

République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

UNIVERSITÉ MOHAMED KHIDER, BISKRA

FACULTÉ des SCIENCES EXACTES et des SCIENCES de la NATURE et de la VIE

DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES



Mémoire présenté en vue de l'obtention du Diplôme :

MASTER en Mathématiques

Option : **Statistique**

Par

BRAHIMI Abir

Titre :

Loi de Pareto et Applications

Membres du Comité d'Examen :

Dr. BENATIA Fateh	UMKB	Président
Dr. YAHIA Djabrane	UMKB	Encadreur
Dr. TOUBA Sonia.	UMKB	Examineur

Juin 2019

DÉDICACE

Je dédie ce humble travail

À mes chers beaux parents Mokhtar et Bahtoune Akila.

À mes chères sœurs Afaf, Aziza et Oula.

À mes chers frères Atef et Imad.

A toute ma famille.

À tous mes amis et tous mes proches.

REMERCIEMENTS

*Je tiens à remercier sincèrement mon encadreur "**YAHIA Djabrane**", qui s'est toujours montré à l'écoute tous au long de la réalisation de ce mémoire, ainsi pour son grand soutien scientifique et moral, pour les suggestions et les encouragements.*

*Je remercie également les membres du Jury (Mr. **BENATIA** et Mme. **TOUBA**) pour avoir accepté d'examiner et d'évaluer mon travail.*

Je remercie aussi l'ensemble des enseignants et des professeurs du département de mathématiques.

Un grand merci à mes parents pour leur grand sacrifice et leur dévouement pour mon bonheur.

*Enfin, je remercie mes amis "**Roufida, Khadija, Maryam, Asma, Samah, Amel et Bouthaina**" et à toutes les personnes qui ont contribué de près ou de loin pour la réalisation de ce travail.*

Table des matières

Remerciements	ii
Table des matières	iii
Liste des figures	v
Introduction	1
1 La loi de Pareto	4
1.1 Généralités sur la famille de la loi de Pareto	4
1.1.1 Loi de Pareto standard	4
1.1.2 Loi de Pareto de type (<i>I</i>)	5
1.1.3 Loi de Pareto de type(<i>II</i>)	8
1.1.4 Loi de Pareto type (<i>III</i>)	9
1.1.5 Loi de Pareto de type (<i>IV</i>)	11
1.1.6 Loi de Feller-Pareto	12
1.1.7 Loi de Pareto généralisée	14
2 Propriétés et estimation	16
2.1 Propriétés de la loi de Pareto	16
2.2 Estimation des paramètres de la loi de Pareto	17
2.2.1 Estimation par la méthode du maximum de vraisemblance	17

2.2.2	Estimation par intervalle de confiance	21
3	Applications	24
3.1	Application à la théorie des valeurs extrêmes	25
3.1.1	Données réelles : Danish fire	26
3.1.2	Indice des valeurs extrêmes	28
3.2	Autres applications de la loi de Pareto	29
3.2.1	Estimation des quantiles	30
3.2.2	Estimation d'une probabilité	31
	Conclusion	33
	Bibliographie	34
	Annexe : Abréviations et Notations	37

Table des figures

1.1	Fonction de répartition (a) et la densité (b) de $P(I)(1, \alpha)$	6
1.2	Fonction de répartition (à gauche) et densité (à droite) de la GPD	15
2.1	QQ-plot : normalité de l'estimateur de γ	21
2.2	Estimation par intervalle de confiance d'une loi de Pareto ($\gamma = 4$ et $n = 200$).	23
3.1	Données danoises : mensuelles (à gauche) et hebdomadaires (à droite).	27

Introduction

Un point de départ logique pour discuter de la loi de Pareto est le manuel d'économie de Vilfredo Pareto publié à Rome en 1897, dont il a découvert la distribution qui porte maintenant son nom en étudiant la répartition des revenus des familles en Suisse, il était observé qu'il y a plus de familles avec un bas revenu que de familles avec un revenu élevé et l'analyse de cette idée a rapidement sert à introduisant une famille très flexible a distribution à queue lourde qui peuvent être utilisées pour modéliser la distribution de revenu, cette famille de distribution de Pareto (distribution à queue lourde) basé sur le type et le nombre de paramètre qui caractérise chaque famille.

Historiquement, il y a plus de cent ans, Vilfredo Pareto a observé que le nombre de personnes dans une population dont des revenus dépassent un niveau x est souvent bien rapproché par : $Cx^{-\alpha}$, pour un certain C réel et un certain α paramètre positif. L'accumulation de l'expérience a rapidement indiqué le fait que c'est seulement dans la queue supérieure des distributions de revenu que l'on peut s'attendre le comportement de Pareto. En fait, "la loi" de Pareto est bientôt devenue moins de contrainte (plus croyable). Les distributions de Pareto et leurs relations proches fournissent vraiment une famille très flexible de distributions à queues lourdes qui peuvent être utilisées pour modéliser la distribution de revenu aussi bien qu'une grande diversité d'autres distributions sociales et économiques de plus le modèle proposé par Pareto a soulevé trois séries de débats, le premier est relatif au domaine d'application et de validité du modèle ; le deuxième de nature théorique, porte sur l'explication des phénomènes qui paraissent dégager les conditions de génération d'une

*distribution appartient au même titre que certaines lois connues comme la loi normale et le troisième thème moins discuté touche à l'interprétation des paramètres de la distribution de Pareto et notamment le sens du paramètre α qu'il dépendait à des changements de population et des changements dans la définition du revenu utilisée pour calculer la distribution, la bataille ou bien le débat a oscillé pendant 40-50 ans. Shirras (**Shirras, G.F.** (1935) **Econ. J.**, 45, 663 – 681.), l'un des critiques les plus virulents de la loi de Pareto, a soutenu que lorsqu'il a calculé le revenu en rondins en fonction du logarithme de la fonction de survie à l'aide des données sur le revenu des Indiens « les points ne se situaient même pas approximativement sur une ligne droite » comme le prévoyait la loi de Pareto. La configuration des points est en effet légèrement parabolique, mais la déviation de la linéarité n'est pas aussi pénible pour la plupart qu'elle l'était pour Shirras.*

Beaucoup de modèles proposés pour des répartitions des revenus cherchent à exposer un tel principe. Les adhérents de modèles log normaux se rapporteraient aux effets multiplicatifs et rendraient visite au théorème de centrale limite appliqué aux logarithmes des valeurs observées. Les enthousiastes de distribution stables indiqueront que, si nous supprimons la supposition de deuxièmes moments finis, les arguments qui indiquent vers une distribution normale indiquent en réalité vers des distributions stables. Ces distributions stables ont des queues Pareto lourdes. Les défenseurs de la distribution de Pareto et de ses proches adoptent souvent une position empirique. Ils ont vu de nombreux ensembles de données, et la distribution de Pareto indéniablement convient remarquablement bien aux queues supérieures. Pour renforcer davantage leur position, ils soutiennent que les formes de répartition du revenu et de la richesse semblent invariantes en raison des changements de définition du revenu, des changements dus à l'impôt, etc, et qu'elles ne sont pas sensibles au choix de mesurer le revenu individuel ou familial ou le revenu par membre du ménage de l'unité. Les variantes des distributions Pareto (ou Pareto-type) peuvent être montrées pour présenter de telles propriétés d'invariance. Enfin, il peut être démontré que plusieurs modèles stochastiques de systèmes économiques conduisent à des distributions de richesse

et/ou de revenus semblables à celles de Pareto.

Cette loi issue du domaine économique, a eu le succès que l'on sait et sera porté dans de très nombreux domaines. Dans le but de plus expliqué les énoncés ci-dessous nous présentons ce mémoire composé de trois chapitres comme suit : Le premier chapitre présente une caractérisation des familles de la loi de Pareto. Dans le deuxième chapitre nous exposons les propriétés de cette loi puis l'estimation des paramètres d'une famille choisie, par deux méthodes (maximum de vraisemblance, intervalle de confiance). Le dernier chapitre présente certaines applications de la loi de Pareto dans des différentes domaines théoriques et réelles avec des simulations sous logiciel R. Ce travail se termine par une conclusion générale.

