

République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

UNIVERSITÉ MOHAMED KHIDER, BISKRA

FACULTÉ des SCIENCES EXACTES et des SCIENCES de la NATURE et de la VIE

DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES



Mémoire présenté en vue de l'obtention du Diplôme :

MASTER en Mathématiques

Option : **statistique**

Par

MESSAI Kamar

Titre :

**Validation croisée dans l'estimation à
noyau discret d'une matrice de
transition du modèle de stock (R, s, S) .**

Membres du Comité d'Examen :

Pr.	BRAHIMI Brahim	UMKB	Président
Dr.	CHERFAOUI Mouloud	UMKB	Encadreur
Dr.	ROUBI Affaf	UMKB	Examinatrice

Juin 2019

DÉDICACE

A mon père adoré

Et à ma chère mère qui ont été toujours

A mes côtés,

Et qui m'ont tout donné depuis mon enfance.

Que Dieu les protège et les garde pour nous.

A mes adorables frères,

A mes sœurs,

A toute la famille,

A mes amies,

A mes camarades de promotion 2018/2019

Et à tous ceux que j'aime

Je tiens à leur dédier ce modeste travail.

Kamar.

REMERCIEMENTS

*L*ouange à ALLAH, pour la volonté, la santé et la patience qu'il nous a donné durant toutes ces longues années.

Je tiens à exprimer mes vifs remerciements :

A mon promoteur M. CHERFAOUI Mouloud pour sa contribution

à l'élaboration de ce mémoire,

A l'ensemble des enseignants qui m'ont suivi durant mon cycle d'études,

A tous les enseignants du département des Mathématiques.

Je tiens à exprimer ma gratitude à toutes les personnes ayant aidé, de près ou de loin, à élaborer ce présent travail.

Mes respects vont également aux membres du jury qui m'ont fait l'honneur d'évaluer mon travail.

Kamar.

Table des matières

Dédicace	i
Remerciements	ii
Table des matières	ii
Table des figures	v
Liste des tables	vi
Introduction générale	1
1 Estimation à noyaux associés d'une densité discrètes	4
Introduction	4
1.1 Estimation à noyau d'une densité	4
1.2 Notion de noyaux associé discret	5
1.3 Choix du noyau	8
1.3.1 Noyau associé Poissonnien	8
1.3.2 Noyau associé binomial	9
1.3.3 Noyau associé binomial négatif	10
1.4 Choix de paramètre de lissage	11
Conclusion	13

2	Les normes matricielles pour le choix du paramètre de lissage	14
	Introduction	14
	2.1 Description du modèle (R, s, S)	14
	2.2 Probabilités de transition	16
	2.3 Estimation à noyau de la matrice de transition	17
	2.4 Validation croisée et normes matricielles	19
	Conclusion	21
3	Étude numérique comparative	22
	Introduction	22
	3.1 Introduction	22
	3.2 Présentation de l'application	22
	3.3 Résultats numériques et discussion	26
	Conclusion	28
	Conclusion générale	29
	Annexe : Abréviations et notations	31
	Bibliographie	32

Table des figures

2.1	Un schéma illustratif du Processus du niveau du stock dans le système (R, s, S) . . .	15
-----	---	----

Liste des tableaux

3.1	Estimateur de $(h_{opt}, \bar{Q}_{h_{opt}})$: cas f_1	24
3.2	Estimateur de $(h_{opt}, \bar{Q}_{h_{opt}})$: cas f_2	25
3.3	Estimateur de $(h_{opt}, \bar{Q}_{h_{opt}})$: cas f_3	26

Introduction générale

Depuis le modèle de Harris, des milliers d'articles sont apparus dans le domaine des sciences de gestion des stocks. Certainement, on se demande pourquoi une telle attention a été donnée aux modèles de gestion des stocks. L'explication est simplement qu'en pratique la constitution des stocks ainsi que leur gestion demeurent, dans la vie de toutes entreprises aussi petites soient-elles et jusqu'à l'individu (le consommateur), incontournable. De plus, on rencontre plusieurs situations différentes où chacune nécessite une analyse sur mesure.

Pour l'évaluation des mesures de performance d'un système de gestion de stock et la mise en place d'une politique optimale pour sa gestion, dans la littérature on trouve principalement deux approches, à savoir : l'approche déterministe et l'approche stochastique. Quoique l'approche déterministe nous fournisse des résultats satisfaisants, les modèles stochastiques de gestion des stocks sont les plus réalistes, car ils prennent en considération le comportement incertain de certains paramètres de départ décrivant le système considéré.

Théoriquement pour l'évaluation des performances d'un système d'une manière générale et d'un système de gestion de stock en particulier, on se base sur les différents paramètres de départ le décrivant. Cependant, dans la pratique et en règle générale, les valeurs des paramètres de départ d'un système ne sont connues que sous forme d'un échantillon de données. Dans ce sens, afin d'évaluer les performances du système considéré le recours aux techniques statistiques d'estimation (paramétrique ou/et non paramétrique), qui visent à fournir une approximation pour les valeurs des paramètres (inconnus) en exploitant l'information apportée par l'échantillon, est inévitable.

Dans ce document, nous proposons de considérer un système de gestion de stock de type (R, s, S)

modélisé par une chaîne de Markov sous l'hypothèse que la distribution des demandes est une fonction de masse générale et inconnue. En outre, notre objectif est d'estimer la matrice de transition associée à ce modèle qui est d'une grande importance dans son analyse transitoire et stationnaire, et qui nous permet également de déduire la totalité de reste de ses mesures de performance.

Dans la théorie classique de l'estimation paramétrique d'une matrice de transition associée à une chaîne de Markov, nous disposons de plusieurs méthodes, décrites dans [3], qui présentent l'avantage d'être simples à utiliser. Toutefois, il est difficile d'estimer avec précision des matrices de transition modélisant des phénomènes complexes. Pour pallier cette difficulté, nous faisons appel aux méthodes d'estimation non paramétriques. Ces dernières ont fait l'objet de travaux établis par Roussas (1969) [19] en utilisant la méthode du noyau. Les résultats obtenus par celui-ci ont été complétés par plusieurs autres auteurs mais ces résultats sont restreints dans le cadre théorique plus que pratique.

L'exploitation de la méthode du noyau dans les chaînes de Markov dans un cadre pratique revient initialement au travail de Bareche et Aïssani (2008) [1], où les auteurs ont prouvé l'applicabilité de la méthode du noyau dans les systèmes de files d'attente classiques lorsque l'une des lois les régissant est générale et inconnue. Par la suite, Gontijo et al. (2011) [8], ont appliqué la méthode de noyau pour estimer les mesures de performance du système $GI^{[X]}/M/C/N$. Dans un autre travail paru en 2015, Cherfaoui et al. [7] ont abordé le problème du choix du paramètre de lissage dans le contexte d'estimation à noyau d'une chaîne de Markov décrivant un système d'attente. Dans ce dernier travail, afin de prendre en considération l'interaction des différentes composantes d'un système d'attente les auteurs ont proposé une procédure de sélection du paramètre de lissage qui se base sur les normes matricielles où ils ont démontré que l'estimateur du paramètre de lissage choisi, par la minimisation d'une certaine norme matricielle, donne de meilleurs résultats que les méthodes classiques.

Récemment, dans [2] les auteurs ont démontré à base d'une étude de simulation que les résultats obtenus dans [7] restent valables dans le cas d'une chaîne de Markov discrète. Plus précisément, dans ce dernier travail les auteurs ont abordé le problème du choix du paramètre de lissage dans

le contexte de l'estimation à noyau d'une chaîne de Markov discrète décrivant un modèle de stock de type (R, s, S) où ils ont développé des formes explicites des expressions, issues de trois normes matricielles $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2$ et $\|\cdot\|_\infty$, à minimiser afin de sélectionner le paramètre de lissage optimale lors de l'estimation de la matrice de transition P . Cependant, quoique leurs étude montre l'intérêt de la minimisation des normes matricielles pour la sélection du paramètre de lissage, en particulier la norme matricielle $\|\cdot\|_2$, ça reste que les expressions des paramètre de lissage fournies sont restreint uniquement dans un cadre théorique non exploitable dans la pratique. A cet effet, dans le présent document nous proposons de développer les procédures proposées dans [2] de telle sorte qu'elles soient exploitables en pratique et cela en utilisant la validation croisée non biaisée. De plus, dans le but d'appuyer et d'illustrer notre proposition, une application numérique comparative basée sur des échantillons simulés sera réalisée.

Pour répondre à notre objectif nous avons organisé le présent mémoire comme suit : Dans le premier chapitre la notion d'estimateur à noyau discret sera présentée. Dans le deuxième chapitre après une brève présentation du modèle stochastique de gestion de stock de type (R, s, S) le problème du choix du paramètre de lissage, par la minimisation des norme matricielles lors de l'estimation de la matrice de transition du modèle de stock de type (R, s, S) , sera abordé. Avant de conclure, dans le troisième chapitre nous allons présenter l'application numérique réalisée, les résultats obtenus ainsi que leurs discussions.

