République Algérienne Démocratique et Populaire

Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

UNIVERSITÉ MOHAMED KHIDER, BISKRA

FACULTÉ des SCIENCES EXACTES et des SCIENCES de la NATURE et de la VIE

DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES

Mémoire présenté en vue de l'obtention du Diplôme **:**

MASTER en Mathématiques

Option : Probabilité

Par

KHAOULA GUENIFI

Titre :

Évaluation et couverture des options Européennes par le calcul stochastique

Membres du Comité d'Examen :

Dr.	**LABED SALOUA**	UMKB	Président
Pr.	**KHELFALLAH NABIL**	UMKB	Encadreur
Dr.	**BENABBA FADHILA**	UMKB	Examinateur

Juin 2019

Dédicace

Je dédie cet humble travail à ma famille tout particulièrement mes parents qui m'ont accordé la liberté d'action et la patience nécessaires pour réaliser ce travail, à mes sœurs et frères

pour leurs encouragements.

À tous mes amis.

Et mes collègues de la promotion 2019.

REMERCIEMENTS

Je tiens premièrement à remercier Allah tout-puissant qui nous donnait la force et la volonté pour pouvoir

finir ce mémoire de master. Je tiens à remercier mes parents car mon éducation est le fruit de leurs ardents efforts.

Nous tenons à remercier vivement notre encadreur **Pr : KHALFELLAH Nabil** qui m'a encadré dans ce mémoire de master et m'a initié aux techniques du calcul stochastique appliqué aux modèles financiers et pour la confiance qu'il nous accordées, ses encouragements, et ses précieux conseils.

Mes remerciements vont également aux membres du jury qui ont bien voulu expertiser ce modeste travail.

Enfin, je remercie, sans toutefois oublier tous mes amis et mes familles pour tous leurs encouragements.

Table des matières

Introduction

De ce travail, nous expliquons comment le calcul stochastique intervient dans le marché financier en temps continus.

L'objectif essentiel est l'évaluation d'une option Européenne dans le cadre du modèle de Black-Merton-Scholes. BLACk FISHER (1938), SCHOLES MYRON (1941) et un peu plus tard METRON ROBERT(1944) ont réussi à élaborer un modèle considéré comme le plus important progrès dans l'évaluation du marché boursier. Pour élaborer leur modèle, ils ont mis quelques hypothèses telles que :

- Le prix de l'actif sous-jacent S_t suit un Mouvement Brownien géométrique avec une volatilité σ constante et une dérive μ constante ;
- Absence d'opportunité d'arbitrage ;
- Le temps est une fonction continue ;
- Le taux d'intérêt sans risque est connu à l'avance et constant ;
- Tous les sous-jacents sont parfaitement divisibles et ne sont soumis à aucun coût de transaction.

Dans ce mémoire, on introduit le modèle de Black-Merton-Scholes, ainsi que toutes les notion mathématiques et stochastiques nécessaires pour l'évaluation des options Européennes.

Le modèle de Black-Merton-Scholes est un modèle mathématique du marché pour une action dans lequel le prix de l'action est un processus stochastique en temps continus.

On partage ce mémoire en trois chapitres :

Le premier est un chapitre introdictif. Dans lequel nous rappelons quelques notions de calcul stochastique comme espérances conditionnelles et leurs propriétés ainsi que les mouvement Browniens, martingales, calcul d'Itô, équation différentielle stochastique (EDS) et équation aux dérivées partielles (EDP).

Dans le deuxième chapitre qu'on l'appelle Terminologie financier, nous présentons quelques notions de mathématique financier comme les actifs, les options, les portefeuille, les arbitrage etc...

Le troixième chapitre : a consacré à l'évaluation et la couverture d'une option Européenne. Dans ce chapitre, on donne une brève description du modèle de Black-Merton-Scholes, en expliquant la formule d'évaluation et de couverture des options Européennes.

Chapitre 1

Rappel de calculs stochastiques

Le but de ce chapitre est rappeler quelques outils de calcul stochastique. Dans la suite $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espace de probabilité et $\mathbb{F} = (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ est une filtration sur cet espace.

1.1 Processus et Martingale

1.1.1 Processus

Définition 1.1.1 ***(Processus stochastique) :*** *On appelle processus stochastique en temps continu une famille $(X_t)_{t\geq 0}$ de variables aléatoires indexées par le temps t ; définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. Un processus $X_t(\omega)$ dépend de deux paramètres $t \geq 0$ et $\omega \in \Omega$.*

- Pour $t \in T$ fixé, l'application $\omega \in \Omega \mapsto X_t(\omega)$ est une variable aléatoire sur l'espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$.
- Pour $\omega \in \Omega$ fixé, l'application $t \in T \mapsto X_t(\omega)$ est une fonction à valeurs réelles, appelée trajectoire du processus, noté $X_t(\omega)$ ou $X(t, \omega)$.

Définition 1.1.2 ***(Filtration) :*** *Une filtration $\mathbb{F} = (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ sur $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ est une famille croissante de sous-tribus de $\mathcal{F}$: $\mathcal{F}_s \subset \mathcal{F}_t \subset \mathcal{F}$ pour tous $0 \leq s \leq t$.*

Soit $(X_t)_{t\geq 0}$ un processus stochastique, sa filtration naturelle $\left(\mathcal{F}_t^X\right)_{t\geq 0}$ est la filtration définie par $\mathcal{F}_t^X = \sigma\left\{X_s,\ s \leq t\right\}$.

C'est la plus petite filtration qui rende le processus X adapté.

Définition 1.1.3 ***(Processus adapté) :*** *Soit $(X_t)_{t\geq 0}$ un processus stochastique, on dit que $(X_t)_{t\geq 0}$ est adapté à la filtration $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ si pour tout $0 \leq s \leq t$, X_t est $\mathcal{F}_t$-mesurable.*

1.1.2 Martingale

Définition 1.1.4 *: Soit $(X_t)_{t\geq 0}$ est une martingale en temps continu par rapport à une Filtration $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ si elle vérifie les conditions suivantes :*

1. *pour tout $t \geq 0$; X_t est intégrable (c'est à dire : $\mathbb{E}\left(|X_t|\right) < \infty$),*
2. *pour tout $t \geq 0$; X_t est $\mathcal{F}_t$-mesurable (ou $(X_t)_{t\geq 0}$ est $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$-adapté),*
3. *pour tout $t \geq s \geq 0$; $\mathbb{E}\left[X_t \mid \mathcal{F}_s\right] = X_s$.*

Définition 1.1.5 *On définit de manière similaire sur-martingale si* ***(3)*** *est remplacé par :*

$$\mathbb{E}\left[X_t \mid \mathcal{F}_s\right] \leq X_s.$$

Et sous-martingale si ***(3)*** *est remplacé par :*

$$\mathbb{E}\left[X_t \mid \mathcal{F}_s\right] \geq X_s.$$

1.2 Espérence conditionnelle

Définition 1.2.1 *: Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espace de probabilité, soit X une variable aléatoire définie sur $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ et G une sous tribu de $\mathcal{F}$. Alors, l'espérence conditionnelle de X par rapport à G noté par $\mathbb{E}\left[X \mid G\right]$ est l'unique variable aléatoire vérifiant :*

