiques et numériques utilisées dans cette étude et la relation entre les équations intégrales de Volterra et les équations différentielles.
- ▷ Dans le deuxième chapitre nous étudions les équations intégrales stochastiques et les équations intégrales stochastiques rétrogrades et montrons quelle est la différence entre ces deux types d'équations stochastiques, puis on étudiera l'existence et l'unicité de la solution.
- ▷ Finalement, le dernier chapitre montre quelle est la relation entre le premier et le deuxième chapitre c'est-à-dire nous étudions les équations intégrales stochastiques de Volterra et les équations intégrales stochastiques rétrogrades de Volterra, on commence par des définitions et généralités puis on étudie l'existence et l'unicité pour chaque type d'équation.

Chapitre 1

Généralités sur les équations intégrales de Volterra

Les équations intégrales prennent généralement la forme :

$$\Phi(x) f(x) = \varphi(x) + \alpha \int_{\beta(x)}^{\gamma(x)} K(x,t) f(t)\, dt,$$

où φ et k sont des fonctions connues, f est une fonction inconnue et $\beta(x)$ et $\gamma(x)$ sont des limites de l'intégration. Les équations intégrales sont classées en différents types concernant les limites de l'intégration et la fonction k, par exemple :

- **Equation intégrale de Fredholm :** Elle prend la forme générale :

$$\Phi(x) f(x) = \varphi(x) + \alpha \int_{a}^{b} K(x,t) f(t)\, dt,$$

si $\Phi \equiv 0$ alors l'équation intégrale de Fredholm est dite du première espèce. Elle est dite du deuxième espèce si $\Phi \equiv 1$;

- **Equation intégrale de Volterra :** Elle prend la forme générale :

$$\Phi(x) f(x) = \varphi(x) + \alpha \int_{a}^{x} K(x,t) f(t)\, dt,$$

de même que l'équation intégrale de Fredholm Si $\Phi \equiv 0$ ($\Phi \equiv 1$) alors l'équation intégrale de Volterra est dite du première espèce (du deuxième espèce) respectivement.

On remarque que les limites de l'intégration dans l'équation intégrale de Fredholm sont constantes par contre de Volterra sont variées, donc l'équation intégrale de Volterra est un cas particulier de l'équation intégrale de Fredholm

- **Equation intégrale de Volterra-Fredholm.**

Le but de ce chapitre et de représenter l'équation intégrale de Volterra dans la première section, et dans la deuxième section on étudie la relation entre les équations intégrales de Volterra et les ED, puis on étudie l'existence et l'unicité de la solution avec une méthode analytique (Approximation successive) et une méthode numérique (la méthode du trapèse) dans la dernière section.

1.1 Préliminaires

Définition 1.1.1 *: L'équation intégrale linéaire de Volterra de seconde espèce s'écrit sous la forme :*

$$f(x) = \varphi(x) + \alpha \int_a^x k(t,x) f(t)\, dt, \tag{1.1}$$

tel que :

1. $\alpha \in \mathbb{R}$ *et* f *est la fonction inconnue ;*
2. φ *est une fonction connue* $\forall x \leq b$;
3. k *s'appelle le noyau de Volterra connue et continue sur l'ensemble*

$$\{(t,x) \,|a \leq t \leq x; a \leq x \leq b\}.$$

Exemple 1.1.1 *:*

1/ $f(x) = 2x^6 + \int_2^x (x-t) f(t)\, dt,$

tel que :

- $\alpha = 1$ *et* $\varphi(x) = 2x^6$;
- $k(t,x) = x - t$ *;*
- $f(x)$ *est la fonction inconnue.*

2/ $f(x) = \exp(x) + 1002 \int_0^x x f(t)\, dt,$

tel que :

- $\alpha = 1002$ *et* $\varphi(x) = \exp(x)$;
- $k(t,x) = x$;
- $f(x)$ *est la fonction inconnue.*

Définition 1.1.2 *: Une équation intégrale non linéaire de Volterra de la deuxième espèce est donnée sous la forme :*

$$f(x) = \varphi(x) + \int_a^x k(x,t)\, g(f(t))\, dt \quad ; \forall x \leq b, \tag{1.2}$$

tel que :

1. $k(x,t)$ s'appelle le noyau de Volterra continue sur $[a,b] \times [a,x]$ et nul si $t > x$;
2. $k(x,t)$ et $\varphi(x)$ sont des fonctions continues;
3. $g(f(t))$ et $f(t)$ sont continues.

Exemple 1.1.2 *:*

1/ *Pour l'équation intégrale suivante :*

$$f_1(x) = 2x + x^6 + \int_0^x x f^3(t)\, dt,$$

est une équation intégrale non linéaire de Volterra de la seconde espèce tel que :

- $\varphi(x) = 2x + x^6$;
- $k(x,t) = x$;
- $g(f(t)) = f^3(t)$.

2/ *Pour l'équation intégrale non linéaire de Volterra de la seconde espèce suivante :*

$$f_2(x) = x + \sin(x) + \int_0^x (x-t) f^2(t)\, dt,$$

on a :

- $\varphi(x) = x + \sin(x)$;
- $k(x,t) = x - t$;
- $g(f(t)) = f^2(t)$.

3/ $f_3(x) = \cosh(x) + \dfrac{1}{7}\exp(2x) + \displaystyle\int_0^x (x-t+1) f^2(t)\, dt,$

- $\varphi(x) = \cosh(x) + \dfrac{1}{7}\exp(2x)$;
- $k(x,t) = x - t + 1$;
- $g(f(t)) = f^2(t)$.

1.2 Liaison entre les ED linéaires et les équations intégrales de Volterra

Dans cette partie, nous étudions les formules et les étapes nécessaires pour lier entre les ED linéaires et les équations intégrales de Volterra. Les équations intégrales de Volterra se ramènent à une ED linéaire, cette transformation basée sur la formule de Leibniz donnée par :

$$\frac{d}{dx}\int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} G(x,t)\, dt = G(x,\beta(x))\frac{d\beta}{dx} - G(x,\alpha(x))\frac{d\alpha}{dx} + \int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} \frac{\partial G}{\partial x} dt, \tag{1.3}$$

tel que : $G(x,t)$ et $\dfrac{\partial G}{\partial x}$ sont continues sur $D = \{(x,t) \in \mathbb{R}^2 : a < x < b; t_0 < t < t_1\}$ et $\alpha(x)$, $\beta(x)$ sont des fonctions dérivables, continues sur $a < x < b$.

Exemple 1.2.1 *:*

1/ $f(x) = 2x + \int_0^x f(t)\,dt$, on a : $\beta(x) = x$, $\alpha(x) = 0$, $\frac{\partial \beta(x)}{\partial x} = 1$ et $G(x, \beta(x)) = f(x)$.

Pour calculer $f'(x)$, il suffit d'appliquer la formule (1.3) sur $\int_0^x f(t)\,dt$, on obtient :

- $f'(x) = 2 + f(x)\ [f'(x) - f(x) = 2]$;
- La condition initiale : $f(0) = 0$

Alors l'ED linéaire associé est :

$$\begin{cases} f'(x) - f(x) = 2, \\ f(0) = 0. \end{cases}$$

2/

$$f(x) = 6x^3 + \int_0^x (t-x)^2 f(t)\,dt, \tag{1.4}$$

avec $\beta(x) = x$ et $\frac{\partial \beta(x)}{\partial x} = 1$, on a :

$$\begin{aligned} f'(x) &= 18x^2 - 2\int_0^x (t-x) f(t)\,dt; \\ f''(x) &= 36x + 2\int_0^x f(t)\,dt; \\ f^{(3)}(x) &= 36 + 2f(x). \end{aligned}$$

Les conditions initiales : $f(0) = 1\,; f\,'(0) = f\,''(0) = 0$. Alors (1.4) est transformée à l'ED linéaire suivante :

$$\begin{cases} f^{(3)}(x) - 2f(x) = 36, \\ f(0) = 1, \\ f'(0) = f''(0) = 0. \end{cases}$$

Inversement, cette méthode est basée sur la formule suivante :

$$\int_0^t \int_0^t ... \int_0^t G(s)\,ds...dsds = \frac{1}{(n-1)!}\int_0^t (t-s)^{n-1} G(s)\,ds. \tag{1.5}$$

Le rôle de cette méthode est transformer une intégrale multiple vers une intégrale simple. Maintenant considérons l'ED linéaire suivante :

$$\begin{cases} y^{(3)}(x) + Ay^{(2)}(x) + By^{(1)}(x) + Cy(x) = g(x), \\ y(0) = a, y^{(1)}(0) = b, y^{(2)}(0) = c. \end{cases} \tag{1.6}$$

On prend $f(x) = y^{(3)}(x)$ tel que f est une fonction continue. On a :

$$\begin{cases} y^{(2)}(x) - c = \int_0^x f(t)\, dt, \\ y^{(1)}(x) = b + cx + \int_0^x \int_0^x f(t)\, dtdt. \end{cases}$$

On applique la formule (1.5) pour transformée $\int_0^x \int_0^x f(t)\, dtdt$ à une intégrale simple, alors :

$$y^{(1)}(x) = b + cx + \int_0^x (x-t) f(t)\, dt.$$

De même façon, on obtient :

$$\begin{aligned} y(x) &= a + bx + \frac{c}{2}x^2 + \int_0^x \int_0^x \int_0^x f(t)\, dtdtdt \\ &= a + bx + \frac{c}{2}x^2 + \frac{1}{2}\int_0^x (x-t)^2 f(t)\, dt, \end{aligned}$$

remplaçant $y(x), y^{(1)}(x)$ et $y^{(2)}(x)$ dans l'ED linéaire (1.6), on obtient :

$$\begin{aligned} f(x) + A\left(c + \int_0^x f(t)\, dt\right) + B\left(b + cx + \int_0^x (x-t) f(t)\, dt\right) \\ +C\left(a + bx + \frac{c}{2}x^2 + \frac{1}{2}\int_0^x (x-t)^2 f(t)\, dt\right) = g(x), \end{aligned}$$

on a :

$$\begin{aligned} f(x) = g(x) - \left[Ac + B(b + cx) + C\left(a + bx + \frac{c}{2}x^2\right)\right] \\ -\int_0^x \left(A + B(x-t) + \frac{1}{2}C(x-t)^2\right) f(t)\, dt. \end{aligned}$$

Donc :

$$f(x) = \varphi(x) + \int_0^x k(x,t)\, f(t)\, dt,$$

tel que :

- $\varphi(x) = g(x) - \left[Ac + B(b + cx) + C\left(a + bx + \dfrac{c}{2}x^2\right)\right]$;
- $k(x,t) = -\left(A + B(x-t) + \frac{1}{2}C(x-t)^2\right)$.

1.3 Existence et unicité de la solution d'une équation intégrale de Volterra de deuxième espèce

Dans cette partie du chapitre, on étudie l'existence et l'unicité de la solution de l'équation intégrale de Volterra de deuxième espèce.

Si l'équation intégrale de Volterra admet une solution alors il existe plusieurs méthodes pour chercher la formule explicite de cette solution par exemple :

Méthodes analytiques :

- La décomposition d'Adomain.
- Approximation successives (Itération de Picard).
- Méthode des séries.

Méthodes numériques :

- Méthode de trapèze.
- Runge Kutta d'ordre 2 et d'ordre 4.
- Méthode de Simpson.

1.3.1 Existence de la solution d'une équation intégrale linéaire de Volterra de deuxième espèce

Approximation successive

Pour la solution analytique on applique la méthode d'Approximation successive, qui s'appelle aussi itération de Picard. L'idée de cette méthode est d'introduire l'équation intégrale linéaire de Volterra par la relation de récurrence suivante :

$$\begin{cases} f_{n+1}(x) = \varphi(x) + \int_0^x k(x,t) f_n(t)\, dt & ; \forall n \geq 0, \\ f_0(x) & \text{donnée}, \end{cases} \tag{1.7}$$

alors la solution $f(x) = \lim_{n \to +\infty} f_{n+1}(x)$. Généralement f_0 prend la valeur $0, 1, x$ ou $f(0)$.
On remarque que $f(x)$ ne dépende pas de la valeur initiale $f_0(x)$.