Chapitre 1

Estimation à noyaux associés d'une densité discrètes

Introduction

Dans ce chapitre, nous allons présenter brièvement la différence entre les estimateurs à noyau classique de Parzen-Rosenblatt et les estimateurs à noyaux asymétrique (noyaux continus et noyaux discrets). Par la suite, notre intérêt sera orienté vers la question du choix du noyau associé et du paramètre de lissage dans le cas discret. Les propriétés des quelques estimateurs obtenus pour des noyaux discrets bien déterminés seront également présentées.

1.1 Estimation à noyau d'une densité

Soient X_1, X_2, \dots, X_n un n -échantillon issu d'une densité de probabilité inconnue $f(x)$. L'estimateur classique de $f(x)$ obtenu par la méthode du noyau, proposé par Rosenblatt [18] suivi de Parzen [14] s'écrit sous la forme :

$$\hat{f}(x) = \frac{1}{nh} \sum_{i=1}^n K\left(\frac{x - X_i}{h}\right), \quad (1.1)$$

où h représente le paramètre de lissage et K est un noyau qui vérifie les conditions suivantes :

$$\int_{\mathbb{R}} K(y)dy = 1, \quad \int_{\mathbb{R}} yK(y)dy = 0, \quad \text{et} \quad \int_{\mathbb{R}} y^2K(y)dy = \sigma_K^2 < \infty. \quad (1.2)$$

L'estimateur à noyau continu (1.1) a été développé principalement pour les densités à supports continus et non-bornés. La fonction noyau K est classiquement symétrique (i.e. $K(-x) = K(x)$), elle est considérée comme moins importante que le paramètre de lissage h . Bien qu'un noyau symétrique soit approprié pour ajuster des densités à supports non-bornés, il ne l'est pas pour des densités à supports compacts ou bornés d'un côté et a fortiori à supports discrets.

En effet, lorsqu'on veut estimer des densités à support borné au moins d'un seul côté, l'estimateur à noyau classique devient non consistant, à cause des effets aux bornes. Ce problème est dû à l'utilisation d'un noyau symétrique qui assigne un poids en dehors du support lorsque le lissage est pris en compte près de la borne. Plusieurs solutions ont été proposées dans la littérature pour remédier à cette difficulté. La solution la plus simple est de remplacer le noyau symétrique par un noyau asymétrique, qui n'assigne pas de poids en dehors du support de la densité que l'on veut estimer. Cette idée est due à l'origine aux travaux de Chen [5, 6]. Ainsi, la naissance de la notion des noyaux associés qui englobent les noyaux continus symétriques (classiques) et asymétriques (non classiques) où l'expression de l'estimateur, à noyau associé d'une densité f , est donnée par :

$$\hat{f}(x) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n K_{x,h}(X_i) \quad x \in \mathbb{R}, \quad (1.3)$$

avec h est le paramètre de lissage et $K_{x,h}$ sera dit alors "noyau associé" de cible x et de fenêtre h qui n'est pas forcément symétrique.

1.2 Notion de noyaux associé discret

Ci-dessous deux définitions liées aux notions *noyau associé discret* et *estimateur à noyau associé discret*.

Définition 1.2.1 Soit \mathfrak{N}_x le support d'une fonction de masse de probabilité f à estimer. Étant

donné $x \in \mathbb{N}$ et $h > 0$, on appelle " **noyau associé discret**" $K_{x,h}(\cdot)$ toute fonction de masse de probabilité liée à la variable aléatoire discrète $K_{x,h}$ de support \mathbb{N}_x contenant au moins x et indépendant de h , vérifiant les quatre conditions :

1. $\cup \mathbb{N}_x \supseteq \mathbb{N}$.
2. $E(K_{x,h}) \sim x$ lorsque $h \rightarrow 0$.
3. $Var(K_{x,h}) < +\infty$.
4. $Var(K_{x,h}) \rightarrow 0$ lorsque $h \rightarrow 0$.

Définition 1.2.2 Soit X_1, X_2, \dots, X_n un n -échantillon indépendant et identiquement distribué (i.i.d) issu d'une variable aléatoire X de la fonction de masse de probabilité inconnue f sur \mathbb{N} . L'estimateur à noyau associé discret de f est défini par :

$$\hat{f}(x) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n K_{x,h}(X_i), \quad (1.4)$$

où h est le paramètre de lissage (fenêtre) et $K_{x,h}$ est le noyau associé discret dépendant de x et h support $\mathbb{N}_{x,h} = \mathbb{N}_x$ (ne dépend pas de h).

Dans cette section nous allons introduire la définition quelques propriétés de l'estimateur à noyau discret, qui ont été établis principalement par Senga Kiessé [10] et Kokonendji et Senga Kiessé [11], ainsi que les conditions de convergence en moyenne, en moyenne quadratique et en moyenne quadratique intégrée.

Proposition 1.2.1 Soit X_1, X_2, \dots, X_n un n -échantillon iid issu d'une variable aléatoire X de la fonction de mass de probabilité inconnue f sur \mathbb{N} , si \hat{f} est l'estimateur à noyau asymétrique discret de f , alors, pour $x \in \mathbb{N}$ et $h > 0$ on a :

$$E(\hat{f}(x)) = E(K_{x,h})$$

où $K_{x,h}$ est la variable aléatoire de loi $K_{x,h}$ définie sur \mathbb{N}_x . De plus, on a $\hat{f}(x) \in [0 ; 1]$ pour $x \in \mathbb{N}$

et

$$E(\hat{f}(x)) = \sum_{y \in N \cap N_x} f(y)K_{x,h}(y) \longrightarrow f(x) \text{ quand } h \rightarrow 0 \text{ lorsque } n \longrightarrow +\infty$$

– **L'erreur quadratique moyenne (MSE) :**

$$MSE(\hat{f}(x)) = E[\hat{f}(x) - f(x)]^2 = Var(\hat{f}(x)) + Biais^2((\hat{f}(x))),$$

où $E[\hat{f}(x) - f(x)]^2 \longrightarrow 0$ quand $nh \longrightarrow +\infty$ et $h \rightarrow 0$.

– **L'erreur quadratique moyenne intégrée (MISE) :**

$$\begin{aligned} MISE(\hat{f}(x)) &= \sum_{x \in \mathbb{N}} MSE(f(x), \hat{f}(x)) = \sum_{x \in \mathbb{N}} Var(\hat{f}(x)) + \sum_{x \in \mathbb{N}} Biais^2((\hat{f}(x))), \\ &= \frac{1}{n} \sum_{x \in \mathbb{N}_x} f(x) [(\Pr(K_{x,h} = x))^2 - f(x)] \\ &\quad + \sum_{x \in \mathbb{N}_x} \left[f(E(K_{x,h})) - f(x) + \frac{1}{2} Var(K_{x,h}) f^{(2)}(x) \right]^2 + o\left(\frac{1}{n} + h^2\right) \\ &= MISE(n, h, K, f), \end{aligned} \tag{1.5}$$

avec $f^{(2)}$ représentent la différence finie d'ordre 2, donnée par :

$$f^{(2)}(x) = \begin{cases} \{f(x+2) - 2f(x) + f(x-2)\} / 4, & \text{si } x \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}; \\ \{f(3) - 3f(1) + 2f(0)\} / 4, & \text{si } x = 1; \\ \{f(2) - 2f(1) + f(0)\} / 2, & \text{si } x = 0. \end{cases} \tag{1.6}$$

Rappelons que la différence finie d'ordre 1 est donnée par :

$$f^{(1)}(x) = \begin{cases} \{f(x+1) - f(x-1)\} / 2, & \text{si } x \in \mathbb{N} / \{0\}; \\ f(1) - f(0), & \text{si } x = 0. \end{cases} \tag{1.7}$$

1.3 Choix du noyau

Dans la littérature et la pratique plusieurs fonctions discrètes sont proposées pour jouer le rôle du noyau. Dans cette section nous allons présenter les noyaux les plus usités dans le cadre d'estimation d'une densité discrète.

1.3.1 Noyau associé Poissonien

Nous rappelons qu'une loi de Poisson $P_o(\lambda)$ de paramètre λ est une loi discrete définie sur \mathbb{N} de fonction de probabilité

$$\Pr(X = x) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^x}{x!}, \quad x \in \mathbb{N}.$$

De plus, $E(X) = Var(x) = \lambda$.

Soit $K_{p_o(x+h)}$ le noyau de Poisson equidispersé sur $\mathfrak{X} = \mathbb{N}$ tel que :

$$K_{p_o(x+h)}(y) = e^{-(x+h)} \frac{(x+h)^y}{y!}.$$

avec $(x, y) \in \mathbb{N}^2$ et $h > 0$ est le paramètre de lissage.