Chapitre 1

La loi de Pareto

Soit X une variable aléatoire (v.a) définie sur un espace probabilisé (Ω, F, P) , de fonction de répartition $F(x)$ donnée par :

$$F(x) = P(X < x)$$

possédant une densité de probabilité f . On appelle aussi, fonction de survie de X la fonction notée \bar{F} de Ω dans $[0, 1]$ définie par :

$$\bar{F}(x) = P(X > x) = 1 - F(x).$$

1.1 Généralités sur la famille de la loi de Pareto

1.1.1 Loi de Pareto standard

Définition 1.1.1 (PS) Une v.a X suit une distribution dite de Pareto standard si sa fonction de survie \bar{F} est donnée par :

$$\bar{F}(x) = \frac{1}{1+x} \quad ; \quad x > 0.$$

Proposition 1.1.1 *Notons que si X a la distribution de Pareto standard, alors X^{-1} a aussi la même distribution.*

Preuve. On a

$$F(x) = P(X < x) = 1 - \frac{1}{1+x} = \frac{x}{x+1}, \quad (1.1)$$

on pose

$$Y = X^{-1}.$$

Nous cherchons donc la distribution de Y . En effet,

$$\begin{aligned} P(Y < x) &= P(X^{-1} < x) = P\left(X > \frac{1}{x}\right) \\ &= \frac{1}{\frac{1}{x} + 1} \\ &= \frac{x}{1+x}. \end{aligned} \quad (1.2)$$

De (1.1) et (1.2) on a le résultat. ■

1.1.2 Loi de Pareto de type (I)

Définition 1.1.2 *On dit que X une v.a suit la loi de Pareto de type (I) si sa fonction de survie s'écrit sous la forme :*

$$\bar{F}(x) = \left(\frac{x}{\sigma}\right)^{-\alpha} \quad ; \quad x > \sigma, \quad \sigma > 0, \quad \alpha > 0 \quad (1.3)$$

et on écrit

$$X \sim P(I)(\sigma, \alpha).$$

Voici ci-dessous dans la figure 1.1 deux graphes contenant la distribution (à gauche) et la densité (à droite) dont les courbes en noire, bleue et rouge correspondent respectivement aux lois de Pareto type (I) d'indice $\alpha = 0.5$, $\alpha = 2$, $\alpha = 5$ avec $\sigma = 1$ fixé.

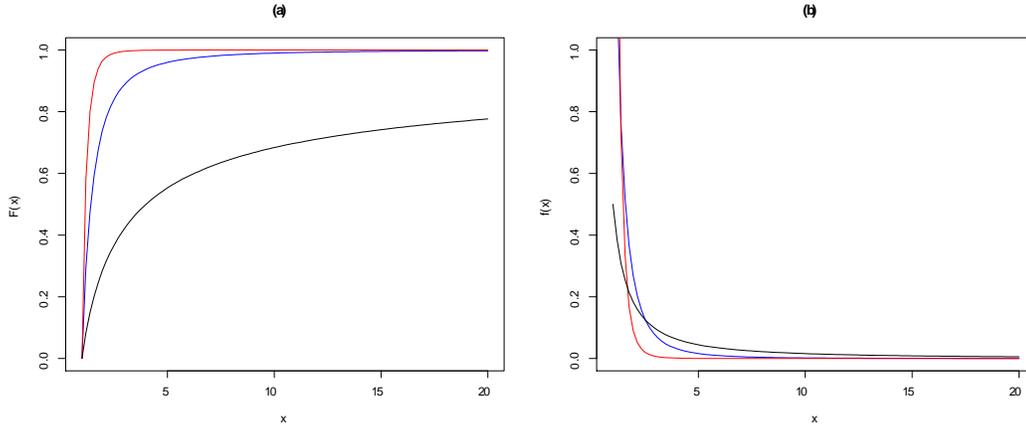


FIG. 1.1 – Fonction de répartition (a) et la densité (b) de $P(I)(1, \alpha)$

On remarque que si l'indice de queue α est élevé la distribution considéré (1.3) possède une queue épaisse (lourde).

Remarques 1.1.1 α s'appelle l'indice de queue de Pareto.

Pour que la distribution ait une moyenne finie il faut que α soit supérieur à 1. En effet, on a

$$\bar{F}(x) = \left(\frac{x}{\sigma}\right)^{-\alpha} \implies F(x) = 1 - \left(\frac{x}{\sigma}\right)^{-\alpha}.$$

Par la dérivation de la fonction de répartition on obtient la densité qui est définie par :

$$f(x) = \frac{\partial F(x)}{\partial x} = \frac{\alpha}{\sigma} \left(\frac{x}{\sigma}\right)^{-\alpha-1} = \alpha \frac{\sigma^\alpha}{x^{\alpha+1}}.$$

Ensuite,

$$\mathbb{E}(X) = \int_{\mathbb{R}} x f(x) dx$$

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(X) &= \int_{\sigma}^{+\infty} x \alpha \frac{\sigma^\alpha}{x^{\alpha+1}} dx = \alpha \sigma^\alpha \int_{\sigma}^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha} dx \quad \text{cette integrale n'existe que pour } \alpha > 1 \\ &= \alpha \sigma^\alpha \left[\frac{x^{-\alpha+1}}{-\alpha+1} \right]_{\sigma}^{\infty} = \frac{\alpha \sigma}{\alpha-1}, \end{aligned}$$

pour $\alpha > 1$, sinon l'espérance n'existe pas.

Exemple 1.1.1 1) Pour $\alpha = \frac{1}{2}$:

$$\mathbb{E}(X) = \frac{1}{2}\sigma^{\frac{1}{2}} \left[\frac{x^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} \right]_{\sigma}^{\infty} = +\infty.$$

2) Pour $\alpha = 2$:

$$\mathbb{E}(X) = 2\sigma^2 \left[\frac{x^{-1}}{-1} \right]_{\sigma}^{\infty} = 2\sigma^2 [-x^{-1}]_{\sigma}^{\infty} = 2\sigma^2\sigma^{-1} = 2\sigma < \infty.$$

Maintenant, nous pouvons voir que si la variance soit finie ou non. On a :

$$\text{Var}(X) = \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2. \quad (1.4)$$

Donc, on commence par le calcul de $\mathbb{E}(X^2)$:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(X^2) &= \int_{\sigma}^{+\infty} x^2 f(x) dx \\ &= \int_{\sigma}^{+\infty} x^2 \alpha \frac{\sigma^{\alpha}}{x^{\alpha+1}} dx \\ &= \alpha \sigma^{\alpha} \int_{\sigma}^{+\infty} x^2 \frac{1}{x^{\alpha+1}} dx \\ &= \alpha \sigma^{\alpha} \int_{\sigma}^{+\infty} \frac{1}{x^{\alpha-1}} dx, \text{ cette intégrale n'existe que pour } \alpha > 2 \\ &= \alpha \sigma^{\alpha} \left[\frac{x^{-\alpha+2}}{-\alpha+2} \right]_{\sigma}^{\infty} = \frac{\alpha \sigma^2}{\alpha - 2}. \end{aligned}$$

Par l'application de la formule (1.4) :

$$\begin{aligned} \text{Var}(X) &= \frac{\alpha\sigma^2}{\alpha-2} - \frac{\alpha^2\sigma^2}{(\alpha-1)^2} \\ &= \frac{\alpha\sigma^2}{(\alpha-2)(\alpha-1)^2}; \quad \text{pour } \alpha > 2 \end{aligned}$$

sinon X n'admet pas une variance.

1.1.3 Loi de Pareto de type(II)

Définition 1.1.3 La v.a X suit la loi de Pareto de type (II) si :

$$\bar{F}(x) = \left\{ 1 + \frac{x - \mu}{\sigma} \right\}^{-\alpha}; \quad \text{pour } x > \mu \text{ avec : } \mu \in \mathbb{R}, \sigma > 0,$$

et on écrit

$$X \sim P(II)(\mu, \sigma, \alpha).$$

Remarques 1.1.2 1) La distribution de Pareto de type (II) est nommée aussi loi de Lomax.

2) Dans la distribution des applications le μ sera non-négatif ceci indique que les revenus négatifs sont des phénomènes du monde réel et ne peuvent pas être balayés sous la table.

3) Cette loi est comme un mélange de la loi exponentielle dont le paramètre suit la loi gamma.

4) Il y a une relation intime entre le Pareto (II) et le Picands. Rappelons que la densité du Picands est :

$$g(x, \sigma, k) = \frac{1}{\sigma} \left(1 - \frac{kx}{\sigma} \right)^{\frac{1-k}{k}}; \quad x > 0, \frac{kx}{\sigma} < 1, \sigma > 0, -\infty < k < +\infty, \quad (1.5)$$

la densité correspondant à k .