Théorème 1.3.1 *: Si φ dans (1.1) est continue sur l'intervalle $[a,b]$ et le noyau $k(x,t)$ est continue sur $[a,b] \times [a,x]$ alors la suite $(f_{n+1}(x))_{n \geq 0}$ dans (1.7) converge vers la solution $f(x)$ de (1.1).*

Exemple 1.3.1 *:*

1/ $f(x) = x + \int_0^x (x-t) f(t)\, dt$**.** La relation de récurrence est :

$$\begin{cases} f_{n+1}(x) = x + \int_0^x (x-t) f_n(t)\, dt \ , \forall n \geq 0; \\ f_0(x) = 0, \end{cases}$$

on a :

$$\begin{aligned} f_1(x) &= x + \int_0^x (x-t) f_0(t)\, dt \\ &= x, \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
f_2(x) &= x + \int_0^x (x-t)\, f_1(t)\, dt \\
&= x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!}, \\
f_3(x) &= x + \int_0^x (x-t)\, f_2(t)\, dt \\
&= x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \frac{x^8}{6720}, \\
f_4(x) &= x + \int_0^x (x-t)\, f_3(t)\, dt \\
&= x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \frac{x^7}{7!} + ...
\end{aligned}
$$

Passant à la limite, on trouve :

$$
\begin{aligned}
f(x) &= \lim_{n \to +\infty} f_{n+1}(x) \\
&= \sinh(x).
\end{aligned}
$$

2/ $f(x) = x\cosh(x) + \int_0^x t f(t)\, dt$. La relation de récurrence est :

$$
\begin{cases}
f_{n+1}(x) = x\cosh(x) + \int_0^x t f_n(t)\, dt \,; \forall n \geq 0 \\
f_0(x) = 0
\end{cases}
$$

$$
\begin{aligned}
f_0(x) &= 0; \\
f_1(x) &= x\cosh(x) + \int_0^x t f_0(t)\, dt \\
&= x\cosh(x) \\
&= x\left(1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + ...\right).
\end{aligned}
$$

$$\begin{aligned}
f_2(x) &= x\cosh(x) + \int_0^x t f_1(t)\,dt \\
&= x\left(1+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+...\right)+\int_0^x t^2\left(1+\frac{t^2}{2}\right)dt \\
&= x+\frac{x^4}{6}-\frac{14}{240}x^5. \\
f_3(x) &= x\cosh(x) + \int_0^x t f_2(t)\,dt \\
&= x\left(1+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+...\right)+\int_0^x t\left(t+\frac{t^4}{6}-\frac{14}{240}t^5\right)dt \\
&= x+\frac{1}{6}x^3+\frac{1}{24}x^5+.... \\
f_4(x) &= x\cosh(x) + \int_0^x t f_3(t)\,dt \\
&= x\left(1+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+...\right)+\int_0^x t\left(t+\frac{1}{6}t^3+\frac{1}{24}t^5+...\right)dt \\
&= x+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}+....
\end{aligned}$$

Donc :

$$\begin{aligned}
f(x) &= \lim_{n\to+\infty} f_{n+1}(x) \\
&= \sinh(x).
\end{aligned}$$

Méthode de trapèze :

Pour chercher une solution analytique par la méthode d'Approximation successive (ou-bien n'importe quelle méthode analytique) on trouve quelques difficultés pour obtenir le développement de Taylor de la solution (Il suffit de passer au moins sur 4 intégrations) et on trouve quelques fonctions compliquées pour les développer en série de Taylor. Pour cela il est obligatoire de chercher une approximation de cette solution exacte à l'aide des méthodes numériques.

Dans cette partie, on applique la méthode du trapèze, si l'équation intégrale linéaire de

Volterra de deuxième espèce :

$$f(x) = \varphi(x) + \int_a^x k(x,t,f(t))\,dt,$$

vérifier ces trois conditions :

1. φ continue sur $a \leq x \leq b$;
2. k continue sur $\{(x,t) : a \leq x \leq b\,; a \leq t \leq x\}$;
3. $k(x,t,z)$ est lipschitzienne : $|k(x,t,z_1) - k(x,t,z_2)| \leq \beta |z_1 - z_2|, \forall a \leq t \leq x \leq b$ et pour tout z_1 et z_2,

alors l'équation admet une solution unique et continue.

Pour calculer $\int_a^b g(t)\,dt$ il suffit de diviser $[a,b]$ en des segments de la même longueur $[t_i, t_{i+1}]$, puis remplacer la courbe de g sur $[t_i, t_{i+1}]$ par le segment qui joint $(t_i, g(t_i))$ à $(t_{i+1}, g(t_{i+1}))$.

$$\int_a^b g(t)dt = \sum_{i=1}^{n+1} \int_{t_i}^{t_{i+1}} g(t)dt = h[\frac{g(b)+g(a)}{2} + \sum_{i=1}^{n+1} g(t_i)],$$

tel que : $h = \dfrac{b-a}{n}$; n : le nombre des subdivisions, $t_i = a + ih$. On applique cette méthode sur $\int_a^x k(x,t)\,f(t)\,dt$ pour $a \leq t \leq x \leq b$. Pour $x = x_i$, on a :

$$\int_a^{x_i} k(x,t)\,f(t)\,dt = h[\frac{k(x_i,a)f(a) + k(x_i,x_i)f(x_i)}{2} + \sum_{j=2}^{i-1} k(x_i,x_j)f(x_j)].$$

De (1.1), on trouve : $f(x) - \alpha \int_a^x k(x,t)\,f(t)\,dt = \varphi(x)$, on a pour :

- $1 \leq i \leq n+1 : x_1 = a.$
- $i = 1 : f(a) = \varphi(a).$
- $i = 2 : \dfrac{h}{2} k(x_2,x_1)\,f(x_1) + \left(1 - \dfrac{h}{2} k(x_2,x_2)\right) f(x_2) = \varphi(x_2).$
- $i = 3 : -\dfrac{h}{2} k(x_3,x_1)\,f(x_1) - \dfrac{h}{2} k(x_3,x_2)\,f(x_2) + \left(1 - \dfrac{h}{2} k(x_3,x_3)\right) f(x_3) = \varphi(x_3).$

- $i = 4$:

$$-\frac{h}{2}k\left(x_4,x_1\right)f\left(x_1\right)-\frac{h}{2}k\left(x_4,x_2\right)f\left(x_2\right)-\frac{h}{2}k\left(x_4,x_3\right)f\left(x_3\right)+\left(1-\frac{h}{2}k\left(x_4,x_4\right)\right)f\left(x_4\right)=\varphi\left(x_4\right)$$

$\vdots$

jusqu'à $i = n+1$, donc on obtient le système : $A\bar{f} = B$ où

$$\begin{cases} B = \left(\varphi\left(x_1\right), \varphi\left(x_2\right), ..., \varphi\left(x_{n+1}\right)\right)^T, \\ \qquad\qquad \text{et} \\ \bar{f} = \left(f\left(x_1\right), f\left(x_2\right), ..., f\left(x_{n+1}\right)\right)^T, \end{cases}$$

et

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & & 0 \\ . & & & \ddots & \vdots \\ . & & & & 0 \\ a_{n+1,1} & a_{n+1,2} & . & . & a_{n+1,n+1} \end{bmatrix},$$

tel que :

$$\begin{cases} a_{ij} = 0 & ; \forall j \leq i+1, \\ a_{ij} = -hk\left(x_i, x_j\right) & ; 2 \leq j \leq i \leq n+1, \\ a_{ii} = \left(1-\dfrac{h}{2}\right)k\left(x_i, x_i\right), & \\ a_{11} = 1, & \\ a_{i1} = -\dfrac{h}{2}k\left(x_i, x_1\right) & ; \forall 1 \leq i \leq n+1. \end{cases}$$

1.3.2 Existence de la solution d'une équation intégrale non linéaire de Volterra de deuxième espèce

Premièrement, on réécrit l'équation intégrale non linéaire de Volterra :

$$f\left(x\right) = \varphi\left(x\right) + \int_0^x G\left(x, t, f\left(t\right)\right)dt.$$

Si les quatre conditions suivantes sont satisfaites :

- La fonction φ est intégrable et bornée sur $x \in [a,b]$.
- La fonction φ est Lipschitziènne sur $[a,b] : \forall x, y \in [a,b] : |\varphi(x) - \varphi(y)| \leq \lambda |x-y|$.
- La fonction $G(x,t,f(t))$ est intégrable est bornée : $|G(x,t,f(t))| < K$ pour $a \leq t \leq x \leq b$.
- La fonction $G(x,t,f(t))$ Lipschitziènne : $|G(t,x,z) - G(t,x,z')| < M|z-z'|$ pour tout $a \leq t \leq x \leq b$ et tout z et z',

alors l'équation intégrale non linéaire de Volterra admet une solution.

Pour chercher la formule explicite de cette solution on applique la méthode d'Approximation successive.

Approximation successive

La même idée que le cas linéaire, la relation de récurrence donnée par :

$$\begin{cases} f_{n+1}(x) & = \varphi(x) + \int_0^x k(x,t)\, g(f_n(t))\, dt \,;\, \forall n \geq 0, \\ f_0(x) & \text{donnée,} \end{cases}$$

alors la solution $f(x) = \lim_{n \to +\infty} f_{n+1}(x)$. Généralement f_0 prend la valeur $0, 1, x$, ou $f(0)$. On remarque que $f(x)$ ne dépend pas de la valeur initiale $f_0(x)$.

La limite de $f_{n+1}(x)$ quand $n \to +\infty$ existe en utilisant le même théorème précédent. Ce théorème montre encore l'unicité de la solution (Si $\lim_{n \to +\infty} f_{n+1}(x)$ existe alors elle est unique).

Exemple 1.3.2 *:*

1/ $f(x) = 1 + 3x - \frac{1}{2}x^2 - x^3 - \frac{3}{4}x^4 + \int_0^x (x-t) f^2(t)\, dt.$

$$\begin{cases} f_0(x) & = 1 \\ f_{n+1}(x) & = 1 + 3x - \frac{1}{2}x^2 - x^3 - \frac{3}{4}x^4 + \int_0^x (x-t) f_n^2(t)\, dt \,;\, \forall n \geq 0. \end{cases}$$

ona,

$$\begin{aligned}
f_0(x) &= 1;\\
f_1(x) &= 1+3x-\frac{1}{2}x^2-x^3-\frac{3}{4}x^4+\int_0^x (x-t)\, f_0^2(t)\, dt\\
&= 1+3x-\frac{1}{2}x^2-x^3-\frac{3}{4}x^4+\int_0^x (x-t)\, dt\\
&= 1+3x-x^3-\frac{3}{4}x^4;
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
f_2(x) &= 1+3x-\frac{1}{2}x^2-x^3-\frac{3}{4}x^4+\int_0^x (x-t)\, f_1^2(t)\, dt\\
&= 1+3x-\frac{1}{2}x^2-x^3-\frac{3}{4}x^4+\int_0^x (x-t)\,(1+3t-t^3-\frac{3}{4}t^4)^2 dt\\
&= 1+3x+\left(\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{2}x^2\right)+(x^3-x^3)+\left(\frac{3}{4}x^4-\frac{3}{4}x^4\right)-\frac{1}{10}x^5-\frac{1}{4}x^6\\
&-\frac{3}{28}x^7+\frac{1}{56}x^8+\frac{1}{48}x^9+\frac{1}{160}x^{10};
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
f_3(x) &= 1+3x-\frac{1}{2}x^2-x^3-\frac{3}{4}x^4+\int_0^x (x-t)\, f_2^2(t)\, dt\\
&= 1+3x-\frac{1}{2}x^2-x^3-\frac{3}{4}x^4\\
&+\int_0^x (x-t)\left(1+3t-\frac{1}{10}t^5-\frac{1}{4}t^6-\frac{3}{28}x^7+\frac{1}{56}x^8+\frac{1}{48}x^9+\frac{1}{160}x^{10}\right)^2 dt\\
&= 1+3x-\frac{1}{2}x^2-x^3-\frac{3}{4}x^4+\left(\frac{1}{2}x^2+\frac{161}{160}x^3+\frac{38721}{51200}x^4-\frac{1}{210}x^7-\frac{661}{33600}x^8+...\right)\\
&= 1+3x+\left(\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{2}x^2\right)+\frac{1}{160}x^3-\frac{321}{51200}x^4+\left(\frac{1}{10}x^5-\frac{1}{10}x^5\right)+\left(\frac{1}{4}x^6-\frac{1}{4}x^6\right)\\
&-\frac{1}{210}x^7-\frac{661}{33600}x^8+...;
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
f_4(x) &= 1+3x-\frac{1}{2}x^2-x^3-\frac{3}{4}x^4+\int_0^x (x-t)\, f_3^2(t)\,dt \\
&= 1+3x-\frac{1}{2}x^2-x^3-\frac{3}{4}x^4+ \\
&\int_0^x (x-t)\left(1+3t+\frac{1}{160}t^3-\frac{321}{51200}t^4-\frac{1}{210}t^7-\frac{661}{33600}t^8\right)^2 dt \\
&= 1+3x+\left(\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{2}x^2\right)+\left(x^3-x^3\right)+\left(\frac{3}{4}x^4-\frac{3}{4}x^4\right)+\frac{1}{1600}x^5+...;
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
f_5(x) &= 1+3x-\frac{1}{2}x^2-x^3-\frac{3}{4}x^4+\int_0^x (x-t)\, f_4^2(t)\,dt \\
&= 1+3x-\frac{1}{2}x^2-x^3-\frac{3}{4}x^4+\int_0^x (x-t)\left(1+3t+\frac{1}{1600}t^5\right)^2 dt \\
&= 1+3x+\left(\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{2}x^2\right)+\left(x^3-x^3\right)+\left(\frac{3}{4}x^4-\frac{3}{4}x^4\right)+\left(\frac{1}{1600}x^5-\frac{1}{1600}x^5\right)+...;
\end{aligned}$$

alors :

$$\begin{aligned}
f(x) &= \lim_{n\to+\infty} f_{n+1}(x) \\
&= 1+3x.
\end{aligned}$$

Chapitre 2

Equations différentielles stochastiques (EDS) et équations différentielles stochastiques réctogrades (EDSR)

L'objectif de ce chapitre est d'introduire la forme des EDS et montrer la relation entre les différents types d'existence et d'unicité de la solution dans la première section, et la même étude se fait pour les EDSR dans la deuxième section.