1. *G-mesurable.*

2. $\int_A \mathbb{E}[X \mid G]\, d\mathbb{P} = \int_A X d\mathbb{P},\ A \in G.$

Propriété 1.2.1 *: $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espace de probabilité, G sous tribu de $\mathcal{F}$ et X, Y deux variables aléatoires.*

- *Linéarité : $\forall a, b \in \mathbb{R}$,*

$$\mathbb{E}[aX + bY \mid G] = a\mathbb{E}[X \mid G] + b\mathbb{E}[Y \mid G].$$

- *Croissance : si $X \leq Y$; alors, $\mathbb{E}[X \mid G] \leq \mathbb{E}[Y \mid G]$.*
- *Positivité : Si $X > 0$; alors : $\mathbb{E}[X \mid G] > 0$.*
- *Si X est indépendente de G; alors : $\mathbb{E}[X \mid G] = \mathbb{E}[X]$.*
- *Si X est G-mesurable ; alors : $\mathbb{E}[X \mid G] = X$.*
- *Si Y est G-mesurable ; alors : $\mathbb{E}[XY \mid G] = Y\mathbb{E}[X \mid G]$.*
- *Soient G, H deux sous tribus de $\mathcal{F}$. Si $H \subset G$; alors :*

$$\mathbb{E}[\mathbb{E}[X \mid G] \mid H] = \mathbb{E}[\mathbb{E}[X \mid H] \mid G] = \mathbb{E}[X \mid H].$$

- *Inégalité de Jensen **:** Si $\varphi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction convexe et $X \in \mathbb{L}^2(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. Alors :*

$$\varphi(\mathbb{E}[X \mid G]) \leq \mathbb{E}[\varphi(X) \mid G],\ p.s.$$

1.3 Mouvement Brownien

Définition 1.3.1 *: Soit $B = \{B_t, t \geq 0\}$ un processus défini sur l'espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ muni de la filtration naturelle du processus B, tel que :*

1. *B est continu, c'est à dire $t \mapsto B_t(\omega)$ est continue pour tout ω.*
2. *B est à accroissements indépendants, c'est-à-dire que pour tout $0 \leq s \leq t$ $B_t - B_s$ est indépendant de $\sigma\{B_s,\ s \leq t\}$.*

3. Les accroissements sont stationnaires, et tels que si $s \leq t$, on a $B_t - B_s \backsim \mathcal{N}(0, t-s)$.

Remarque 1.3.1 *: Si de plus $B_0 = 0$, on dit que B est un mouvement Brownien standard.*

Mouvement Brownien Géométrique

Définition 1.3.2 *: Soit B un mouvement Brownien, b et σ deux constante. Le processus*

$$X_t = X_0 \exp\left\{ \left(b - \frac{1}{2}\sigma^2 \right) t + \sigma B_t \right\}$$

est appellé mouvement Brownien géométrique.

Représentations des martingales Browniennes

Théorème 1.3.1 *: Soit $(M_t)_{t \geq 0}$ une martingale de carré intégrable, par rapport à $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$ la filtration naturelle de B_t, il existe un processus adapté $(H_t)_{t \geq 0}$ tel que : $\mathbb{E}\left(\int_0^T H_s^2 ds \right) < \infty$ et*

$$\forall t \in [0, T], \; M_t = M_0 + \int_0^t H_s dB_s, \; p.s.$$

Mouvement Brownien et martingales

Propriété 1.3.1 *: Si $(X_t)_{t \geq 0}$ est un mouvement Brownien standard alors :*

* $(X_t)_{t \geq 0}$ *est une $\mathbb{F}$-martingale.*

* $(X_t^2 - t)_{t \geq 0}$*est une $\mathbb{F}$-martingale.*

* $\left(\exp\left(\sigma X_t - \left(\frac{\sigma^2}{2} \right) t \right) \right)_{t \geq 0}$ *est une $\mathbb{F}$-martingale, $\sigma \in \mathbb{R}$.*

1.4 Probabilités équivalentes

Définition 1.4.1 *: Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espace de probabilité. Une probabilité $\mathbb{Q}$ sur $(\Omega, \mathcal{F})$ est dite absolument continue par rapport à $\mathbb{P}$ si :*

$$\forall A \in \mathcal{F},\ \mathbb{P}(A) = 0 \Longrightarrow \mathbb{Q}(A) = 0.$$

Théorème 1.4.1 *(**Théorème de Girsanov**) **:**Il existe une probabilité $\mathbb{Q}$ équivalente à la probabilité historique $\mathbb{P}$ définie sur $(\Omega, \mathcal{F})$ par :*

$$\frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}} \mid \mathcal{F}_t := Z_T := \exp\left\{-\lambda B_T - \frac{(\lambda)^2}{2} T\right\},$$

sous laquelle le processus B_t^* défini par $B_t^* := B_t + \lambda t$ est un mouvement Brownien sur $[0, T]$.

1.5 Intégration stochastique et calcul d'Itô

1.5.1 Processus d'Itô

Définition 1.5.1 *: On appelle processus d'Itô, un processus $(X_t)_{0 \leq t \leq T}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ tel que :*

$$\forall t \leq T,\ X_t = X_0 + \int_0^t K_s ds + \int_0^t H_s dB_s,\ \mathbb{P}\text{-}p.s$$

avec :

1. *X_0 est $\mathcal{F}_0$-mesurable.*

2. *$(K_t)_{0 \leq t \leq T}$ et $(H_t)_{0 \leq t \leq T}$ deux processus $\mathbb{F}$-adapté.*

3. *$\int_0^t |K_s|\, ds < \infty$, $\mathbb{P}$-p.s.*

4. *$\int_0^t |H_s|^2\, dB_s < \infty$, $\mathbb{P}$-p.s.*

Où le coefficient K s'appelle le drift ou la dérivée et H s'appelle le coefficient de diffusion.

On note de manière infinitésimale :

$$dX_t = K_t dt + H_t dB_t.$$

1.5.2 Formule d'Itô

Soit $(X_t)_{0\leq t\leq T}$ un processus d'Itô et f une fonction deux fois continûment différentiable, on a :

$$f(X_t) = f(X_0) + \int_0^t f_x(X_s)\, dX_s + \frac{1}{2}\int_0^t f_{xx}(X_s)\, d\langle X, X\rangle_s.$$

De même si $(t, x) \longmapsto f(t, x)$ est une fonction de classe $C^{1,2}$, on a :

$$f(t, X_t) = f(0, X_0) + \int_0^t f_t(s, X_s)\, ds + \int_0^t f_x(s, X_s)\, dX_s + \frac{1}{2}\int_0^t f_{xx}(s, X_s)\, d\langle X, X\rangle_s.$$

1.6 Equation Différentielle Stochastique et Equation aux Dérivées Partielles

1.6.1 Equation Différentielle Stochastique (EDS)

Une équation différentielle stochastique est une équation de la forme :

$$X_0 = x,\ dX_t = b(t, X_t)\, dt + \sigma(t, X_t)\, dB_t,$$

où l'inconnue est le processus X, les donnés sont le mouvement Brownien B d-dimenssionnel et les fonctions b et σ donnée par :

$$b : [0, T] \times \Omega \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n.$$

$$\sigma : [0, T] \times \Omega \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^{n*d}.$$

et $x \in \mathbb{R}^n$.