Propriété 1.3.1 *Soit $\hat{f}(x)$ l'estimateur d'une loi discrete construit par le noyau **Poissonien** alors :*

1. *L'estimateur $\hat{f}(x)$ de f , son biais et sa variance sont :*

$$\begin{aligned} \hat{f}(x) &= \frac{1}{n} \sum_{i=0}^n \left(e^{-(x+h)} \frac{(x+h)^{X_i}}{X_i!} \right). \\ \text{Biais}(\hat{f}(x)) &= hf^{(1)}(x) + \frac{1}{2}(x+h)f^{(2)}(x) + o(h). \\ \text{Var}(\hat{f}(x)) &= \frac{1}{n} f(x) \frac{(x+h)^x}{x!}. \end{aligned}$$

2. *Le MISE :*

$$MISE(n, h, K, f) = \frac{1}{n} \sum_{x \in \mathfrak{X}_x} f(x) \frac{(x+h)^x}{x!} e^{-(x+h)} + \sum_{x \in \mathfrak{X}_x} \left(hf^{(1)}(x) + \frac{1}{2}(x+h)f^{(2)}(x) + o(h) \right)^2.$$

où $f^{(1)}(x)$ et $f^{(2)}(x)$ sont données dans (1.7) et (1.6), respectivement.

1.3.2 Noyau associé binomial

Nous rappelons qu'une loi Binomiale de paramètre (N, p) est une loi discrète définie sur l'ensemble $\{0, 1, \dots, N\}$, avec $N \in \mathbb{N}$ fixé de fonction de masse de probabilités $g_{BN(N,p)}$ tel que :

$$\Pr(X = x) = \frac{N!}{x!(N-x)!} p^x (1-p)^{N-x}.$$

De plus, $E(X) = Np$ et $Var(X) = Np(1-p)$.

Soit $K_{B(x+1, (x+h)/x+1)}$ le noyau associé de loi Binomiale définie sur le support $\mathfrak{N}_{x,h} = \{0, 1, \dots, x+1\}$ est donné par :

$$K_{B(x+1, (x+h)/x+1)}(y) = \frac{(x+1)!}{y!(x+1-y)!} \left(\frac{x+h}{x+1}\right)^y \left(\frac{1-h}{1+x}\right)^{x+1-y} \mathbf{1}_{\{y \leq x+1\}}.$$

où $x \in \mathbb{N}$, $h \in]0 ; 1]$ et $\mathbf{1}$ est la fonction indicatrice.

Propriété 1.3.2 Soit $\hat{f}(x)$ l'estimateur d'un loi discret construit par le Noyau **binomial** alors :

1. L'estimateur $\hat{f}(x)$ de f , son biais et sa variance sont :

$$\begin{aligned} \hat{f}(x) &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{(x+1)!}{X_i!(x+1-X_i)!} \left(\frac{x+h}{x+1}\right)^{X_i} \left(\frac{1-h}{x+1}\right)^{x+1-X_i} \mathbf{1}_{\{x+1 \geq X_i\}}. \\ \text{Biais}(\hat{f}(x)) &= hf^{(1)}(x) + \frac{1}{2}(x+h) \left(\frac{1-h}{x+1}\right) f^{(2)}(x) + o(h). \\ \text{Var}(\hat{f}(x)) &= \frac{1-h}{n} \left(\frac{x+h}{x+1}\right)^x f(x). \end{aligned}$$

2. Le MISE :

$$\begin{aligned} \text{MISE}(n, h, K, f) &= \sum_{x \in \mathfrak{N}} \left\{ hf^{(1)}(x) + \frac{1}{2}(x+h) \left(\frac{1-h}{x+1}\right) f^{(2)}(x) + o(h) \right\}^2 \\ &\quad + \frac{1-h}{n} \sum_{x \in \mathfrak{N}} \left(\frac{x+h}{x+1}\right)^x f(x). \end{aligned}$$

où $f^{(1)}(x)$ et $f^{(2)}(x)$ sont données respectivement par (1.7) et (1.6).

1.3.3 Noyau associé binomial négatif

Nous rappelons qu'une loi binomiale négative de paramètres s et p définie sur \mathbb{N} de fonction de masse de probabilité $g_{BN(s,p)}(x)$ tel que :

$$g_{BN(s,p)}(x) = \frac{(x+s)!}{x!s!} p^s (1-p)^s.$$

De plus, $E(X) = s(1-p)/p$ et $Var(X) = s(1-p)/p^2$.

Soit $K_{BN(x+1,(x+1)/(2x+1+h))}$ le noyau associé de loi Binomiale négative définie sur \mathbb{N} tel que :

$$K_{BN(x+1,(x+1)/(2x+1+h))}(y) = \frac{(x+y)!}{y!x!} \left(\frac{x+h}{2x+1+h} \right)^y \left(\frac{x+1}{2x+1+h} \right)^{x+1},$$

où $x, y \in \mathbb{N}$ et $h > 0$.

Propriété 1.3.3 Soit $\hat{f}(x)$ l'estimateur d'une loi discret construit par le noyau **binomial négatif** alors :

1. L'estimateur $\hat{f}(x)$ de f , son biais et sa variance sont :

$$\begin{aligned} \hat{f}(x) &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{(x+X_i)!}{X_i!x!} \left(\frac{x+h}{2x+1+h} \right)^{X_i} \left(\frac{x+1}{2x+1+h} \right)^{x+1}. \\ \text{Biais}(\hat{f}(x)) &= hf^{(1)}(x) + \frac{1}{2}(x+h) \left(\frac{2x+1+h}{x+1} \right) f^{(2)}(x) + o(h). \\ \text{Var}(\hat{f}(x)) &= \frac{1}{n} \frac{2}{x!} \left(\frac{x+h}{2x+1+h} \right)^x \left(\frac{x+1}{2x+1+h} \right)^{x+1} f(x). \end{aligned}$$

2. le MISE :

$$\begin{aligned} \text{MISE}(n, h, K, f) &= \frac{1}{n} \sum_{x \in \mathbb{N}} \frac{2}{x!} \left(\frac{x+h}{2x+1+h} \right)^x \left(\frac{x+1}{2x+1+h} \right)^{x+1} f(x) \\ &\quad + \sum_{x \in \mathbb{N}} \left(hf^{(1)}(x) + \frac{1}{2}(x+h) \left(\frac{2x+1+h}{x+1} \right) f^{(2)}(x) \right)^2 + o(h). \end{aligned}$$

où $f^{(1)}(x)$ et $f^{(2)}(x)$ sont définies respectivement par (1.7) et (1.6).

1.4 Choix de paramètre de lissage

Dans cette section nous présentons quelques méthodes classiques pour le choix du paramètre de lissage dans l'estimation des fonctions discrètes.

1. Minimisation du MISE

Soit $X = (X_1, \dots, X_n)$ un n échantillons fixé *iid* de distribution inconnue f alors l'erreur quadratique intégrée (ISE) est donné par :

$$ISE = \sum_{x \in \mathbb{N}} (\hat{f}(x) - f(x))^2 = ISE(n, h, K, f), \quad (1.8)$$

ainsi (1.8) conduit à choisir une fenêtre adéquate :

$$h_{ise}^* = \arg \min_h ISE(X, h, K, f), \quad (1.9)$$

pour laquelle la mesure est sur un seul échantillon et la fenêtre optimale h_{opt}^* peut être obtenue, dans le cas de plusieurs échantillons, à travers $h_{opt}^* = \arg \min_{h>0} E(ISE(X, h, K, f))$

Ces techniques ont été développées et détaillées par Kokonendji et Senga Kiessé [12]; Kokonendji et Senga Kiessé [11].

2. Validation croisée

Nous proposons ici deux techniques qui se basent sur la méthode de validation croisée. Plus précisément, comme cité auparavant, est d'estimer la densité f au point x_i par la technique de validation croisée dont la forme est donner par :

$$\hat{f}_i(X_i) = \frac{1}{n-1} \sum_{j=1, j \neq i}^n K_{X_i, h}(X_j),$$

- (a) Validation croisée par les moindres carrés : le principe de cette méthode consiste à estimer le ISE par la technique de validation croisée et par la suite de sélectionner le

paramètre de lissage qui minimise l'estimateur en question.

La fenêtre optimale, dans ce cas, s'obtient par :

$$\begin{aligned} h_{ucv}^* &= \arg \min_{h>0} CV(h) = \arg \min_{h>0} \left[\sum_{x \in \mathbb{N}} \left\{ \hat{f}(x) \right\}^2 - \frac{2}{n} \sum_{i=1}^n \hat{f}_i(X_i) \right] \\ &= \arg \min_{h>0} \left[\sum_{x \in \mathbb{N}} \left\{ \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n K_{x,h}(X_i) \right\}^2 - \frac{2}{n(n-1)} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1, j \neq i}^n K_{X_i,h}(X_j) \right]. \end{aligned} \quad (1.10)$$

(b) Validation croisée par le maximum de vraisemblance.

Ce critère consiste à choisir h qui maximise la fonctionnelle

$$LCV(h) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \log \left(\hat{f}_i(X_i) \right). \quad (1.11)$$

Ainsi, on détermine une fenêtre optimale h_{LCV} par : $h_{LCV} = \arg \max_{h>0} LCV(h)$.

