République Algérienne Démocratique et Populaire

Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

UNIVERSITÉ MOHAMED KHIDER, BISKRA

FACULTÉ des SCIENCES EXACTES et des SCIENCES de la NATURE et de la VIE

DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES

Mémoire présenté en vue de l'obtention du Diplôme **:**

MASTER en Mathématiques

Option : **Statistique**

Par

GHANEMI Sabrina

Titre :

Sur estimation paramétrique et non paramétrique de la "TVaR" Tail-Value at Risk

Membres du Comité d'Examen :

Pr.	**MERAGHNI Djamel**	UMKB	Président
Dr.	**BENATIA Fatah**	UMKB	Encadreur
Dr.	**BENELMIR Imen**	UMKB	Examinateur

Juin 2019

Dédicace

Je dédie ce modeste travail à mes parents et toute ma famille,

à mes amis,

à mes professeurs.

REMERCIEMENTS

Nous remercions mon Dieu de nous avoir donné la force, La patience et le courage de mener à bout ce travail.

*Nous remercions notre encadreur Dr.**BENATIA Fatah** d'avoir accepté de diriger ce projet et pour la confiance qu'il nous a accordée, et surtout ses encouragements, et ses précieux conseils.*

*Nous voudrions remercier également Pr.**MERAGHNI Djamel e**t Dr.**BENELMIR Imen**, membres de jury, de nous avoir fait l'honneur d'accepter de jurer ce travail.*

Nous remercions infiniment mes parents et ma petite famille de m'avoir encouragé, soutenu et supporté mon stress durant mon travail.

Nous tenons aussi à remercier, tous ceux qui nous ont enseignés durant toutes nos études à département de mathématique.

Table des matières

Table des figures

Liste des tableaux

Introduction

Il ya dans la vie des phénomènes, qui se reproduisent rarements, tels que les risques qui sont des evénéments précis, et dont l'impact est trés important et leur effets restent longtemps comme par exemple la crise financiére mondiale de 2008 qui a touché l'économie mondiale.

Pour cette raison les institutions financiéres (les banques et les compagnies d'assurance) cherchent toujours des mèthodes et des techniques pour mesurer ces risques et diminuer ainsi les effets négatifs et éviter la perte qui peut en découlée.

Il existe plusieurs façons de mesurer le risque, dans ce travail nous allons presenté la mesure la plus répandue qui est la Value at Risk (VaR) établie par JP Morgan (1993) utilisable par plusieurs institutions financiéres, mais son principal inconvenient et qu'elle n'est pas une mesure de risque cohérente au sens de Artzner et al (1999) .

Dans ce mémoire qui s'articule autour de trois chapitres, nous avons presenté la VaR comme mesure de risque ainsi que ses estimations paramétrique et non paramétrique

Dans le premier chapitre nous présentons les notions élémentaires de probabilité et statistique ainsi que des rappels sur les propriétés et les caractérisations principales d'une mesure de risque(fonction de perte, risque, ...).

Dans le deuxiéme chapitre nous définissons la VaR et quelques mesure alternatives à la VaR comme "la Tail -value at risk" ($TVaR$), "l'Expected shortfall" (ES) et "La Conditionnel tail expectition" (CTE), les avantages et les inconvinients de la VaR sont données dans cette partie, les méthodes d'estimations paramétrique et non paramétrique. sont présentés à la fin de ce chapitre

Une application directe de ce qui précéde en forme de simulation sera presenté dans le troisième et dernier chapitre.

Chapitre 1

Notions de probabilités et statistiques

1.1 Notions préliminaires

Dans cette premiere partie du travail sont présentés les notions préliminaires et les définitions fondamentales nécessaire en probabilité et statistique et quelques notions sur la théoriè de la mesure et qui sont nécessaire à la compréhension de ce qui suit dans ce mémoire.

1.1.1 Espace probabilisé

Nous allons presentés en premier lieu l'espace probabilisé comme base fondamentale et dans le calcul des probabilité et statistique ([5] et [11])

Définition 1.1.1 *On appelle espace probabilisé le triplet* $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$*.où*

– Ω :*ensemble fondamental* (*tous les résultats possibles liés à une experiénce donnée*)

– $\mathcal{F}$:*une tribu* (*de sous ensemble de* Ω)

– $\mathbb{P}$:*une probabilité*

Remarque 1.1.1 *Le couple* $(\Omega, \mathcal{F})$ *s'appelle espace probabilisable* (*ou mesurable en mesure de probabilité*)

Définition 1.1.2 $\mathcal{F} \subset \mathcal{P}(\Omega)$ *est une tribu (ou une* σ*-algèbre) si :*

1. $\Omega \in \mathcal{F}$

2. *Stabilité par passage au complémentaire* $\left(A \in \mathcal{F} \Rightarrow \bar{A} \in \mathcal{F}\right)$

3. *Stabilité par réunion dénombrable* $\left(\forall i \in \mathbb{N}, A_i \in \mathcal{F} \Rightarrow \underset{i\in\mathbb{N}}{\cup} A_i \in \mathcal{F}\right)$

Définition 1.1.3 *On appelle probabilité sur* $(\Omega, \mathcal{F})$ *(ou loi de probabilité) une application* $\mathbb{P}$ *de* $\mathcal{F}$ *dans* $[0,1]$ *telle que :*

$$\begin{aligned} \mathbb{P}: \quad & (\Omega, \mathcal{F}) \to [0,1] \\ & A \to \mathbb{P}(A) \end{aligned}$$

1. $\mathbb{P}(\Omega) = 1$

2. *pour tout ensemble dénombrable d'événements deux à deux incompatibles* $A_0, A_1, ..., A_n, ...$ *on a :* $\mathbb{P}\left(\underset{i}{\cup} A_i\right) = \sum_i \mathbb{P}(A_i)$

Définition 1.1.4 *Soit* $(\Omega_1, \mathcal{A})$ *et* $(\Omega_2, \mathcal{B})$ *deux espaces mesurables alors* $f : \Omega_1 \to \Omega_2$ *et* $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$*-mesurable si :*

$$\forall B \in \mathcal{B}, f^{-1}(B) \in \mathcal{A}$$

Autrement dit

$$f \text{ est mesurable} \Leftrightarrow f^{-1}(B) \in \mathcal{A}$$

Définition 1.1.5 *Une variable aléatoire réelle(v.a.r)* X *est une application mesurable de* $(\Omega, \mathcal{F})$ *dans* $\mathbb{R}$ *muni de sa tribu borélienne* $(\mathbb{R}, \mathfrak{B}_{\mathbb{R}})$ *:*

$$\begin{aligned} X: \quad & (\Omega, \mathcal{F}) \to (\mathbb{R}, \mathfrak{B}_{\mathbb{R}}) \\ & A \to X(A) \end{aligned}$$

1.1.2 Fonction de répartition et quantile

Aprés avoir donné la définition d'une v.a il est necessaire de donner maintenant les définitions générales de la fonction de répartition et du quantile d'une v.a, ainsi que la relation entre elles et les deux théorèmes les plus connues en statistique et probabilité et qui sont le théorème de Glivenko-Cantelli et le théorème central limite que nous allons bien sur présentés dans cette partie (voir [11])

Définition 1.1.6 *Soit X une v.a.r .On appelle fonction de répartition de X la fonction $F : \mathbb{R} \to [0,1]$ définie par :*

$$\forall x \in \mathbb{R}, F_X(x) = P(X \leq x).$$

Définition 1.1.7 *On appelle fonction de densité d'une v.a X la dérivée de la fonction de répartition de cette v.a c'est à :dire :*

$$f_X(x) = \frac{\partial F_X(x)}{\partial x}$$

Autrement dit

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(t)\, dt$$

Théorème 1.1.1 (Glivenko-Cantelli) *Soit $(X_n; n \in \mathbb{N}^*)$ une suite de v.a.r indépendantes et de même loi $F_X(x)$ p.s (presque-sûrement) i.i.d*

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{x\in\mathbb{R}} \mid F_n(x) - F_X(x) \mid = 0,$$

où F_n, est définie par :

$$F_n(x) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \mathbf{1}_{\{X_k \leq x\}} = \frac{1}{n} Card\left\{k \in \{1, ..., n\} : X_k \leq x\right\}$$

est la fonction de répartition empirique associée à l'échantillon $(X_1, ..., X_n)$.

i.i.d : indépendantes et identiquement distribuées.