Proposition 1.1.2 *Le modèle (1.5) inclut trois sortes de densité :*

- i) *Quand $k < 0$, il rapporte la densité de Pareto(II) [avec $\mu = 0$].*
- ii) *Quand $k = 0$, il rapporte une densité exponentiel.*
- iii) *Quand $k > 0$, il correspond à une distribution bêta standard.*

Preuve. i) On a, quand $k < 0$: La densité de la loi de Pareto type (II) est :

$$f(x) = \frac{\partial F(x)}{\partial x} = \frac{\alpha}{\sigma} \left[1 + \frac{x}{\sigma}\right]^{-\alpha-1}.$$

On pose $\alpha = 1 \implies f(x) = \frac{1}{\sigma} \left(1 + \frac{x}{\sigma}\right)^{-2}$. Si $k = -1 \implies g(x, \sigma, -1) = \frac{1}{\sigma} \left(1 + \frac{x}{\sigma}\right)^{-2}$.

ii) Quand $k = 0$: Par passage à la limite avec l'utilisation de la formule suivante :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{\alpha x}{n}\right)^n = \exp(-\alpha x).$$

Alors,

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{\sigma} \left(1 - \frac{kx}{\sigma}\right)^{\frac{1-k}{k}} = \frac{1}{\sigma} \exp\left(\frac{-x}{\sigma}\right) ; x > 0.$$

Le résultat est une densité de la loi exponentiel.

iii) Quand $k > 0$:

$$X \sim B(s, t) \implies f(x) = \frac{1}{B(s, t)} x^{s-t} (1-x)^{t-1}.$$

est la densité de X . ■

1.1.4 Loi de Pareto type (III)

Définition 1.1.4 *Une v.a X suit une loi de Pareto de type (III) de paramètre μ , σ et γ si sa fonction de survie est définie par :*

$$\bar{F}(x) = \left\{1 + \left(\frac{x - \mu}{\sigma}\right)^{\frac{1}{\gamma}}\right\}^{-1} ; x > u,$$

et on écrit

$$X \sim P(III)(\mu, \sigma, \gamma),$$

avec, γ s'appelle le paramètre d'inégalité.

Si $\mu = 0$ et $\gamma \leq 1$: γ est précisément l'indice de Gini de l'inégalité [2].

Proposition 1.1.3 Si la v.a Z suit une loi de Pareto standard alors

$$X = \mu + \sigma Z^\gamma \stackrel{d}{\equiv} P(III)(\mu, \sigma, \gamma).$$

En effet,

$$Z \sim PS \implies P(Z \leq z) = 1 - \left(\frac{1}{1+z} \right). \quad (1.6)$$

Preuve. On cherche à montrer que $X \stackrel{d}{\equiv} P(III)(\mu, \sigma, \gamma)$. On a

$$\begin{aligned} P(X \leq x) &= P(\mu + \sigma Z^\gamma \leq x) \\ &= P\left(Z^\gamma \leq \frac{x - \mu}{\sigma}\right) \\ &= P\left(Z \leq \left(\frac{x - \mu}{\sigma}\right)^{\frac{1}{\gamma}}\right), \end{aligned}$$

d'après (1.6) on arrive à :

$$\begin{aligned} P(X \leq x) &= 1 - \frac{1}{1 + \left(\frac{x - \mu}{\sigma}\right)^{\frac{1}{\gamma}}} \\ &= 1 - \left(1 + \left(\frac{x - \mu}{\sigma}\right)^{\frac{1}{\gamma}}\right)^{-1} \end{aligned}$$

et cette dernière définit bien la distribution de $P(III)(\mu, \sigma, \gamma)$. ■

En 1991 Pillai [23] découvre une distribution liée à la distribution de Pareto de type(III)

qui s'appelle semi-Pareto a une fonction de survie sous la forme :

$$\bar{F}(x) = \{1 + \Psi(x)\}^{-1}; \quad x > 0,$$

où Ψ est une équation fonctionnelle :

$$\Psi(x) = p^{-1} \Psi\left(p^{\frac{1}{\alpha}} x\right) ; x > 0, p \in (0, 1), \alpha > 0.$$

Pour certain $p \in (0, 1)$ et certain $\alpha > 0$ le choix de $\Psi(x) = x^{\frac{1}{\gamma}}$ avec $\alpha = \frac{1}{\gamma}$ donne la distribution $P(III)(0, 1, \gamma)$.

On souhaitons de plus généralisés (Arnold, 1983) en introduisant à la fois des paramètres supplémentaires (d'inégalités, de positions, d'échelles...) quand l'arrivage à une famille plus générale que ($PS, P(I)(\sigma, \alpha), P(II)(\mu, \sigma, \alpha), P(III)(\mu, \sigma, \gamma)$) nommée loi de Pareto de type (IV).

1.1.5 Loi de Pareto de type (IV)

Définition 1.1.5 Une v.a X suit la loi de Pareto de type (IV) si sa fonction de survie est donnée par :

$$\bar{F}(x) = \left\{ 1 + \left(\frac{x - \mu}{\sigma} \right)^{\frac{1}{\gamma}} \right\}^{-\alpha} ; x > \mu,$$

et on note

$$P(IV)(\mu, \sigma, \gamma, \alpha) ; \text{ avec}$$

- μ paramètre de position réel,
- σ paramètre d'échelle positif,
- γ paramètre d'inégalité positif,
- α paramètre qui caractérise la queue de la distribution.

Remarques 1.1.3 Par un choix précisé des paramètres ; tous les types précédents de la distribution de Pareto, peuvent êtres des cas particulier de la dernière famille. En effet,

$$P(I)(\sigma, \alpha) = P(IV)(\sigma, \sigma, 1, \alpha),$$

$$P(II)(\mu, \sigma, \alpha) = P(IV)(\mu, \sigma, 1, \alpha),$$

$$P(III)(\mu, \sigma, \gamma) = P(IV)(\mu, \sigma, \gamma, 1).$$

Proposition 1.1.4 *Une relation importante de la famille de loi $P(IV)$ avec la loi exponentielle permet de obtenir plusieurs propriétés de $P(IV)$ de cette dernière. D'où si la v.a X suit la loi $P(IV)(0, \sigma, \gamma, \alpha)$ alors,*

$$\log \left(1 + \left(\frac{X}{\sigma} \right)^{\frac{1}{\gamma}} \right) \sim \text{Exp}(\alpha).$$

Preuve. On a

$$\begin{aligned} P \left(\log \left(1 + \left(\frac{X}{\sigma} \right)^{\frac{1}{\gamma}} \right) \leq x \right) &= P \left(\left(1 + \left(\frac{X}{\sigma} \right)^{\frac{1}{\gamma}} \right) \leq \exp(x) \right) \\ &= P \left(\left(\frac{X}{\sigma} \right)^{\frac{1}{\gamma}} \leq \exp(x) - 1 \right) \\ &= P(X \leq \sigma (\exp(x) - 1)^\gamma). \end{aligned}$$

D'après la condition ci-dessus, on trouve que

$$P \left(\log \left(1 + \left(\frac{X}{\sigma} \right)^{\frac{1}{\gamma}} \right) \leq x \right) = 1 - \exp(-\alpha x),$$

et cette dernière est une distribution de la loi exponentielle de paramètre α . ■

1.1.6 Loi de Feller-Pareto

Feller (1971, p.49) a définie une distribution de Pareto d'une manière différente. La famille de Feller-Pareto est représentée comme suit :

Définition 1.1.6 *Soit Y une v.a qui suit la loi bêta de paramètre γ_1 et γ_2 , alors*

$$f_Y(y) = \frac{1}{B(\gamma_1, \gamma_2)} y^{\gamma_1-1} (1-y)^{\gamma_1-\gamma_2} \quad ; \quad 0 < y < 1.$$

On définit $U = Y^{-1} - 1$. C'est cette variable que Feller a appelée une distribution de Pareto.

On considère une fonction linéaire de variable aléatoire définie par

$$W = \mu + \sigma (Y^{-1} - 1)^\gamma = \mu + \sigma U^\gamma,$$

a une distribution de Feller-Pareto et elle est notée par $FP(\mu, \sigma, \gamma, \gamma_1, \gamma_2)$. Nous cherchons à trouver la formule exacte de la distribution de Feller-Pareto : nous disons déjà que : $Y \sim \text{béta}(\gamma_1, \gamma_1) \implies U$ suit la loi bêta de deuxième degré de paramètre γ_1 et γ_2 , alors

$$f_U(u) = \frac{1}{B(\gamma_1, \gamma_2)} u^{\gamma_1-1} (1 - u^{-\gamma_1-\gamma_2}) ; u > 0.$$

Par suite,

$$P(W > w) = P(\mu + \sigma U^\gamma > w) = P\left(U > \left(\frac{w - \mu}{\sigma}\right)^{\frac{1}{\gamma}}\right).$$

Pour simplifier les calculs il faut que l'une de γ_1 ou γ_2 soit égale à 1 c'est-à-dire :

Si $\gamma_2 = 1$:

$$\bar{F}(u) = (1 + u)^{-\gamma_1}.$$

Par conséquent,

$$\bar{F}(w) = P(W > w) = \left\{1 + \left(\frac{w - \mu}{\sigma}\right)^{\frac{1}{\gamma}}\right\}^{-\gamma_1}.$$

On remarque que

$$P(IV)(\mu, \sigma, \gamma, \alpha) = FP(\mu, \sigma, \gamma, \alpha, 1).$$

Si $\gamma_1 = 1$:

$$\bar{F}(w) = P(W > w) = 1 - \left\{1 + \left(\frac{w - \mu}{\sigma}\right)^{\frac{-1}{\gamma}}\right\}^{-\gamma_2}.$$

Si $\gamma_1 = \gamma_2$: alors $W \sim P(III)(\mu, \sigma, \gamma)$.