Dans toute la suite on fixe l'espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. Soient $B = (B_t)_{t\geq 0}$ un mouvement Brownien de dimension m et $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ la filtration naturelle du mouvement Brownien $\{\mathcal{F}_t = \sigma(B_s, s \leq t)\}$.

2.1 Equations Différentielles Stochastiques (EDS)

Généralement, les EDS se présentent sous forme intégrale :

$$X_t = x + \int_0^t b(s, X_s)\, ds + \int_0^t \sigma(s, X_s)\, dB_s; \tag{2.1}$$

ou sous la forme :

$$\begin{cases} dX_t = b\,(t, X_t)\,dt + \sigma\,(t, X_t)\,dB_t; \\ X_0 = x. \end{cases} \tag{2.2}$$

Telle que : X est un processus inconnu et : $\forall d, m \in \mathbb{N}$:

- x est la condition initiale à valeur dans $\mathbb{R}^d$,
- $b : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ s'appelle la dérive,
- $\sigma : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^{d\times m}$ est un coefficient de diffusion,
- $\sigma\sigma^t$ est dite matrice de diffusion, et :

$$|b| = \left(\sum_{i=1}^{d} b_i^2\right)^{\frac{1}{2}} \quad \text{et} \quad \|\sigma\| = \left(trace\,(\sigma\sigma^t)\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Exemple 2.1.1 *:*

1/ ***Processus d'Ornstien Uhlenbeck :***

$$\begin{cases} dX_t = -cX_t dt + \sigma dB_t; \\ X_0 = x, \end{cases}$$

où : c et σ sont constantes.

2/ ***Brownien Géometrique :***

$$\begin{cases} dX_t = X_t b_t dt + X_t \sigma_t dB_t; \\ X_0 = x, \end{cases}$$

où : b et σ sont des processus adaptés bornés.

3/ ***Modèle de Cox-Ingersoll-Ross :***

$$\begin{cases} dr_t = a\,(b - r_t)\,dt + \sigma\sqrt{r_t} dB_t; \\ r_0 \geq 0, \end{cases}$$

telle que : $a, b > 0$ *et* $\sigma \geq 0$.

2.1.1 Solutions fortes et solutions faibles

- Une solution forte de (2.2) consiste à trouver un processus stochastique X dans l'espace $\left(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}, \mathbb{P}\right)$ vérifié l'équation (2.1).
- On dit que $\bar{X} = \left(\bar{X}_t\right)_{t\geq 0}$ est une solution faible de l'équation (2.2) si on peut donner :
  - ▷ Un espace probabilisé filtré $\left(\bar{\Omega}, \bar{\mathcal{F}}, \left(\bar{\mathcal{F}}_t\right)_{t\geq 0}, \bar{\mathbb{P}}\right)$,
  - ▷ un $\left(\bar{\Omega}, \bar{\mathcal{F}}, \left(\bar{\mathcal{F}}_t\right)_{t\geq 0}, \bar{\mathbb{P}}\right)$-mouvement Brownien standard $\left(\bar{B}_t\right)_{t\geq 0}$,
  - ▷ Un processus stochastique $\bar{X} = \left(\bar{X}_t\right)_{t\geq 0}$ dans l'espace $\left(\bar{\Omega}, \bar{\mathcal{F}}, \left(\bar{\mathcal{F}}_t\right)_{t\geq 0}, \bar{\mathbb{P}}\right)$ vérifie l'équation (2.1).
- L'unicité faible : Si toutes les solutions ont la même loi.
- Unicité trajectorielle : Si l'espace de probabilité $\left(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}, \mathbb{P}\right)$ et le mouvement Brownien $(B_t)_{t\geq 0}$ sont fixés et toutes deux solutions X et Y sont indistinguables.

Théorème 2.1.1 ***(Yamade - Watanabe) :*** *Si l'équation* (2.2) *admette une solution faible et que toutes ses solutions sont indistinguables alors l'EDS* (2.2) *admet une unique solution forte.*

Théorème 2.1.2 ***(Cauchy-Lipschitz) :*** *Si les hypothèses suivantes sont satisfaites pour l'équation* (2.2) *:*

i) *Soit* $T > 0$*,* $b(t,x) : [0,T] \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d ; \sigma(t,x) : [0,T] \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^{d\times m}$ *sont des fonctions continues ;*

ii) $\exists k \in \mathbb{R} : |b(t,x)| + \|\sigma(t,x)\| \leq k(1+|x|) ; \forall t \in [0,T]$;

iii) $\exists c \in \mathbb{R} : |b(t,x) - b(t,y)| + \|\sigma(t,x) - \sigma(t,y)\| \leq c|x-y|$;

iv) X_0 *variable aléatoire carrée intégrable indépendante de* $B = (B_t)_{t\geq 0}$;

alors l'équation (2.2) *admet une unique solution forte* $X = (X_t)_{t\geq 0}$ *adaptée par la filtraion* $\mathcal{F}_t^{X_0} = \mathcal{F}_t \wedge \sigma(X_0)$ *et vérifiée :*

$$\mathbb{E}\left[\int_0^T |X_t|^2\, dt\right] < \infty.$$

Preuve.

I) L'existence et l'unicité de l'EDS dans l'espace M^2 :

- $\mathbb{M}^2([0,T])$ est l'espace des classes de processus progressivement mesurables et vérifié :

$$\mathbb{E}\left[\int_0^T |\varphi_t|^2\, dt\right] < \infty,$$

- $\mathbb{M}^2 = \bigcap\limits_{T>0} \mathbb{M}^2([0,T])$. Maintenant, on définit l'application :

$$\phi : \left[\mathbb{M}^2\right]^d \to \left[\mathbb{M}^2\right]^d,$$

pour tout $T > 0$,

$$\phi(Y)_t = \xi + \int_0^t b(s, Y_s)\, ds + \int_0^t \sigma(s, Ys)\, dB_s;\ t \in [0,T],$$

on remarque que la solution de l'équation (2.1) est un point fixe de ϕ. On veut montrer que l'application ϕ est contractante munie de la norme :

$$||Y||^2 = \mathbb{E}\left[\int_0^T \exp(-\beta t)\, |Y_t|^2\, dt\right].$$

Soit $Y_1, Y_2 \in \mathbb{M}^2$ et on définit : $Y = Y_1 - Y_2$; $\bar{b}_t = b(t, Y_1) - b(t, Y_2)$; $\bar{\sigma}_t = \sigma(t, Y_1) - \sigma(t, Y_2)$ et $\bar{\phi}_t = \phi(Y_1)_t - \phi(Y_2)_t$.

On applique la formule d'Itô à $f(t,x) = \exp(-\beta t)|x|^2$; $\forall \beta \in \mathbb{R}$, on trouve :

$$\begin{aligned} f\left(T, \bar{\phi}_T\right) &= f\left(0, \bar{\phi}_0\right) + \int_0^T \frac{\partial f}{\partial t}\left(t, \bar{\phi}_t\right) dt + \int_0^T \frac{\partial f}{\partial x}\left(t, \bar{\phi}_t\right) \bar{b}_t dt + \int_0^T \frac{\partial f}{\partial x}\left(t, \bar{\phi}_t\right) \bar{\sigma}_t dB_t \\ &+ \frac{1}{2}\int_0^T \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\left(t, \bar{\phi}_t\right) tr\left(\bar{\sigma}_t \bar{\sigma}_t^t\right) dt, \end{aligned}$$

on a :

$$\begin{aligned} f\left(0, \bar{\phi}_0\right) &= 0; \\ \frac{\partial f}{\partial t}\left(t, \bar{\phi}_t\right) &= -\beta \exp(-\beta t)\left|\bar{\phi}_t\right|^2; \\ \frac{\partial f}{\partial x}\left(t, \bar{\phi}_t\right) &= 2\exp(-\beta t)\left|\bar{\phi}_t\right|; \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\left(t, \bar{\phi}_t\right) &= 2\exp(-\beta t). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \exp(-\beta t)\left|\bar{\phi}_T\right|^2 &= -\beta\int_0^T \exp(-\beta t)\left|\bar{\phi}_t\right|^2 dt + 2\int_0^T \exp(-\beta t)\left\langle \bar{\phi}_t, \bar{b}_t dt\right\rangle \\ &+2\int_0^T \exp(-\beta t)\left\langle \bar{\phi}_t, \bar{\sigma}_t dB_t\right\rangle + \int_0^T \exp(-\beta t)\, tr\left(\bar{\sigma}_t \bar{\sigma}_t^t\right) dt. \end{aligned}$$

On a supposé que $Y_1, Y_2 \in \mathbb{M}^2$, alors on peut dire que $\bar{\phi}_t$, $\bar{b}_t$ et $\bar{\sigma}_t$ sont dans $\mathbb{M}^2$, passant à l'espérance :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\left[\exp(-\beta t)\left|\bar{\phi}_T\right|^2\right] &= -\beta\mathbb{E}\int_0^T \exp(-\beta t)\left|\bar{\phi}_t\right|^2 dt + 2\mathbb{E}\int_0^T \exp(-\beta t)\left\langle \bar{\phi}_t, \bar{b}_t dt\right\rangle \\ &+2\mathbb{E}\int_0^T \exp(-\beta t)\left\langle \bar{\phi}_t, \bar{\sigma}_t dB_t\right\rangle + \mathbb{E}\int_0^T \exp(-\beta t)\, tr\left(\bar{\sigma}_t \bar{\sigma}_t^t\right) dt; \end{aligned}$$

et d'aprés les propriétés des intégrales stochastiques, on trouve :

$$\mathbb{E}\int_0^T \exp(-\beta t)\left\langle \bar{\phi}_t, \bar{\sigma}_t dB_t\right\rangle = 0.$$

Si le terme $\mathbb{E}\left[\exp(-\beta t)\left|\bar{\phi}_T\right|^2\right] \leq 0$, alors :

$$\beta\left\|\bar{\phi}_t\right\|^2 \leq 2\mathbb{E}\int_0^T \exp(-\beta t)\left\langle\bar{\phi}_t, \bar{b}_t dt\right\rangle + \mathbb{E}\int_0^T \exp(-\beta t)\, tr\left(\bar{\sigma}_t\bar{\sigma}_t^t\right) dt,$$

et comme $2\langle a, b\rangle \leq |a|^2 + |b|^2$:

$$\beta\left\|\bar{\phi}_t\right\|^2 \leq \mathbb{E}\int_0^T \exp(-\beta t)\left|\bar{\phi}_t\right|^2 dt + \mathbb{E}\int_0^T \exp(-\beta t)\left|\bar{b}_t\right|^2 dt + \mathbb{E}\int_0^T \exp(-\beta t)\left\|\bar{\sigma}_t\right\|^2 dt,$$

et sous l'hypothèse iii), on trouve :

$$\mathbb{E}\int_0^T \exp(-\beta t)\left(\left|\bar{b}_t\right|^2 + \left\|\bar{\sigma}_t\right\|^2\right) dt \leq 2c^2\mathbb{E}\int_0^T \exp(-\beta t)\left|\bar{Y}_t\right|^2 dt,$$

alors :

$$\beta\left\|\bar{\phi}_t\right\|^2 \leq \mathbb{E}\int_0^T \exp(-\beta t)\left|\bar{\phi}_t\right|^2 dt + 2c^2\mathbb{E}\int_0^T \exp(-\beta t)\left|\bar{Y}_t\right|^2 dt;\ \beta = 1 + 4c^2,$$

on obtient : $\left\|\phi(Y_1) - \phi(Y_2)\right\|^2 = \frac{1}{2}\left\|Y_1 - Y_2\right\|^2$. Alors ϕ admet une unique point fixe Y^*, vérifiée $\phi(Y^*) = Y^*$.

II) L'existence et l'unicité de l'EDS dans l'espace S^2 :

- $\mathcal{S}^2$ est l'espace de Banach constitué des processus $(X_t)_t$, progressivement mesurable, tel que : $\mathbb{E}\left[\sup\limits_{0\leq t\leq T}|X_t|^2\right] < \infty$ muni de la norme : $\|X\|^2 = \mathbb{E}\left[\sup\limits_{0\leq t\leq T}|X_t|^2\right]$.
- $\mathcal{S}_c^2$ le sous espace de $\mathcal{S}^2$ formé des processus continus.

Pour $X \in \mathcal{S}_c^2$ et $\forall t \in [0, T]$, on définit l'application :

$$\Phi(X)_t = x + \int_0^t b(s, X_s)\, ds + \int_0^t \sigma(s, X_s)\, dB_s.$$

Le processus $\Phi(X)$ est bien définie et continu si $X \in \mathcal{S}_c^2$.

