

République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

UNIVERSITÉ MOHAMED KHIDER, BISKRA

FACULTÉ des SCIENCES EXACTES et des SCIENCES de la NATURE et de la VIE

DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES



Mémoire présenté en vue de l'obtention du Diplôme :

MASTER en Mathématiques

Option : **Statistique**

Par

BOUHAREB Sara

Titre :

RISQUE ET MESURE DE RISQUE

Membres du Comité d'Examen :

Dr. BENATIA Fateh	UMKB	Encadreur
Dr. SAYAH Abdallah	UMKB	Président
Dr. DIABI Samra	UMKB	Examineur

27 Juin 2019

REMERCIEMENTS

La réalisation de cette thèse est l'aboutissement d'un parcours académique long, souvent laborieux et au cours duquel, malgré les embûches, j'ai toujours été animée par la volonté de finir, ou plutôt d'en finir.

En premier lieu, je remercie "**Dieu**" de m'avoir venu en aide pour que je peux aboutir à la réussite.

L'accomplissement de ce travail n'aurait pu être réalisé sans le soutien et la collaboration de nombreuses personnes que je tiens à remercier sincèrement :

Je tiens tout d'abord à remercier le **Dr BENATIA Fateh** qui fut mon directeur de thèse et dont l'enthousiasme et la générosité me donnèrent le goût de la recherche. Il a su m'encadrer en me laissant ma liberté puis ne pas perdre le contact, qui m'a amenée à découvrir l'avantage des Statistiques et qu'il soit remercié de sa patience, son indéfectible disponibilité pour écouter les questions et m'aider à trouver les réponses. Pour toutes ces raisons, je le remercie chaleureusement.

Je tiens à remercier le membre du jury d'être patients et d'avoir toléré d'évaluer et de juger mon travail préparé durant plusieurs jours et nuits que j'espère d'être fructueux. Ils trouvent ici toute la reconnaissance commençons par Monsieur **SAYAH Abdallah**, président de jury puis par Madame **DIABI Samra**, examinatrice, je les exprime ma profonde gratitude.

Je remercie vivement Monsieur **HAFAIED Mokhtar**, Professeur à l'Université de Biskra, chef du département de Mathématiques, pour ses encouragements, ses suggestions et son dynamisme.

J'éprouve aussi une grande reconnaissance à l'égard de mes parents, qui m'ont supporté tout au long de mes études universitaires. Ils savent combien ils comptent pour moi : **Maman, Papa** ; ils m'a redonné confiance au moment où j'en avais le plus besoin, ils m'a

permis de continuer ce travail sans jamais abandonner. Pour tout ça et bien plus encore, je ne les remercierai jamais assez. Votre support m'a été très précieux. J'espère leurs avoir rendu un petit peu de ce qu'ils m'a apporté.

Je tiens aussi à remercier mes chers **Frères** et **Soeurs**, avec qui j'ai pu m'aérer l'esprit par quelques discussions et quelques journées aventures ; à qui je dédie toutes ces heures de travail consacrées pour ma thèse au détriment du temps que j'aurais du passer en leur compagnie. Ils demeurent ma plus grande source de motivation et ceux à qui je dois, en premier lieu, la réalisation de cette thèse.

Je voudrais dire aussi un mot à tous ceux avec qui j'ai ou j'ai eu le plaisir de collaborer : mes **Amies** et mes **Camarades**. Ce mot, quels qu'aient été les moments de tension, et pour tous les instants de jubilation, de joie ou toutes les digressions :

"MERCI"

J'ai sans aucun doute oublié d'autres personnes. Mais je suis persuadé qu'elles me pardonneront et je suis sûre qu'elles partageront avec moi ce moment d'euphorie tant attendu.