Remarques 1.1.4 On peut voir que la famille Feller-Pareto comprend des distributions dont le comportement est nettement non-parétien dans la queue supérieure, pour plus de

détailles voir [2]

1.1.7 Loi de Pareto généralisée

Cette loi est un cas particulier des distributions de Pareto de deuxième type, en plus elle est très intéressante en théorie des valeurs extrêmes.

Définition 1.1.7 Une v.a X suit la loi de Pareto généralisée, notée GPD, de paramètres γ et β si sa fonction de répartition est définie par :

$$F_{\gamma,\beta}(x) = \begin{cases} 1 - \left(1 + \frac{\gamma x}{\beta}\right)^{\frac{-1}{\gamma}} & \text{si } \gamma \neq 0 \\ 1 - \exp\left(\frac{-x}{\beta}\right) & \text{si } \gamma = 0. \end{cases} \quad (1.7)$$

Où elle est définie sur :

$$\begin{cases} x \geq 0 & \text{si } \gamma > 0 \\ 0 \leq x \leq \frac{-\beta}{\gamma} & \text{si } \gamma < 0. \end{cases}$$

La loi de Pareto généralisée ($\gamma > 0$) est un mélange de la loi exponentielle dont le paramètre suit une loi Gamma.

Propriété 1.1.1 La GPD regroupe trois distributions selon les valeurs de paramètre γ , comme suit :

- i) lorsque $\gamma > 0$: c'est la loi Pareto.
- ii) lorsque $\gamma < 0$: c'est la loi Bêta.
- iii) lorsque $\gamma = 0$: c'est la loi exponentielle.

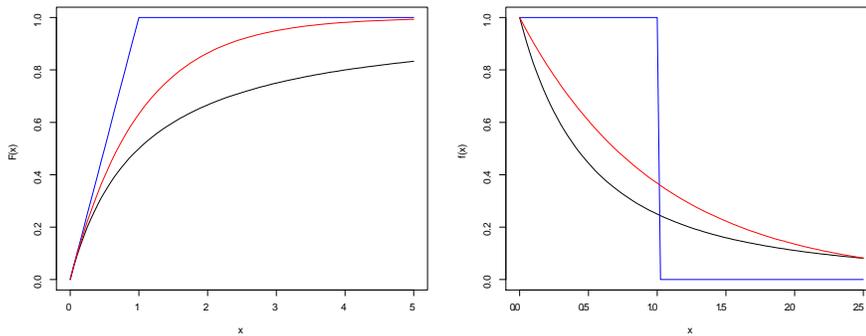


FIG. 1.2 – Fonction de répartition (à gauche) et densité (à droite) de la *GPD*

Dans la figure 1.2, nous présentons deux graphes contenant la distribution (à gauche) et la densité (à droite) dont les courbes en noire, rouge et bleu correspondent respectivement aux lois de Pareto généralisée d'indices $\gamma = -1$, $\gamma = 0$ et $\gamma = 1$ respectivement, avec $\beta = 1$ fixé.

Chapitre 2

Propriétés et estimation

2.1 Propriétés de la loi de Pareto

Comme toutes les lois statistiques, la loi de Pareto est caractérisée par certaines valeurs qui nous permettent de mieux décrire le fonctionnement de cette loi. Dans ce tableau nous présentons quelques propriétés qui sont écrits en fonction de paramètres μ, σ, γ et α comme suit :

Types de dists	$\mathbb{E}(X)$	$\mathbb{E}(X^2)$
type(I)	$\sigma \left(1 - \frac{1}{\alpha}\right)^{-1}$ où $1 < \alpha$	$\sigma^2 \left(1 - \frac{2}{\alpha}\right)^{-1}$ où $2 < \alpha$
type(II)	$\frac{\sigma \Gamma(\alpha-1) \Gamma(2)}{\Gamma(\alpha)}$ où $1 < \alpha$	$\frac{\sigma^2 \Gamma(\alpha-2) \Gamma(3)}{\Gamma(\alpha)}$ où $2 < \alpha$
type(III)	$\sigma \Gamma(\alpha - \gamma) \Gamma(1 + \gamma)$ où $-\gamma^{-1} < 1 < \gamma^{-1}$	$\sigma^2 \Gamma(\alpha - 2\gamma) \Gamma(1 + 2\gamma)$ où $-\gamma^{-1} < 2 < \gamma^{-1}$
type(IV)	$\frac{\sigma \Gamma(\alpha-\gamma) \Gamma(1+\gamma)}{\Gamma(\alpha)}$ où $1 < \frac{\alpha}{\gamma}$	$\frac{\sigma^2 \Gamma(\alpha-2\gamma) \Gamma(1+2\gamma)}{\Gamma(\alpha)}$ où $-\gamma^{-1} < 2 < \frac{\alpha}{\gamma}$
Feller-Pareto	$\frac{\sigma \Gamma(\gamma_1-\gamma) \Gamma(\gamma_2+\gamma)}{\Gamma(\gamma_1) \Gamma(\gamma_2)}$ où $1 < (\gamma_1/\gamma_2)$	$\frac{\mu \sigma^2 \Gamma(\gamma_1-2\gamma) \Gamma(\gamma_2+2\gamma)}{\Gamma(\gamma_1) \Gamma(\gamma_2)}$ où $2 < (\gamma_1/\gamma_2)$
Pareto généralisé	$\begin{cases} \frac{\beta}{1-\gamma} & \text{si } \gamma > 0. \\ \beta & \text{si } \gamma = 0. \\ \frac{\beta}{1-\gamma} & \text{si } \gamma < 0. \end{cases}$	$\begin{cases} \frac{\beta^2}{(1-2\gamma)(1-\gamma)^2} & \text{si } \gamma > 0 \\ 2\beta^2 & \text{si } \gamma = 0 \\ \frac{2\beta^2}{(2\gamma-1)(\gamma-1)} & \text{si } \gamma < 0 \end{cases}$

TAB. 2.1 – Quelques paramètres usuelles de la loi de Pareto

Remarques 2.1.1 Γ est la fonction Gamma $\Gamma(\alpha) = \int_0^{+\infty} x^{\alpha-1} \exp(-x) dx$.

Dans le calcul des moments des types (II), (III) et (IV) le paramètre μ est nul.

2.2 Estimation des paramètres de la loi de Pareto

Lorsque on veut donner des valeurs approximatives aux paramètres d'une population alors nous cherchons une méthode que l'on peut calculer ces valeurs qui décrivent les propriétés de la population qui nous intéresse. Considérons la distribution de Pareto avec fonction de distribution :

$$F(x) = \begin{cases} 1 - \frac{1}{x^\alpha} & \text{si } x > 1 \\ 0 & \text{si } x \leq 1. \end{cases} \quad (2.1)$$

Supposons que X_1, X_2, \dots, X_m un échantillon (suite *i.i.d* de v.a's) issue d'une variable aléatoire de la fonction de distribution ci-dessus. Il ya plusieurs méthodes d'estimation des paramètres d'un distribution dans cette section nous proposons la méthode de maximum de vraisemblance qu'est la plus populaire et la plus utilisée. En suite, nous rapellons l'estimation par l'intervalle de confiance pour estimer le paramètre $\left(\alpha = \frac{1}{\gamma}\right)$.