3. **Excès des zéros** Cette technique pour le choix de la fenêtre repose sur une particularité des données de comptage qui n'est autre que l'excès des zéros dans l'échantillon, c'est-à-dire de choisir une fenêtre adaptés $h_0 = h_0(X, K)$ tel que h satisfait :

$$\sum_{i=1}^n \Pr(\mathcal{K}_{X_i, h_0} = 0) = n_0, \quad (1.12)$$

où $n_0 = \text{card}\{X_i = 0\}$ désigne le nombre des zéros dans l'échantillon X_1, \dots, X_n à condition que $n_0 > 0$. Ci-dessous quelques exemples de h_0 :

- Si le noyau utilisé est Poissonnien alors $h_0 = \log \left(\frac{1}{n_0} \sum_{i=1}^n e^{-X_i} \right)$.
- Si le noyau utilisé est Binomial alors le h_0 est la solution de $n_0 = \sum_{i=1}^n \left(\frac{1-h_0}{X_i+1} \right)^{X_i+1}$.
- Si le noyau utilisé est Binomial négatif alors le h_0 est la solution de $n_0 = \sum_{i=1}^n \left(\frac{X_i+1}{2X_i+1+h_0} \right)^{X_i+1}$.

Remarque 1.4.1 *Le paramètre de lissage sélectionné par la méthode Excès des zéros n'existe pas toujours. En effet, pour certains noyaux l'équation 1.12 n'admet pas de solution. A titre d'exemple on peut cité le cas du noyau triangulaire (pour plus de détails voir Kokonendji et al [12] et Senga Kiessé [10]).*

Conclusion

Le rôle du paramètre de lissage au cas discret $h > 0$ reste semblable au cas continu, où il permet de tenir compte des observations X_i qui sont proches de la cible $x \in \mathbb{N}$ lorsque $h = h(n) \rightarrow 0$. Cependant la dispersion locale en tout point d'estimation x se traduit par l'importance du noyau associé discret $K_{x,h}$ choisir, ainsi le choix d'un type de noyau discret s'oriente vers des distributions de $K_{x,h}$ qui soient moins dispersées autour de $x \in \mathbb{N}$ et $h > 0$ fixées.

Chapitre 2

Les normes matricielles pour le choix du paramètre de lissage

Introduction

Dans le présent chapitre, l'objectif principal est l'estimation à noyau d'une matrice de transition inconnue P associée à une chaîne de Markov discrète décrivant un modèle de Gestion du stock de type (R, s, S) . Plus précisément, notre étude se base principalement sur la construction des procédures de sélection du paramètre de lissage par les normes matricielles.

2.1 Description du modèle (R, s, S)

Considérons un système de stock de type (R, s, S) . Suivant la signification de modèle (R, s, S) [15, 16, 17], le niveau de la position de stock est inspecté chaque R unités de temps et une commande sera lancée si le processus de position du stock à la date $t_n = nR$ est inférieur au niveau du stock de risque s . Au début de chaque période le gestionnaire décide s'il doit ou non commander une quantité d'articles et si oui, combien commander. On suppose que le fournisseur est parfaitement fiable et que les commandes arrivent immédiatement. Durant la $n^{\text{ième}}$ ($n \geq 1$) période la demande totale est une variable aléatoire discrète X_n . On suppose également que les variables aléatoires

X_n , $n \geq 1$, sont indépendantes et identiquement distribuées, de loi commune :

$$a_k = \Pr(X_1 = k) = \Pr(X = k), \quad k = 0, 1, 2, 3, \dots \quad (2.1)$$

Pour tel problème de gestion de stock, l'état du stock L_n est inspectée aux dates $t_n = nR$ ($n \geq 1$). Et si le niveau du stock $L_n \leq s$, on passe une commande de manière à ramener le stock au niveau S , la taille de la commande est égale alors à $S - L_n$. Si par contre le niveau du stock est supérieure au seuil de risque s , on ne passe aucune commande et l'on attend jusqu'au prochain moment d'inspection.

L'état du stock L_{n+1} à la fin de la période $n + 1$ est alors donné par :

$$L_{n+1} = \begin{cases} (S - X_{n+1})^+, & \text{si } L_n \leq s; \\ (L_n - X_{n+1})^+, & \text{si } L_n > s; \end{cases} \quad (2.2)$$

où $(A)^+ = \max(A, 0)$.

La variable aléatoire L_{n+1} ne dépend que de L_n et X_{n+1} , où X_{n+1} est indépendante de n et de l'état du système avant t_n . Donc L est donc une chaîne de Markov homogène, à espace d'état $E = \{0, 1, \dots, S\}$. Enfin, le modèle de stock en question peut être schématisé sous sa forme générale suivant :

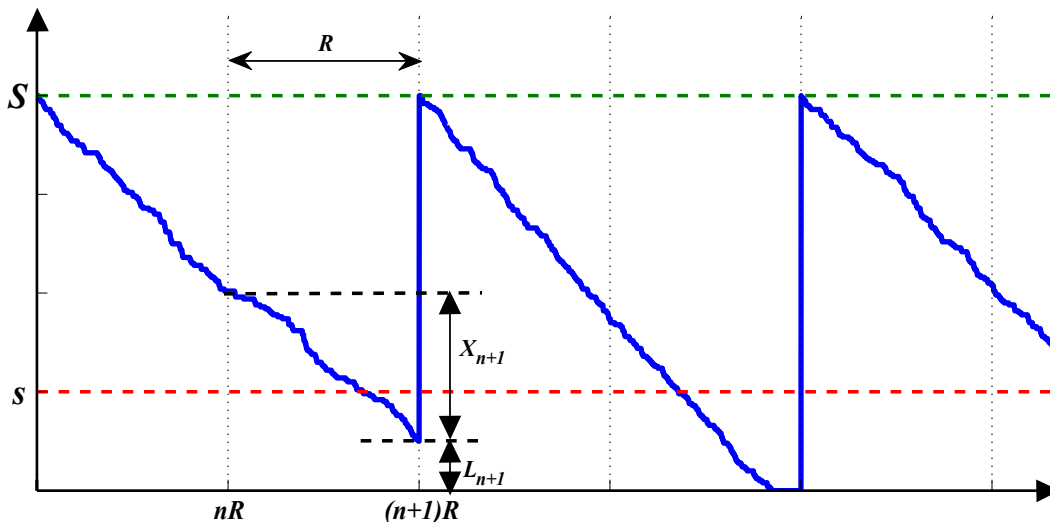


FIGURE 2.1 – Un schéma illustratif du Processus du niveau du stock dans le système (R, s, S) .

Pour plus de détails sur les modèles de stock d'une manière générale et du modèle de stock de type (R, s, S) en particulier le lecteur peut se référer à [15].

2.2 Probabilités de transition

Supposons que le niveau du stock à la date $t_n = nR$ et la date $t_{n+1} = (n+1)R$ est $L_n = i$ et $L_{n+1} = j$, respectivement. Alors les probabilités de transition $\Pr(L_{n+1} = j \mid L_n = i)$ de cette chaîne sont données comme suit :

1. Si $0 \leq i \leq s$ on a : $L_{n+1} = (S - X_{n+1})^+$, donc on distingue les deux cas suivants :

$$\text{Cas } j = 0 : \Pr(L_{n+1} = 0 \mid L_n = i) = \Pr(S - X_{n+1} \leq 0) = \Pr(X_{n+1} \geq S) = \sum_{k=S}^{+\infty} a_k.$$

$$\text{Cas } 0 < j \leq S : \Pr(L_{n+1} = j \mid L_n = i) = \Pr(S - X_{n+1} = j) = \Pr(X_{n+1} = S - j) = a_{S-j}.$$

2. Si $s + 1 \leq i \leq S$ et $L_{n+1} = (i - X_{n+1})^+$ on distingue les trois cas suivants :

$$\text{Cas } j = 0 : \Pr(L_{n+1} = 0 \mid L_n = i) = \Pr(i - X_{n+1} \leq 0) = \Pr(X_{n+1} \geq i) = \sum_{k=i}^{+\infty} a_k.$$

$$\text{Cas } 0 < j \leq i : \Pr(L_{n+1} = j \mid L_n = i) = \Pr(i - X_{n+1} = j) = \Pr(X_{n+1} = i - j) = a_{i-j}.$$

$$\text{Cas } j > i : \Pr(L_{n+1} = j \mid L_n = i) = 0.$$

Ces dernières peuvent être résumées comme suit :

$$P_{ij} = \begin{cases} \sum_{k=S}^{+\infty} a_k, & \text{Si } 0 \leq i \leq s \quad \text{et } j = 0; \\ a_{S-j}, & \text{Si } 0 \leq i \leq s \quad \text{et } 1 \leq j \leq S; \\ \sum_{k=i}^{\infty} a_k & \text{Si } s + 1 \leq i \leq S \quad \text{et } j = 0; \\ a_{i-j}, & \text{Si } s + 1 \leq i \leq S \quad \text{et } 1 \leq j \leq i; \\ 0, & \text{Si } s + 1 \leq i \leq S \quad \text{et } j \geq i + 1; \end{cases}$$

avec a_k est donnée par l'expression (2.1).