Définition 1.1.8 *Soit X une v.a.r de fonction de répartition F.pour $\alpha \in \left]0,1\right[$,On appelle quantile (ou fractile) d'ordre α la valeur x_α :*

$$x_\alpha = \inf\left\{x \in \mathbb{R}, F_X(x) \geq \alpha\right\} \text{ pour } .\alpha \in \left]0,1\right[.$$

Remarque 1.1.2 *Si F est continue et strictement croissante alors x_α est l'unique nombre réel* *qui réalise :*

$$F_X\left(x_\alpha\right) = \alpha \Leftrightarrow x_\alpha = F_X^{-1}(\alpha)$$

Théorème 1.1.2 (Central limite) *Soit* (X_n) *une suite de v.a indépendantes de même loi d'espérance* m *et d'écart-type* σ*. Alors :*

$$\frac{1}{\sqrt{n}}\left(\frac{X_1 + ... + X_n - nm}{\sigma}\right) \xrightarrow{L} N\left(0,1\right) \text{ quand } \left(n \to \infty\right)$$

Où $N\left(0,1\right)$ *est la loi gaussienne de moyenne* $m = 0$ *et de variance* $\sigma^2 = 1$

1.1.3 Moments d'une variable aléatoire

Le moment d'une v.a est définie comme suit [11] :

Définition 1.1.9 *Pour une v.a discrète, on définit le moment d'ordre* k $(k \in \mathbb{N})$ *par la formule :*

$$\mathbb{E}(X^k) = \sum_i x_i^k \mathbb{P}\left(X = x_i\right).$$

Pour une v.a continue admettant une densité, on définit le moment d'ordre k *par la formule :*

$$\mathbb{E}(X^k) = \int_{\mathbb{R}} x^k f_X\left(x\right) dx.$$

Définition 1.1.10 *On définit les moments centrés d'ordre* k *par la formule :*

$$\mu_k = \mathbb{E}\left[\left(X - E\left(X\right)\right)^k\right].$$

On a évidemment $\mu_1 = 0$ *et* $\mu_2 = \mathbb{V}\left(X\right)$ *. Si la distribution de la v.a est symétrique, on a :*

$$\mu_{2k+1} = 0, \forall k.$$

Remarque 1.1.3 *Pour* $k = 1$, $\mathbb{E}\left(X\right)$ *c'est l'espérance mathématique (la moyenne)*

Remarque 1.1.4 *L'espérance mathématique n'existe pas toujours.*

Exemple 1.1.1 *Soit X v.a de loi Cauchy de densité :*

$$f_X(x) = \frac{1}{\pi(1+x^2)}, x \in \mathbb{R}.$$

On a :

$$\mathbb{E}(X) = \int_{\mathbb{R}} x f_X(x)\, dx.$$

$$\mathbb{E}(X) = \int_{\mathbb{R}} \frac{x}{\pi(1+x^2)} dx.$$

Cette intégrale diverge donc l'espérance n'existe pas

Définition 1.1.11 *On appelle variance d'une v.a X notée $\mathbb{V}(X)$ ou σ^2 la quantité définie par :*

$$\mathbb{V}(X) = \mathbb{E}\left[(X - E(X))^2\right]$$

Où encore

$$\mathbb{V}(X) = \mathbb{E}\left[X^2 + (\mathbb{E}(X))^2 - 2X\mathbb{E}(X)\right]$$

$$= \mathbb{E}\left(X^2\right) - (\mathbb{E}(X))^2.$$

1.1.4 L'espérance conditionnelle

Il ya plusieurs formulations qui définissent l'espérance conditionnnelle nous reprenons la formulation la plus usuelle dans [8]

Définition 1.1.12 *Soit X une v.a définie sur $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, G sous tribu de $\mathcal{F}$ l'espérance conditionnelle de X par rapport à G notée par $\mathbb{E}(X/G)$ est une v.a vérifiant :*

1. $G-mesurable$
2. $\int_A E(X/G)\, dp = \int_A X dp, \forall A \in G$

1.1.5 La loi normale

La loi normale est l'une des lois de probabilité les plus utilisées pour la modélisation des phénomènes et évenements naturells, elle permet d'approcher d'autre lois de probabilité grâce au théorème .central limite (voir [11])

Définition 1.1.13 *On dit que* X *est de loi normale* $N(m, \sigma)$ *si sa densité est définie par :*

$$f_X(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{x-m}{\sigma}\right)^2\right], x \in \mathbb{R}.$$

Remarque 1.1.5 *Si* $m = 0$ *et* $\sigma = 1$*,on dit que* X *suit la loi normale centrée réduite* $N(0, 1)$ *sa densité est alors définie par :*

$$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{1}{2}x^2\right], x \in \mathbb{R}.$$

Remarque 1.1.6 *Les moments de la loi normale centrée réduite existent pour tout ordre, et comme elle est symétrique on a :*

$$\mu_{2k+1} = 0,$$

$$\mu_{2k} = \frac{(2k)!}{2^k k!}.$$

1.1.6 Statistique d'ordre

La statistique d'ordre joue un rôle essentielle dans la théorie des mesures de risques en particulier les méthodes d'estimations de mesure de risque [2]

Définition 1.1.14 *Pour un échantillon* $(X_1, ..., X_n)$ *i.i.d de même loi* $F_X(x) = \mathbb{P}(X \leq x)$*, on définit la statistique d'ordre associée à* $(X_1, ..., X_n)$ *par :*

$$X_{1,n} \leq X_{2,n} \leq ... \leq X_{i-1,n} \leq X_{i,n} \leq X_{i+1,n} \leq ... \leq X_{n,n}$$

des valeurs ordonnées (sens croissant).

Notation 1.1.1 *On note :*

$1/X_{1,n} = \min\limits_{1 \leq i \leq n} \{X_i\}$

$2/X_{n,n} = \max\limits_{1 \leq i \leq n} \{X_i\}$

$3/X_{i,n} =$ *la* $i^{éme}$ *statistique d'ordre.*

1.1.7 Estimation de la densité par noyau

Il existe plusieurs méthodes d'estimation de la densité d'une v.a, il ya l'approche paramétrique et l'approche non paramétrique dans ce mémoire nous présentons la méthode la plus connue pour l'estimation non paramétrique qu'est l'estimation par noyau, c'est une généralisation de la méthode d'estimation par histogramme introduite par Parzen-Rozenblatt en 1962 elle se base sur un échantillon d'une population, elle dépend du paramètre de lissage h et un noyau.commençons par donner la définition de l'estimation de la densité par noyau (voir [12]) :

Définition 1.1.15 *Un noyau k est une fonction mesurable, intégrable définie de $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tel que :*

1. $\sigma_k^2 = \int\limits_{\mathbb{R}} x^2 k(x)\, dx < \infty$
2. $\mu_k = \int\limits_{\mathbb{R}} x k(x)\, dx = 0$

Définition 1.1.16 *Soit $k : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et $h > 0$ l'estimateur à noyau de f est :*

$$\widehat{f}_n(x) \frac{1}{nh} \sum_{k=1}^{n} k\left(\frac{X_k - x}{h}\right),$$

où k est le noyau et h est une fenêtre de lissage.