Définition 1.6.1 *: On appelle équation différentielle stochastique noté (EDS) de condition initiale x_0, de coefficient de diffusion σ et de coefficient de dérive b un processus X tel que pour tout $t \geq 0$*

$$X_t = x_0 + \int_0^t b\left(s, X_s\right) ds + \int_0^t \sigma\left(s, X_s\right) dB_s. \tag{1.1}$$

Définition 1.6.2 *: L'équation* (1.1)*sera aussi notée*

$$\begin{cases} dX_t & = b\left(t, X_t\right) dt + \sigma\left(t, X_t\right) dB_t, \\ X_0 & = x_0. \end{cases}$$

Théorème 1.6.1 ***(d'existence et d'unicité) :*** *Si b et σ sont des fonctions continues telles qu'il existe $K < \infty$, x, y dans $\mathbb{R}^n$:*

i) *Conditions de lipschitz :* $|b(t,x) - b(t,y)| + |\sigma(t,x) - \sigma(t,y)| \leq K\,|x-y|$.

ii) *Conditions de croissance linéaire :* $|b(t,x) - \sigma(t,x)| \leq K(1+|x|)$.

iii) $\mathbb{E}(x_0^2) < \infty$.

Alors, pour tout $t \geq 0$ l'équation (1.1) *admet une solution unique dans* $[0,T]$.

1.6.2 Equation aux Dérivées Partielles (EDP)

Une EDP est une équations dont l'inconnue est une fonction et fait intervenir les dérivées partielles de cette fonction. L'ordre de l'EDP est l'ordre maximal de dérivation de la fonction.

Définition 1.6.3 *: Une équation aux dérivées partielles (EDP), est une classe d'équations différentielles possédant au moins deux variables indépendantes, nous considérons, l'équa-*

tion du second ordre de deux variables indépendantes x et y, qui s'écrit sous la forme :

$$A(x,y)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + B(x,y)\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + C(x,y)\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = f(x,y,u,\frac{\partial u}{\partial x},\frac{\partial u}{\partial y}).$$

Ces équation EDP sont classées en trois groupes, elles s'obtiennent en appliquant les résultats de l'Algèbre concerant les formes quadratiques :

1. *EDP élliptique : si $B^2 - 4AC < 0$,*
2. *EDP parabolique : $B^2 - 4AC = 0$,*
3. *EDP hyperbolique : si $B^2 - 4AC > 0$.*

Chapitre 2

Terminologie financière

Le but de ce chapitre est énoncé quelque notion de mathématique financièr.

2.1 Actifs financiers

Définition 2.1.1 *: Un actif financier est un titre ou une action, généralement transmissible et négociable (par exemple sur un marché financier), qui est susceptible de produire à son détenteur des revenus ou un gain en capital.*

On considère, sur un horizon de temps $T > 0$, un marché financier dans lequel nous avons $d + 1$ actifs, un actif sans risque et d actifs risqués.

Définition 2.1.2 (Actif sans risque) *: Actif sans risque ou encoure actif non risque. Son prix, noté toujours $S^0 =: \{S_t^0, t \in T\}$ l'actifs S^0 est le cash. Il est considéré comme sans risque car son rendement dans un intervale de temps $[t, t + dt]$ est connu à la date t de l'opération.*

Définition 2.1.3 (Actif risqué) *: Son prix est un processus $S = \{S_t, t \in T\}$. Il est considéré comme risqué car son rendement dans un intervale de temps $[t, t + dt]$ est non connu à la date t de l'opération.*

2.2 Portefeuille auto-financés

Définition 2.2.1 (Portefeuille) *: On appellera portefeuille un ensemble de un ou plusieurs actifs financiers détenu par un agent. La composition de ce portefeuille est susceptible de varier en fonction du temps. La valeur des actifs financiers étant des fonction aléatoires du temps (processus stochastique), la valeur du portefeuille est elle même un processus stochastique.*

Définition 2.2.2 (Auto-financement) *: Cette notion caractérise le comportement d'un investisseur réorganisant son portefeuille entre les instant t et $t + dt$ et réaménagent ses actifs de manière à conserver la valeur du portefeuille.*

Définition 2.2.3 (Portefeuille auto-financés) *: On appelle portefeuille auto-financés un portefeuille dont la variation de valeur n'est due qu'un fluctuation des cours des actifs qu'il contient.*
En d'autre termes, il n'ya pas de flux externe (positif ou négatif) après la constitution du portefeuille.

2.3 Produits dérivés

Un produit dérivé est un contrat entre deux parties qui vont s'accorder sur le prix d'un actif. C'est donc un instrument financier d'un actif qui permet de fixer le prix de ce dernier pour une période donnée. La valeur d'un produit dérivé dépendra donc de la valeur de son actif sous-jacent au cours du temps.

Définition 2.3.1 *: Un dérivé est un contrat sur un (ou plusieurs) des actions d'un marché. Les exemples les plus simples de dérivés sont les option d'achat ou de vente.*

2.4 Options

Une option standard est une contrat donnant à son détenteur le droit, et non l'obligation, d'acheter ou de vendre une certaine quantité d'un actif à ou jusqu'à une date (échéance ou maturité) fixée et à prix convenu à l'avance.

2.4.1 Call et Put Européens

Call Européenne

Définition 2.4.1 *: On appelle option d'achat Européenne (call Européen), le contrat qui donne à son détenteur le droit (mais non l'obligation) d'achater une action (unité de l'actif) à la date $T > 0$ (maturité) au prix K (prix d'exercice ou strike) fixé à l'avance. Ce contrat a un prix ; il est échangé sur le marché.*

Remarque 2.4.1 *: A l'échéance T, deux cas se produisent pour l'acheteur du call :*

1) *A la date de maturité l'actif a un prix $S_T > K$ dans le marché. Dans ce cas le détenteur de l'option exercera son droit, c'est à dire achète une action au prix K et la vend immédiatement dans le marché ouvert au prix S_T, réalisant donc un bénéfice égale à la différence $S_T - K$.*

2) *A la date de maturité l'actif vaut* $S_T < K$ *dans le marché. Dans ce cas le détenteur de l'option n'a pas d'intérêt à exercer son droit et son profit est donc nul.*

On voit donc qu'une option Européenne d'achat permet de réaliser un bénéfice égale $(S_T - K)^+ = \max(S_T - K, 0)$. *On appelle* $(S_T - K)^+$ *le payoff de l'option.*

Exemple 2.4.1 *: Option de change sur un dollar dans* 6 *mois pour* K *euros. Si le dollar monte, on exerce l'optoin et on achète le dollar à* K *euros. Si le dollar baisse, on n'exerce pas l'option et on achète au prix du dollar.*

Put Européenne

Définition 2.4.2 *: On appelle option de vente Européenne (put Européen), le contrat qui donne à son détenteur le droit (mais non l'obligation) de vendre une action (unité de l'actif) à la date* $T > 0$ *(maturité) au prix* K *(prix d'exercice) fixé à l'avance. Ce contrat à un prix ; il est échangé sur le marché.*

Remarque 2.4.2 *: A l'échéance* T, *deux cas se produisent pour le vendeur du put :*

1) *A la date de maturité l'actif a un prix* $S_T < K$ *dans le marché. Dans ce cas le détenteur de l'option exercera son droit, vendra une action au prix* K *et peut acheter après dans le marché une action au prix* S_T, *réalisant ainsi un bénéfice égale à la différence* $K - S_T$.