2.2.1 Estimation par la méthode du maximum de vraisemblance

L'estimateur du maximum de vraisemblance pour le paramètre $\alpha = \frac{1}{\gamma}$ est $\hat{\gamma}$ et il est obtenue comme suit :

Posons, $\alpha = \frac{1}{\gamma} \Rightarrow \gamma = \frac{1}{\alpha}$. Alors,

$$F(x) = 1 - x^{-\frac{1}{\gamma}}; \quad x > 1.$$

Avant de décrire les estimateurs par maximum de vraisemblance, il faut définir la fonction

de vraisemblance. On faisons une simple dérivation de la distribution (pour trouver la densité) :

$$f(x) = \frac{\partial F(x)}{\partial x} = \frac{1}{\gamma} x^{\frac{-1}{\gamma}-1}.$$

Ensuite, la fonction de vraisemblance est :

$$\begin{aligned} L(\gamma, x) &= \prod_{i=1}^m f(x_i) \quad (\text{car l'échantillon est i.i.d}) \\ &= \prod_{i=1}^m \frac{1}{\gamma} x_i^{\frac{-1}{\gamma}-1} ; x > 1 = \frac{1}{\gamma^m} \prod_{i=1}^m x_i^{\frac{-1}{\gamma}-1}. \end{aligned}$$

Passant à la fonction de log-vraisemblance :

$$\begin{aligned} \log L(\gamma, x) &= \log \left[\frac{1}{\gamma^m} \prod_{i=1}^m x_i^{\frac{-1}{\gamma}-1} \right] \\ &= -m \log(\gamma) - \left(\frac{1}{\gamma} + 1 \right) \sum_{i=1}^m \log(x_i). \end{aligned}$$

l'estimateurs du maximum de vraisemblance de γ est obtenu en mettant égal à 0 la dérivé de la fonction log-vraisemblance :

$$\frac{\partial}{\partial x} \log L(\gamma, x) = \frac{-m}{\gamma} + \frac{1}{\gamma^2} \sum_{i=1}^m \log(x_i).$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} \log L(\gamma, x) = 0 &\Rightarrow \frac{-m}{\gamma} + \frac{1}{\gamma^2} \sum_{i=1}^m \log(x_i) = 0 \\ &\Rightarrow \gamma = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m \log(x_i). \end{aligned}$$

Cette valeur est bien un maximum pour $\log L$, et par suite pour L , puisque la dérivée de

$\log L$ par rapport à γ est décroissante, passant donc du positif au négatif. Ainsi,

$$\hat{\gamma} = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m \log(x_i)$$

est un estimateur du maximum de vraisemblance. Il est facile de trouver que

$$\mathbb{E} \log X_1 = \gamma, \quad \text{Var}(\log X_1) = \gamma^2.$$

On en déduit donc que :

i) Espérance de $\hat{\gamma}$:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(\hat{\gamma}) &= \mathbb{E}\left(\frac{1}{m} \sum_{i=1}^m \log(x_i)\right) \\ &= \mathbb{E}(\log(X_1)) = \gamma. \end{aligned}$$

ii) Biais de $\hat{\gamma}$:

$$\text{biais}(\hat{\gamma}) = \mathbb{E}(\hat{\gamma}) - \gamma = 0.$$

iii) Variance de $\hat{\gamma}$:

$$\begin{aligned} \text{Var}(\hat{\gamma}) &= \text{Var}\left(\frac{1}{m} \sum_{i=1}^m \log(x_i)\right) \\ &= \frac{1}{m^2} \text{Var}\left(\sum_{i=1}^m \log(x_i)\right) \\ &= \frac{\gamma^2}{m}. \end{aligned}$$

On peut déjà prévoir que pour m suffisamment grand la variance de l'estimateur de $\hat{\gamma}$ tend vers l'infini.

Pour un estimateur concurrent, l'efficacité est caractérisée en terme de tester les diverses façons qui définissent la convergence des paramètres qui joue un rôle capitale en statistique.

Propriétés

1. **Convergence en probabilité** : Comme $\mathbb{E}(\hat{\gamma}) = \gamma$ et $\text{Var}(X) \rightarrow 0$ quand $n \rightarrow \infty$, pour établir la convergence en probabilité, il suffit d'utiliser l'inégalité de **Bienaymé-Tchebychef** :

$$P(|\hat{\gamma} - \gamma| > \varepsilon) < \frac{\text{Var}(\hat{\gamma})}{\varepsilon^2}.$$

En déduit donc sans difficulté que $\hat{\gamma} - \gamma \xrightarrow{P} 0$, ce qui établit le résultat.

2. **Convergence presque sûre** : On sait que

$$\hat{\gamma} = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m \log(x_i).$$

On pose

$$Y = \log(x_i) \implies \hat{\gamma} = \bar{Y}.$$

On voit aisément que $\sum_{m=1}^{\infty} \frac{\text{Var}(\hat{\gamma})}{m^2}$ est convergente. Alors, d'après la loi forte de grands nombre :

$$\hat{\gamma} \xrightarrow{P.s} \gamma, \quad \text{quand } m \rightarrow \infty.$$

3. **Convergence en loi** : Par utilisation du théorème centrale limite, on arrive à ce résultat :

$$\sqrt{m}(\hat{\gamma} - \gamma) \xrightarrow{\mathcal{L}} N(0, \gamma^2) \quad \text{quand } m \rightarrow \infty.$$

En fin la conclusion est que l'estimateur de γ par maximum de vraisemblance est un estimateur non biaisé asymptotiquement normale.

Exemple 2.2.1 *Pour vérifier graphiquement la normalité de $\hat{\gamma}$, nous simulons 3000 échantillons de taille $m = 200$, issues d'une v.a de la même loi (2.1) et pour étudier la normalité de ce paramètre estimé nous traçons la droite dite (quantiles-quantiles). Le graphe 2.1 ci-dessous (QQ-plot) confirme la normalité de $\hat{\gamma}$ (tous les points sont alignés).*

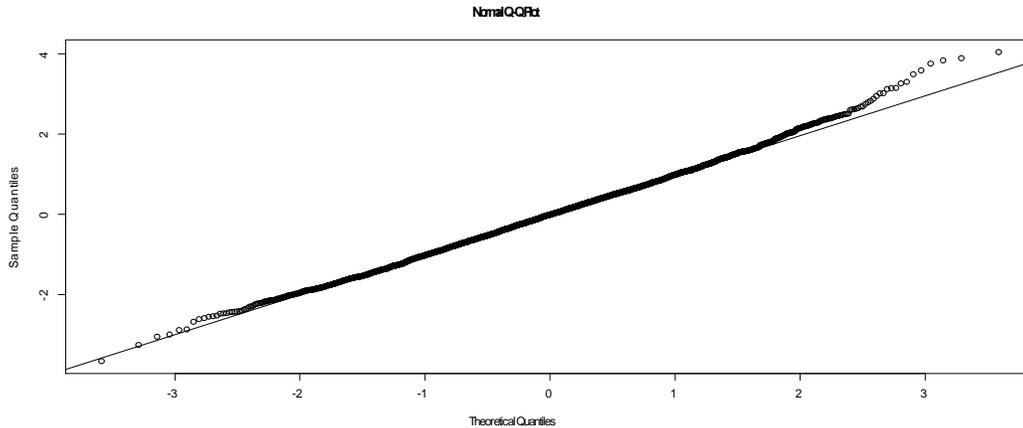


FIG. 2.1 – QQ-plot : normalité de l’estimateur de γ .

2.2.2 Estimation par intervalle de confiance

Au lieu de se donner une estimation ponctuelle d’un paramètre, on cherche un intervalle dans lequel se trouve le paramètre étudié avec une probabilité généralement grande. Autrement dit, évaluer la confiance de l’estimation par la détermination d’un intervalle contenant la vraie-valeur du paramètre.

Soit (X_1, \dots, X_m) un m -échantillon aléatoire et θ un paramètre inconnu de la loi des X_i . Soit $\alpha \in]0, 1[$ un seuil de confiance. S’il existe des v.a réelles : $\theta_{\min}(X_1, \dots, X_m)$ et $\theta_{\max}(X_1, \dots, X_m)$ telles que

$$P(\theta \in [\theta_{\min}(X_1, \dots, X_m), \theta_{\max}(X_1, \dots, X_m)]) = 1 - \alpha ,$$

on dit alors que $[\theta_{\min}(X_1, \dots, X_m), \theta_{\max}(X_1, \dots, X_m)]$ est un intervalle de confiance pour θ , avec niveau de confiance (sécurité) $1 - \alpha$, et on le note $IC_{1-\alpha}(\theta)$.

Pour appliquer cette définition on peut prendre par exemple $\alpha = 5\%$, ce qui nous donne un IC à 95%. Cela signifie qu’il y a 95% de chance que la valeur inconnue θ soit comprise entre $\theta_{\min}(x_1, \dots, x_m)$ et $\theta_{\max}(x_1, \dots, x_m)$.