Lemme 1.1.1 *Si le noyau k est positif et $\int\limits_{\mathbb{R}} k(x)dx = 1$, alors l'estimateur $\widehat{f}_n$ est une densité de probabilité. De plus $\widehat{f}_n$ est continue si k est continue.*

Exemple 1.1.2 *Exemple de noyaux les plus utilisés dans l'estimation de la densité :*

1. *Noyau Gaussien* :

$$k(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{1}{2}x^2\right), x \in \mathbb{R}$$

2. *Noyau Triangulaire* :

$$k(x) = (1- \mid x \mid) \mathbf{1}_{(|x|<1)}$$

3. *Noyau Rectangulaire* :

$$k(x) = \frac{1}{2}\mathbf{1}_{(|x|<1)}$$

4. *Noyau d'Epanechnikov* :

$$k(x) = \frac{3}{4}\left(1 - x^2\right)\mathbf{1}_{(|x|<1)}$$

5. *Noyau Quadratique (Biweight) :*

$$k(x) = \frac{15}{16}\left(1 - x^2\right)^2 \mathbf{1}_{(|x|\leq 1)}$$

En plus du noyau l'estimation dépend d'un paramètre de lissage définie comme suit :

Définition 1.1.17 *Le paramètre de lissage h est un paramètre qui dépend de n c'est à dire :*

$$h = h(n), pour\ n \in \mathbb{N}^*$$

Remarque 1.1.7 *Pour assurer la convergence de $\widehat{f}_n$vers f les conditions suivantes sont imposées :*

$$biais\left(\widehat{f}_n\right) \to 0\ quand\ (h \to 0)$$

$$V\left(\widehat{f}_n\right) \to 0\ quand\ (nh \to \infty)$$

Remarque 1.1.8 [7]*Le noyau k détermine la forme du voisinage autour du point x et h contrôle la taille de ce voisinage.*

1.2 Mesures de risque

Une mesure de risque est un outil important pour contrôler et mesurer le risque dans n'importe qu'elle etablissement surtout les etablissements financiérs . Dans cette section notre but est de donner quelques éléments fondamentaux sur la théorie de mesure du risque , on introduit la définition de la fonction de perte et du risque, ainsi que quelques propriétés associées

1.2.1 Fonction de perte et le risque d'un estimateur

Avant d'entamer le travail sur la mesure de risque, commençonsd'abord par donner la définition générale de la fonction de perte et le risque [10]

Définition 1.2.1 *La fonction de perte (de coût) pour le modèle* X *de* $(\Omega, \mathcal{F}, \{F_\theta, \theta \in \Theta\})$ *est une fonction mesurable de* $(\Theta \times \Theta)$ *à valeurs réelles positives :*

$$L\left(\theta, \widehat{\theta}\right) : \Theta \times \Theta \to \mathbb{R}_+$$

$L\left(\theta, \widehat{\theta}\right)$ *est vue comme une distance entre* $\widehat{\theta}$ *et* θ

– *Perte absolu :* $L\left(\theta, \widehat{\theta}\right) = \mid \theta - \widehat{\theta} \mid .$

– *Perte quadratique :* $L\left(\theta, \widehat{\theta}\right) = \left(\theta - \widehat{\theta}\right)^2 .$

Définition 1.2.2 *Un risque est une v.a.r définie sur* $(\Omega, \mathcal{F})$ *par :*

$$R\left(\theta, \widehat{\theta}\right) = \mathbb{E}\left(L\left(\theta, \widehat{\theta}(X)\right)\right) = \int L\left(\theta, \widehat{\theta}(x)\right) dF_\theta(x) .$$

Remarque 1.2.1 *Pour les opérations bancaires on utilise des v.a de gain* $(X > 0)$, *mais dans le domaine de l'assurance on utilise l'inverse , il est habituellement approprié de supposer que la perte* $(X < 0)$ *est négative.*

1.2.2 Mesures de risque

La définition et les différentes propriétées d'une mesure de risque sont presentés dans cette partie (voir [3] et [1])

Définition 1.2.3 *Une mesure de risque* $\rho(X)$ *(éventuellement infinie) est une fonctionnelle qui* *attribue une valeur réelle à la variable aléatoire X des pertes associées à un risque tel que :*

$$\begin{aligned} \rho : \quad & \mathcal{X} \to \mathbb{R} \\ & X \to \rho(X) \end{aligned}$$

Où $\mathcal{X}$ l'ensemble de v.a de pertes réelles définies sur un espace mesurable $(\Omega, \mathcal{F})$,$\mathcal{X}$ contient les constantes et est stable par l'addition et la multiplication par un scalaire.

Exemple 1.2.1 *Quelques mesures de risques :*

1. *L'ecart type (déviation) : est une mesure de dispersion d'une variable aléatoire autour de sa moyenne.*
2. *Value at risk ($VaR(X, \alpha)$) : le quantile d'ordre α de X pour une probabilitée $\mathbb{P}$ sur $(\Omega, \mathcal{F})$ donnée.*

Définition 1.2.4 *On dit que ρ est une mesure de risque monétaire si elle vérifie :*

1. *ρ est croissante :*
$$X \geq Y \Rightarrow \rho(X) \geq \rho(Y).$$
2. *Invariante par translation :*
$$\rho(X + c) = \rho(X) + c, \forall c \in \mathbb{R}.$$

Définition 1.2.5 *On dit que ρ est convexe si :*

$$\rho(\lambda X + (1 - \lambda) Y) \leq \lambda \rho(X) + (1 - \lambda) \rho(Y), \forall \lambda \in [0, 1].$$

Définition 1.2.6 *ρ est positivement homogène si :*

$$\rho(\theta X) = \theta \rho(X), \forall \theta \in \mathbb{R}_+.$$

Définition 1.2.7 *On dit aussi que ρ est sous additive si :*

$$\rho\left(X+Y\right)\leq\rho\left(X\right)+\rho\left(Y\right).$$

Lemme 1.2.1 *Si ρ est une mesure de risque monétaire positivement homogène, alors elle est convexe si et seulement si elle est sous additive*

Définition 1.2.8 *Une mesure du risque ρ est dite cohérente si elle vérifie les propriétés suivantes :*

$\mathbf{A}_{1.}$ *Invariante par translation*

$\mathbf{A}_2$ Croissante

$\mathbf{A}_3$ *Positivement homogène*

$\mathbf{A}_4$ *Sous-additive*

Ces axiomes sont intérprétés de la façon suivante :

Axiome1. Cet axiome signifie que l'ajout d'un montant fixe à un risque va changer la valeur de mesure du risque par le même montant.

Axiome2. Cet axiome signifie que si le risque Y est plus grand que le risque X, alors les mesures correspondantes doivent satisfaire à la même inégalité.

Axiome3. Cet axiome signifie lorsque l'investissement est multiplié, par conséquent le risque est également multiplié

Axiome4. Cet axiome est d'intégrer l'idée de diversification c'est à dire : Le risque d'un portefeuille comprenant des investissements en X et Y est aussi plus grand que la somme des risques individuels.