2) *A la date de maturité l'actif vaut* $S_T > K$ *dans le marché. Dans ce cas le détenteur de l'option n'a pas d'intérêt à exercer son droit et son profit est donc nul i.e. (payoff) est* 0.

On voit donc qu'une option Européenne de vente permet de réaliser un bénéfice égale : $(K - S_T)^+ = \max(K - S_T, 0)$.

2.4.2 Call et Put Américaines

Call Américaine

Définition 2.4.3 *: On appelle option d'achat Américaine (call Américaine) le contrat qui donne le droit (mais non l'obligatoin) d'acheter à tout moment entre aujourd'hui $t = 0$ et l'échéance T une action à la date $T > 0$ au prix K (prix d'exercice ou strike) fixée à l'avance. Ce contrat a un prix ; il est échangé sur le marché.*

Put Américaine

Définition 2.4.4 *: On appelle option de vente Américaine (put Américaine) le contrat qui donne le droit (mais non l'obligatoin) de vendre à tout moment entre aujourd'hui $t = 0$ et l'échéance T une action à la date $T > 0$ au prix K (prix d'exercice ou strike) fixée à l'avance ce contrat a un prix ; il est échangé sur le marché.*

Remarque 2.4.3 ***(La différence entre les options Européennes et les options Américaines) :*** *Les options Européennes sont les options qui peuvent être exercées seulement le jour de l'échéance, et les options Américaines sont celles pouvant être exercées à tout instant avant leur échéance.*

2.4.3 Prime (le prix de l'option)

En contrepartie de l'engagement d'acheter ou de vendre des actions à un prix déterminé, le vendeur de l'option demande une rétribution : la prime, c'est-à-dire le prix de l'option. La prime est versée par l'acheteur au vendeur lors de la conclusion de l'engagement et reste acquise au vendeur de l'option même si l'acheteur décide de ne pas exercer son droit. Contrairement au prix d'exercer, la prime de l'option n'est jamais fixe ; elle varie au gré des transactions selon l'offre et la demande.

2.5 Opportunité d'arbitrage et probabilité risque neutre

2.5.1 Opportunités d'arbitrages et leurs absences

On dit qu'un marché financier comporte une opportunité d'arbitrage s'il est possible de réaliser un gain son risque à partir d'un investissement initial nul.

Définition 2.5.1 *: Une opportunité d'arbitrage sur* $[0, T]$ *est une stratégie de portefeuille autofinançant* ϕ *dont la valeur* $V(\phi)$ *vérifie :* $V_0(\phi) = 0$ *,* $V_T(\phi) \geq 0$ *et* $\mathbb{P}(V_T(\phi) > 0) = 1$*. La première condition signifie que l'on part de rien, la seconde que l'on est sûr de ne pas perdre d'argent et la troisième qu'avec une probabilité strictement positive on fait un réel profit.*

Définition 2.5.2 *(A.O.A) : On dit que le marché financier vérifie la condition d'opportunités d'arbitrage (A.O.A) s'il n'existe aucune opportunité d'arbitrage sur ce marché financier.*
Autrement dit (A.O.A) stipule qu'il n'est pas possible de gagner de l'argent à coup sur à partir d'un investissement nul.

Définition 2.5.3 *: Nous dirons qu'un marché financier est viable s'il y a absence d'opportunités d'arbitrages.*

2.5.2 Probabilité risque neutre

Définition 2.5.4 *: On définit une probabilité martingale ou bien "probabilité risque neutre* $\mathbb{Q}^*$ *" s'il existe une probabilité équivalente à la probabilité initiale* $\mathbb{P}$*, sous lequelle le prix actualisé* $\hat{S}_t := e^{-rt} S_t$ *est une martingale sous la probabilité* $\mathbb{Q}^*$*.*

Sous l'hypothèse d'absence d'opportunité d'arbitrage, l'existence d'une probabilité risque neutre est acquise, mais pas son unicité. Le fait qu'il puisse exister plusieurs probabilités risques neutres nous conduit à la possibilité d'avoir plusieurs prix différents pour une même option. Dans ce cas, on dit que le marché est incomplet. Mais lorsqu'il n'existe qu'une unique probabilité risque neutre, le marché est dit complet.

Remarque 2.5.1 *: La notion économique d'A.O.A suppose qu'il est impossible de gagner de l'argent sans prendre de risque à un instant donné, est reliée à une notion mathématique "existance d'une probabilité risque neutre".*

Chapitre 3

Évaluation et couverture des actifs dérivés

Le but de ce chapitre est de calculer le prix d'un produit dérivé dans le cadre du modèle de Black-Merton-Scholes.

3.1 Présentation du modèle

Le modèle proposé par Black, Merton et Scholes pour décrire l'évolution des cours est un modèle à temps continu avec un actif sans risque S^0 et un actif risqué S. On suppose que le prix de l'actifs sans risque vérifie :

$$S_t^0 = S_0^0 e^{rt},$$

où r est une constante donnée, $r \geq 0$. Sauf mention explicite du contraire nous prendrons $S_0^0 = 1$.

Pour modéliser l'incertitude concernant le prix de l'actif risqué S, on introduit un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. On suppose que le processus de prix de S, $S = \{S_t,\ t \geq 0\}$ est décrit par le modèle de Black-Merton-Scholes :

$$dS_t = \mu S_t dt + \sigma S_t dB_t,$$

où $B = \{B_t,\ t \geq 0\}$ est un mouvement Brownien sur $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. Ici μ et σ sont deux constantes réelles données :

- μ est appellée ‹tendance› ou ‹rendement instantané› de S.
- $\sigma > 0$ est appelée ‹volatilité› de S. Elle mesure la taille de l'incertitude sur S.

On note $\hat{S} = \{S_t/S_t^0,\ t \geq 0\}$ le prix actualisé de l'actif risqué et $\mathbb{F} = \{\mathcal{F}_t,\ t \geq 0\}$ la filtration naturelle du processus S.