Estimation de γ par intervalle de confiance

Précédemment, on a trouvé que l'estimateur de γ est asymptotiquement normale :

$$\sqrt{m} \frac{(\hat{\gamma} - \gamma)}{\gamma} \xrightarrow{\mathcal{L}} N(0, 1) \quad \text{quand } m \rightarrow \infty,$$

donc,

$$P \left(\left| \sqrt{m} \frac{(\hat{\gamma} - \gamma)}{\gamma} \right| < z_{1-\frac{\alpha}{2}} \right) = 1 - \alpha,$$

avec $z_{1-\frac{\alpha}{2}}$ est le quantile d'ordre $1 - \frac{\alpha}{2}$ de la loi normale standard. Ceci est équivalent à

$$P \left(-z_{1-\frac{\alpha}{2}} < \sqrt{m} \frac{(\hat{\gamma} - \gamma)}{\gamma} < z_{1-\frac{\alpha}{2}} \right) = 1 - \alpha,$$

puis,

$$P \left(\hat{\gamma} \left(\frac{z_{1-\frac{\alpha}{2}}}{\sqrt{m}} + 1 \right)^{-1} < \gamma < \hat{\gamma} \left(1 - \frac{z_{1-\frac{\alpha}{2}}}{\sqrt{m}} \right)^{-1} \right) = 1 - \alpha.$$

On obtient donc un *IC* pour γ avec niveau de confiance $1 - \alpha$.

Dans le graphe 2.2 ci-dessous on donne un exemple de l'estimation de maximum de vraisemblance (courbe noire) avec l'intervalle de confiance à 95% (courbe rouge borne supérieure, courbe bleu borne inférieure) avec la vraie valeur de $\gamma = 4$ basé sur 200 observations (ligne horizontale).

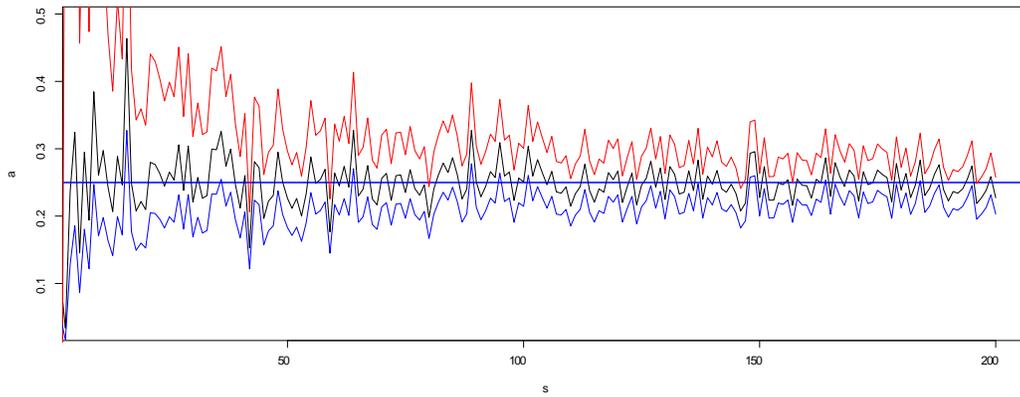


FIG. 2.2 – Estimation par intervalle de confiance d’une loi de Pareto ($\gamma = 4$ et $n = 200$).

Chapitre 3

Applications

La loi de Pareto est applicable partout où il y a des données en nombre suffisant pour être quantifié, elle est aussi très utile pour prendre certaine décision, elle n'est pas une science exacte et ne s'applique pas systématiquement mais elle se fait naturellement, toutefois, en tant qu'outil d'analyse et d'aide à la décision, elle peut être utilisée dans des situations très diverses. Le principe de Pareto a vu le jour au tout début du 20^{ème} siècle par l'économiste Italien Pareto en analysant les données fiscales des différents pays. L'analyse ultérieure des distributions statistiques a démontré que les distributions de Pareto étaient en effet très communes dans divers champs d'application.

Quand des recherches des années 1990 ont montré que cette loi régissait aussi nombre de grandeurs observées dans le trafic Internet (et d'une façon plus générale sur l'ensemble des réseaux de données à grande vitesse). Elle a été largement appliquée dans plusieurs domaines :

- ✓ En stratégie pour définir une gamme produit, des objectifs de vente de commerciaux, élaborer la stratégie, choisir les tâches les plus efficientes (**Juran**, 1960.)
- ✓ En gestion pour la gestion de stocks afin de déterminer les ruptures à éviter, la gestion des forces de l'entreprise (**Juran**, 1960) puis qu'en assurance pour modéliser les déclarations de sinistres (**Benktander**, 1970).

- ✓ En hydrologie pour décrire des évènements extrêmes (**Katz et al**, 2002).
- ✓ En électronique pour diminuer les nuisances sonores d'un circuit (**Gustafon et Fransson**, 2005).
- ✓ De la grande utilisation de la loi de Pareto dans le monde réel nous la trouvons aussi utilisée en sociologie pour cerner une problématique complexe et la rendre gérable (**site 2rh** 2005), aussi qu'en économie (**Fisk**, 1961) et en finance (**Danielsson et de Vrie**, 1991) En plus en gestion et comptabilité d'entreprise, en 1963, le Département américain du commerce présenta le principe de Pareto dans un article intitulé : « Comment les entreprises manufacturières réduisent-elles leurs coûts de distribution ? ».

3.1 Application à la théorie des valeurs extrêmes

La représentation de Jenkinson-Von Mises (1954) fournit une caractérisation synthétique des lois extrêmes. La distribution des valeurs extrêmes généralisés notée *GEV* est unifie les trois groupes de distributions *Weibull*, *Gumbel*, *Frechet* a trois paramètres, elle est notée $H_{\gamma,\mu,\sigma}$:

$$H_{\gamma,\mu,\sigma}(x) = \begin{cases} \exp \left\{ - \left(1 + \gamma \frac{x-\mu}{\sigma} \right)^{\frac{-1}{\gamma}} \right\} ; & (1 + \gamma \frac{x-\mu}{\sigma}) > 0 \\ \exp \left\{ - \exp \left(\frac{-x-\mu}{\sigma} \right) \right\} ; & \gamma = 0. \end{cases} \quad (3.1)$$

où $\mu \in \mathbb{R}$ est le paramètre de position, $\sigma > 0$ est le paramètre de dispersion et $\gamma \in \mathbb{R}$ est le paramètre de forme.

Ainsi, on a trois cas possible de la *GEV* :

- i) $\gamma < 0$: caractérise la distribution de Weibull.
 - ii) $\gamma = 0$: caractérise la distribution de Gumbel.
 - iii) $\gamma > 0$: caractérise la distribution de Frechet.
- (pour plus de détails voir [20]).

Remarques 3.1.1 Ces trois groupes de distribution sont uniques pour le maximum des

variables aléatoires. Elles caractérisent chacune un comportement spécifique des valeurs extrêmes.

Théorème 3.1.1 (Pickands – Balkema – de Haan) *Si G appartient à l'un des trois domaines d'attraction de la loi limite des extrêmes Fréchet, Gumbel ou Weibull, alors il existe une fonction de répartition des excès au-delà de seuil μ , notée G_μ qui peut être approchée par une loi de Pareto généralisée (GPD) telle que :*

$$\lim_{x \rightarrow x_F} \sup |G_u(x) - F_{\gamma, \beta(u)}(x)| = 0$$

où $\beta(u)$ est fonction mesurable. G_u est la distribution conditionnelle des excès (POT) (en anglais, *Peaks over threshold*).

Picands-Balkema-de Haan ont données un résultat très important concernant les événements de monde réel et précisément les événements extrêmes qui dit que le *GPD* (1.7) est une fonction de distribution reconnu et correctement établie pour la modélisation des extrêmes dépassant les seuils élevés. De plus le paramètre de forme dans une *GPD* est le même que dans la distribution *GEV* cela signifie que les retours dont le maximum des blocs peuvent être montré par un *GEV* avec un paramètre de forme γ_0 peuvent pour un seuil suffisamment élevé être montré également par un *GPD* de même paramètre γ_0 .