2.3 Estimation à noyau de la matrice de transition

Supposons maintenant que pour un certain système de gestion de stock de type (R, s, S) nous ne disposons que d'un échantillon X_1, X_2, \dots, X_n de taille n des demandes issue d'une distribution f générale et inconnue, de ce fait afin d'évaluer les performances de notre système le recours aux méthodes statistiques d'estimation est inévitable. De plus, notre intérêt est l'estimation de la matrice de transition P associée à ce modèle.

Dans ce document, pour estimer la matrice P nous proposons d'utiliser la méthode du noyau définie par :

$$\hat{a}_x = \hat{f}(x) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n K_{x,h}(X_i) \quad x \in \mathbb{N}. \quad (2.3)$$

Il est clair que la mise en œuvre de cette technique nécessite de fixer le noyau K et le paramètre de lissage h . Pour le choix du noyau K , le problème à priori est facile, il suffit de le sélectionner par exemple, parmi les noyaux exposés dans la section 1.3. Tandis que le problème du choix du paramètre de lissage h , on peut envisager deux manières :

1. Estimation des éléments $a_k = \Pr(X = k)$ indépendamment de leurs répétitions dans la matrice P i.e. l'estimation de la matrice de transition, P , de la chaîne de Markov associée au modèle de stock (R, s, S) consiste à évaluer la quantité inconnue a_k par

$$\hat{a}_k = \hat{P}(X = k) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n K_{k,h}(X_i), \quad k \in \mathbb{N},$$

et de substituer cet estimateur, dans les P_{ij} pour obtenir \hat{P} . Le choix de paramètre de lissage, dans ce cas, se fait par le biais de l'une des techniques citées dans la section 1.4.

2. Prendre en considération la répétition des éléments \hat{a}_k dans la matrice \hat{P} , donnée par :

$$\hat{P} = \begin{array}{c|ccc|cc} & 0 & 1 & s & s+1 & S \\ \hline 0 & \sum_{S}^{+\infty} \hat{a}_k & \hat{a}_{S-1} & \cdots & \hat{a}_{S-s} & \hat{a}_{S-s-1} & \cdots & \hat{a}_0 \\ 1 & \sum_{S}^{+\infty} \hat{a}_k & \hat{a}_{S-1} & \cdots & \hat{a}_{S-s} & \hat{a}_{S-s-1} & \cdots & \hat{a}_0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ s & \sum_{S}^{+\infty} \hat{a}_k & \hat{a}_{S-1} & \cdots & \hat{a}_{S-s} & \hat{a}_{S-s-1} & \cdots & \hat{a}_0 \\ \hline s+1 & \sum_{s+1}^{+\infty} \hat{a}_k & \hat{a}_s & \cdots & \hat{a}_1 & \hat{a}_0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ S & \sum_{S}^{+\infty} \hat{a}_k & \hat{a}_{S-1} & \cdots & \hat{a}_{S-s} & \hat{a}_{S-s-1} & \cdots & \hat{a}_0 \end{array} \quad (2.4)$$

Dans le but de prendre en consideration les répétition, dans [2] les auteurs ont proposé d'utiliser les normes matricielles qui ont un impact sur la qualité de l'estimateur \hat{P} . En effet, l'utilisation des normes matricielles permet d'inclure les répétitions des quantités \hat{a}_k dans l'expression \hat{P} . Plus exactement, ils ont suggéré choisir le paramètre de lissage optimal selon l'une des trois expressions suivantes :

$$\begin{aligned} h_1^* &= \arg \min_h \left\| \hat{P} - P \right\|_1 = \arg \min_h \left[\sup_{s+1 \leq i \leq S} \left(\sum_{k=0}^{i-1} |\hat{a}_k - a_k| + \left| \sum_{k=0}^{i-1} (\hat{a}_k - a_k) \right| \right) \right] \\ h_2^* &= \arg \min_h \left\| \hat{P} - P \right\|_2 = \arg \min_h \left[\begin{aligned} &(S+1) \sum_{k=0}^s (\hat{a}_k - a_k)^2 + \sum_{k=s+1}^{S-1} (S+s+1-k) (\hat{a}_k - a_k)^2 \\ &+ (s+2) \left(\sum_{k=0}^{S-1} (\hat{a}_k - a_k) \right)^2 + \sum_{i=s+1}^{S-1} \left(\sum_{k=0}^{i-1} (\hat{a}_k - a_k) \right)^2 \end{aligned} \right] \\ h_3^* &= \arg \min_h \left\| \hat{P} - P \right\|_\infty \\ &= \arg \min_h \left[\sup_{0 \leq j \leq S} \left(\begin{aligned} &\left[(s+2) \left| \sum_{k=0}^{S-1} (\hat{a}_k - a_k) \right| + \sum_{i=s+1}^{S-1} \left| \sum_{k=0}^{i-1} (\hat{a}_k - a_k) \right| \right] \mathbf{1}_{\{j=0\}} \\ &+ \left[(s+2) |\hat{a}_{S-j} - a_{S-j}| + \sum_{i=s+1}^{S-1} |\hat{a}_{i-j} - a_{i-j}| \right] \mathbf{1}_{\{1 \leq j \leq s\}} \\ &+ \left[(s+2) |\hat{a}_{S-j} - a_{S-j}| + \sum_{i=j}^{S-1} |\hat{a}_{i-j} - a_{i-j}| \right] \mathbf{1}_{\{s+1 \leq j \leq S-1\}} \end{aligned} \right) \right] \end{aligned}$$

avec $\mathbf{1}_{\{\cdot\}}$ est la fonction indicatrice.

2.4 Validation croisée et normes matricielles

Dans le cadre d'estimation à noyaux d'une matrice de transition d'une chaîne de Markov discrète décrivant un modèle de stock de type (R, s, S) , comme citer auparavant dans le travail [2] les auteurs ont considéré le choix du paramètre de lissage par des procédures qui se basent sur des normes matricielles. Quoique les procédures proposées fournissent de bons résultats, elles sont restreintes dans un aspect théorique seulement et sont inexploitable dans la pratique. Pour cela nous proposons de développer ces procédures de telle sorte qu'elles soient exploitables en pratique et cela en utilisant la technique de validation croisée non biaisée. Plus précisément, ce qui nous interesse est uniquement l'expression de h_2^* donner par :

$$h_2^* = \arg \min_h \left\| \hat{P} - P \right\|_2 = \arg \min_h \left[\sum_{i=0}^S \sum_{j=0}^S \left(\hat{P}_{ij} - P_{ij} \right)^2 \right] \quad (2.5)$$

$$= \arg \min_h \left[(S+1) \sum_{k=0}^s (\hat{a}_k - a_k)^2 + \sum_{k=s+1}^{S-1} (S+s+1-k) (\hat{a}_k - a_k)^2 \right. \\ \left. + (s+2) \left(\sum_{k=0}^{S-1} (\hat{a}_k - a_k) \right)^2 + \sum_{i=s+1}^{S-1} \left(\sum_{k=0}^{i-1} (\hat{a}_k - a_k) \right)^2 \right]. \quad (2.6)$$

Avec le même raisonnement que dans Rudemo (1982) [20] et Bowman (1984) [4] on peut démontrer ce qui suit :

Proposition 2.4.1 *Soit un système de gestion de stock de type (R, s, S) modélisé par une chaîne de Markov discrète, L , sous l'hypothèse que la distribution des demandes est une fonction de masse générale et inconnue. Si on dispose d'un échantillon $X_1, X_2, X_3, \dots, X_n$ des demandes alors le paramètre de lissage optimale, au sens de la norme $\|\cdot\|_2$ basée sur l'UCV, pour estimer la matrice*

de transition de L lorsque on utilise le noyau K est donné par :

$$h_{cv}^* = \arg \min_h \left\| \hat{P} - P \right\|_2^{cv} = \arg \min_h \left\{ \sum_{i=0}^S \sum_{j=0}^S \hat{P}_{ij}^2 - 2 \left[\sum_{i=s+1}^{S-1} E(\hat{P}_i) + (s+2) E(\hat{P}_S) \right] \right\}, \quad (2.7)$$

tell que,

$$E(\hat{P}_i) = \frac{1}{(n-1)(n_i+1)} \left[\sum_{k=1}^n \sum_{\substack{l=1 \\ l \neq k}}^n K_{(X_k, h)}(X_l) \right], \quad (2.8)$$

et $n_i = \text{card} \{X_k \leq i-1\}$.