D'après lemme d'Itô on peut facilement avoir :

$$S_t = S_0 \exp\left\{\left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right) t + \sigma B_t\right\}.$$

En effet, on a :

$$dS_t = \mu S_t dt + \sigma S_t dB_t.$$

On considère le nouveau processus $(Z_t)_{0 \leq t \leq T}$ tel que : $Z_t = \ln(S_t)$ la formule d'Itô appliquée à Z donne :

$$\begin{aligned} dZ_t &= \frac{\partial \ln}{\partial x}(S_t)\, dS_t + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 \ln}{\partial^2 x}(S_t)\, d\langle S, S\rangle_t \\ &= \frac{1}{S_t} dS_t - \frac{1}{2S_t^2}\sigma^2 S_t^2 dt \\ &= \frac{1}{S_t}(\mu S_t dt + \sigma S_t dB_t) - \frac{1}{2}\sigma^2 dt \\ &= \left(\mu - \tfrac{1}{2}\sigma^2\right) dt + \sigma dB_t. \end{aligned}$$

En intégrant la dernière ligne

$$\int_0^t dZ_t = \int_0^t \left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right) ds + \int_0^t \sigma dB_s,$$

$$Z_t = Z_0 + \left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right) t + \sigma B_t,$$

puis en utilisant le fait que $S_t = e^{Z_t}$ on obtient la formule voulue :

$$S_t = S_0 \exp\left\{\left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right) t + \sigma B_t\right\},$$

et, ou sous forme différentielle,

$$d\hat{S} = (\mu - r)\, \hat{S}_t dt + \sigma \hat{S}_t dB_t.$$

3.2 Stratégie financière

On suppose que les transaction se déroulent de manière continue sur l'horizon de temps $[0, T]$. Ainsi, à chaque instant $t \in [0, T]$, un agent peut modifier l'allocation de portefeuille entre l'actif S^0 et l'actif S. Une stratégie financière est donc décrite par un couple de processus stochastiques :

$$\alpha := \{\alpha_t,\ t \in [0, T]\} \quad \text{et} \quad \theta := \{\theta_t,\ t \in [0, T]\}.$$

Où

- $\alpha_t \in \mathbb{R}$ représente le nombre d'unités de l'actif S^0 détenues à la date t.
- $\theta_t \in \mathbb{R}$ représente le nombre d'unités de l'actif S détenues à la date t.

Notons V_t la valeur à la date t d'une stratégie et $\hat{V}_t := V_t / S_t^0$ la valeur actualisé de la même stratégie. Nous avons alors :

$$V_t = \alpha_t S_t^0 + \theta_t S_t \quad \text{et} \quad \hat{V}_t = \alpha_t + \theta_t \hat{S}_t.$$

Définition 3.2.1 ***(Stratégie autofinancée)*** *: La stratégie financière (α, θ) est dite au-*

tofinancée si satisfait la condition d'autofinancement suivant :

$$dV_t = \alpha_t dS_t^0 + \theta_t dS_t.$$

Ou encore par :

$$\begin{aligned} d\hat{V}_t &= \theta_t d\hat{S}_t \\ &= \theta_t \left[(\mu - r)\, \hat{S}_t dt + \sigma \hat{S}_t dB_t \right] \\ &= \theta_t (\mu - r)\, \hat{S}_t dt + \theta_t \sigma \hat{S}_t dB_t. \end{aligned}$$

C'est-à-dire

$$\hat{V}_t = \hat{V}_0 + \int_0^t \theta_u (\mu - r)\, \hat{S}_u du + \int_0^t \theta_u \sigma \hat{S}_u dB_u. \tag{3.1}$$

On remarque que l'expression de la richesse actualisée d'une stratégie autofinancée est complétement déterminée par la richesse initiale V_0 et θ. Bien entendu, pour que l'expression (3.1) ait un sens, il faut imposer des condition d'intégrabilité à θ. Pour ce faire nous allons appliquer le théorème de Girsanov (1.4.1). Notons $\lambda^* := (\mu - r)/\sigma$ et considérons la mesure de probabilité $\mathbb{Q}^*$ définie sur $(\Omega, \mathcal{F})$ par :

$$\tfrac{d\mathbb{Q}^*}{d\mathbb{P}} \mid \mathcal{F}_t := Z_t^{\lambda^*} \quad \text{où} \quad Z_t^{\lambda^*} := \exp\left\{ -\lambda^* B_t - \tfrac{(\lambda^*)^2}{2} t \right\}. \tag{3.2}$$

On appelle ensemble des portefeuille admissibles et on note $\mathcal{A}$, l'ensemble des processus $\theta = \{\theta_t,\ t \in [0, T]\}$ défini par :

$$\mathcal{A} := \left\{ \theta\ \mathbb{F}\text{-adapté} : \mathbb{E}^{\mathbb{Q}^*} \left[\int_0^T \left| \theta_u \hat{S}_u \right|^2 du \right] < \infty \right\}.$$

Dans ce qui suit, nous allons décrire une stratégie financière autofinancée par la donnée d'un couple $(x, \theta) \in \mathbb{R} \times \mathcal{A}$ où x représente la valeur initiale du portefeuille ou le capital initial permettant de construire la stratégie et θ et le processus décrivant l'investissement en actif risqué S, θ_t étant le nombre d'unités de S détenues à la date t. On note $V_t^{x,\theta}$ la valeur à la date t de cette stratégie. On a $V_t^{x,\theta} = S_t^0 \hat{V}_t^{x,\theta}$ et

$$\hat{V}_t^{x,\theta} = x/S_0^0 + \int_0^t (\mu - r)\,\theta_u \hat{S}_u du + \int_0^t \sigma \theta_u \hat{S}_u dB_u.$$

3.3 Condition d'absence d'opportunités d'arbitrage et changement de mesure

Une opportunité d'arbitrage ou plus simplement un arbitrage est un moyen de gagner de l'argent sans prendre aucun risque. Cela se traduit par la définition suivante lorsqu'on suppose que l'invistisseur intervient durant la période $[0, T]$.

Définition 3.3.1 *: Dans ce modèle, une opportunité d'arbitrage est une stratégie financière qui démarre à un capital inicial égale à zéro $(0, \theta) \in \mathbb{R} \times \mathcal{A}$ et qui vérifie :*

$$\mathbb{P}\left(V_T^{0,\theta} \geq 0\right) = 1 \quad et \quad \mathbb{P}\left(V_T^{0,\theta} > 0\right) > 0.$$

Dans le cas particulier où $\mu = r$, le marché financier considéré vérifie la condition d'absence d'opportunités d'arbitrage.

En effet, considérons le cas particulier où $\mu = r$. Dans ce cas, $\hat{S}_t$ est une martingale et pour $\theta \in \mathcal{A}$:

$$\hat{V}_t^{0,\theta} = \int_0^t \sigma \theta_u \hat{S}_u dB_u.$$

Le processus $\hat{V}^{0,\theta} = \left\{\hat{V}_t^{0,\theta}, 0 \leq t \leq T\right\}$ est une $\mathbb{F}$-martingale sur $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. Car $\theta \in \mathcal{A}$ vérifie la condition :

$$\mathbb{E}\left[\int_0^T \left|\theta_u \hat{S}_u\right|^2 du\right] < \infty.$$

Par conséquent $\mathbb{E}\left[\hat{V}_T^{0,\theta}\right] = 0$ donc on ne peut pas avoir $\mathbb{P}\left(\hat{V}_T^{0,\theta} \geq 0\right) = 1$ avec :

$$\mathbb{P}\left(\hat{V}_T^{0,\theta} > 0\right) > 0.$$

Proposition 3.3.1 *: Le prix actualisé $\hat{S}$ est une $\mathbb{F}$ martingale sur $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{Q}^*)$ et pour toute stratégie financière $(x, \theta) \in \mathbb{R} \times \mathcal{A}$, la valeur actualisée $\hat{V}^{x,\theta}$ est aussi une $\mathbb{F}$-martingale sur $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{Q}^*)$.*