3.1.1 Données réelles : Danish fire

Comme application réelle, considérons les catastrophes naturelles qui sont des exemples d'événement extrêmes qui conduisent à des pertes financières importantes. Parmi ces dernières on considère des données réelles décrivent les grandes demandes d'assurance d'incendie au Danemark (Danish fire - source : package *evir* - **R**), du jeudi 3 janvier 1980 au lundi 31 décembre 1990. Les données sont contenues dans un vecteur numérique de 2167 observations. Pour la modélisation de cet événement on utilise la *GEV* concernant

les données relatives aux 132–blocs mensuelles des maximums et celles de 310–blocs hebdomadaire. Pour estimer les paramètres du modèle, considérant la méthode du maximum de vraisemblance (2.2.1), les valeurs estimées des paramètres de la GEV sont : $\gamma = 0.623$, $\mu = 5.971$ et $\sigma = 8.375$ avec des erreurs (écart-types) 0.103, 0.632 et 0.611 respectivement pour les maximums des blocs mensuels, et $\gamma = 0.689$, $\mu = 3,062$ et $\sigma = 4,612$ avec des erreurs 0.063, 0.217 et 0.198 respectivement pour les maximums des blocs hebdomadaires.

Le graphique ci-dessous présente une série chronologique des 132 données danoises mensuelles (la courbe de gauche) et (la courbe de droite) des 310 données hebdomadaires comprenant des pertes de plus d'un million de couronnes danoises (DKK).

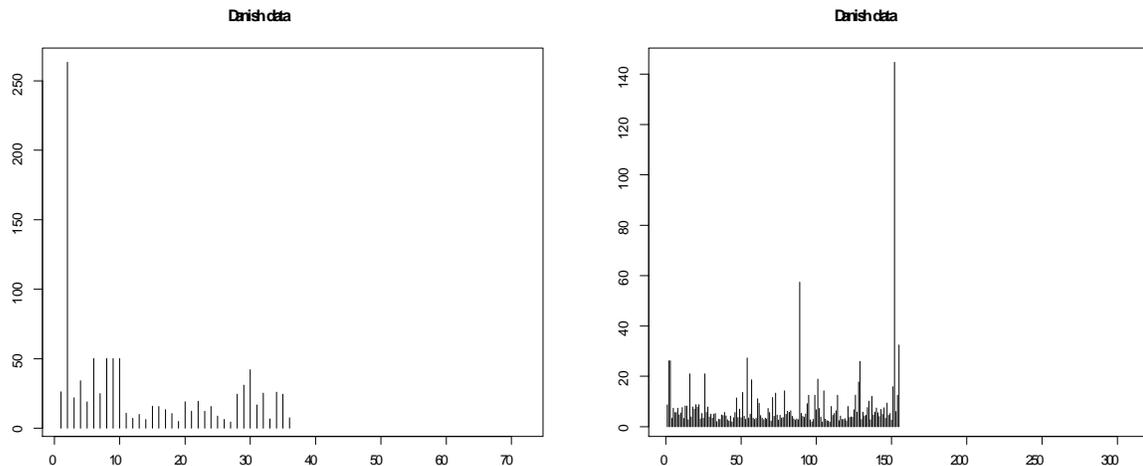


FIG. 3.1 – Données danoises : mensuelles (à gauche) et hebdomadaires (à droite).

Les graphes et l'estimation des paramètres caractérisés la GEV sont réalisés à l'aide du package `evir` sous le programme R.

3.1.2 Indice des valeurs extrêmes

Supposons dans la suite que la fonction de survie $\bar{F} := 1 - F$ est à variation régulière à l'infinie d'indice $(-1/\gamma)$ i.e,

$$\forall t > 0 : \lim_{x \rightarrow \infty} \bar{F}(tx) / \bar{F}(x) = t^{-1/\gamma} \quad (3.2)$$

où $\gamma > 0$ est appelé l'indice des valeurs extrêmes, il s'agit du paramètre qui mesure l'épaisseur de la queue de la distribution. Les distributions vérifiant (3.2) jouent un rôle important dans l'analyse des valeurs extrêmes. On retrouve plusieurs modèles : Pareto, Burr, Fréchet, ..., etc. Ces lois sont les plus souhaitables dans l'ajustement et la modélisation des, log-rendement, grandes fluctuations, et beaucoup d'autres cas (pour plus de détails voir [24]).

L'estimateur de Hill (*Hill*, 1975) de l'indice γ de la loi *GPD* est l'estimateur le plus célèbre, il a été étudié par Mason (1982), Goldie et Smith (1987) et Rootzén (1992). La méthode consiste à ordonner les observations par ordre décroissant $X_{(1)} \geq X_{(2)} \geq X_{(3)} \geq \dots \geq X_{(m)}$, l'indice de queue étant donné par l'équation ci-dessous avec N_μ le nombre d'observations supérieures au seuil μ :

$$\gamma^{Hill} = \frac{1}{N_\mu} \sum_{i=1}^{N_\mu} \ln \left(\frac{X_{(i)}}{X_{(N_\mu+1)}} \right).$$

Selon Dress, de Haan et Resnick (1998), cette méthode serait particulièrement bien adaptée aux distributions d'excès convergeant vers une *GPD*, en assurant un bon équilibre entre biais et variance.

Remarques 3.1.2 *L'estimateur de Hill n'est valable que pour les distributions de Fréchet (la loi de Pareto est représentée dans le groupe de distribution de Fréchet).*

– La convergence faible autrement dit la convergence en probabilité de l'estimateur de

Hill est établie par Mason (1982) qui a prouvé que, si

$$N_\mu \longrightarrow \infty \text{ et } m \longrightarrow \infty \text{ avec } \frac{N_\mu}{m} \longrightarrow 0.$$

Alors, l'estimateur de Hill (γ^{Hill}) converge en probabilité vers γ

$$\left(\gamma^{Hill} \xrightarrow{P} \gamma \right).$$

- La convergence forte (la convergence presque sûre) a été prouvée par Deheuvels et Mason (1985) sous les conditions suivantes :

$$\frac{N_\mu}{\ln(\ln(m))} \longrightarrow \infty \text{ et } \frac{N_\mu}{m} \longrightarrow \infty \text{ si } m \longrightarrow \infty.$$

Alors,

$$\gamma^{Hill} \xrightarrow{P.S.} \gamma.$$

- Sous des hypothèses de régularité et de convergence, l'estimateur de Hill est asymptotiquement normale d'après Häusler et Teugels (1985) et Goldie et Smith (1987) et Dekkers et al.(1989), telle que :

$$\sqrt{N_\mu} (\gamma^{Hill} - \gamma) \longrightarrow N(0, \gamma^2) \text{ pour } \gamma \geq 0.$$

3.2 Autres applications de la loi de Pareto

Nous considérons ici diverses applications utilisant l'estimation de α dans le modèle $P(I)(\sigma, \alpha)$. Nous constatons qu'une petite erreur relative à l'estimation de α peut produire une grande erreur relative à l'estimation des quantités basées sur α . Ainsi, des petites améliorations dans l'estimation de l'indice α peut produire un impact substantiel dans les applications.

3.2.1 Estimation des quantiles

Soit $(X_i)_{i=1,\dots,n}$ une suite de variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées de loi F .

Définition 3.2.1 *Le quantile d'ordre p noté q_p est donnée par*

$$q_p = \inf \{x \in \mathbb{R} \mid F(x) \geq p\}$$

pour $p \in (0, 1)$. Si F est continue et strictement croissante, alors q_p est l'unique point telle que

$$F(q_p) = p \Leftrightarrow q_p = F^{-1}(p). \quad (3.3)$$

Soit X une variable aléatoire suit la loi de Pareto de type(I), alors

$$F(x) = 1 - \left(\frac{x}{\sigma}\right)^{-\alpha}, \quad \sigma > 0, \quad x > \sigma,$$

puis on va calculer sa fonction de quantile q_p . Par l'utilisation de la définition précédente (3.3), on obtient

$$q_p = \sigma p^{\frac{-1}{\alpha}} = \sigma p^{-\gamma}. \quad (3.4)$$

Ainsi pour l'estimateur \hat{q}_p de q_p définie en mettant $\hat{\alpha}$ dans l'équation (3.4) à la place de α comme suit :

$$\hat{q}_p = \sigma p^{\frac{-1}{\hat{\alpha}}}.$$

On applique ces informations pour décrire l'effet de l'estimation de la fonction quantile de la loi da Pareto(I) ou bien la dispersion de la loi.

$$\frac{\hat{q}_p}{q_p} = p^{\frac{1}{\hat{\alpha}} - \frac{1}{\alpha}} = p^{\gamma - \hat{\gamma}}.$$

Exemple 3.2.1 *Par conséquent pour $p = 0.001$, une sous-estimation de $\alpha = 1$ par seulement 5% produit une sur-estimation de $q_{0.001}$ par 44% et une sous-estimation de $\alpha = 1.5$*

par 5% produit une sur-estimation de $q_{0.001}$ par 27%. De même une sur-estimation de $\alpha = 1$ par 10% produit une sous-estimation de $q_{0.001}$ par 47% , et une sur-estimation de $\alpha = 1.5$ par 10% produit une sous-estimation de $q_{0.001}$ par 34% et une sous-estimation de $q_{0.001}$ par 43%.