Soit X et Y deux éléments de $\mathcal{S}_c^2$ et on utilise la majoration $(a+b)^2 \leq 2a^2 + 2b^2$ et pour tout $0 \leq t \leq u \leq T$, on a :

$$\begin{aligned} \left|\Phi(X)_t - \Phi(Y)_t\right|^2 & \leq 2\sup_{0\leq t\leq u}\left|\int_0^t \left(b(s,X_s) - b(s,Y_s)\right) ds\right|^2 \\ & +2\sup_{0\leq t\leq u}\left|\int_0^t \left(\sigma(s,X_s) - \sigma(s,Y_s)\right) dB_s\right|^2, \end{aligned}$$

d'aprés les propriétés de l'intégrale stochastique et passant à l'ésperance, on trouve :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\left[\sup_{0\leq t\leq u}\left|\Phi(X)_t - \Phi(Y)_t\right|^2\right] & \leq 2\mathbb{E}\left[\sup_{0\leq t\leq u}\left(\int_0^u \left|b(s,X_s) - b(s,Y_s)\right| ds\right)^2\right] \\ & +8\mathbb{E}\left[\sup_{0\leq t\leq u}\int_0^u \left\|\sigma(s,X_s) - \sigma(s,Y_s)\right\|^2 ds\right], \end{aligned}$$

d'aprés l'inégalité de Hölder :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\left[\sup_{0\leq t\leq u}\left|\Phi(X)_t - \Phi(Y)_t\right|^2\right] & \leq 2T\mathbb{E}\left[\sup_{0\leq t\leq u}\int_0^u \left|b(s,X_s) - b(s,Y_s)\right|^2 ds\right] \\ & +8\mathbb{E}\left[\sup_{0\leq t\leq u}\int_0^u \left\|\sigma(s,X_s) - \sigma(s,Y_s)\right\|^2 ds\right], \end{aligned}$$

et comme b et σ sont lipschitzienne, on obtient :

$$\forall u \in [0,T]: \ \mathbb{E}\left[\sup_{0\leq t\leq u}\left|\Phi(X)_t - \Phi(Y)_t\right|^2\right] \leq C\mathbb{E}\left[\int_0^u \sup_{0\leq t\leq s}\left|X_t - Y_t\right|^2 ds\right], \tag{2.3}$$

où $C = 2K^2(T+4)$.

Notant 0 le processus nul et utilisant la majoration $(a+b+c)^2 \leq 3a^2 + 3b^2 + 3c^2$, on obtient :

$$\left|\Phi(0)_t\right|^2 \leq 3x^2 + 3\sup_{0\leq t\leq T}\left|\int_0^t b(s,0)\, ds\right|^2 + 3\sup_{0\leq t\leq T}\left|\int_0^t \sigma(s,0)\, dB_s\right|^2,$$

on utilise l'inégalité de Doob et la croissance linéaire de b et σ :

$$\mathbb{E}\left[\sup_{0\leq t\leq T}\left|\Phi(0)_t\right|^2\right] \leq 3\left(\mathbb{E}\left[x^2\right] + K^2T^2 + 4K^2T\right),$$

donc on peut déduire que le processus $\Phi(X) \in \mathcal{S}_c^2$ dés que $X \in \mathcal{S}_c^2$.

On définit une suite de processus comme suit :

$$\begin{cases} X_0 = 0, \\ X_{n+1} = \Phi(X_n) \quad , \forall n \in \mathbb{N}, \end{cases}$$

à l'aide de la formule (2.3), on obtient :

$$\mathbb{E}\left[\sup_{0\leq t\leq T} \left|X_t^{n+1} - X_t^n\right|^2\right] \leq \frac{C^n T^n}{n!} \mathbb{E}\left[\sup_{0\leq t\leq T} \left|X_t^1\right|^2\right],$$

soit encore $D = 3\left(\mathbb{E}\left[x^2\right] + K^2T^2 + 4K^2T\right)$:

$$\mathbb{E}\left[\sup_{0\leq t\leq T} \left|X_t^{n+1} - X_t^n\right|^2\right] \leq D\frac{C^n T^n}{n!}.$$

Alors :

$$\sum_{n\geq 0} \left\|\sup_{0\leq t\leq T} \left|X_t^{n+1} - X_t^n\right|\right\|_{L^1} \leq \sum_{n\geq 0} \left\|\sup_{0\leq t\leq T} \left|X_t^{n+1} - X_t^n\right|\right\|_{L^2} \leq \sqrt{D} \sum_{n\geq 0} \frac{(CT)^{n/2}}{\sqrt{n!}} < \infty.$$

Ainsi, la série $\sum_n \sup_t \left|X_t^{n+1} - X_t^n\right|$ converge en $\mathbb{P}$-p.s donc X^n converge uniformèment sur $[0,T]$ ves un processus $X \in \mathcal{S}_c^2$ puisque la convergence à lieu dans $\mathcal{S}^2$. On a X une solution de l'EDS (2.2) en passant à la limite dans $X^{n+1} = \Phi(X^n)$.

Soit X et Y deus solutions de l'EDS (2.2) , alors :

$$X = \Phi(X) \text{ et } Y = \Phi(Y),$$

et d'aprés l'inégalite (2.3) et $\forall u \in [0,T]$:

$$\mathbb{E}\left[\sup_{0\leq t\leq u} |X_t - Y_t|^2\right] \leq 2K^2(T+4) \int_0^u \mathbb{E}\left[\sup_{0\leq t\leq s} |X_t - Y_t|^2\right] ds.$$

D'aprés le lemme de Gronwall : $\mathbb{E}\left[\sup_{0\leq t\leq T} |X_t - Y_t|^2\right] = 0$, alors X et Y sont indistinguables.

Pour montrer l'unicité des solutions de l'EDS (2.2) , on doit montrer que toute solutions appartient à l'espace $\mathcal{S}_c^2$.

On considère le temps d'arrêt $\tau_n = \inf\{t \in [0,T], |X_t| > n\}$, pour $u \in [0,T]$, on a :

$$|X_{u\wedge\tau_n}|^2 \leq 3\left[|x|^2 + \sup_{0\leq u\leq t}\left|\int_0^{u\wedge\tau_n} b(s,X_s)\,ds\right|^2 + \sup_{0\leq u\leq t}\left|\int_0^{u\wedge\tau_n} \sigma(s,X_s)\,dB_s\right|^2\right],$$

alors :

$$\mathbb{E}\left[\sup_{0\leq u\leq t\wedge\tau_n}|X_u|^2\right] \leq 3\left(\mathbb{E}|x|^2 + \mathbb{E}\left[\left(\int_0^{t\wedge\tau_n}|b(s,X_s)|\,ds\right)^2\right] + 4\mathbb{E}\left[\int_0^{t\wedge\tau_n}\|\sigma(s,X_s)\|^2\,ds\right]\right),$$

la croissance linéaire de b et σ donne :

$$\mathbb{E}\left[\sup_{0\leq u\leq t\wedge\tau_n}|X_u|^2\right] \leq 3\left[\mathbb{E}|x|^2 + 2K^2T^2 + 8K^2T + \left(2K^2T + 8K^2\right)\int_0^t \mathbb{E}\left[\sup_{0\leq u\leq s\wedge\tau_n}|X_u|^2\right]ds\right].$$

D'aprés le lemme de Gronwall, on obtient :

$$\mathbb{E}\left[\sup_{0\leq u\leq T\wedge\tau_n}|X_u|^2\right] \leq 3\left(\mathbb{E}|x|^2 + 2K^2T^2 + 8K^2T\right)\exp\left\{3\left(2K^2T + 8K^2\right)T\right\},$$

et le lemme de Fatou donne :

$$\mathbb{E}\left[\sup_{0\leq u\leq T}|X_u|^2\right] < 3\left(\mathbb{E}|x|^2 + 2K^2T^2 + 8K^2T\right)\exp\left\{3\left(2K^2T + 8K^2\right)T\right\}.$$

Ceci implique l'unicité des solutions de l'EDS (2.2).

■

2.2 Equations différentielles stochastiques rétrograde (EDSR)

Les équations différentielle stochastiques rétrogrades jouent un rôle très important dans les jeux différentiels stochastiques de somme nulle, en mathématiques financiers et en contrôle optimale stochastique des diffusions. La différence entre les EDS et les EDSR est que les EDS sont définies par une condition initiale par contre les EDSR sont définies par une condition finale.

2.2.1 Préliminaires

On travaillera sur les espaces suivants :

- $\mathbb{L}_T^2(\mathbb{R}^m) = \left\{ Z : \Omega \to \mathbb{R}^m, Z \text{ est } \mathcal{F}_T\text{-mesurable}, \|Z\|^2 = \mathbb{E}\left(|Z|^2\right) < \infty \right\}.$
- $\mathbb{H}_T^2(\mathbb{R}^m) = \left\{ \Phi : \Omega \times [0,T] \to \mathbb{R}^m, \Phi \text{ est un processus prévisible et } \|\Phi\|^2 = \mathbb{E}\int_0^T |\Phi_t|^2 \, dt \right\}.$
- $\mathbb{H}_{T,\gamma}^2(\mathbb{R}^m) = \left\{ \Psi \in \mathbb{H}_T^2(\mathbb{R}^m) \text{ tel que } \forall\gamma > 0 : \|\Psi\|_\gamma^2 = \mathbb{E}\int_0^T \exp(\gamma t) |\Psi_t|^2 \, dt \right\}.$

Définition 2.2.1 *: Une EDSR est donnée sous la forme :*

$$\begin{cases} -dY_t = f(t, Y_t, Z_t)\, dt - Z_t dB_t, t \in [0,T]; \\ Y_T = \xi, \end{cases} \tag{2.4}$$

ou sous forme intégrale :

$$Y_t = \xi + \int_t^T f(s, Y_s, Z_s)\, ds - Z_s dB_s, \tag{2.5}$$

tel que :

1. *ξ (condition finale) est une variable aléatoire mesurable par rapport à $\mathcal{F}_T$, vérifiée : $\mathbb{E}|\xi|^2 < \infty$;*

2. *f est une application aléatoire s'appelle le générateur de l'EDSR :*

$$\begin{aligned} f \quad &: \Omega \times [0,T] \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^{m\times d} &&\longrightarrow \mathbb{R}^m \\ &(\omega, t, Y_t, Z_t) &&\mapsto f(\omega, t, Y_t, Z_t), \end{aligned}$$

est mesurable par rapport aux tribu $\mathcal{F} \otimes \mathcal{B}([0,T]) \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R}^m) \otimes \mathcal{B}\left(\mathbb{R}^{m\times d}\right)$ et $\mathcal{B}\left(\mathbb{R}^{m\times d}\right)$;

3. *$(Z_t)_{t\geq 0}$ est le processus qui garde $(Y_t)_{t\geq 0}$ adapté à la filtration $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ et le théorème de représentation des martingales Browniens montre le rôle de $(Z_t)_{t\geq 0}$:*

Théorème 2.2.1 ***(de représentation des martingales) :*** *Soit Y une martingale carrée intégrable par rapport à la filtration $(\mathcal{F}_t)_{0\leq t\leq T}$, alors il existe un processus Z tel que :*

$$\mathbb{E}\left(\int_0^T Z_s^2 ds\right) < \infty$$

et $\forall t \in [0,T]$ on a :

$$Y_t = y + \int_0^t Z_s dB_s, \mathbb{P}\text{-}p.s.$$

Soit l'équation différentielle :

$$\begin{cases} -\dfrac{dY_t}{dt} = f(Y_t)\,; \\ Y_T = \xi, \end{cases} \tag{2.6}$$

tel que Y_t est $\mathcal{F}_t$-adapté ; $\forall t \in [0,T]$.

Si on prend $f \equiv 0$ alors la solution de l'équation (2.6) est : $Y_t = \xi; \forall t \in [0,T]$, donc la solution est une variable aléatoire (n'est pas adapté par rapport à la filtration $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$), et par le théorème de représentation des martingales Browniens on peut construire une solution adaptée à la filtration $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ et vérifier la condition finale :

$$Y_t = \mathbb{E}[\xi \mid \mathcal{F}_t] = \mathbb{E}[\xi] + \int_t^T Z_s dB_s,$$

où $\mathbb{E}[\int_t^T Z_s dB_s] = 0$ et Z est un processus carré intégrable, donc la solution de (2.6) est :

$$\begin{aligned} Y_t &= \mathbb{E}[Y_t|\mathcal{F}_t] \\ &= \mathbb{E}[\xi|\mathcal{F}_t] = \mathbb{E}[\xi - \int_t^T Z_s dB_s|\mathcal{F}_t]. \end{aligned}$$

Implique que la solution Y est adapté et égale à : $Y_t = \xi - \int_t^T Z_s dB_s$.

Définition 2.2.2 *: On dit que le couple* $\{(Y_t, Z_t)\}_{t\in[0,T]}$ *est une solution de l'équation* (2.4) *si :*

1. *Le processus* $(Y_t)_{t\in[0,T]}$ *est à trajectoires continues en* $\mathbb{P}$*-p.s et adapté, et* $(Z_t)_{t\in[0,T]}$ *est un processus prévisible ;*
2. $\int_0^T [|f(s, Y_s, Z_s)| + \||Z_s|\|^2] ds < \infty;$
3. *Le couple* $\{(Y_t, Z_t)\}_{t\in[0,T]}$ *vérifié l'équation* (2.5) *en* $\mathbb{P}$*-p.s.*

2.2.2 Existence et unicité de la solution

Jean-Michel Bismut à été introduit les EDSR dans le cas où le générateur est une fonction linéaire, puis E.Pardoux et S.Peng sont les premiers qui démontrent l'existence et l'unicité des solutions pour les EDSR dans le cas où le générateur est non linéaire.