Preuve. Soit la matrice de transition P associée à la chaîne de Markov discrète décrivant le modèle de stock de type (R, s, S) et \hat{P} sont estimateur à noyau alors

$$\begin{aligned} \arg \min_h \left\| \hat{P} - P \right\|_2 &= \arg \min_h \left[\sum_{i=0}^S \sum_{j=0}^S (\hat{P}_{ij} - P_{ij})^2 \right] \\ &= \arg \min_h \left[\sum_{i=0}^S \sum_{j=0}^S (\hat{P}_{ij}^2 - 2\hat{P}_{ij}P_{ij} + P_{ij}^2) \right]; \\ &= \arg \min_h \left[\sum_{i=0}^S \sum_{j=0}^S \hat{P}_{ij}^2 - 2 \sum_{i=0}^S \sum_{j=0}^S \hat{P}_{ij}P_{ij} + \sum_{i=0}^S \sum_{j=0}^S P_{ij}^2 \right] \end{aligned}$$

Puisque $\sum_{i=0}^S \sum_{j=0}^S P_{ij}^2$ ne dépend pas du paramètre de lissage h . On peut choisir alors le paramètre de lissage de façon à ce qu'il minimise un estimateur de :

$$\sum_{i=0}^S \sum_{j=0}^S \hat{P}_{ij}^2 - 2 \sum_{i=0}^S \sum_{j=0}^S \hat{P}_{ij}P_{ij}.$$

Maintenant, on veut trouver un estimateur de $\sum_{i=0}^S \sum_{j=0}^S \hat{P}_{ij}P_{ij}$. Pour cela, remarquons que

$$\sum_{j=0}^S \hat{P}_{ij}P_{ij} = \mathbb{E}(\hat{P}_{i\bullet}) \text{ pour } 0 \leq i \leq S.$$

Pour les besoins de la suite de la démonstration définissant l'ensemble E_i par $E_i = \{0, \dots, i-1\}$ avec $s+1 \leq i \leq S$ et on pose $n_i = \text{card} \{X_k \in E_i\} = \text{card} \{X_k \leq i-1\}$.

D'après la forme de la matrice \hat{P} (voir l'expression (2.4)) l'estimateur empirique de $\sum_{j=0}^S \hat{P}_{ij} P_{ij}$, en fonction de E_i et n_i , construit via la validation croisée et donnée par :

$$E\left(\hat{P}_i\right) = \begin{cases} \frac{1}{(n-1)(n_S+1)} \left[\sum_{X_k \in E_S} \sum_{\substack{l=1 \\ l \neq k}}^n K_{(X_k, h)}(X_l) + \sum_{X_k \notin E_S} \sum_{\substack{l=1 \\ l \neq k}}^n K_{(X_k, h)}(X_l) \right], & \text{si } 0 \leq i \leq s; \\ \frac{1}{(n-1)(n_i+1)} \left[\sum_{X_k \in E_i} \sum_{\substack{l=1 \\ l \neq k}}^n K_{(X_k, h)}(X_l) + \sum_{X_k \notin E_i} \sum_{\substack{l=1 \\ l \neq k}}^n K_{(X_k, h)}(X_l) \right], & \text{si } s+1 \leq i \leq S. \end{cases}$$

Ainsi le h_{cv}^* est :

$$h_{cv}^* = \arg \min_h \left\| \hat{P} - P \right\|_2^{cv} = \sum_{i=0}^S \sum_{j=0}^S \hat{P}_{ij}^2 - 2 \left[\sum_{i=s+1}^{S-1} E\left(\hat{P}_i\right) + (s+2) E\left(\hat{P}_S\right) \right].$$

■

Conclusion

Dans cette partie nous avons proposé d'estimer la matrice de transition, P , d'une chaîne de Markov discrète, décrivant un modèle de stock de type (R, s, S) , à l'aide de la méthode du noyau. Nous avons remarqué qu'il existe deux manières de choisir le paramètre de lissage optimal à savoir : les méthodes classiques et les normes matricielles. A cet effet une question s'impose : quelle est la technique la plus adéquate pour le choix du paramètre de lissage dans cette situation ? La réponse à cette question fera l'objet du chapitre suivant.

Chapitre 3

Étude numérique comparative

3.1 Introduction

L'objectif du présent chapitre est d'identifier numériquement, à base des échantillons simulés, l'impact du choix du paramètre de lissage via la procédure proposé dans le Chapitre 2 et le noyau utilisé sur les performances de l'estimateur noyau d'une matrices de transition associée à la **chaîne de Markov** décrive un modèle de **gestion stock** de type (R, s, S) .

3.2 Présentation de l'application

Rappelons que l'objectif du chapitre en cours est d'analyser numériquement l'impact du choix du paramètre de lissage via la norme matricielles \mathbb{L}_2 et sa version conçue par la validation croisée non biaisée sur les performances de l'estimateur d'une matrice de transition associée à une chaîne de Markov décrivant un modèle de stock de type (R, s, S) . Pour ce faire, et afin facilité la quantification des différentes expressions intervenant dans l'expression des paramètres de lissage et dans la définition de l'estimateur en question nous avons implémenté un programme sous MATLAB dont les principales étapes sont :

Étape 1 Fixer la totalité des paramètres : $R, s, S, \lambda, f, n, m, K$.

Étape 2 Générer m échantillons de taille n de distribution f .

Étape 3 Estimer h_{opt} par les expressions (1.9), (1.10), (2.6) et (2.7) pour chaque échantillon.

Étape 4 Calculer \hat{f} , \hat{P} et \hat{Q} pour chaque h_{opt} obtenus dans l'Étape 3.

Étape 5 Calculer h^* et \bar{Q} les moyennes des estimateurs h_{opt} et \hat{Q} .

Notons que \hat{Q} représente l'estimateur du niveau moyen de stock défini par :

$$\hat{Q} = \sum_{i=0}^S i\pi_i, \quad (3.1)$$

avec $\pi = (\pi_0, \pi_1, \dots, \pi_S)$ est le vecteur des probabilités stationnaires du niveau de stock qu'on obtient par la résolution du système d'équations suivant :

$$\begin{cases} \pi * \hat{P} = \pi, \\ \sum_{i=0}^S \pi_i = 1. \end{cases} \quad (3.2)$$

Dans cette application nous allons focaliser principalement sur l'effet du choix du paramètre de lissage sur les caractéristiques du modèle (R, s, S) en question en fonction de la taille de l'échantillon et du noyau utilisé. Pour cela, nous avons fixé ce qui suit :

- le nombre de réplifications (échantillons) $m = 1000$,
- la taille de l'échantillon $n \in \{50; 100; 250; 500; 1000; 2000\}$,
- la période $R = 1$, le taux des demandes $\lambda R = 5$ et la distribution $f \in \{\text{Poisson}(\mu), \text{Géométrique}(p_1), \text{binomiale}(N, p_2)\}$ qui sont notées respectivement f_1 , f_2 et f_3 avec $\mu = 5$, $p_1 = 1/6$, $N = 12$ et $p_2 = 5/12$.
- le seuil du risque $s = 3$ et la capacité maximale du stock est $S = 6$.
- le noyau $K \in \{\text{Poisson}; \text{binomial}; \text{binomial Négatif}\}$.

Les résultats obtenus pour les différents paramètres précédents sont rangés dans les Tables 3.1–3.3.

Noyau	n	ISE		UCV		$\ \cdot \ _2$		$\ \cdot \ _2^{cv}$	
		h_{ise}^*	\bar{Q}_{ise}	h_{ucv}^*	\bar{Q}_{UCV}	h_2^*	$\bar{Q}_{h_2^*}$	h_{cv}^*	$\bar{Q}_{h_{cv}^*}$
Poisson	50	0.6512	1.5528	2.4263	2.204	0.5384	1.4976	1.5916	1.9728
	100	0.6887	1.5653	2.4313	2.1776	0.5674	1.5043	1.6088	1.9664
	250	0.6592	1.5680	2.4155	2.1757	0.5372	1.5077	1.5869	1.9630
	500	0.7266	1.5781	2.4737	2.1564	0.5994	1.5169	1.6144	1.9421
	1000	0.6768	1.5701	2.4312	2.1700	0.5534	1.5094	1.5932	1.9564
	2000	0.6722	1.5705	2.4248	2.1692	0.5491	1.5096	1.5884	1.9566
Binomial	50	1.1482	1.5529	1.9577	1.6885	0.9928	1.5101	1.4486	1.6256
	100	1.2982	1.5489	2.0739	1.6657	1.1448	1.5098	1.4955	1.5927
	250	1.2526	1.5556	2.0400	1.6749	1.0916	1.5148	1.4723	1.6025
	500	1.2530	1.5559	2.0430	1.6761	1.0913	1.5145	1.4743	1.6029
	1000	1.2355	1.5574	2.0257	1.6770	1.0724	1.5159	1.4646	1.6054
	2000	1.2450	1.5566	2.0335	1.6757	1.0823	1.5154	1.4689	1.6034
Binomial Négatif	50	1.1451	1.5552	1.9782	1.7011	0.9912	1.5103	1.4479	1.6319
	100	1.2387	1.5543	2.0339	1.6805	1.0815	1.5128	1.4724	1.6088
	250	1.2645	1.5545	2.0512	1.6742	1.1047	1.5139	1.4791	1.6012
	500	1.2218	1.5576	2.0190	1.6806	1.0591	1.5154	1.4616	1.6090
	1000	1.2116	1.5590	2.0110	1.6821	1.0476	1.5164	1.4559	1.6108
	2000	1.2396	1.5576	2.0278	1.6761	1.0762	1.5164	1.4646	1.6044

 TABLE 3.1: Estimateur de $(h_{opt}, \bar{Q}_{h_{opt}})$: cas f_1 .