Définition 1.2.9 *Le vecteur aléatoire (X_1, X_2), de fonctions de répartition marginales F_1, F_2 (resp), est un vecteur comonotone s'il existe une variable aléatoire U de loi uniforme sur $[0,1]$; telle que (X_1, X_2) a la même loi que $\left(F_1^{-1}\left(U\right), F_2^{-1}\left(U\right)\right)$*

Définition 1.2.10 *On appelle mesure de risque comonotone additive toute mesure de risque ρ telle que :*

$$\rho\left(X+Y\right)=\rho\left(X\right)+\rho\left(Y\right).$$

Remarque 1.2.2 *Une mesure de risque ρ contient un chargement de sécurité si pour tout risque X, on a :*

$$\rho\left(X\right)\geq\mathbb{E}\left(X\right).$$

Corollaire 1.2.1 *Si ρ est une mesure de risque monétaire et homogène, et normalisée à* 0 $(\rho(0)=0)$ *alors la convexité et la sous-additivité sont des notions équivalentes.*

Chapitre 2

Estimation paramétrique et non paramétrique de la VaR

2.1 La Value at Risk

Au début des années 90, la VaR est apparue comme mesure de risque en réponse à de nombreuses catastrophes et crises qui ont touchés les marchés financiérs (les banques et les compagnies d'assurance) en cette période . Dans ce chapitre nous allons présentés les propriétés élémentaires de la VaR ainsi que quelques mesures de risques alternatives à la VaR, la fin de ce chapitre est consacrée aux méthodes d'estimations de la VaR.

2.1.1 l'origine de la VaR

Le concept de la VaR est apparue pour la première fois à la banque J.P Morgan, lorsque le président de la banque Dennis Witherstone a demandé au personnel de la banque de lui apporter un rapport quotidien sur les pertes au cours des 24 prochaines heures (rapport 4.15) le personnel a collecte ces risques dans une seule mesure de risque "VaR"

La VaR a eu un impact particulièrement positif sur les institutions financières en 1990 et a été mise en évidence lors de la conférence J.P Morgan de 1993 pour plus de détails voir [6]

2.1.2 Définition et propriétés

La définition qui est le plus souvent utilisée pour la VaR est la suivante (3) :

Définition 2.1.1 *En terme mathématique la Value at risk* $(VaR(X,\alpha))$ *c'est le quantile d'ordre* α *de* X *pour une probabilité* $\mathbb{P}$ *sur* $(\Omega, \mathcal{F})$ *donnée définie par :*

$$\begin{aligned} VaR(X,\alpha) &= Inf\,\{x, \mathbb{P}(X \leq x) \geq \alpha\} \\ &= Inf\,\{x, F_X(x) > \alpha\} = F_X^{-1}(\alpha) = x_\alpha. \end{aligned}$$

Remarque 2.1.1 *La* VaR *dépend de trois données essentielles :*

- *Le niveau de confiance* (95% *ou* 99% *en général*).
- *La loi de distribution des pertes.*
- *L'horizon temporel* (*l'horizon est long* = *la perte est grande*).

Remarque 2.1.2 *Certains auteurs notent* $VaR(X,\alpha)$ *le quantile d'ordre* $1-\alpha$.

Lemme 2.1.1 [4] $\forall \alpha \in [0,1]$, *si* g *est strictement croissante et continue à gauche alors :*

$$VaR(g(X),\alpha) = F_{g(X)}^{-1}(\alpha) = g(F_X^{-1}(\alpha)) = g(VaR(X,\alpha))$$

Alors que si g *est fonction strictement décroissante, continue à droite et si* F_X *est bijective*

$$VaR(g(X),\alpha) = F_{g(X)}^{-1}(\alpha) = g(F_X^{-1}(1-\alpha)) = g(VaR(X,1-\alpha)).$$

Proposition 2.1.1 *La* VaR *est une mesure de risque comonotone additive mais n'est pas sous additive .*

Exemple 2.1.1 *On peut citer les risques indépendants suivant des lois de Pareto,* $X \sim Par(1,1)$ *et* $Y \sim Par(1,1)$ *c-à d*

$$\mathbb{P}(X > t) = \mathbb{P}(Y > t) = \frac{1}{1+t}, t > 0.$$

Alors

$$VaR(X,\alpha) = VaR(Y,\alpha) = F_X^{-1}(\alpha) = F_Y^{-1}(\alpha) = \frac{1}{1-\alpha} - 1.$$

De plus, on peut ecrire :

$$P(X+Y \leq t) = 1 - \frac{2}{2+t} + 2\frac{\ln(1+t)}{(2+t)^2}, t > 0.$$

Or

$$P[X+Y \leq 2VaR(X,\alpha)] = \alpha - \frac{(1-\alpha)^2}{2}\ln\left(\frac{1+\alpha}{1-\alpha}\right) < \alpha.$$

Donc $\forall\alpha$

$$VaR(X,\alpha) + VaR(Y,\alpha) < VaR(X+Y,\alpha).$$

2.1.3 Avantages de la VaR

C'est les institutions financiéres qui viennent en premiére position dans l'utilisation de La VaR qui donnent une attention considérable à cette valeurs utile dans la détermination du seuil de risque pour les institutions financières et les investisseurs qui y sont actifs, mais au-delà de cela, elle s'applique à d'autres domaines en raison des nombreux avantages qui en découlent, notamment :

1. Permet de mesurer différents risques sur différents marchés et pour différents actifs à risque
2. Résume tous les risque en un seul cas par rapport à des mesures traditionnelles du risque comme la déviation standard et le degré de sensibilité ne donnent pas une perception de l'ampleur des pertes possibles mais simplement une information sur le pourcentage de la déviation du prix ou rendement de l'actif par rapport à sa moyenne
3. Développer une évaluation quantitative de la perte
4. Fournir des rapports externes et internes aux autorités de surveillance
5. Tient compte de tous les facteurs de risques possibles (la volatilité, la corrélation, la convexité...)
6. Une procédure adaptée à de nombreux risques

2.1.4 Inconvénients de la VaR

Malgré l'intérêt suscité par la VaR,celle-ci présente certains inconvénients . Nous mentionnons les plus importants :

1. La VaR n'est pas une mesure de risque sous-additive car la VaR du portefeuille total est inferieure à la somme des VaR des portefeuilles qui le compose, ce-ci implique que la VaR n'est pas une mesure de risque cohérente au sens de P.Artzner et al
2. La VaR correspond à un quantile donné car elle ne donne pas des valeurs précises pour les risques au-delà de cette quantité.

2.1.5 Mesures alternatives à la VaR

En dépit des avantages dont dispose la VaR et de l'utilisation généralisée par les investisseurs et les institutions financières pour sa facilité et l'estimation quantitative de la perte avec un certain niveau de probabilité, et sur une certaine période, elle présente des inconvénients .