Définition 2.2.3 *: Le couple* (f, ξ) *est appelé paramètres standards pour l'équation* (2.4) *si :*

1. ξ *est une variable aléatoire* $\mathcal{F}_T$*-mesurable vérifiée :* $\mathbb{E}\left(|\xi|^2\right) < \infty;$
2. $f(\cdot, 0, 0)$ *est un processus prévisible vérifié :* $\mathbb{E}\left(\int_0^T |f(t, 0, 0)|^2 dt\right) < \infty;$
3. *le générateur est lipschitzien par rapport* y *et* z*, c à d :* $\exists c > 0 : \forall (y_1, z_1), (y_2, z_2) \in \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^{m\times d}$ *telle que :*

$$|f(t, y_1, z_1) - f(t, y_2, z_2)| \leq c(|y_1 - y_2| + \|z_1 - z_2\|).$$

Théorème 2.2.2 ***(Pardoux-Peng 1990) :*** *Si* (f,ξ) *sont des paramètres standards de l'équation* (2.4)*, alors cette équation possède une unique solution* $(Y,Z)\in\mathbb{H}_T(\mathbb{R}^m)\times\mathbb{H}_T\left(\mathbb{R}^{m\times d}\right)$.

Proposition 2.2.1 *: Soient* (f^1,ξ^1) *et* (f^2,ξ^2) *deux paramètres standards pour l'équation* (2.4) *et* (Y^1,Z^1), (Y^2,Z^2) *deux solutions carrés intégrables. Soit* c *la constante de lipschitz pour* f^1 *et :*

$$\begin{cases}\Delta Y_t = Y_t^1 - Y_t^2,\\ \qquad\qquad et\\ \Delta_2 f_t = f_t^1\left(t,Y_t^2,Z_t^2\right) - f_t^2\left(t,Y_t^2,Z_t^2\right),\end{cases}$$

alors pour tout $(\alpha,\beta,\gamma):\beta>0,\alpha^2>c$ *et* $\gamma\geq c\left(2+\alpha^2\right)+\beta^2$*, on a :*

$$\begin{cases}\|\Delta Y\|_\gamma^2 \leq T[\exp(\gamma T)\,\mathbb{E}\left(|\Delta Y_T|^2\right)+\dfrac{1}{\beta^2}\|\Delta_2 f\|_\gamma^2],\\ \qquad\qquad et\\ \|\Delta Z\|_\gamma^2 \leq \dfrac{\alpha^2}{\alpha^2-c}[\exp(\gamma T)\,\mathbb{E}\left(|\Delta Y_T|^2\right)+\dfrac{1}{\beta^2}\|\Delta_2 f\|_\gamma^2].\end{cases}$$

Preuve. (de le théorème 2.1) : On utilise la méthode du point fixe pour démontrer l'existence et l'unicité de la solution de l'EDSR (2.4). Soit l'application Ψ définit comme suit :

$$\begin{array}{lll}\Psi & :\mathbb{H}^2_{T,\gamma}(\mathbb{R}^m)\times\mathbb{H}^2_{T,\gamma}\left(\mathbb{R}^{m\times d}\right) & \to \mathbb{H}^2_{T,\gamma}(\mathbb{R}^m)\times\mathbb{H}^2_{T,\gamma}\left(\mathbb{R}^{m\times d}\right)\\ & (U,V) & \longmapsto \Psi(U,V)=(X,Y),\end{array}$$

où :

$$\begin{cases}dX_t = -f(t,U_t,V_t)\,dt + Y_t dB_t;\\ X_T=\xi,\end{cases}$$

tel que (ξ,f) sont des paramètres standards, on remarque que $(f(t,U_t,V_t);\ t\in[0,T])$ appartient à $\mathbb{H}^2_T(\mathbb{R}^m)$. Donc pour chercher une solution unique de l'équation équivaut à trouver un point fixe à l'application Ψ. D'une manière équivalente Y_t est donné par :

$$Y_t=\mathbb{E}\left[\int_t^T f(s,U_s,V_s)\,ds+\xi|\mathcal{F}_t\right],$$

soit $(U^1,V^1), (U^2,V^2) \in \mathbb{H}^2_{T,\gamma}(\mathbb{R}^m) \times \mathbb{H}^2_{T,\gamma}\left(\mathbb{R}^{m\times d}\right)$, telle que :

$$\begin{cases} \Psi(U^1,V^1) = (Y^1,Z^1), \\ \qquad\qquad \text{et} \\ \\ \Psi(U^2,V^2) = (Y^2,Z^2). \end{cases}$$

On applique les résultats de la proposition précédente avec : $c = 0$ et $\gamma = \beta^2$, on obtient :

$$\|\Delta Y\|^2_\gamma \leq \frac{T}{\gamma}\mathbb{E}\left[\int_0^T \exp(\gamma s)\left|f(s,U^1_s,V^1_s) - f(s,U^2_s,V^2_s)\right|^2 ds\right];$$

et

$$\|\Delta Z\|^2_\gamma \leq \frac{1}{\gamma}\mathbb{E}\left[\int_0^T \exp(\gamma s)\left|f(s,U^1_s,V^1_s) - f(s,U^2_s,V^2_s)\right|^2 ds\right],$$

et comme c est la constante de lipschitz de f :

$$\|\Delta Y\|^2_\gamma + \|\Delta Z\|^2_\gamma \leq \frac{2(1+T)c}{\gamma}\left[\|\Delta U\|^2_\gamma + \|\Delta V\|^2_\gamma\right].$$

Si on choisit $\gamma > 2(1+T)c$ alors l'application Ψ est contractante donc possède un point fixe unique. ■

Chapitre 3

Equation intégrale stochastique de Volterra (EISV) et équation intégrale stochastique rétrograde de Volterra (EISRV)

La théorie des équations intégrales stochastiques de Volterra a été étudie de deux côtés principaux, l'un de ces deux côtés est la théorie d'Itô pour les équations différentielles stochastiques. Cette théorie a été introduite dans le chapitre précédent, et l'autre côté est d'étudier les équations intégrales stochastiques de Volterra comme une version de probabilité pour les équations intégrales de Volterra déterministe.

3.1 Equation intégrale stochastique de Volterra (EISV)

Le but de cette section est d'introduire l'EISV et d'étudier l'existence et l'unicité de ses solutions.

Soient $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espace de probabilité et $B = (B_t)_{t\geq 0}$ un mouvement Brownien de dimension 1, notons $\mathcal{F}_t = \sigma(B_s, s \leq t)$ la filtration naturelle du B.

L'équation intégrale stochastique de Volterra est donnée sous la forme suivante :

$$X(t) = \varphi(t) + \int_0^t g(t, s, X(s))\, ds + \int_0^t f(t, s, X(s))\, dB_s, \forall t \in [0, T] \tag{3.1}$$

tel que :

1. $\varphi(t)$ est un processus $\mathcal{F}_t$-adapté et à trajetoire continue,
2. $g(t, s, x)$ et $f(t, s, x)$ sont des fonctions aléatoires définies pour tout $0 \leq s \leq t \leq T$ et $x \in \mathbb{R}$,
3. le processus stochastique $X(t)$ est une solution de l'équation (3.1) s'il est $\mathcal{F}_t$-adapté et à trajetoire continue pour tout $t \in [0, T]$.

Pour étudier l'existence et l'unicité de l'équation (3.1) il suffit d'étudier le cas ou l'intégrale

$$\int_0^t f(t, s, X(s))\, dB_s, \forall t \in [0, T]$$

est bien définie.

3.1.1 Hypothèses

i) $f(t, s, x)$ est continue en (t, s, x) pour tout ω,

ii) $f(t, s, x)$ est $\mathcal{F}_s$-mesurable pour tout (t, s, x),

iii) $\exists K \in \mathbb{R} : |f(t, s, x)| \leq K(1 + |x|)$, p.s,

iv) $\exists K \in \mathbb{R} : |f(t, s, x_1) - f(t, s, x_2)| \leq K|x_1 - x_2|$, p.s,

v) $\exists K \in \mathbb{R} : |f(t_1, s, x) - f(t_2, s, x)| \leq K|t_1 - t_2|$, p.s.

Soit $X(t)$ un processus $\mathcal{F}_t$-adaptée avec $\sup_{t\in[0,T]} \mathbb{E}[X^2(t)] < \infty$, alors d'aprés les hypothèses présédentes, on a :

$$\mathbb{E}\left[\int_0^t |f(t, s, X(s))|^2\, ds\right] < \infty.$$

Par conséquent, l'intégrale $\int_0^t f(t, s, X(s))\, dB_s, \forall t \in [0, T]$ est bien définie, et sous les hypothèses i) et iv) l'intégrale $\int_0^t f(t,s,X(s))\,ds, \forall t \in [0,T]$ est $\mathcal{F}_t$-adaptée et continue en t.

Lemme 3.1.1 *: Si $\sup_{t\in[0,T]} \mathbb{E}\left[X^4(t)\right] < \infty$, alors l'intégrale $\int_0^t f(t,s,X(s))\,dB_s, \forall t \in [0,T]$ a une version continue.*

Lemme 3.1.2 *: Si $X_i(t), \forall i = 1,2$ vérifies $\sup_{t\in[0,T]} \mathbb{E}\left[X_i^4(t)\right] < \infty$, alors :*

$$\mathbb{P}\left[\sup_{t\in[0,T]}\left|\int_0^T \left(f(t,s,X_1(s)) - f(t,s,X_2(s))\right) dB_s\right| \geq \lambda\right] \leq \frac{K_0 T^2 C_1}{\lambda^4},$$

où : $K_0 \in \mathbb{R}_+$ et

$$C_1 = 288K^4\left(16T^2 \sup_{t\in[0,T]} \mathbb{E}\left[\left|X_1(t) - X_2(t)\right|^2\right] + \sup_{t\in[0,T]} \mathbb{E}\left[\left|X_1(t) - X_2(t)\right|^4\right]\right).$$

Lemme 3.1.3 *: Si $X(t)$ vérifies $\sup_{t\in[0,T]} \mathbb{E}\left[X^4(t)\right] < \infty$, alors :*

$$\mathbb{P}\left[\sup_{t\in[0,T]}\left|\int_0^T f(t,s,X(s))\,dB_s\right| \geq \lambda\right] \leq \frac{K_0 T^2 C_2}{\lambda^4},$$

où : $C_2 = 288K^4\left(T^4 + 8 + 8\sup_{s\in[0,T]} \mathbb{E}\left[X^4(s)\right]\right)$.

3.1.2 Existence et unicité des solutions

Théorème 3.1.1 *: Supposons que $f(t,s,x)$ satisfait les hypothèses i) et v) et $g(t,s,x)$ satisfait les hypothèses i) et iv). Si $\varphi(t)$ est un processus $\mathcal{F}_t$-adapté et continue avec $\sup_{t\in[0,T]} \mathbb{E}\left[\varphi^4(t)\right] < \infty$, alors l'EISV (3.1) admet une unique solution $X(t)$ satisfait $\sup_{t\in[0,T]} \mathbb{E}\left[X^2(t)\right] < \infty$.*

Preuve. D'abord démontrons l'existence de la solution $X(t)$ en utilisant la méthode d'approximation successive, on définit une suit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$, comme suit :

$$\begin{cases} X_0(t) = \varphi(t), \\ X_n(t) = \varphi(t) + \int_0^t g(t,s,X_{n-1}(s))\,ds + \int_0^t f(t,s,X_{n-1}(s))\,dB_s. \end{cases}$$

On obtient :

$$\begin{aligned} X_{n+1} - X_n &= \int_0^t \left[g(t,s,X_n(s)) - g(t,s,X_{n-1}(s))\right] ds \\ &+ \int_0^t \left[f(t,s,X_n(s)) - f(t,s,X_{n-1}(s))\right] dB_s. \end{aligned} \tag{3.2}$$

On utilise la majoration $(a+b)^2 \leq 2a^2 + 2b^2$ puis passant à l'esperance, on obtient :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\left[|X_{n+1}(t) - X_n(t)|^2\right] &\leq 2\mathbb{E}\left[\left|\int_0^t \left[f(t,s,X_n(s)) - f(t,s,X_{n-1}(s))\right] dB_s\right|^2\right] \\ &+ 2\mathbb{E}\left[\left|\int_0^t \left[g(t,s,X_n(s)) - g(t,s,X_{n-1}(s))\right] ds\right|^2\right], \end{aligned}$$

en utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz et l'hypothèse iv) :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\left[|X_{n+1}(t) - X_n(t)|^2\right] &\leq 2K^2\mathbb{E}\left[\int_0^t |X_n(s) - X_{n-1}(s)|^2 ds\right] + 2K^2 t\mathbb{E}\left[\int_0^t |X_n(s) - X_{n-1}(s)|^2 ds\right] \\ &\leq M\int_0^t \mathbb{E}\left[|X_n(s) - X_{n-1}(s)|^2\right] ds, \end{aligned} \tag{3.3}$$

et comme $t \in [0,T]$ on peut prendre $M = 2K^2(T+1)$.