Preuve. On définit le processus $B^* = B_t + \lambda^* t$ et comme B^* et un $\mathbb{F}$-mouvement Brownien sur $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{Q}^*)$ alors : $\hat{S}_t = \exp\left\{\sigma B_t^* - \frac{\sigma^2}{2} t\right\}$ est une $\mathbb{F}$-martingale sur $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{Q}^*)$. Soit $(x, \theta) \in \mathbb{R} \times \mathcal{A}$:

$$\begin{aligned}
\hat{V}_t^{x,\theta} &= x/S_0^0 + \int_0^t (\mu - r)\, \theta_u \hat{S}_u du + \int_0^t \sigma \theta_u \hat{S}_u dB_u \\
&= x/S_0^0 + \int_0^t \theta_u \hat{S}_u \left[(\mu - r)\, du + \sigma dB_u\right] \\
&= x/S_0^0 + \int_0^t \sigma \theta_u \hat{S}_u \left[\lambda^* du + dB_u\right] \\
&= x/S_0^0 + \int_0^t \sigma \theta_u \hat{S}_u dB_u^*.
\end{aligned}$$

Comme θ satisfait la condition d'intégrabilité : $\mathbb{E}\left[\int_0^T \left|\theta_u \hat{S}_u\right|^2 du\right] < \infty$, alors le processus $\hat{V}^{x,\theta}$ est une $\mathbb{F}$-martingale sur $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{Q}^*)$. ■

Proposition 3.3.2 *(A.O.A) : Le modèle de marché financier considéré vérifie la condition d'absence d'opportunité d'arbitrage.*

Preuve. Considérons la mesure de probabilité $\mathbb{Q}^*$ définie par (3.2) . Supposons qu'il existe une opportunité d'arbitrage $(0, \theta)$. Comme la mesure de probabilité $\mathbb{Q}^*$ est équivalente à $\mathbb{P}$. On a :

$$\mathbb{Q}^*\left(\hat{V}_T^{0,\theta} \geq 0\right) = 1 \quad \text{et} \quad \mathbb{Q}^*\left(\hat{V}_T^{0,\theta} > 0\right) > 0,$$

donc $\mathbb{E}\left(\hat{V}_T^{0,\theta}\right) > 0$. Mais on a le processus $\hat{V}^{0,\theta}$ est une $\mathbb{F}$-martingale sur $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{Q}^*)$, donc $\mathbb{E}\left(\hat{V}_T^{0,\theta}\right) = 0$ et ceci contredit ce qui a été dit plus haut. Nous obtenons alors qu'il n'existe aucune opportunité d'arbitrage sur ce marché financier. ■

3.4 Évaluation et couverture d'une option Européenne

On va chercher maintenant à calculer le prix d'une option. Nous considérons une actif option Européenne de maturité T dont la valeur terminale est décrite par une varaible aléatoire $\mathcal{F}_t$-mesurable, notée G. Pour cela, nous avons besoin la définition suivante :

Définition 3.4.1 *: L'actif contigent de payoff G est dit réplicable, ou encore il est dit admettre une stratégie de réplication, s'il existe $(x, \theta) \in \mathbb{R} \times \mathcal{A}$ tel que : $G = V_T^{x,\theta}$.*

Proposition 3.4.1 *: Soit un actif contingent de payoff G pour lequel on suppose que $\mathbb{E}^{\mathbb{Q}^*}\left[G^2\right] < \infty$. Alors :*

a) *L'actif G admet une stratégie de réplication $\left(x^G, \theta^G\right)$;*

b) *Sous la condition d'absence d'opportunités d'arbitrage A.O.A, son prix à la date t, noté p_t^G, est donné par :*

$$p_t^G = S_t^0 \mathbb{E}^{\mathbb{Q}^*}\left[G/S_T^0 \mid \mathcal{F}_t\right] = \mathbb{E}^{\mathbb{Q}^*}\left[e^{-r(T-t)} G \mid \mathcal{F}_t\right].$$

Preuve. Commençons d'abord par le point b). Supposons donc disposer de θ_t telle que la stratégie (x, θ_t) qui donne le portefeuille $V_t^{x,\theta}$ ou en version actualisée

$$\hat{V}_t^{x,\theta} = x + \int_0^t \theta_u d\hat{S}_u,$$

satisfasse

$$G = V_T^{x,\theta}.$$

Mais, sous la probabilité $\mathbb{Q}^*$, nous avons

$$\hat{V}_t^{x,\theta} = x + \int_0^t \theta_u \sigma \hat{S}_u dB_u^*,$$

donc $\hat{V}_t^{x,\theta}$ est une martingale (l'intégrabilité est obtenue par définition des stratégies admissibles θ). Nous savons que, A.O.A, $V_t^{x,\theta} = p_t^G$. En particulier, en utilisant la propriété de martingale :

$$\hat{V}_t^{x,\theta} = \mathbb{E}^{\mathbb{Q}^*}\left[\hat{V}_T^{x,\theta} \mid \mathcal{F}_t\right],$$

et on a :

$$\hat{V}_t^{x,\theta} = V_t^{x,\theta}/e^{rt},$$

alors :

$$e^{-rt}p_t^G = \hat{V}_t^{x,\theta} = \mathbb{E}^{\mathbb{Q}^*}\left[\hat{V}_T^{x,\theta} \mid \mathcal{F}_t\right] = \mathbb{E}^{\mathbb{Q}^*}\left[Ge^{-rT} \mid \mathcal{F}_t\right],$$

ce qui donne par la suite

$$p_t^G = \mathbb{E}^{\mathbb{Q}^*}\left[e^{-r(T-t)}G \mid \mathcal{F}_t\right].$$

Revenons maintenant au point a). Introduisons le processus

$$M_t = \mathbb{E}^{\mathbb{Q}^*}\left[e^{-rT}G \mid \mathcal{F}_t\right],$$

par définition M_t est une martingale et $\mathbb{E}^{\mathbb{Q}^*}\left[M_T^2\right] = \mathbb{E}^{\mathbb{Q}^*}\left[G^2\right] < \infty$ donc d'après l'inégalité de Jensen $\mathbb{E}^{\mathbb{Q}^*}\left[M_t^2\right] < \infty$ pour tout $t \geq 0$. Donc d'après le théorème (1.3.1) il existe H_t avec $\mathbb{E}^{\mathbb{Q}^*}\left[\int_0^T H_s^2 ds\right] < \infty$ telle que :

$$M_t = M_0 + \int_0^t H_s dB_s^*.$$

Alors la stratégie $Z^{(x,\theta)}$ avec $x = M_0$ et $\theta_t = H_t/(\sigma\hat{S}_t)$ est une stratégie de réplication pour G car :

1. $x = M_0 \in \mathbb{R}$ car la filtration $\mathcal{F}_0$ est triviale ;

2. $Z^{(x,\theta)}$ vérifie $d\hat{Z}^{(x,\theta)} = \sigma\theta_t\hat{S}_t dB_s^* = H_t dB_s^* = dM_t$ ce qui implique $\hat{Z}^{(x,\theta)} = M_t$ et donc $Z^{(x,\theta)} = e^{rt}M_t$;