Pour remédier à ces défauts nous présentons trois approches dont l'idée commune est de quantifier le risque lorsque la VaR est dépassé :

1. La Tail-Value at Risk ($TVaR$).
2. La Conditionnel Tail Expectation (CTE).
3. L'Expected Shortfall (ES).

Nous définissons précisément ces mesures ci-dessous d'aprés ([1] et [3])

La Tail-Value at Risk (TVaR)

Définition 2.1.2 *La Tail-Value at Risk* ($TVaR(X, \alpha)$) *c'est la moyenne des* VaR *de niveau supérieur à* α *définie par :*

$$TVaR\,(X;\alpha) = \frac{1}{1-\alpha}\int_{\alpha}^{1} VaR\,(X,t)\,dt.$$

$$= \frac{1}{1-\alpha} \int_{\alpha}^{1} x_{\alpha}(t)\, dt.$$

Remarque 2.1.3 [9]*Il existe une fonction de répartition* $\tilde{F}_X$ *(transformée de Hardy-Littlewood de* F_X*) telle que* $\forall \alpha$,

$$\tilde{F}_X^{-1}(\alpha) = TVaR(X, \alpha)$$

Si $\tilde{X}$ *a pour loi* $\tilde{F}$

$$TVaR(X, \alpha) = VaR(\tilde{X}, \alpha).$$

La $TVaR$ *de* X *est donc la* VaR *de la transformée de Hardy-Littlewood de* X*. Notons que* $TVaR(X, 0) = \mathbb{E}[X]$*.Et comme*

$$TVaR(X, \alpha) = \frac{1}{1-\alpha} \left\{ \mathbb{E}(X) - \int_{0}^{\alpha} VaR(X, t)\, dt \right\}.$$

On en déduit que la $TVaR$ *est une fonction croissante en* α *De plus*

$$TVaR(X, \alpha) \geq TVaR(X, 0) = \mathbb{E}(X).$$

$\Rightarrow$ *La* $TVaR$ *contient toujours un chargement de sécurité*

Proposition 2.1.2 *La* $TVaR$ *est comonotone additive :*

$$TVaR(X+Y, \alpha) = TVaR(X, \alpha) + TVaR(Y, \alpha).$$

La Conditionnel Tail Expectation (CTE)

Définition 2.1.3 (L'espérance conditionnelle de queue) *Notée par* $(CTE(X, \alpha))$ *c'est l'espérance conditionnelle de la perte attendue* X_i *sachant que celle-ci dépasse la* VaR *au même niveau* α *définie par :*

$$CTE(X, \alpha) = \mathbb{E}(X/X > VaR(X, \alpha).)$$

Définition 2.1.4 (La valeur en risque conditionnel) *Notée $CVaR(X,\alpha)$ et définie par :*

$$\begin{aligned}CVaR(X,\alpha) &= \mathbb{E}\left[X - VaR(X,\alpha)/X > VaR(X,\alpha)\right] \\ &= \mathbb{E}\left[X/X > VaR(X,\alpha)\right] - \mathbb{E}\left[VaR(X,\alpha)/X > VaR(X,\alpha)\right] \\ &= CTE(X,\alpha) - VaR(X,\alpha).\end{aligned}$$

L'Expected Shortfall (ES)

Définition 2.1.5 (L'Expected shortfall) *C'est la prime stop-loss dont la franchise est $VaR(X,\alpha)$ notée $(ES(X,\alpha))$ et définie par :*

$$ES(X,\alpha) = \mathbb{E}\left[(X - VaR(X,\alpha))_+\right].$$

$(X - VaR(X,\alpha))_+ = \max(X - VaR(X,\alpha), 0)$.

La proposition suivante montre la relation entre VaR, $TVaR$, CTE et ES

Proposition 2.1.3 *Quel que soit le niveau de probabilité $\alpha \in [0,1]$ les identités suivantes sont vérifiées :*

$$TVaR(X,\alpha) = VaR(X,\alpha) + \frac{1}{1-\alpha} ES(X,\alpha).$$

$$CTE(X,\alpha) = VaR(X,\alpha) + \frac{1}{\overline{F}_X(VaR(X,\alpha))} ES(X,\alpha).$$

Remarque 2.1.4 *$\overline{F}_X$ est la fonction de survie tel que :*

$$\overline{F}_X(x) = 1 - F_X(x) = \mathbb{P}(X > x).$$

Proposition 2.1.4 *La CTE et la $TVaR$ coïncident pour des risques dont la fonction de répartition est continue*

$$CTE(X,\alpha) = TVaR(X,\alpha), \alpha \in [0,1]$$

La $TVaR$ est invariante par translation et homogène.De la même manière, l'homogénéité de la VaR garantit l'homogénéité de la $TVaR$.

Lemme 2.1.2 *Soient le risque X et le niveau de perte α tels que $\bar{F}_X(\alpha) > 0$ Quel que soit l'événement aléatoire Z tel que $\mathbb{P}(Z) = \bar{F}_X(\alpha)$ on a $\mathbb{E}(X/Z) \leq \mathbb{E}(X/X > \alpha)$.*

Cette proposition garantie que la $TVaR$ est sous-additive lorsque les risques sont continus (la $TVaR$ et la CTE coïncident)

$$\begin{aligned}
TVaR(X+Y,\alpha) &= \mathbb{E}[X/X+Y > VaR(X+Y,\alpha)] + \mathbb{E}[Y/X+Y > VaR(X+Y,\alpha)] \\
&\leq \mathbb{E}[X/X > VaR(X,\alpha)] + \mathbb{E}[Y/Y > VaR(Y,\alpha)] \\
&= TVaR(X,\alpha) + TVaR(Y,\alpha)
\end{aligned}$$

De la même manière, la $TVaR$ est monotone puisque lorsque $\mathbb{P}[X \leq Y] = 1$

$$\begin{aligned}
TVaR(Y,\alpha) &= \mathbb{E}[Y/Y > VaR(Y,\alpha)] \\
&\geq \mathbb{E}[Y/X > VaR(X,\alpha)] \\
&\geq \mathbb{E}[X/X > VaR(X,\alpha)] = TVaR(X,\alpha)
\end{aligned}$$

Proposition 2.1.5 *La $TVaR$ est cohérente pour les risques continus, et coïncide alors avec la CTE*

Proposition 2.1.6 *La $TVaR$ est la plus petite mesure de risque majorant la VaR qui soit cohérente*

2.2 Estimation paramétrique et non paramétrique de la VaR

Il existe de nombreuses méthodes et techniques d'estimations de la value at risk, dont le but est de fournir des méthodes plus utilisées pour trouver des solutions aux problèmes en général.

Dans cette section nous allons nous intéresser aux deux différentes méthodes d'estimations de la VaR

– Estimation paramétrique.

– Estimation non paramétrique

l'estimation du VaR à partir d'un échantillon indépendant (voir [3])

2.2.1 Estimation paramétrique de la VaR

Hypothèse classique en finance : rendements gaussiens.

Si $X \sim N(m, \sigma)$ on a :

$$\mathbb{P}(X \leq VaR(X, \alpha)) = \alpha \Leftrightarrow \mathbb{P}\left(\frac{X - m}{\sigma} \leq \frac{VaR(X, \alpha) - m}{\sigma}\right) = \alpha$$

D'apres le théorème central limite (1.1.2)on a :

$$\frac{X - m}{\sigma} \sim N(0, 1)$$

Alors la VaR de niveau α est

$$VaR(X, \alpha) = m + \sigma\phi^{-1}(\alpha)$$

Où ϕ désigne la fonction de répartition de la loi normale centré réduite $N(0, 1)$ et ϕ^{-1} sa fonction réciproque.