D'autre part, on utilise l'hypothèse iii) on obtient :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\left[|X_1(t) - X_0(t)|^2\right] &= \mathbb{E}\left[\left|\int_0^t f(t,s,\varphi(s))\,dB_s + \int_0^t g(t,s,\varphi(s))\,ds\right|^2\right] \\ &\leq 2M\int_0^t E\left[1+\varphi^2(s)\right] ds \\ &\leq 2M\theta_2\int_0^t ds \\ &\leq 2M\theta_2 t, \end{aligned}$$

tel que : $\theta_2 = \sup\limits_{t\in[0,T]} \mathbb{E}\left[1+\varphi^2(t)\right] < \infty$. En utilisant le résultat de (3.3), on obtient :

$$\mathbb{E}\left[\left|X_{n+1}(t) - X_n(t)\right|^2\right] \leq \frac{2\theta_2 (Mt)^{n+1}}{(n+1)!}. \tag{3.4}$$

De la même manière pour majorer $\mathbb{E}\left[\left|X_n(t) - X_{n-1}(t)\right|^4\right]$, on utilise la majoration $(a+b)^4 \leq 8a^4 + 8b^4$, on obtient :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\left[\left|X_{n+1}(t) - X_n(t)\right|^4\right] &\leq 8\mathbb{E}\left[\left|\int_0^t \left[f(t,s,X_n(s)) - f(t,s,X_{n-1}(s))\right] dB_s\right|^4\right] \\ &+8\mathbb{E}\left[\left|\int_0^t \left[g(t,s,X_n(s)) - g(t,s,X_{n-1}(s))\right] ds\right|^4\right], \end{aligned}$$

utilisant l'inégalité de Burkholder-Davis-Gundy, on obtient :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\left[\left|X_{n+1}(t) - X_n(t)\right|^4\right] &\leq 8\times 36\mathbb{E}\left[\left|\int_0^t \left|f(t,s,X_n(s)) - f(t,s,X_{n-1}(s))\right|^2 ds\right|^2\right] \\ &+8\mathbb{E}\left[\left|\int_0^t \left[g(t,s,X_n(s)) - g(t,s,X_{n-1}(s))\right] ds\right|^4\right], \end{aligned}$$

d'aprés l'inégalité de Cauchy-Schwartz la majoration de $\mathbb{E}\left[\left|X_{n+1}(t) - X_n(t)\right|^4\right]$ soit :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\left[\left|X_{n+1}(t) - X_n(t)\right|^4\right] &\leq 8\times 36\mathbb{E}\left[t\int_0^t \left|f(t,s,X_n(s)) - f(t,s,X_{n-1}(s))\right|^4 ds\right] \\ &+8\mathbb{E}\left[t^3\int_0^t \left|g(t,s,X_n(s)) - g(t,s,X_{n-1}(s))\right|^4 ds\right], \end{aligned}$$

et sous l'hypothèse iv), on obtient :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\left[\left|X_{n+1}(t) - X_n(t)\right|^4\right] &\leq 8K^4 t\left(36+t^2\right)\int_0^t \mathbb{E}\left[\left|X_n(s) - X_{n-1}(s)\right|^4\right] ds \\ &\leq N\int_0^t \mathbb{E}\left[\left|X_n(s) - X_{n-1}(s)\right|^4\right] ds, \end{aligned} \tag{3.5}$$

où : $N = 8K^4T\left(36+T^2\right)$. D'autre part, on obtient :

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left[\left|X_1(t)-X_0(t)\right|^4\right] &\leq 8\int_0^t \mathbb{E}\left[1+\varphi^4(s)\right]ds \\ &\leq 8N\theta_4 t,\end{aligned}$$

où $\theta_4 = \sup\limits_{t\in[0,T]} \mathbb{E}\left[1+\varphi^4(s)\right] < \infty$, on déduit :

$$\mathbb{E}\left[\left|X_{n+1}(t)-X_n(t)\right|^4\right] \leq \frac{8\theta_4\,(Nt)^{n+1}}{(n+1)!}. \tag{3.6}$$

Donc tous les $X_n(t)$ définis successivement sont bien définis, de plus sont des processus $\mathcal{F}_t$-adaptés et continues en raison de la continuité de $\varphi(t)$.

Maintenant, prenant le sup de $\left|X_{n+1}-X_n\right|^2$, la majoration $(a+b)^2 \leq a^2+b^2$, l'inégalité de Cauchy-Schwartz et l'hypothèse iv) pour la fonction g, on trouve :

$$\begin{aligned}\sup_{t\in[0,T]}\left|X_{n+1}(t)-X_n(t)\right|^2 &\leq 2\sup_{t\in[0,T]}\left|\int_0^t \left[f\left(t,s,X_n(s)\right)-f\left(t,s,X_{n-1}(s)\right)\right]dB_s\right|^2 \\ &+2\sup_{t\in[0,T]}\left|\int_0^t \left[g\left(t,s,X_n(s)\right)-g\left(t,s,X_{n-1}(s)\right)\right]ds\right|^2 \\ &\leq 2\sup_{t\in[0,T]}\left|\int_0^t \left[f\left(t,s,X_n(s)\right)-f\left(t,s,X_{n-1}(s)\right)\right]dB_s\right|^2 \\ &+2TK^2\int_0^T \left|X_n(s)-X_{n-1}(s)\right|^2 ds,\end{aligned}$$

alors,

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\left[\sup_{t\in[0,T]}\left|X_{n+1}(t)-X_n(t)\right|^2>\lambda\right] &\leq \mathbb{P}\left[\sup_{t\in[0,T]}\left|\int_0^t \left[f\left(t,s,X_n(s)\right)-f\left(t,s,X_{n-1}(s)\right)\right]dB_s\right|^2>\frac{\lambda}{4}\right] \\ &+\mathbb{P}\left[\int_0^T \left|X_n(s)-X_{n-1}(s)\right|^2 ds>\frac{\lambda}{4TK^2}\right],\end{aligned} \tag{3.7}$$

on applique le lemme 3.1.2 au terme $\mathbb{P}\left[\sup\limits_{t\in[0,T]}\left|\int_0^t \left[f\left(t,s,X_n(s)\right)-f\left(t,s,X_{n-1}(s)\right)\right]dB_s\right|^2>\frac{\lambda}{4}\right]$

de l'inégalité (3.7) et utilisant les inégalités (3.4) et (3.6), on obtient :

$$\begin{aligned}
&\mathbb{P}\left[\sup_{t\in[0,T]}\left|\int_0^t \left[f\left(t,s,X_n\left(s\right)\right)-f\left(t,s,X_{n-1}\left(s\right)\right)\right]dB_s\right|^2>\frac{\lambda}{4}\right] \qquad (3.8)\\
&\leq C\left(16T^2\sup_{t\in[0,T]}\mathbb{E}\left[\left|X_n\left(t\right)-X_{n-1}\left(t\right)\right|^2\right]\right)+\sup_{t\in[0,T]}\mathbb{E}\left[\left|X_n\left(t\right)-X_{n-1}\left(t\right)\right|^4\right]\\
&\leq C\left(\frac{16T^2\times 2\theta_2\left(MT\right)^n}{n!}+\frac{8\theta_4\left(NT\right)^n}{n!}\right),
\end{aligned}$$

tel que : $C=\dfrac{16}{\lambda^2}K_0T^2 288K^4$.

Et on applique l'inégalité de Chebychev au terme $\mathbb{P}\left[\int_0^T\left|X_n\left(s\right)-X_{n-1}\left(s\right)\right|^2ds>\dfrac{\lambda}{4TK^2}\right]$ de l'inégalité (3.7), on trouve :

$$\begin{aligned}
&\mathbb{P}\left[\int_0^T\left|X_n\left(s\right)-X_{n-1}\left(s\right)\right|^2ds>\frac{\lambda}{4TK^2}\right] \qquad (3.9)\\
&\leq\frac{4TK^2}{\lambda}\mathbb{E}\left[\int_0^T\left|X_n\left(s\right)-X_{n-1}\left(s\right)\right|^2ds\right]\\
&\leq 4\lambda^{-1}T^2K^2\times 2\theta_2\frac{\left(MT\right)^n}{n!}.
\end{aligned}$$

Prenant $\lambda=4^{-n}$ et utilisant les résultats de (3.9) et (3.8) dans l'inégalité (3.7) on obtient :

$$\mathbb{P}\left[\sup_{t\in[0,T]}\left|X_{n+1}\left(t\right)-X_n\left(t\right)\right|>2^{-n}\right]\leq const\times\frac{\left(16MT\right)^n}{n!}+const\times\frac{\left(16NT\right)^n}{n!}+const\times\frac{\left(4MT\right)^n}{n!}. \qquad (3.10)$$

Puisque le côté droit de l'inégalité (3.10) est un terme général d'une série convergente, on applique le lemme de Borel-Cantelli, on trouve :

$$\mathbb{P}\left[\sup_{t\in[0,T]}\left|X_{n+1}\left(t\right)-X_n\left(t\right)\right|\leq 2^{-n},n\longmapsto\infty\right]=1.$$

Alors les sommes partielles suivantes $\sum_{k=0}^{n-1}\left(X_{k+1}\left(t\right)-X_k\left(t\right)\right)+\varphi\left(t\right)=X_n\left(t\right)$ sont uniformément convergentes sur $[0,T]$ avec probabilité égale 1. Puisque tous les $X_n\left(t\right)$ sont $\mathcal{F}_t$-adaptés et continues donc on peut indiquer que $X\left(t\right)$ est la limite uniforme de $X_n\left(t\right)$. On remarque que $X\left(t\right)$ vérifie l'équation (3.1), alors on a prouvé l'existence de la solution de l'équation

(3.1).

Unicité : On suppose qu'il existe deux solutions pour l'équation (3.1), $X(t)$ et $Y(t)$ alors :

$$\begin{aligned} X(t) - Y(t) &= \int_0^t \left[f(t, s, X(s)) - f(t, s, Y(s)) \right] dB_s \\ &+ \int_0^t \left[g(t, s, X(s)) - g(t, s, Y(s)) \right] ds, \end{aligned}$$

on utilise la même estimation de (3.3), on trouve :

$$\mathbb{E}\left[|X(t) - Y(t)|^2 \right] \leq 2K^2 (T+1) \int_0^t \mathbb{E}\left[|X(s) - Y(s)|^2 \right] ds.$$

On applique l'inégalité de Gronwall, on trouve :

$$\mathbb{E}\left[|X(t) - Y(t)|^2 \right] \equiv 0,$$

alors :

$$\mathbb{P}\left[X(t) = Y(t) \right] = 1; \ \forall t \in [0, T],$$

puisque $X(t)$ et $Y(t)$ sont deux processus continus, on déduit que :

$$\mathbb{P}\left[X(t) = Y(t), \forall t \in [0, T] \right] = 1.$$

■

3.2 Equation intégrale stochastique rétrograde de Volterra (EISRV)

Le but de cette section est d'introduire la forme de l'EISRV et étudier l'existence et l'unicité de la solution de cette équation en utilisant les résultats obtenus dans la section précédente.

3.2.1 Préliminaires

Soient $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espace de probabilité complet et $B = (B_t)_{t\geq 0}$un mouvement Brownien de dimension m et notons $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ où $\mathcal{F}_t = \sigma(B_s, s \leq t)$ la filtration naturelle du mouvement Brownien.

On travaillera sur ces espaces :

- $\mathbb{L}^2(\Omega) = \left\{\xi : \Omega \to \mathbb{R} : \xi \text{ est } \mathcal{F}_T\text{-mesurable et } \mathbb{E}\left[|\xi|^2\right] < \infty\right\}$.
- $\mathbb{L}^2_{\mathcal{F}_T}([0,T] \times \Omega) = \left\{\varphi : [0,T] \times \Omega \to \mathbb{R}, \varphi(\cdot) \text{ est } \mathcal{B}([0,T]) \otimes \mathcal{F}_T \text{ mesurable et } \mathbb{E}\int_0^T |\varphi(t)|^2 dt < \infty\right\}$.
- $\mathbb{L}^2_{(\mathcal{F}_t)_t}([0,T]) = \left\{X(\cdot) \in \mathbb{L}^2_{\mathcal{F}_T}([0,T] \times \Omega), X(\cdot) \text{ est } (\mathcal{F}_t)_t\text{-adaptée}\right\}$.
- $\mathbb{L}^2\left([0,T], \mathbb{L}^2_{(\mathcal{F}_t)_t}([0,T])\right) = \left\{Y : [0,T]^2 \times \Omega \to \mathbb{R}^m, Y(t,\cdot) \text{ est } (\mathcal{F}_t)_t\text{-adaptée, p.s } t \in [0,T] :\right.$

$$\left.\mathbb{E}\int_0^T \int_0^T |Y(t,s)|^2 dsdt < \infty\right\}.$$

Pour T un réel positive fixé et $\forall s, t \in [0,T]$ on note :

$$\Delta = \Delta([0,T]) = \{(s,t) \in [0,T] : 0 \leq s \leq t \leq T\},$$

et

$$\Delta^c = \Delta^c([0,T]) = \{(s,t) \in [0,T] : 0 \leq t \leq s \leq T\}.$$

Définition 3.2.1 *: Une EDSRV est donnée sous la forme :*

$$X(t) = \varphi(t) + \int_t^T f(t,s,X(s),Y(t,s),Y(s,t))\,ds - \int_t^T Y(t,s)\,dB_s; \forall t \in [0,T] \quad (3.11)$$

où :

1. $f \; : \Delta^c \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m \times \Omega \to \mathbb{R};$ *et* $\varphi : [0,T] \times \Omega \to \mathbb{R}$
   sont deux fonctions données et f est appellé le générateur,
2. $(X(\cdot), Y(\cdot,\cdot))$ *est le processus inconnu.*

Définition 3.2.2 *: Le couple* $(X(\cdot), Y(\cdot,\cdot)) \in \mathbb{L}^2_{\mathcal{F}_T}([0,T], \mathbb{R}) \times \mathbb{L}^2\left([0,T], \mathbb{L}^2_{\mathcal{F}_T}([0,T], \mathbb{R}^m)\right)$

est appellé une solution adaptée de (3.11) *si l'équation* (3.11) *est satisfaite au sens d'Itô pour la mesure de Lebesgue, pour presque tout* $t \in [0,T]$.