Noyau	n	ISE		UCV		$\ \cdot \ _2$		$\ \cdot \ _2^{cv}$	
		h_{ise}^*	\bar{Q}_{ise}	h_{ucv}^*	\bar{Q}_{UCV}	h_2^*	$\bar{Q}_{h_2^*}$	h_{cv}^*	$\bar{Q}_{h_{cv}^*}$
Poisson	50	0.4173	2.3281	0.0423	2.4822	0.4263	2.3252	0.0409	2.4822
	100	0.2772	2.3746	0.0059	2.4813	0.2771	2.3744	0.0049	2.4812
	250	0.2278	2.3915	6.24E-05	2.4803	0.2257	2.3919	4.84E-05	2.4803
	500	0.1748	2.3976	6.24E-05	2.4753	0.1679	2.3997	4.84E-05	2.4753
	1000	0.1826	2.4041	6.24E-05	2.4657	0.1742	2.4068	4.84E-05	2.4657
	2000	0.1926	2.4092	6.24E-05	2.4462	0.1832	2.4124	4.84E-05	2.4507
Binomial	50	1.1482	1.5529	1.9577	1.6885	0.9928	1.5101	1.4486	1.6256
	100	1.2982	1.5489	2.0739	1.6657	1.1448	1.5098	1.4955	1.5927
	250	1.2526	1.5556	2.0400	1.6749	1.0916	1.5148	1.4723	1.6025
	500	1.2530	1.5559	2.0430	1.6761	1.0913	1.5145	1.4743	1.6029
	1000	1.2355	1.5574	2.0257	1.6770	1.0724	1.5159	1.4646	1.6054
	2000	1.2450	1.5566	2.0335	1.6757	1.0823	1.5154	1.4689	1.6034
binomial Négatif	50	0.3594	2.2870	0.0377	2.5076	0.3583	2.2881	0.0301	2.5076
	100	0.4317	2.3200	0.0128	2.5012	0.4235	2.3224	0.0127	2.5012
	250	0.3203	2.3755	0.0011	2.4972	0.3045	2.3801	0.0014	2.4973
	500	0.3284	2.3824	6.24E-05	2.4919	0.3103	2.3877	4.84E-05	2.4919
	1000	0.3312	2.3860	6.24E-05	2.4640	0.3114	2.3919	4.84E-05	2.4641
	2000	0.3345	2.3926	6.24E-05	2.4089	0.3141	2.3992	4.84E-05	2.4169

 TABLE 3.2: Estimateur de $(h_{opt}, \bar{Q}_{h_{opt}})$: cas f_2 .

Noyau	n	ISE		UCV		$\ \cdot \ _2$		$\ \cdot \ _2^{cv}$	
		h_{ise}^*	\bar{Q}_{ise}	h_{ucv}^*	\bar{Q}_{UCV}	h_2^*	$\bar{Q}_{h_2^*}$	h_{cv}^*	$\bar{Q}_{h_{cv}^*}$
Poisson	50	0.6476	1.4443	2.7001	2.3077	0.4816	1.3559	1.5369	1.9046
	100	0.6346	1.4500	2.6907	2.3051	0.4674	1.3591	1.5135	1.9008
	250	0.6699	1.4551	2.7210	2.2952	0.4979	1.3636	1.5291	1.8896
	500	0.6598	1.4518	2.7111	2.2998	0.4891	1.3603	1.5219	1.8922
	1000	0.6796	1.4555	2.7323	2.2956	0.5079	1.3642	1.5249	1.8836
	2000	0.6734	1.4532	2.7297	2.2992	0.5031	1.3624	1.5172	1.8824
Binomial	50	1.2579	1.4958	2.2745	1.6861	0.9961	1.4078	1.5396	1.5737
	100	1.3144	1.4955	2.3042	1.6710	1.0487	1.4116	1.5468	1.5577
	250	1.2703	1.4991	2.2734	1.6789	1.0025	1.4126	1.5324	1.5677
	500	1.3093	1.4981	2.2993	1.6709	1.0405	1.4134	1.5423	1.5578
	1000	1.2680	1.4992	2.2711	1.6786	0.9999	1.4124	1.5314	1.5675
	2000	1.2917	1.4992	2.2875	1.6743	1.0226	1.4136	1.5359	1.5618
Binomial Négatif	50	1.2990	1.4945	2.3033	1.6778	1.0354	1.4092	1.5539	1.5644
	100	1.3244	1.4953	2.3137	1.6701	1.0586	1.4114	1.5529	1.5561
	250	1.2863	1.4984	2.2856	1.6761	1.0185	1.4126	1.5362	1.5637
	500	1.2953	1.4981	2.2929	1.6747	1.0273	1.4126	1.5366	1.5607
	1000	1.2821	1.4992	2.2808	1.6761	1.0136	1.4131	1.5338	1.5642
	2000	1.2879	1.4991	2.2856	1.6752	1.0192	1.4133	1.5337	1.5623

 TABLE 3.3: Estimateur de $(h_{opt}, \bar{Q}_{h_{opt}})$: cas f_3 .

3.3 Résultats numériques et discussion

Avant de présenter la discussion des résultats obtenus, signalons que le niveau moyen du stock théorique (exacte), Q , pour les paramètres fixés précédemment est :

$$Q = \begin{cases} 1.3936, & \text{dans le cas } f \text{ poissonnienne;} \\ 2.4334, & \text{dans le cas } f \text{ géométrique;} \\ 1.2294, & \text{dans le cas } f \text{ binomiale.} \end{cases}$$

A partir de des résultats obtenus (voir Tables 3.1–3.3), on constate que :

- Dans le cas de f_1 et f_3
 - Le paramètre de lissage est indépendant de la taille de l'échantillon et cela quel que soit la procédure de sélection et le noyau utilisés pour la construction de l'estimateur de P .
 - Le paramètre de lissage h_2^* , nous fournit des estimateurs du niveau moyen du stock plus proche à la valeur exacte de Q , que celui sélectionné par la minimisation du ISE et cela quel que soit le noyau utilisé.
 - Le paramètre de lissage h_{cv}^* , nous fournit des estimateurs de Q plus performant que ceux conçus par h_{ucv}^* , indépendamment du noyau utilisé. Ceci peut s'interpréter que dans la pratique, pour estimer la matrice P , il est préférable de sélectionner le paramètre de lissage par la minimisation de $\|\hat{P} - P\|_2^{cv}$ plutôt que d'utiliser la méthode UCV .
 - Si on opte pour l'utilisation de h_{ise}^* , l'effet du noyau est pratiquement nul. Par contre, si notre choix est orienté vers la méthode UCV pour la sélection du paramètre en question le choix du noyau est de grande importance où il est préférable d'utiliser le noyau Binomial négatif ou le noyau binomial et d'éviter l'utilisation du noyau Poissonnien.

En résumé dans le cas où l'échantillon est issue d'une distribution poissonnienne où Binomiale pour estimer, par la méthode du noyau, la matrice de transition P associée à la chaîne de Markov décrivant le modèle de stock (R, s, S) il est préférable d'utiliser le couple $(h_{ucv}^*, \text{Binomial})$ ou $(h_{cv}^*, \text{Binomial négatif})$ et d'éviter $(h_{ucv}^*, \text{Poisson})$ et cela dans le but de construire des estimateurs plus performants.

- Dans le cas de f_2
 - Le paramètre de lissage dépend de la taille de l'échantillon où le paramètre de lissage optimale décroît en fur et à mesure que n augmente (h tend vers 0 lorsque n tend vers l'infinie) et cela dans la totalité des situations considérées.

- L'estimateur du niveau moyen du stock dépend de la taille de l'échantillon où \bar{Q} se rapproche de la valeur exacte de Q en fait et à mesure que n augmente (\bar{Q} tend vers Q lorsque n tend vers l'infinie) et cela dans la totalité des situations considérées.
- La qualité des estimateurs fournis par h_{ise}^* et h_{cv}^* est pratiquement la même indépendamment du noyau utilisé.

En résumé, dans cette situation le choix du noyau ou de la technique de sélection du paramètre de lissage n'est pas un problème car les techniques et les noyaux utilisés nous fournissent pratiquement des estimateurs de même performance.

Conclusion

Finalement, les résultats obtenus dans ce chapitre nous permettent de pouvoir conclure que dans la pratique afin d'obtenir des estimateurs plus performants de la matrice de transition associée à la chaîne de Markov décrivant le modèle de stock (R, s, S) , il est préférable d'utiliser le couple $(h_{cv}^*, \text{Binomial})$ ou le couple $(h_{cv}^*, \text{Binomial négatif})$ pour la construction de l'estimateur en question.

Conclusion générale

La matrice de transition associée à une chaîne de Markov forme de toute évidence une composante de très grande importance vue qu'elle permet de déduire la quasi-totalité voir la totalité des mesures de performance de cette chaîne que ce soit en régime transitoire ou en régime stationnaire.