3. Si $G \geq 0$ la valeur $e^{rt}M_t$ de cette stratégie à l'instant t est positive ;

4. Sa valeur à l'instant T est $e^{rT}M_T = G$.

■

Proposition 3.4.2 ***(unicité)*** *: En A.O.A. la probabilité risque neutre est unique dans le modèle Black-Merton-Scholes.*

Preuve. Toute probabilité risque neutre $\mathbb{P}^*$ rend martingale le processus $\hat{S}_t$. Soit A un ensemble $\mathcal{F}_T$-mesurable et $G = 1_A$. En particulier

$$\mathbb{E}^{\mathbb{P}^*}\left[G^2\right] < \infty \quad \text{et} \quad \mathbb{E}^{\mathbb{Q}^*}\left[G^2\right] < \infty.$$

Alors, utilisant les mêmes arguments que dans le résultat précédent, G est réplicable par une stratégie (x, θ) admissible. Cette stratégie (actualisée) est martingale par rapport à $\mathbb{P}^*$ (l'intégrabilité résulte de $\mathbb{E}^{\mathbb{P}^*}\left[G^2\right] < \infty$) et donc en particulier $x = e^{-rT}\mathbb{E}^{\mathbb{P}^*}\left[1_A\right] = e^{-rT}\mathbb{P}^*(A)$. Donc $\mathbb{P}^*(A) = e^{rT}x$ et ainsi la mesure de tout ensemble $A \in \mathcal{F}_T$ est uniquement déterminée. ■

Proposition 3.4.3 *: Considérons une option Européenne de payoff $G = h(S_T)$ où $h : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction mesurable donnée. Alors, il existe une fonction $v : [0,T] \times \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}$ telle que :*

$$v(t, S_t) = e^{-r(T-t)}\mathbb{E}^{\mathbb{Q}^*}\left[h(S_T) \mid \mathcal{F}_t\right].$$

Preuve. Dons le modèle de black scholes, la valeur du sous-jacent(le prix de l'actif risqué) en t est :

$$S_t = S_0 e^{(r-\sigma^2/2)t+\sigma B_t^*},$$

on en déduit que :

$$S_T = S_t e^{(r-\sigma^2/2)(T-t)+\sigma(B_T^*-B_t^*)}.$$

Donc l'espérance conditionnelle se récrit :

$$e^{-r(T-t)}\mathbb{E}^{\mathbb{Q}^*}\left[h(S_T) \mid \mathcal{F}_t\right] = e^{-r(T-t)}\mathbb{E}^{\mathbb{Q}^*}\left[h\left(S_t e^{\sigma\left(B_T^*-B_t^*\right)+\left(r-\frac{\sigma^2}{2}\right)(T-t)}\right) \mid \mathcal{F}_t\right].$$

On a la variable aléatoire S_t est $\mathcal{F}_t$-mesurable et la variable aléatoire $B_T^* - B_t^*$ est indépendante de $\mathcal{F}_t$. On en déduit grâce aux propriétés des espérances conditionnelles que :

$$e^{-r(T-t)}\mathbb{E}^{\mathbb{Q}^*}\left[h(S_T) \mid \mathcal{F}_t\right] = v(t, S_t),$$

avec la fonction v définie par :

$$v : (t,x) \longrightarrow e^{-r(T-t)}\mathbb{E}^{\mathbb{Q}^*}\left[h(xe^{(r-\sigma^2/2)(T-t)+\sigma(B_T^*-B_t^*)})\right].$$

■

Proposition 3.4.4 *: Dans le cadre du modèle de Black-Scholes, le prix d'un call noté C_t de maturité T et de strike K est :*

$$C_t = S_t\mathcal{N}\left(d_1\right) - e^{-r(T-t)}K\mathcal{N}\left(d_2\right).$$

Avec $\mathcal{N}$ la fonction de répartition d'une loi normale $\mathcal{N}(0,1)$, d_1 et d_2 donnés par :

$$d_1 = \frac{\log(S_t/K)+\left(r+\sigma^2/2\right)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}} \quad et \quad d_2 = d_1 - \sqrt{T-t}.$$

Preuve. Le prix du call en t est donné par :

$$\begin{aligned} C_t &= \mathbb{E}^{\mathbb{Q}^*}\left[e^{-r(T-t)}\left(S_T - K\right)^+ \mid \mathcal{F}_t\right] \\ &= \mathbb{E}^{\mathbb{Q}^*}\left[e^{-r(T-t)}\left(S_t e^{\sigma\left(B_T^*-B_t^*\right)+\left(r-\frac{\sigma^2}{2}\right)(T-t)} - K\right)^+ \mid \mathcal{F}_t\right]. \end{aligned}$$

Donc, comme nous l'avons déja vu $C_t = v(t, S_{t)}$ avec :

$$\begin{aligned} v(t,x) &= e^{-r(T-t)}\mathbb{E}^{\mathbb{Q}^*}\left[\left(xe^{\sigma\left(B_T^*-B_t^*\right)+\left(r-\frac{\sigma^2}{2}\right)(T-t)}-K\right)^+\right] \\ &= xe^{-r(T-t)}\mathbb{E}^{\mathbb{Q}^*}\left(e^{\sigma\left(B_T^*-B_t^*\right)+\left(r-\frac{\sigma^2}{2}\right)(T-t)}1_{S_T>K}\right)-Ke^{-r(T-t)}\mathbb{Q}^*\left(S_T>K\right). \end{aligned}$$

On va calculer $\mathbb{Q}^*\left(S_T > K\right)$:

$$\begin{aligned} \mathbb{Q}^*\left(S_T>K\right) &= \mathbb{Q}^*\left(S_te^{\sigma\left(B_T^*-B_t^*\right)+\left(r-\frac{\sigma^2}{2}\right)(T-t)}>K\right) \\ &= \mathbb{Q}^*\left(e^{\sigma\left(B_T^*-B_t^*\right)+\left(r-\frac{\sigma^2}{2}\right)(T-t)}>K/S_t\right) \\ &= \mathbb{Q}^*\left(\sigma\left(B_T^*-B_t^*\right)+\left(r-\frac{\sigma^2}{2}\right)(T-t)>\log K/S_t\right) \\ &= \mathbb{Q}^*\left(B_T^*-B_t^*>\frac{\log(K/S_t)-\left(r-\frac{\sigma^2}{2}\right)(T-t)}{\sigma}\right) \\ &= \mathbb{Q}^*\left(\frac{B_T^*-B_t^*}{\sqrt{T-t}}>\frac{\log(K/S_t)-\left(r-\frac{\sigma^2}{2}\right)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}\right) \\ &= \mathbb{Q}^*\left(y>\frac{\log(K/S_t)-\left(r-\frac{\sigma^2}{2}\right)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}\right). \end{aligned}$$

Où $\frac{B_T^*-B_t^*}{\sqrt{T-t}} = y \backsim \mathcal{N}(0,1)$, donc :

$$\mathbb{Q}^*\left(S_T>K\right)=\mathbb{Q}^*\left(y>-d_2\right) \quad \text{où} \quad d_2=\frac{\log\left(S_t/K\right)+\left(r-\sigma^2/2\right)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}.$$