Remarque 2.2.1 $\phi^{-1}(\alpha)$ *est tabulé c'est à dire égale à :*-1.64 *si* $\alpha = 0.05,$ *et égale à* -2.32 *si* $\alpha = 0.01,$ *et* -3.09 *si* $\alpha = 0.001$

Exemple 2.2.1 *Modèle Gaussien intéressant pour les risques agrégés dans des modèles à facteurs. Supposons que* $X_1, \cdots, X_d$ *soient* d *risques et que*

$$X_i = a_i + b_i Z + \varepsilon_i, i = 1, ..., d$$

Où les bruits ε_i *sont supposés indépendants entre eux et de* Z *, avec* $\varepsilon_i \sim N(0, \sigma_i^2)$ *et* $Z \sim N(0,1)$ *, alors* $X = X_1 + X_2 + ... + X_d$ *est gaussien . De plus, les* VaR *pour chacuns des risques sont.*

$$VaR(X_i, \alpha) = a_i + \phi^{-1}(\alpha)\sqrt{\sigma_i^2 + b_i^2}$$

mais surtout

$$VaR(X, \alpha) = a + \phi^{-1}(\alpha)\sqrt{\sigma^2 + b^2}$$

Où $a = a_1 + a_2 + ... + a_d$, $b = b_1 + b_2 + ... + b_d$, $\sigma^2 = \sigma_1^2 + \sigma_2^2 + ... + \sigma_d^2$

Définition 2.2.1 *Etant donné un échantillon* $(X_1, ..., X_n)$*,l'estimateur gaussien de la* VaR *de niveau* α *est*

$$\widehat{VaR}(X, \alpha) = \widehat{m} + \widehat{\sigma}\phi^{-1}(\alpha)\,; \widehat{m} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i, \widehat{\sigma} = \sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \widehat{m})^2}$$

Toutefois, il peut être intéressant d'utiliser des approximations :

$$VaR(X; \alpha) \sim \mathbb{E}(X) + Z_\alpha\sqrt{\mathbb{V}(X)}$$

Où

$$\widehat{Z}_\alpha = \phi^{-1}(\alpha) + \frac{C_1}{6}\left[\phi^{-1}(\alpha)^2 - 1\right] + \frac{C_2}{24}\left[\phi^{-1}(\alpha)^3 - 3\phi^{-1}(\alpha)\right] - \frac{C_1^2}{36}\left[2\phi^{-1}(\alpha)^3 - 5\phi^{-1}(\alpha)\right]$$

Où C_1 *désigne le skewness de* X *et* C_2 *le kurtosis en excès*

$$C_1 = \frac{\mathbb{E}\left[(X - \mathbb{E}(X))^3\right]}{\mathbb{E}\left[(X - \mathbb{E}(X))^2\right]^{3/2}}, C_2 = \frac{\mathbb{E}\left[(X - \mathbb{E}(X))^4\right]}{\mathbb{E}\left[(X - \mathbb{E}(X))^2\right]^2} - 3$$

Définition 2.2.2 *Etant donné* $(X_1, ..., X_n)$*,un echantillon i.i.d l'estimation de Cornish-Fisher de la* VaR *de niveau* α *est alors :*

$$\widehat{VaR}(X, \alpha) = \widehat{m} + Z_\alpha\widehat{\sigma}$$

Où

$$Z_\alpha = \phi^{-1}(\alpha) + \frac{\widehat{C}_1}{6}\left[\phi^{-1}(\alpha)^2 - 1\right] + \frac{\widehat{C}_2}{24}\left[\phi^{-1}(\alpha)^3 - 3\phi^{-1}(\alpha)\right] - \frac{\widehat{C}_1^2}{36}\left[2\phi^{-1}(\alpha)^3 - 5\phi^{-1}(\alpha)\right]$$

Avec $\widehat{C}_1$ l'estimateur usuelle du skewness, et $\widehat{C}_2$ l'estimateur usuelle du kurtosis

$$\widehat{C}_1 = \frac{n\sqrt{(n-1)}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \widehat{m})^3}{(n-2)\left[\sum_{i=1}^{n}(X_i - \widehat{m})^2\right]^{3/2}}, \widehat{C}_2 = \frac{n-1}{(n-2)(n-3)}\left[(n+1)\left[\frac{n\sum_{i=1}^{n}(X_i - \widehat{m})^4}{\left[\sum_{i=1}^{n}(X_i - \widehat{m})^2\right]^2} - 3\right] + 6\right]$$

Remarque 2.2.2 *De manière plus générale, si $F_X \in \mathcal{F} = \{F_\theta, \theta \in \Theta\}$ continue , $\widehat{VaR}(X,\alpha) = F_\theta^{-1}(\alpha)$, et donc un estimateur naturel de la VaR de niveau α est alors définie par :*

$$\widehat{VaR}(X,\alpha) = F_{\widehat{\theta}}^{-1}(\alpha).$$

Où $\widehat{\theta}$ est un estimateur de θ (par maximum vraisemblance, par la méthode des moments, etc ...).

2.2.2 Estimation non paramétrique de la VaR

Les modéles paramétrique donnent des calculs simples et rapides mais induisent inévitablement des erreurs de modèles, et pour éviter ces erreurs dans le choix de la famille paramétrique $\mathcal{F}$, il est nécessaire d'envisager des estimateurs non paramétriques qui sont définies par :

Définition 2.2.3 *La fonction VaR empirique, construite à partir de $(X_1, ..., X_n)$*

$$\widehat{VaR}(X,\alpha) = Inf\{x, F_n(x) \geq \alpha\} = F_n^{-1}(\alpha).$$

Tenant compte du fait que F_n est une fonction en escalier continue à gauche, on notera que :

$$\widehat{VaR}(X,\alpha) = X_{i,n} \text{ où } \frac{i-1}{n} < \alpha \leq \frac{i}{n}.$$

Remarque 2.2.3

$$\widehat{VaR}(X,\alpha)=\begin{cases}\frac{1}{2}\left(X_{n\alpha,n}+X_{n\alpha+1,n}\right) & si\ n\alpha\in\mathbb{N}\\ X_{[n\alpha]+1,n} & sinon\end{cases}\quad \text{où } [.] \text{ est la partie entiere.}$$

Si $\alpha=\frac{1}{2}\Rightarrow\widehat{VaR}\left(X,\frac{1}{2}\right)$ *est la médiane empirique.*

Normalité asymptotique :

Proposition 2.2.1 *Si* $(X_1,...,X_n)$ *est un échantillon i.i.d. de loi absolument continue de densité* f*, et que* $f(VaR(X,\alpha))>0$ *, alors :*

$$\sqrt{n}\left[\widehat{VaR}(X,\alpha)-VaR(X,\alpha)\right]\xrightarrow{L}N\left(0,\frac{\alpha(1-\alpha)}{f^2(VaR(X,\alpha))}\right),\ lorsque\ (n\to\infty).$$

Proposition 2.2.2 *Si* $(X_1,...,X_n)$ *est un échantillon i.i.d. de loi absolument continue admettant une densité* f *telle que* $f(VaR(X,\alpha))>0$*, alors :*

$$\widehat{VaR}(X,\alpha)=VaR(X,\alpha)+\frac{\alpha-F_n(VaR(X,\alpha))}{f(VaR(X,\alpha))}+Z_n$$

où, presque sûrement, $Z_n=O\left(n^{-3/4}[\log n]^{1/2}\left[\log(\log n)^{1/4}\right]\right)$ *amélioré sous la forme* $Z_n=O\left(n^{-3/4}[\log(\log n)]^{3/4}\right)$

Définition 2.2.4 (Estimation a noyau de la VaR) *La fonction de répartition empirique lissée, construite à partir de* $(X_1,...,X_n)$ *est :*

$$F_n(x)=\int_{-\infty}^{x}f_n(t)\,dt$$

$$F_n(x)=\int_{-\infty}^{x}\frac{1}{nh}\sum_{i=1}^{n}k\left(\frac{X_i-t}{h}\right)dt$$

$$F_n(x)=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}K\left(\frac{X_i-x}{h}\right).$$