Définition 3.2.3 *: Le couple* $(X(\cdot), Y(\cdot,\cdot)) \in \mathbb{L}^2_{\mathcal{F}_T}([0,T],\mathbb{R}) \times \mathbb{L}^2\left([0,T], \mathbb{L}^2_{\mathcal{F}_T}([0,T],\mathbb{R}^m)\right)$ *est appellé M-solution adapté de l'EISRV* (3.11) *si* (3.11) *est satisfaite au sens d'Itô pour la mesure de Lebesgue, et pour presque tout* $t \in [0,T]$:

$$X(t) = \mathbb{E}(X(t)) + \int_0^T Y(t,s)\, dB_s. \tag{3.12}$$

3.2.2 Existence et unicité de la solution d'EISRV

Hypothèses :

i) Soit f un $\mathcal{B}(\Delta^c \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m) \otimes \mathcal{F}_T$-mesurable tel que $s \longmapsto f(t,s,x,y,z)$ est adapté par rapport à la filtration $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$,

$$\mathbb{E}\int_0^T \left(\int_t^T |f(t,s,0,0,0)|\, ds\right)^2 dt < \infty;$$

ii) $\forall (x_1,y_1,z_1), (x_2,y_2,z_2) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m$, il existent $h_x(t,s), h_y(t,s)$ et $h_z(t,s)$ des fonctions déterministes définies sur Δ^c à valeurs dans $\mathbb{R}$, tel que :

$$\sup_{t \in [0,T]} \int_t^T \left(h_x^2(t,s) + h_z^2(t,s)\right) ds < \infty, \tag{3.13}$$

on a :

$$|f(t,s,x_1,y_1,z_1) - f(t,s,x_2,y_2,z_2)| \leq h_x(t,s)|x_1 - x_2| + h_y(t,s)|y_1 - y_2| + h_z(t,s)|z_1 - z_2|.$$

Théorème 3.2.1 *: Sous les hypothèses précédentes alors pour tout* $\varphi(\cdot) \in \mathbb{L}^2_{\mathcal{F}_T}([0,T] \times \Omega)$, *l'équation* (3.11) *admet une unique M-solution :*

$$(X(\cdot), Y(\cdot,\cdot)) \in \mathbb{L}^2_{\mathcal{F}_T}([0,T],\mathbb{R}) \times \mathbb{L}^2\left([0,T], \mathbb{L}^2_{\mathcal{F}_T}([0,T],\mathbb{R}^m)\right).$$

Preuve. De (3.13), on sait qu'il existe une partition $0 = T_0 < T_1 < \cdots < T_{n-1} < T_n = T$ et $\varepsilon \in [0, 1]$, tel que :

$$\begin{aligned}
&\sup_{t\in[T_{i-1},T_i]}\int_t^T \left[h_y^2(t,s) + h_z^2(t,s)\right] ds < 1-\varepsilon, \quad 1 \leq i \leq n. \\
&\sup_{t\in[0,T]}\int_t^T h_x^2(t,s)\, ds < 1.
\end{aligned} \tag{3.14}$$

La preuve est divisée en trois étapes.

- **Etape 1.** L'existence et l'unicité de M-solution pour l'EISRV (3.11) sur $[T_{n-1}, T]$.

Soit $\mathcal{M}^2([T_{n-1}, T])$ le sous-espace de $(x(\cdot), y(\cdot,\cdot)) \in \mathbb{L}^2_{\mathcal{F}_T}([T_{n-1}, T]; \mathbb{R}) \times \mathbb{L}^2\left([T_{n-1}, T]; \mathbb{L}^2_{\mathcal{F}_T}([T_{n-1}, T]; \mathbb{R}^m)\right.$ tel que :

$$x(t) = \mathbb{E}[x(t)] + \int_0^t y(t,s)\, dB_s, \quad t \in [T_{n-1}, T].$$

De plus, pour tout $(x(\cdot), y(\cdot,\cdot)) \in \mathcal{M}^2[T_{k-1}, T]$, $(t, r) \in \Delta$ et $t \in [T_{n-1}, T]$, on a :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\int_r^t |y(t,s)|^2 ds &\leq \mathbb{E}\int_0^t |y(t,s)|^2 ds \\
&\leq \mathbb{E}|x(t) - \mathbb{E}x(t)|^2 \\
&= \mathbb{E}|x(t)|^2 - (\mathbb{E}x(t))^2 \\
&\leq \mathbb{E}|x(t)|^2.
\end{aligned} \tag{3.15}$$

Pour chaque $(x(\cdot), y(\cdot,\cdot)) \in \mathcal{M}^2[T_{n-1}, T]$ et $t \in [T_{n-1}, T]$, on note :

$$\overline{\varphi}(t) = \varphi(t) + \int_t^T f(t, s, x(s), y(t,s), y(s,t))\, ds.$$

Et par suite, comme $(a+b)^2 \leq 2a^2+2b^2$ et pour tout $t \in [T_{n-1}, T]$, on trouve :

$$\begin{aligned}
|\overline{\varphi}(t)|^2 &\leq 2\left[|\varphi(t)|^2 + \left|\int_t^T f(t,s,x(s),y(t,s),y(s,t))\,ds\right|^2\right] \\
&\leq 2[|\varphi(t)|^2 + 2\left|\int_t^T (f(t,s,x(s),y(t,s),y(s,t)) - f(t,s,0,0,0))\,ds\right|^2 \\
&+2\left(\int_t^T f(t,s,0,0,0)\,ds\right)^2].
\end{aligned}$$

Comme $(a+b+c)^2 \leq 3(a^2+b^2+c^2)$ et f est Lipschitzienne, on a :

$$\begin{aligned}
|\overline{\varphi}(t)|^2 &\leq 2|\varphi(t)|^2 + 2\left(\int_t^T f(t,s,0,0,0)\,ds\right)^2 \\
&+2\left|\int_t^T [h_x(t,s)x(s) + h_y(t,s)y(t,s) + h_y(t,s)y(s,t)]\,ds\right|^2 \\
&\leq 2[\,|\varphi(t)|^2 + 2\left(\int_t^T f(t,s,0,0,0)\,ds\right)^2 + 6(\left|\int_t^T h_x(t,s)x(s)\,ds\right|^2 + \left|\int_t^T h_y(t,s)y(t,s)\,ds\right|^2 \\
&+\left|\int_t^T h_y(t,s)y(s,t)\,ds\right|^2)].
\end{aligned}$$

D'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on a donc :

$$\begin{aligned}
|\overline{\varphi}(t)|^2 &\leq 2\left[|\varphi(t)|^2 + 2\left(\int_t^T f(t,s,0,0,0)\,ds\right)^2 + 6(\int_t^T |h_x(t,s)|^2\,ds \int_t^T |x(s)|^2\,ds\right. \\
&\left.+\int_t^T |h_y(t,s)|^2\,ds \int_t^T |y(t,s)|^2\,ds + \int_t^T |h_y(t,s)|^2\,ds \int_t^T |y(s,t)|^2\,ds)\right],
\end{aligned}$$

d'après (3.14), on obtient :

$$\begin{aligned}
|\overline{\varphi}(t)|^2 &\leq C\left[|\varphi(t)|^2 + \left(\int_t^T f(t,s,0,0,0)\,ds\right)^2 + (\int_t^T |x(s)|^2\,ds\right] \\
&+(1-\varepsilon)\left(\int_t^T |y(t,s)|^2\,ds + \int_t^T |y(s,t)|^2\,ds\right).
\end{aligned}$$

Prenant l'espérance, on utilise la condition (3.15) et pour tout $r \in [T_{n-1}, T]$, on a :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\int_r^T |\overline{\varphi}(t)|^2 dt \; &\leq C\mathbb{E}\left[\int_r^T |\varphi(t)|^2 dt + \int_r^T \left(\int_t^T f(t,s,0,0,0)\, ds\right)^2 dt\right] \\
&+C\mathbb{E}\left[\int_r^T \left(\int_t^T |x(s)|^2 ds\right) dt\right] + (1-\varepsilon)\,\mathbb{E}\left[\int_r^T |x(t)|^2 dt + \int_r^T \int_t^T |y(t,s)|^2 dsdt\right],
\end{aligned}$$

ce qui implique que $\overline{\varphi}(\cdot) \in \mathbb{L}^2_{\mathcal{F}_T}([T_{n-1}, T];\mathbb{R})$. Alors, pour tout $t \in [T_{n-1}, T]$, par le théorème de représentation des martingales, il existe un unique processus $Y(\cdot,\cdot) \in \mathbb{L}^2\left([0,T];\mathbb{L}^2_{\mathcal{F}_T}([0,T];\mathbb{R}^m)\right)$ tels que :

$$\overline{\varphi}(t) = \mathbb{E}[\overline{\varphi}(t)] + \int_0^T Y(t,s)\, dB_s.$$

Et soit :

$$X(t) = \mathbb{E}[\overline{\varphi}(t)] + \int_0^t Y(t,s)\, dB_s,$$

on obtient, alors :

$$\begin{aligned}
X(t) \; &= \overline{\varphi}(t) - \int_0^T Y(t,s)\, dB_s + \int_0^t Y(t,s)\, dB_s \\
&= \overline{\varphi}(t) - \int_t^T Y(t,s)\, dB_s \\
&= \varphi(t) + \int_t^T f(t,s,x(s),y(t,s),y(s,t))\, ds - \int_t^T Y(t,s)\, dB_s.
\end{aligned}$$

Afin d'établir l'existence et l'unicité de la solution de (3.11), on étudie d'abord l'unicité.

Unicité. Soit $(X(\cdot), Y(\cdot,\cdot))$ et $(\overline{X}(\cdot), \overline{Y}(\cdot,\cdot))$ deux M-solutions adaptées à l'EISRV (3.11) sur $[T_{n-1}, T]$:

$$X(t) \; = \varphi(t) + \int_t^T f(t,s,x(s),y(t,s),y(s,t))\, ds - \int_t^T Y(t,s)\, dB_s,$$

et

$$\overline{X}(t) \; = \varphi(t) + \int_t^T f(t,s,\bar{x}(s),\bar{y}(t,s),\bar{y}(s,t))\, ds - \int_t^T \overline{Y}(t,s)\, dB_s.$$

Pour tout $t \in [T_{n-1}, T]$, on a :

$$\mathbb{E}\left|X(t)-\overline{X}(t)\right|^2+\mathbb{E}\int_t^T\left|Y(t,s)-\overline{Y}(t,s)\right|^2 ds$$

$$=\mathbb{E}\left[\int_t^T\left(f\left(t,s,x\left(s\right),y\left(t,s\right),y\left(s,t\right)\right)-f\left(t,s,\bar{x}\left(s\right),\bar{y}\left(t,s\right),\bar{y}\left(s,t\right)\right)\right)ds\right]^2$$

car :

$$\mathbb{E}\left[\left(X(t)-\overline{X}(t)\right)\int_t^T\left(Y(t,s)-\overline{Y}(t,s)\right)dB_s\right]=0$$

et

$$\mathbb{E}\left|\int_t^T\left(Y(t,s)-\overline{Y}(t,s)\right)dB_s\right|^2=\mathbb{E}\int_t^T\left|Y(t,s)-\overline{Y}(t,s)\right|^2 ds.$$

D'après la propriété (3.14) et l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on a alors :

$$\mathbb{E}\left|X(t)-\overline{X}(t)\right|^2+\mathbb{E}\int_t^T\left|Y(t,s)-\overline{Y}(t,s)\right|^2 ds$$

$$\leq C\mathbb{E}\int_t^T\left|X(s)-\overline{X}(s)\right|^2 ds+(1-\varepsilon)\,\mathbb{E}\left[\int_t^T\left|Y(t,s)-\overline{Y}(t,s)\right|^2 ds+\int_t^T\left|Y(s,t)-\overline{Y}(s,t)\right|^2 ds\right].$$

D'après (3.15), on en déduit que :

$$\mathbb{E}\int_r^t\left|Y(t,s)-\overline{Y}(t,s)\right|^2 ds\leq\mathbb{E}\left|X(t)-\overline{X}(t)\right|^2,\ \ (t,r)\in\Delta.$$

Ainsi, pour $r \in [T_{n-1}, T]$, on a :

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}\int_r^T\left|X(t)-\overline{X}(t)\right|^2 dt+\mathbb{E}\int_r^T\int_t^T\left|Y(t,s)-\overline{Y}(t,s)\right|^2 dsdt\\
&\leq C\mathbb{E}\int_r^T\int_t^T\left|X(s)-\overline{X}(s)\right|^2 dsdt\\
&+(1-\varepsilon)\left[\mathbb{E}\int_r^T\left|X(t)-\overline{X}(t)\right|^2 dt+\mathbb{E}\int_r^T\int_t^T\left|Y(t,s)-\overline{Y}(t,s)\right|^2 dsdt\right].
\end{aligned}$$

Alors :

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}\int_r^T \left|X(t)-\overline{X}(t)\right|^2 dt+\mathbb{E}\int_r^T\int_t^T \left|Y(t,s)-\overline{Y}(t,s)\right|^2 dsdt \\
&\leq \frac{C}{\varepsilon}\mathbb{E}\int_r^T\int_t^T \left|X(s)-\overline{X}(s)\right|^2 dsdt.
\end{aligned}$$

On utilise l'inégalité de Gronwall, on obtient :

$$\mathbb{E}\int_r^T \left|X(t)-\overline{X}(t)\right|^2 dt+\mathbb{E}\int_r^T\int_t^T \left|Y(t,s)-\overline{Y}(t,s)\right|^2 dsdt=0,\ \ t\in\left[T_{n-1},T\right],$$

ce qui donne l'unicité de la solution.