Comme y et $-y$ ont la même loi alors :

$$\mathbb{Q}^*\left(S_T>K\right)=\mathbb{Q}^*\left(y>-d_2\right)=\mathbb{Q}^*\left(-y>-d_2\right)=\mathbb{Q}^*\left(y<d_2\right)=\mathcal{N}\left(d_2\right).$$

Intéressons nous maintenant au calcul du premier terme $\mathbb{E}^{\mathbb{Q}^*}\left[S_T 1_{S_T>K}\right]$:

$$\mathbb{E}^{\mathbb{Q}^*}\left[S_T 1_{S_T>K}\right] = S_t \mathbb{E}^{\mathbb{Q}^*}\left(e^{\left(r-\frac{\sigma^2}{2}\right)(T-t)+\sigma\sqrt{T-t}y} 1_{y>-d_2}\right),$$

donc :

$$\begin{aligned}
e^{-r(T-t)}\mathbb{E}^{\mathbb{Q}^*}\left[S_T 1_{S_T>K}\right] &= \tfrac{S_t}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} 1_{y>-d_2} e^{\left(r-\frac{\sigma^2}{2}\right)(T-t)+\sigma\sqrt{T-t}y} e^{-y^2/2} dy \\
&= \tfrac{S_t}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} 1_{y>-d_2} e^{\left(r-\frac{\sigma^2}{2}\right)(T-t)+\sigma\sqrt{T-t}y-y^2/2} dy \\
&= \tfrac{S_t}{\sqrt{2\pi}} \int_{-d_2}^{+\infty} e^{-1/2\left(y-\sigma\sqrt{T-t}\right)2} dy \\
&= S_t \int_{-d_2-\sigma\sqrt{T-t}}^{+\infty} e^{-y^2/2} \tfrac{dy}{\sqrt{2\pi}} \\
&= S_t \int_{-\infty}^{d_1} e^{-y^2/2} \tfrac{dy}{\sqrt{2\pi}} \\
&= S_t \mathcal{N}(d_1).
\end{aligned}$$

Finalement, en combinant les deux derniers résultats, on obtient :

$$C_t = S_t \mathcal{N}(d_1) - K e^{-r(T-t)} \mathbb{Q}^*(S_T > K).$$

■

3.5 Équation de Black-Merton-Scholes

Soit un actif contingent de payoff G (v.a $\mathcal{F}_T$-mesurable), $\left(x^G, \theta^G\right)$ une stratégie de réplication de G et supposons que le prix v soit une fonction de classe $C^{1,2}$. Appliquons alors la formule d'Itô à la fonction

$$(t,x) \mapsto e^{-rt} v(t,x),$$

au processus S_t, $t \in [0,T]$. Rappelons que

$$dS_t = \mu S_t dt + \sigma S_t dB_t = rS_t dt + \sigma S_t dB_t^*.$$

Nous obtenons :

$$\begin{aligned}
e^{-rt}v(t,S_t) &= v(0,S_0) + \int_0^t \left[e^{-ru}v_u(u,S_u) - re^{-ru}v(u,S_u)\right]dt \\
&+ \int_0^t e^{-rt}v_x(u,S_{u)}dS_u + \tfrac{1}{2}\int_0^t e^{-rt}v_{xx}(u,S_u)d\left\langle S_u\right\rangle \\
&= v(0,S_0) + \int_0^t e^{-ru}\left[v_u(u,S_u) - rv(u,S_u) + rS_u v_u(u,S_u) + \tfrac{1}{2}\sigma^2 S_u^2 v_{xx}(u,S_u)\right]du \\
&+ \int_0^t \sigma e^{-ru}S_u v_x(u,S_u)dB_u^*.
\end{aligned}$$

Par ailleurs :

$$\begin{aligned}
e^{-rt}v(t,S_t) &= \hat{V}_t^{x^G,\theta^G} = x + \int_0^t \theta_u \hat{S}_u \sigma dB_u^* \\
&= v\left(0,S_0\right) + \int_0^t e^{-ru}\theta_u S_u \sigma dB_u^*.
\end{aligned}$$

Par identification nous en déduit que :

$$\theta_u = v_x(u,S_u),$$

et que la fonction v satisfait :

$$v_t(u,S_u) + \frac{1}{2}\sigma^2 S_u^2 v_{xx}(u,S_u) + rS_u v_x(u,S_u) = rv(u,S_u).$$

Ce raisonnement nous permet de voir que la fonction prix d'un actif contigent G est liée à l'équation aux dérivée partielles (E.D.P) :

$$\begin{aligned} v_t(t,x) + \frac{1}{2}\sigma^2 x^2 v_{xx}(t,x) + rxv_x(t,x) &= rv(t,x), \\ \forall (t,x) \in [0,T[\times \mathbb{R}_+. \end{aligned}$$

Cette **E.D.P** est appelée **équation de Black-Merton-Scholes.** De plus, la fonction prix vérifie la condition terminale :

$$v(T,x) = h(x), \forall x \in \mathbb{R}_+.$$

Conclusion

En conclusion, nous avons essayé de valoriser et de couvrir les options Européenne à l'aide de modèle de Black-Merton-Scholes, qui était crée en 1973, et qui conduit à des formules aujourd'hui couramment utilisée par les praticiens.

Nous étions intéressés au début par le rappel du calcul stochastique. Ensuit, nous avons introduit quelques concepts et terminologies en mathématiques financières. Enfin, nous avons introduit le modèle de Black-Merton-Scholes et l'avons utilisé pour résoudre le problème de l'évaluation et de la couverture de l'option Européenne.

Bibliographie

[1] A. Rondepierre & A. Rouchon. (2013). Introduction aux Équations aux Dérivées Partielles. Étude théorique.

[2] G. Deyirmendjian. (2006). Introduction aux mathématiques financières. Introduction au domaine de recherche. Sous la direction d'Henri Berestycki & Nicolas Gaussel.

[3] H. Pham. (2007). Introduction aux Mathématiques et Modèles Stochastiques des Marchés Financiers. Université Paris, 7, 2006-2007.

[4] I. Ben Tahar, J. Trashorras & G. Turinici. Éléments de calcul stochastique pour l'évaluation et la couverture des actifs dérivés. Avec exercices corrigés, travaux pratiques et études de cas.

[5] K. Abdelhak. (2017). Quelques Applications du modèle de Black-Scholes. Mémoire de master. Université Dr Tahar Moulay - Saïda.

[6] M. Eddahbi. Marchés financiers et modèles des taux d'intérêt. cours de mestre. université Kadi Ayadh Marakch Marok.

Annexe : Abréviations et Notations

Les différentes abréviations et notations utilisées tout au long de ce mémoire sont expliquées ci-dessous :

$(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$	:	Espace de probabilité.
B	:	Mouvement Brownien.
EDS	:	Equation différentielle stochastique.
EDP	:	équation aux dérivées partielles.
b	:	Drift ou la dérive.
σ	:	Terme de diffusion.
$(A.O.A)$	:	Absence d'opportunités d'arbitrage.
$\max$	:	Maximum.