Où $K(x) = \int\limits_{-\infty}^{x} k(t)\,dt$, k étant un noyau et $h > 0$,alors la VaR estime par noyau est :

$$\widehat{VaR}(X,\alpha) = F_n^{-1}(\alpha)$$

Définition 2.2.5 (Sheater et Morran 1990) [12]

$$\widehat{VaR}(X,\alpha) = \sum_{k=1}^{n} X_{i,n} \int\limits_{\frac{i-1}{n}}^{\frac{i}{n}} k\left(\frac{t-\alpha}{h}\right) dt$$

$$\widehat{VaR}(X,\alpha) = \sum_{i=1}^{n} \left[K\left(\frac{\frac{i}{n}-\alpha}{h}\right) - K\left(\frac{\frac{i-1}{n}-\alpha}{h}\right)\right] X_{i,n}.$$

Définition 2.2.6 (Harrell-Davis) [3]

$$\widehat{VaR}(X,\alpha) = \sum_{i=1}^{n} \left[\int\limits_{\frac{i-1}{n}}^{\frac{i}{n}} \frac{1}{B\left[(n+1)\alpha,(n+1)\beta\right]} y^{[(n+1)\alpha]-1} (1-y)^{[(n+1)\beta]-1}\, dy\right] X_{i,n}$$

$$\widehat{VaR}(X,\alpha) = \sum_{i=1}^{n} \left[\int\limits_{\frac{i-1}{n}}^{\frac{i}{n}} \frac{\Gamma(n+1)}{\Gamma\left[(n+1)\alpha\right]\Gamma\left[(n+1)\beta\right]} y^{[(n+1)\alpha]-1} (1-y)^{[(n+1)\beta]-1}\, dy\right] X_{i,n}.$$

Chapitre 3

Application en finance

3.1 Estimation de la TVaR

3.1.1 Présentation de la compagnie d'assurance AXA

AXA est un groupe international français spécialisé dans l'assurance depuis sa création et dans la gestion d'actifs depuis 1994, il est la premiére marque mondiale d'assurance pour la 10^e année consécutive en 2018

AXA a été crée par Claude Bébear en 1817.

3.1.2 L'objectif :

L'objectif principal de cette étude est d'appliquer la simulation historique (HS)(non paramétrique) pour le calcul de la VaR et aprés le calcul de la $TVaR$

3.1.3 Données :

Les cours quotidiens de la compagnie d'assurance AXA qui sont observé pour la période allaut du 21/4/2017 au 21/4/2019.

Définition 3.1.1 *Le rendement journalier (hebdomadaire, mensuel, ...) d'un actif financier est définie comme suit :*

$$P_t = \ln\left(\frac{P_t}{P_{t-1}}\right), t > 0$$

Où P_t la valeur de l'actif à la date t.

Définition 3.1.2 *La VaR historique est :*

$$VaR = W_0 Quantile\,(1-\alpha, HR)$$

Où

HR :represente les rendements historique

$W_{0:}$ est la valeur du portfeuille au moment du calcul

Remarque 3.1.1 *Si la période de détention et superieure à 1 jour on doit la multiplier par $\sqrt{N}$ (la période de détention)*

3.1.4 À l'aide du logiciel R

Calcul des rendements d'AXA :

Le graphe des rendements quotidiens d'AXA du 21/4/2017 au 21/4/2019 :

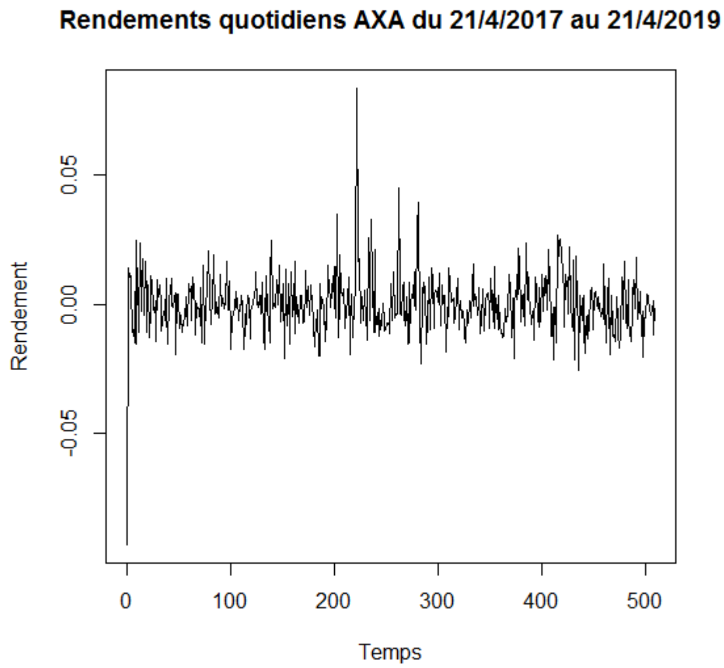

FIG. 3.1 – Rendements journalière de la compagnie d'assurance AXA

La statistique des rendements d'AXA :

Le tableau ci-dessus donne la statistique des rendements d'AXA :

	AXA
Min	**-0.0928000**
1^{er}quantile	**-0.0068570**
Mediane	**-0.0004614**
Moyenne	**-0.0000327**
$3^{éme}$quantile	**0.0057930**
Max	**0.0834700**
Kurtosis	**15.9007**
Skewness	**0.1224513**

TAB. 3.1 – Statistique de série des rendements

Dans cette table (voir le tableau [3.1]) nous notons que le skewness est superieure à 0, signifie que la distribution de densité des rendements s'est écarté vers la droite.Ainsi, nous pouvons dire que la distribution des rendements a une asymétrie positive.De même manière,nous constatons que le kurtosis, qui est dans notre cas supérieur à 3.

Tests de normalité des rendements d'AXA :

La fréquance de histogramme et QQplot permettent de déterminer si les rendements du cours de l'action AXA satisfont l'hypothèse de normalité.

Par QQplot : le graphe de test de normalité des rendements par QQplot :

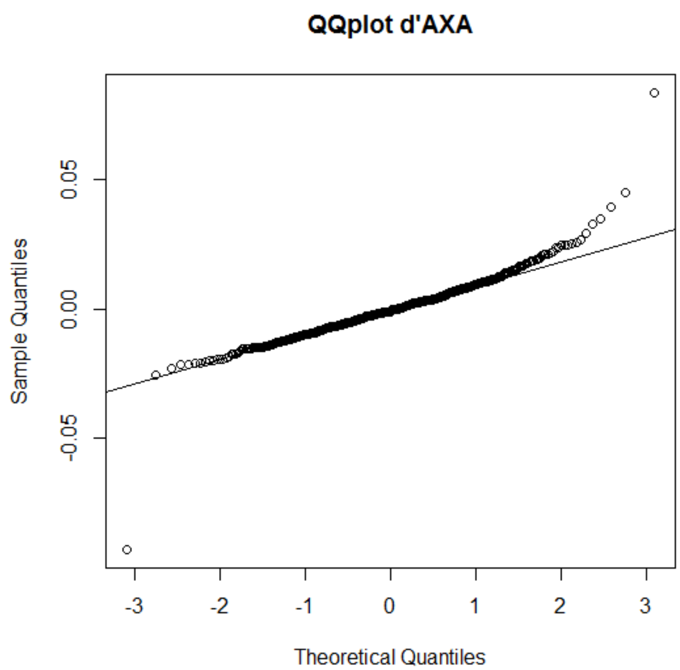

FIG. 3.2 – Test graphique de la normalite de série des rendements par QQplot

La tendance clairement non linéaire du QQ plot des rendements (voir le figure [3.2]) nous permet à première vue de rejeter l'hypothèse de normalité.des rendements

Par histogramme : le graphe de test de normalité des rendements par histogramme :