Existence. Pour obtenir l'existence, on utilise la méthode des itérations de Picard comme suit : Soit

$$\left(X_0\left(\cdot\right),Y_0\left(\cdot,\cdot\right)\right)=(0,0)\in\mathcal{M}^2\left[T_{n-1},T\right],$$

et soit $\left(X_{n+1}\left(\cdot\right),Y_{n+1}\left(\cdot,\cdot\right)\right)$ est une suite dans $\mathcal{M}^2\left[T_{n-1},T\right]$ définie récursivement par :

$$\begin{aligned}
X_{n+1}\left(t\right) &= \varphi\left(t\right)+\int_t^T f\left(t,s,X_n\left(s\right),Y_n\left(t,s\right),Y_n\left(s,t\right)\right)ds \\
&\quad -\int_t^T Y_{n+1}\left(t,s\right)dB_s.
\end{aligned}$$

Puis, avec quelques calculs et estimations, on obtient :

$$\lim_{n\longrightarrow\infty}\left[\int_r^T \mathbb{E}\left|X_n\left(s\right)-X\left(s\right)\right|^2 ds+\int_r^T\int_t^T \mathbb{E}\left|Y_n\left(t,s\right)-Y\left(t,s\right)\right|^2 dsdt\right]=0,$$

pour certains $\left(X\left(\cdot\right),Y\left(\cdot,\cdot\right)\right)$. De plus, puisque on a :

$$X_n\left(t\right)=\mathbb{E}\left[X_n\left(t\right)\right]+\int_0^t Y_n\left(t,s\right)dB_s,\quad t\in\left[T_{n-1},T\right],\ p.s,$$

alors :

$$\int_{T_{n-1}}^{T}\int_{0}^{t}\mathbb{E}\left|Y_n\left(t,s\right)-Y\left(t,s\right)\right|^2 dsdt\leq\int_{T_{n-1}}^{T}\mathbb{E}\left|X_n\left(t\right)-X\left(t\right)\right|^2 dt\longrightarrow 0,\quad n\longrightarrow\infty.$$

Par conséquent, on obtient M-solution $(X(\cdot),Y(\cdot,\cdot))$ de l'EISRV (3.11) sur $[T_{n-1},T]$.

- **Etape 2**. Solvabilité d'une équation intégrale stochastique sur $[T_{n-1},T]$.

Pour $(t,s)\in[T_{n-2},T_{n-1}]\times[T_{n-1},T]$, par l'étape **1**, on sait que les valeurs $X(s)$ et $Y(s,t)$ sont déjà déterminées. Par conséquent, pour $(t,s,y)\in[T_{n-2},T_{n-1}]\times[T_{n-1},T]\times\mathbb{R}^m$, on peut définir :

$$f^{n-1}\left(t,s,y\right)=f(t,s,X\left(s\right),y,Y\left(s,t\right)).$$

On considère maintenant l'équation intégrale stochastique de Volterra suivante :

$$\varphi^{n-1}\left(t\right)=\varphi\left(t\right)+\int_{T_{n-1}}^{T}f^{n-1}\left(t,s,Y\left(t,s\right)\right)ds-\int_{T_{n-1}}^{T}Y\left(t,s\right)dB_s,\quad t\in\left[T_{n-2},T_{n-1}\right].$$

Par les hypothèses précédentes, l'équation ci-dessus admet une solution unique $(\varphi^{n-1}(\cdot),Y(\cdot,\cdot))$ tel que $\varphi^{n-1}(t)$ étant $\mathcal{F}_{T_{n-1}}$-adaptée. Ceci détermine uniquement les valeurs $Y(t,s)$ pour $(t,s)\in[T_{n-2},T_{n-1}]\times[T_{n-1},T]$.

- **Etape 3.** Complète la preuve par induction. Par les deux étapes précédentes, on a déterminé les valeurs $X(t)$ pour $t\in[T_{n-1},T]$, et les valeurs $Y(t,s)$ pour $(t,s)\in([T_{n-1},T]\times[0,T])\cup([T_{n-2},T_{n-1}]\times[T_{n-1},T])$. De la définition de $f^{n-1}(t,s,y)$, on peut voir que $(\varphi^{n-1}(\cdot),Y(\cdot,\cdot))$ satisfait, pour tout $t\in[T_{n-2},T_{n-1}]$, on a :

$$\varphi^{n-1}\left(t\right)=\varphi\left(t\right)+\int_{T_{n-1}}^{T}f(t,s,X\left(s\right),Y\left(t,s\right),Y\left(s,t\right))ds-\int_{T_{n-1}}^{T}Y\left(t,s\right)dB_s.$$

Pour $t\in[0,T_{n-1}]$, on considére l'équation suivante :

$$X(t)=\varphi^{n-1}\left(t\right)+\int_{t}^{T_{n-1}}f(t,s,X\left(s\right),Y\left(t,s\right),Y\left(s,t\right))ds-\int_{t}^{T_{n-1}}Y\left(t,s\right)dB_s.\qquad(3.16)$$

Noter que $\varphi^{n-1}(t)$ est $\mathcal{F}_{T_{n-1}}$-adapté. De l'étape **1**, nous sommes en mesure de prouver que (3.16) est résoluble sur $[T_{n-2}, T_{n-1}]$, puis les valeurs $X(t)$ pour $t \in [T_{n-2}, T_{n-1}]$ et les valeurs $Y(t,s)$ pour $(t,s) \in [T_{n-2}, T_{n-1}] \times [0, T_{n-1}]$ sont déterminées. Par conséquent, on obtient les valeurs $X(t)$ pour $t \in [T_{n-2}, T]$, et les valeurs $Y(t,s)$ pour $(t,s) \in [T_{n-2}, T] \times [0,T]$, d'ailleurs, pour $t \in [T_{n-2}, T_{n-1}]$, nous avons :

$$
\begin{aligned}
X(t) &= \varphi^{n-1}(t) + \int_t^{T_{n-1}} f(t,s,X(s),Y(t,s),Y(s,t))ds - \int_t^{T_{n-1}} Y(t,s)\,dB_s \\
&= \varphi(t) + \int_t^{T} f(t,s,X(s),Y(t,s),Y(s,t))ds - \int_t^{T} Y(t,s)\,dB_s.
\end{aligned}
$$

Ainsi, l'équation est résoluble sur $[T_{n-2}, T]$. On complète alors la preuve par induction.

■

Bibliographie

[1] Aigo, M. (2013). On The Numerical Approximation of Volterra Integral Equations of Second Kind Using Quandrature Rules (vol 1). International Journal of Advanced Scientific and Technical Research.

[2] Anh, V., & Yong, J. (2006). Backward stochastic Volterra integral equations in Hilbert spaces.

[3] Breton, J. C. (Septembre-Décembre 2014). Calcul stochastique. Université de Rennes 1.

[4] Briand, P. (2001). Équations différentièlles stochastiques rétrogrades.

[5] El Karaoui, N., Peng, S., & Quenez, M. C. Backward stochastic differential equations in finance.

[6] Ito, I. On the existence and uniqueness of solutions of stochastic integral equations of the Volterra type. Kodai Math. J. 2 (1979), no. 2.

[7] Jerri, A. J. Introduction to Integral Equations with Applications. Wiley-Interscience.

[8] Pardoux, E., & Peng, S. G. Adapted solution of a backward stochastic differential equation.

[9] Richou, Adrien. (2010). Étude théorique et numérique des équations différentielles stochastiques rétrogrades. Université Rennes 1.

[10] WazWaz, A. M. (2015). A First Course in Integral Equations (Vol. 2). World Scientific Publishing.Co.Pte.Ltd.

[11] WazWaz, A. M. (2011). Lineaire and Non Lineaire Integral Equations : Methods and Applications. Higher Education Press, Beijing and Springer-Verlag Berlin Heidelberg.

Annexe : Rappel

▷ **Filtration :** est une famille croissante de sous tribus de $\mathcal{F}$, c'est-à-dire $\mathcal{F}_t \subset \mathcal{F}_s$ pour tout $t \leq s$.

▷ **Mouvement Brownien : :** Un mouvement Brownien standard $(B_t)_{t\geq 0}$ par rapport à la filtration $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ est un processus stochastique indéxées par le temps à trajetoires continues et vérifiée :

- $B_0 = 0$, $\mathbb{P}$-p.s B_t est $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$-adapté à trajectoire continue,
- Les accroissement de mouvement Brownien sont indépendants de $\mathcal{F}_s$ i.e : $\forall 0 \leq s \leq t$, $B_t - B_s$ sont indépendants de $\mathcal{F}_s$,
- $\forall 0 \leq s \leq t$, $B_t - B_s$ est de distribution normale centrée de variance $t - s$.

▷ **processus adapté :** Un processus stochastique $(X_t)_{t\geq 0}$ est dit adapté ar rapport à une filtration $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ si X_t est $\mathcal{F}_t$-mesurable pour tout t.

▷ **processus progressivement mesurable :** On dit qu'un processus $(X_t)_{t\geq 0}$ est progressivement mesurable si $\forall t \geq 0$ l'application

$$\begin{cases} X : ([0,t] \times \Omega, \mathcal{B}([0,t]) \otimes \mathcal{F}_t) \to (E, \xi) \\ \hfill (\omega, s) \to X_s(\omega) \end{cases}.$$

est $(\xi, \mathcal{B}([0,t]) \otimes \mathcal{F})$-mesurable.

▷ **Inégalité de Cauchy-Shwartz :** Soient $f \in L^2(E)$ et $g \in L^2(E)$ alors $fg \in L^1(E)$ et

$$\int |fg| d\mu \leq ||f||_2 ||g||_2.$$

▷ **Inégalité de Burkholder-Davis-Gundy :** Pour tout $p \geq 0$, il existe des constantes c_p et C_p telle que pour toutes martingale locale M continue issue de 0 on a :

$$c_p \mathbb{E}\left[\langle M, M\rangle_\infty^{p/2}\right] \leq \mathbb{E}\left[(M_\infty^*)^p\right] \leq C_p \mathbb{E}\left[\langle M, M\rangle_\infty^{p/2}\right]$$

où $M_t^* = \sup_{0 \leq s \leq t} |M_s|$.

▷ **Lemme de Gronwall :** Soient f et g $[a, b] \longmapsto \mathbb{R}_+$ deux fonctions continues vérifiant :

$$\exists c \geq 0 : \forall x \in [a, b] \quad f(x) \leq c + \int_a^x f(t)\, g(t)\, dt.$$

Alors,

$$\forall x \in [a, b], \qquad f(x) \leq c \exp\left(\int_a^x g(t)\, dt\right).$$

▷ **Théorème de Borel-Cantelli :** Soit $(A_n)_{n \geq 0}$ une suite d'évènements aléatoires, on définit :

$$\limsup_n A_n = \bigcap_p \bigcup_{n \geq p} A_n,$$

- si la série $\sum_n \mathbb{P}(A_n) < \infty$, alors $\mathbb{P}\left(\limsup_n (A_n)\right) = 0$,
- si de plus la suite $(A_n)_n$ est indépendante, alors

$$\sum_n \mathbb{P}(A_n) = \infty \Longrightarrow \mathbb{P}\left(\limsup_n (A_n)\right) = 1.$$

▷ **Inégalité de Chebychev :** Soit Y une variable aléatoire positive définit sur un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, alors pour tout $a > 0$: $\mathbb{P}(Y \geq a) \leq \dfrac{\mathbb{E}(Y)}{a}$.

▷ **Inégalité de Doob :** Soit $(M_n)_{n \geq 0}$ une martingale (ou sous-martingale positive), $\forall p, q > 1$ tel que $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$, alors :

$$\left\| \sup_{n \leq N} |M_n| \right\|_p \leq q. \sup_{n \leq N} \|M_n\|_p.$$

▷ **Lemme de Fatou :** Soit f_n une suite positive, alors :

$$\int_X \lim_{n\to\infty} \inf f_n d\mu \leq \lim_{n\to\infty} \inf \int_X f_n d\mu.$$

Les différentes abréviations et notations utilisées tout au long de ce mémoire sont expliquées ci-dessous :

$\mathbb{R}^n$	:	L'espace réel euclidien de dimension n.
$\mathbb{E}[X]$	:	Espérance mathématique du variable aléatoire X.
$\mathbb{E}[X \mid \mathcal{F}_t]$	:	Espérance conditionnelle de variable aléatoire X par rapport à $\mathcal{F}_t$.
$\mathbb{P}-p.s$	:	Presque sûrement pour la mesure de probabilité $\mathbb{P}$.
ED	:	Equation différentielle.
EDS	:	Equation différentielle stochastique.
EDSR	:	Equation différentielle stochastique rétrograde.
EIV	:	Equation intégrale de Volterra.
EISV	:	Equation intégrale stochastique de Volterra. :
EISRV	:	Equation intégrale stochastique rétrograde de Volterra.