Les probabilités de queue dans les valeurs $p = 0.001$ ou même $p = 0.0001$ sont courantes dans les applications actuarielles et de valeurs extrêmes.

Remarques 3.2.1 *Les quantiles élevés sont utilisés dans le calcul des primes de réassurance selon le principe du centile, comme on l'a vu dans Gerber (1979). En outre, après la catastrophe de 1953, le gouvernement Néerlandais a établi une norme pour les digues de mer selon laquelle le niveau de la mer ne devrait pas dépasser le niveau de la digue au cours d'une année donnée, sauf avec une probabilité inférieure à 0.0001 (voir Dekkers et de Haan 1989 pour la discussion).*

3.2.2 Estimation d'une probabilité

Inversement à l'illustration précédente, pour l'estimation de la probabilité de queue supérieur à un seuil q spécifié, il découle des équations (1, 1) ou que :

$$p = \left(\frac{\sigma}{q} \right)^\alpha . \quad (3.5)$$

Ainsi, pour l'estimateur \hat{p} de la probabilité p définie en mettant $\hat{\alpha}$ dans l'équation (3.5) au lieu du paramètre α . Jusqu'à on obtient la formule suivante :

$$\frac{\hat{p}}{p} = \left(\frac{\sigma}{q} \right)^{\hat{\alpha}-\alpha} = p^{(\hat{\alpha}/\alpha)-1}.$$

Par conséquent, la sous-estimation de toute valeur de α par 5% produit une sur-estimation des probabilités de queue de $p = 0.001$ par 41% et $p = 0.0001$ par 58%. De même, la

sur-estimation de n'importe quelle valeur de α par 10% produit une sous-estimation de $p = 0.001$ par 50% et $p = 0.0001$ par 60%.

Conclusion

Dans la plupart des phénomènes statistiques la modélisation se fait par des modèles classiques faciles à utiliser et à étudier. Malheureusement, dans le cas des phénomènes ou événements rares ou complexes on fait appel aux modèles de lois puissances, et parmi ces lois on rencontre la célèbre loi de Pareto. Cette loi et ces applications est le sujet principal de ce mémoire.

Généralement on a vu que la loi de Pareto est de queue lourde et la modélisation de ce type est fortement liée à un indice appelé indice de Pareto ou bien indice de queue γ qui nous avons estimé par plusieurs méthodes dont le but de le rapprocher à une valeur exacte.

Le principe de Pareto est très utile pour prendre certaines décisions. Dans le domaine de la conception d'interface, il suppose une analyse approfondie de l'expérience utilisateur. Ce principe est applicable partout où il y a des données en nombre suffisant pour être quantifié. Néanmoins la loi de Pareto n'est pas une formule magique mais une façon de penser et d'analyser qui vous aide à prendre simplement de bonnes décisions pour gagner du temps et vous concentrer sur ce qui vous rapporte le plus, de plus la plupart du temps, la loi de Pareto est utilisée à des fins «pédagogiques», et non pas de manière scientifique.

Enfin ,l'application de cette loi dans des plusieurs et différentes domaines nous aidons à proposer autres formes de cette loi et améliorer autres méthodes d'estimation et de convergences de leur paramètre.

Bibliographie

- [1] Alain, G. (2016). Définition Loi de Pareto, principe de Pareto ou règle des 80/20.
- [2] Barry, C. A. (2005). Pareto Distribution. Second Edition.
- [3] Barry, C. A. (2015). Pareto Distribution. Wiley Online Library. Hoboken, NJ.
- [4] Borchani, A. (2010). Statistiques des valeurs extrêmes dans le cas de lois discrètes, Ecole Supérieure de la Statistique et de l'Analyse de l'Information, Tunis.
- [5] Brazauskas, V., Serfling, R. (2000). Robust and efficient estimation of the tail index of a single-parameter Pareto distribution. North American Actuarial Journal, 4(4), 12-27.
- [6] Christon, Y.R. (2016). Théorie des valeurs extrêmes, ISFA-University lyon1 ENSA 3A.
- [7] Dominique, G. (2017). Je me bouge, j'utilise la loi de Pareto!, Jmebouge.com.
- [8] Dufour, L. (2018). Efficacité du dirigeant : qu'est ce que la loi de Pareto.
- [9] El Adlouni, S. E., Bobée, B., Ouarda, T. B. (2007). Caractérisation des distributions à queue lourde pour l'analyse des crues (No. R929). INRS, Centre Eau, Terre et Environnement.
- [10] Fabrice, M. (2014). Principe de Pareto : la règle des 80/20 appliquée au travail.

- [11] Frédéric P. (2018). Utilisation de la théorie des valeurs extrêmes dans le cadre de Solvabilité 2 Support de cours.
- [12] Hill, B.M. (1975). A simple general approach to inference about the tail of a distribution. *Ann. Statist.* 3(5), 1163 – 1174.
- [13] Ihaka, R., Gentleman, R. (1996). R : A Language for Data Analysis and Graphics. *Journal of Computational and Graphical Statistics* 5 : 299 – 314.
- [14] Juran, J. (1954). Les Universaux en Management, Organisation et Contrôle (Universals in Management, Planning and Controlling, The Management Control 1954.)
- [15] Juran, J. (1960). Pareto, Lorenz, Cournot, Bernouli, Juran and others, *Industrial Quality-Control*, n°4, Oct.
- [16] Juran, J. (1964). *Managerial Breakthrough : a new concept of the Manager's Job.*
- [17] Klebanov, L. B. (2003). Heavy tailed distributions. *Matfyzpress.*
- [18] Markéta, P. (2016). Estimation and Application of the Tail Index.
- [19] Mathlouthi, I., Zenaid, A. (2006). Théorie des valeurs extrêmes vs méthodes classiques de calcul de la VaR : Application au Tunibdex, ECOFI, Institut des Hautes Etudes Commerciales, Carthage, Tunisie.
- [20] McNeil, A. J., Frey, R., Embrechts, P.(2005). *Quantitative risk management : Concepts, techniques and tools (Vol. 3).* Princeton : Princeton university press.
- [21] Michèle .A ,Noël, B., Françoise, D., Jean, M.S. (2007). *Petit lexique de statistique et probabilité.* Université Montpellier II.
- [22] Pareto, V. (1917). *Traité de sociologie générale (Vol. 1).* Payot.
- [23] Pillai, R.N. (1991). Semi-Pareto processes. *J. Appl. Probab.*, 28, 461 – 465.

- [24] Resnick, S. (2006). Heavy-tail phenomena : Probabilistic and Statistical Modeling. Springer.
- [25] Smith, R. L. (1989). Extreme value analysis of environmental time series : an application to trend detection in ground-level ozone. *Statistical Science*, 4(4), 367-377.
- [26] Thiombiano, T. (1999). La loi de Pareto : une loi sur l'inégalité ou sur la pauvreté.

Annexe : Abréviations et Notations

Les différentes abréviations et notations utilisées tout au long de ce mémoire sont expliquées ci-dessous

$\xrightarrow{\mathcal{P}}$ convergence en probabilité.

$\xrightarrow{\mathcal{L}}$ convergence en loi.

$\xrightarrow{p.s.}$ convergence presque sûre.

$\stackrel{d}{\equiv}$ égale en distribution

\in appartient

∞ infini

\sum somme

\prod produit

$\mathbb{E}(\cdot)$ espérance

F, G fonctions de répartitions

FP loi de Feller-Pareto

\bar{F} fonction de survie

f, g fonctions de densités

GEV	distribution des valeurs extrêmes généralisés
GPD	loi de Pareto généralisée
IC	intervalle de confiance.
\lim	limite
\max	maximum
\min	minimum
P	probabilité
$P(I)$	loi de Pareto de premier type.
$P(II)$	loi de Pareto de deuxième type.
$P(III)$	loi de Pareto de troisième type.
$P(IV)$	loi de Pareto de quatrième type
POT	Peaks over threshold.
PS	loi de Pareto standard
q	quantile
q_p	quantile d'ordre p
\mathbb{R}	ensemble des réels
Var	variance
(X_1, \dots, X_m)	échantillon de taille m de v.a's
X, Y	variables aléatoires
$\hat{\theta}$	estimateur de θ
$\hat{\gamma}, \gamma^{Hill}$	estimateur de γ , estimateur de Hill
Γ	fonction gamma
$N(0, 1)$	Loi normale standard