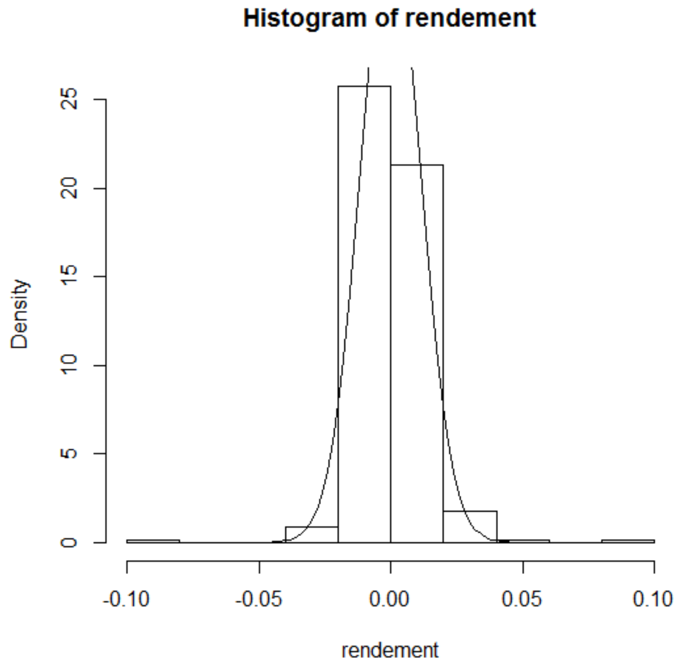

FIG. 3.3 – Test graphique de la normalite de série des rendements par histogramme

D'aprés la comparaison entre l'histogramme des rendements et la courbe de la loi normale (le paramétre de cette loi etant calcules à partir des rendements) (voir le figure [3.3]), nous trouvons que les rendements du cours de l'action AXA ne satisfont pas l'hypothèse de normalité

Calcul de la VaR :

le tableau suivant donne les valeurs de la VaR au niveau de confiance entre 1% et 10% :

α	$VaR - historique$
1%	-0.02127491
2.5%	-0.01951083
5%	-0.01521317
7.5%	-0.01437868
10%	-0.0126081

TAB. 3.2 – la VaR au niveau de confiance différents

Pour un taux de couverture $\alpha = 1\%$,la $\widehat{VaR}(1\%)$ est :

$$\widehat{VaR}(1\%) = -0.02127491.(\text{voir le tableau } [3.2]).$$

C'est à dire si l'on dispose d'un portefeuille d'actions AXA d'un montant total d'1 million d'euros,si l'on détient ce portefeuille d'actions pendant 1 journée, il y a 1% de risque de

réaliser une perte au moins égale à 21275 euros.

Pour un taux de couverture $\alpha = 5\%$,la $\widehat{VaR}(5\%)$ est :

$$\widehat{VaR}(5\%) = -0.01521317.(\text{voir le tableau } [3.2]).$$

C'est à dire si l'on dispose d'un portefeuille d'actions AXA d'un montant total d'1 million d'euros,si l'on détient ce portefeuille d'actions pendant 1 journée, il y a 5% de risque de

réaliser une perte au moins égale à 15213 euros.

Calcul de la TVaR

le tableau suivant donne les valeurs de la $TVaR$ au niveau de confiance entre 1% et 10% :

α	$TVaR - historique$
1%	0.0002897307
2.5%	0.0005819411
5%	0.001058406
7.5%	0.001497191
10%	0.001889493

Tab. 3.3 – La TVaR au niveau de confiance différents

Pour un taux de couverture $\alpha = 1\%$,la $\widehat{TVaR}\,(1\%)$ est :

$$\widehat{TVaR}\,(1\%) = 0.0002897307.(\text{voir le tableau [3.3]}).$$

C'est à dire si l'on dispose d'un portefeuille d'actions AXA d'un montant total d'1 million d'euros,si l'on détient ce portefeuille d'actions pendant 1 journée, il y a 1% de risque de

réaliser une perte au moins égale à 289 euros.

Pour un taux de couverture $\alpha = 5\%$,la $\widehat{TVaR}\,(5\%)$ est :

$$\widehat{TVaR}\,(5\%) = 0.001058406.(\text{voir le tableau [3.3]}).$$

C'est à dire si l'on dispose d'un portefeuille d'actions AXA d'un montant total d'1 million d'euros,si l'on détient ce portefeuille d'actions pendant 1 journée, il y a 5% de risque de

réaliser une perte au moins égale à 1058 euros

Conclusion

Les mesures de risque jouent aujourd'hui un rôle important dans les opérations financiéres en particulier la gestion des investissements

Dans ce mémoire nous avons discutées quelques unes des mesure de risque les plus utilisées par les institutions financiéres telles la VaR et la $TVaR$ et leurs méthodes d'estimation paramétrique et non paramétrique

Dans la partie pratique nous avons utilisées l'une des méthode non paramétrique est la simulation historique pour estimer la VaR et aprés la $TVaR$ et à la fin de ce travail , nous signalons que la méthodes d'estimations de la $TVaR$ sont dans la recherche jusqu'a maintenantt par les experts dans la gestion de risque pour réaliser les profits et eviter les pertes.

Pour cela on peut conclure que chaque mesure de risque offre ses propres avantages et inconvénients. En outre, on peut dire qu'il n'existe pas de mesure de risque universelle qui soit meilleure que toutes les autres ou qui soit pertinente à toutes les situations.

Bibliographie

[1] Belkair, N., Brahmi, C. (2016). Sur les mesures de risque. Université.A Mira Bejaïa.

[2] Benatia, F. (2018). Valeurs extrême. Université Biskra.

[3] Charpentier, A. (2010). Mesures de risque Université Rennes1- academia.edu.

[4] Charpentier, A. (2008). Value at risk et probabilitée de ruine, entre vaccination et banque d'affaires. Risques, 76 : $103-106$.

[5] Christophe, B, J. (2009). Probabilités. Université Rochelle.

[6] Dowd, K. (2005). Measuring market risk. Second edition.

[7] Hadj Amar, K., Kalfi, N. (2016). Etude comparative des méthodes de sélection du paramètre de lissage dans l'estimation de la densité de probabilité par la méthode du noyau. Université M'hamed Bougara Boumerdes.

[8] Hafayed, M. (2017). Probabilité approfondie. Université biskra.

[9] Hardy, G, H., and Littlewood, J, E. (1930). A maximal theorem with function-theoretic applications.Acta Math. 54(1) : $81-116$.

[10] Rousseau, J. ($2009-2010$). Statistique Bayésienne notes de cours. Ensae ParisTech.

[11] Saporta, G. (2006). Probabilités analyse des données et statistique. Edition Technip.

[12] Yahia, D. (2018). Statistique non paramétrique. Université Biskra.

Annexe : Abréviations et Notations

Les différentes abréviations et notations utilisées tout au long de ce mémoire sont expliquées ci-dessous :

$(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$	:	Espace probabilisé
$v.a$	:	Variable aléatoire
$v.a.r$	:	Variable aléatoire réelle
F_X	:	Fonction de répartition
F_n	:	Fonction de répartition empirique
$\mathbb{E}$	:	Espérance (moyenne)
$\mathbb{E}\,(/)$	:	Espérance conditionnel
$N\,(m, \sigma)$	:	Loi normale de moyenne m et variance σ
$\widehat{m}$	:	La moyenne empirique
$\widehat{\sigma}$	:	La variance empirique
$\widehat{f}_n$	:	L'estimation de la densité par noyau
k	:	Noyau
h	:	Paramatère de lissage
α	:	Niveau de confiance
VaR	:	Value at risk
$TVaR$	:	Tail-value at risk
CTE	:	Conditionnel expectation
ES	:	Expected shortfull
$CVaR$	:	Valeur en risque conditionnel