Dans ce mémoire, nous avons considéré l'estimation à noyau d'une matrice de transition, P , associé à une chaîne de Markov discret décrivant un modèle de stock de type (R, s, S) . En particulier, notre objectif est, à base de la méthode UCV et la norme matricielle $\| \cdot \|_2$, de construire une procédure de sélection du paramètre de lissage intervenant dans l'expression de l'estimateur à noyau de la matrice P . Pour atteindre notre objectif, dans un premier lieu nous avons rappelé la notion de l'estimateur à noyau discret où nous avons mis l'accent sur sa forme, certaines de ses propriétés, le problème du choix du noyau et du paramètre de lissage.

Dans un second lieu, notre intérêt s'est porté sur le modèle du stock de type (R, s, S) et l'estimateur à noyau de la matrice de transition associée à la chaîne de Markov le décrivant. En effet, après avoir introduit une brève description du modèle de stock (R, s, S) , sa matrice de transition ainsi que son estimateur à noyau, nous avons rappelé le principe et la formulation des procédures théorique de sélection du paramètre de lissage dans cette situation et qui se basent sur la minimisation de certaines normes matricielles existante dans la littérature. Par la suite, en utilisant la méthode UCV nous avons conçu une version exploitable dans la pratique procédure de sélection du paramètre de lissage qui se base sur la minimisation de la norme matricielle $\| \cdot \|_2$.

Finalement, à base des échantillons de différent taille ($n \in \{50; 100; 250; 500; 1000; 2000\}$) simulés à partir de différentes lois ($f \in \{\text{Poisson, Géométrique, Binomiale}\}$), nous avons réalisé une étude numérique comparative sur l'impact du couple (paramètre de lissage, Noyau) sur les performances

de l'estimateur de la matrice P . Les résultats obtenus nous a permet d'aboutir à deux principales conclusions : d'une part, afin d'obtenir des estimateurs plus performants de la matrice de transition associée à la chaîne de Markov décrivant le modèle de stock (R, s, S) , il est préférable d'utiliser le couple $(h_{cv}^*, \text{Binomial})$ ou le couple $(h_{cv}^*, \text{Binomial négatif})$ pour la construction de l'estimateur en question. D'autre part, il faut éviter de combiner h_{cv}^* avec le noyau Poisson pour la construction de l'estimateur de la matrice de transition associée à la chaîne de Markov décrivant le modèle de stock (R, s, S) et d'éviter également l'utilisation de la méthode classique UCV pour sélectionner le paramètre de lissage dans cette situation car ces derniers fournis des estimateurs, de P , moins performants.

Il sera intéressant de compléter ce travail par :

- Réaliser une simulation extensive toute en considérant d'autres noyaux, lois, ...
- Revoir le présent travail lorsque nous considérons la méthode BCV .
- Considérer d'autres chaînes de Markov décrivant d'autres modèles.

Annexe : Abréviations et notations

Les différentes abréviations et notations utilisées tout au long de ce mémoire sont résumées ci-dessous :

iid	: indépendant et identiquement distribué.
ISE	: L'erreur quadratique intégrée.
$MISE$: L'erreur quadratique moyenne intégrée.
MSE	: L'erreur quadratique moyenne.
h_{opt}	: La fenêtre optimale.
CV	: La validation croisée.
BCV	: La validation croisée biaisée.
UCV	: La validation croisée non biaisée.
LCV	: La validation croisée par le maximum de vraisemblance.
(R, s, S)	: Politique de gestion d'un stock.
R	: La période d'inspection du niveau du stock.
S	: La capacité maximale du stock.
s	: Le seuil du risque.
P	: La matrice de transition.
Q	: La moyenne du niveau de stock.

Bibliographie

- [1] Bareche, A. & Aïssani, D. (2008). Kernel density in the study of the strong stability of the $M/M/1$ queueing system. *Operations Research Letters*, 36, 535–538.
- [2] Baoudj, K. (Juin 2018). Estimation à noyaux associés d’une chaîne de Markov discrète. Master Mathématiques Option : Statistiques, Département Mathématiques, Université de Biskra. Encadreur : M. Cherfaoui
- [3] Billingsley, P. (1961). *Statistical inference for Markov processes*. University of Chicago Press.
- [4] Bowman, A. W. (1984) *An alternative method of cross-validation for the smoothing density estimates*. *Biometrika* **71** : 553 – 560.
- [5] Chen, S. X. (1999). Beta kernel estimators for density functions. *Computational Statistics & Data Analysis*, 31(2), 131-145.
- [6] Chen, S. X. (2000). Probability density function estimation using gamma kernels. *Annals of the Institute of Statistical Mathematics*, 52(3), 471-480.
- [7] Cherfaoui, M. (2015). Estimation non paramétrique et approximations dans les systèmes de files d’attente (Doctoral dissertation, Université Abderrahmane Mira de Bejaïa).
- [8] Gontijo, G. M. Atuncar, G. S. Cruz, F. R. B. & Kerbache, L.(2011). Performance evaluation and dimensioning of $GI^{[X]}/M/c/N$ systems through kernel estimation. *Mathematical Problems in Engineering*, (Article ID 10.1155/2011/348262) :1–20, 2011.
- [9] Khalifa, I. B. (2007-2008). Estimation non-paramétrique par noyaux associés et données de panel end marketing.
- [10] Kiessé, T. S. (2008). Approche non-paramétrique par noyaux associés discrets des données de dénombrement (Doctoral dissertation, Université de Pau et des Pays de l’Adour).

- [11] Kokonendji, C. C., & Kiese, T. S. (2011). Discrete associated kernels method and extensions. *Statistical Methodology*, 8(6), 497-516
- [12] Kokonendji, C. C., Senga Kiessé, T., & Zocchi, S. S. (2007). Discrete triangular distributions and non-parametric estimation for probability mass function. *Journal of Nonparametric Statistics*, 19(6-8), 241-254.
- [13] Kokonendji, C. C., & Kiese, T. S. (2006). Estimateur à noyau discret standard pour une densité de probabilité discrète.
- [14] Parzen, E. (1962). On estimation of a probability density function and mode. *The annals of mathematical statistics*, 33(3), 1065-1076.
- [15] Rabta, B. (2002). Stabilités forte dans un modèle stochastique de gestion des stocks, Thèse de Magister, Université de Bejaïa.
- [16] Rabta, B., & Aïssani, D. (2005). *Strong stability in an (R, s, S) inventory model*. *International Journal of Production Economics*, 97(2), 159-171.
- [17] Rabta, B., & Aïssani, D. (2008). *Strong stability and perturbation bounds for discrete Markov chains*. *Linear Algebra and its Applications*, 428(8-9), 1921-1927.
- [18] Rosenblatt, M. (1956) *Remarks in some nonparametric estimates of a density function*, *Ann. Math. Statist.*, 27,832–837
- [19] Roussas, G. G. (1969) *Nonparametric estimation in Markov processes*. *Ann. Inst. Statist. Math.*, 21, 73–87.
- [20] Rudemo, M. (1982) *Empirical choice of histogram and kernel density estimators*. *Scandinavian Journal of Statistics*. **9** : 65 – 78.
- [21] Stone, C. (1984) *An Asymptotically Optimal Window Selection Rule for Kernel Density Estimates*. *The Annals of Statistics* **12** : 1285 – 1297.
- [22] Zougab, N. (2013). Approche bayésienne dans l'estimation non paramétrique de la densité de probabilité et la courbe de régression de la moyenne Thèse de doctorat, Université de Bejaïa.

Résumé

Dans ce travail, nous avons considéré l'estimation à noyau discret de la matrice de transition associée à une chaîne de Markov décrivant un modèle de stock (R, s, S) . Plus précisément, nous avons proposé de sélectionner le paramètre de lissage dans cette situation par la minimisation de la norme matricielle $\|\cdot\|_2$. En effet, dans un premier lieu, nous avons exposé la forme explicite de l'expression (théorique), issue de la norme matricielle $\|\cdot\|_2$, à minimiser afin de quantifier le paramètre de lissage. Dans un second lieu, en se basant sur la méthode *UCV*, nous avons dégagé une expression pratique du paramètre de lissage en question. Enfin, dans le but d'illustrer et d'appuyer notre proposition, une application numérique comparative est réalisée.

Mots clés : Noyaux discrets, Paramètre de lissage, Gestion de stock, *UCV*, Normes.

Abstract

In this work, we have considered the discrete-kernel estimation of a transition matrix associated to a Markov chain describing an (R, s, S) inventory model. More precisely, we proposed to select the smoothing parameter in this situation by minimizing the matrix norm $\|\cdot\|_2$. Indeed, firstly, we have developed a theoretical explicit form of the expression, derived from the matrix norm $\|\cdot\|_2$, to minimize in order to quantify the smoothing parameter. Secondly, based on the *UCV* method, we establish a practical expression of the smoothing parameter in question. Finally, in order to illustrate and support our proposal, a comparative numerical application is performed.

Key words : Discrete kernels, Smoothing parameter, Inventory management, *UCV*, Norms.