❧❧❧

Table des matières

Remerciements	i
Table des matières	iii
Liste des figures	vi
Liste des tableaux	vii
Introduction	1
1 Généralités	3
1.1 Espace probabilisé	3
1.1.1 Espace probabilisé	4
1.1.2 Probabilité sur (Ω, \mathcal{F})	5
1.1.3 Probabilité conditionnelle et l'indépendance	6
1.2 Variables aléatoires	6
1.2.1 Différents types de variables aléatoires	6
1.2.2 Loi de probabilité	7
1.2.3 Fonction de répartition et densité	7
1.2.4 Quantile d'ordre α	8
1.3 Espérance	9
1.3.1 L'espérance mathématique	9

1.3.2	L'espérance conditionnelle	9
1.4	Lois continues usuelles	10
1.4.1	La loi uniforme	10
1.4.2	La loi normale	11
1.5	Fonction de perte et risque	11
2	La mesure de risque	13
2.1	La notion de risque	14
2.1.1	Définitions	14
2.1.2	Types de risque	15
2.2	Mesure de risque	16
2.2.1	Définitions et propriétés	16
2.2.2	Mesures de risque usuelles	20
2.3	VaR comme mesure de risque	20
2.3.1	La VaR	20
2.3.2	Représentation graphique de la (<i>VaR</i>)	22
2.3.3	Avantages et l'inconvénients de la (<i>VaR</i>)	23
2.3.4	Mesures Alternatives à la (VaR)	24
3	Estimation de la (VaR) sous \mathbf{R}	27
3.1	Analyse descriptive des données	27
3.1.1	Environnement de travail	27
3.1.2	Les indices boursier CAC40 et S&P500	28
3.1.3	Le portefeuille (CAC40 et S&P500)	29
3.2	Méthodes d'estimation de la VaR	33
3.2.1	VaR historique	33
3.2.2	VaR Gaussienne	34
3.2.3	Inconvénient du modèle normal	35

3.3 Synthèse	37
Conclusion	39
Bibliographie	40
Annexe A : Logiciel <i>R</i>	42

Table des figures

2.1	Représentation graphique de la (VaR)	23
3.1	Prix journalier des deux indices et leurs portefeuille associé.	31
3.2	Rendements journaliers des deux indices et leurs portefeuille associé.	32
3.3	La variation de la volatilité au cours du temps de notre portefeuille.	32
3.4	Estimation non paramétrique de la VaR (VaR historique).	33
3.5	Test graphique de normalité de la série de rendements de portefeuille étudié.	36
3.6	Histogramme de distribution des rendements de portefeuille étudié.	36
3.7	Agrandissement des queus de distribution des rendements de portefeuille étudié.	37
3.8	L'icone du logiciel R	42

Liste des tableaux

3.1	Echantillon du prix de l'indice boursier CAC40 (unité en USA Dollards)	28
3.2	Echantillon du prix de l'indice boursier SP500 (unité en USA Dollards)	29
3.3	Statistiques descriptive du portefeuille	31
3.4	Estimation de la VaR paramétrique (loi normale) sur l'ensemble des données.	35

Introduction

Dans notre vie quotidienne il y a beaucoup de risques que nous rencontrons, que ce soit des catastrophes naturelles ou des accidents liés à l'activité humaine, où la notion de risque occupe désormais une place centrale dans les politiques publiques, le management des organisations publiques et privées, etc. Pour cela les institutions financières (les banques et les compagnies d'assurance) cherchent toujours à trouver des nouvelles règles pour gérer et évaluer ses risques et pour équilibrer un investissement risqué.

Il existe nombreuses façons de mesurer le risque, la mesure la plus utilisée est la Value-at-Risk (VaR) établie par *JP Morgan (1994)*. (VaR) comme mesure de risque est profondément dénigrée et souffre des contradictions en raison de ne pas être une mesure cohérente de risque selon Artzner et al [1], pour éviter ces inconvénients, on assiste à l'émergence d'une mesure qui présente entre autres la propriété de sous additivité, il s'agit de l'Expected Shortfall (ou Conditional- VaR) qui est considérée comme alternative de la (VaR) comme il est mentionné par Acerbi dans [2].

Cela nous a conduit à lancer notre problématique :

Dans le cas des données financières ; peut-on établir un estimateur pour la mesure des risques financiers (VaR) ?

L'objectif alors est de comparer et évaluer des résultats d'estimation paramétrique (la (VaR) gaussienne) qui s'intéressent à toute la distribution, et l'approche non paramé-

trique (la (*VaR*) historique) qui s'intéresse en particulier aux quantiles élevés de distribution.

Dans le but d'arriver à la réalisation de nos objectifs, nous proposons un plan qui s'articule autour de 3 chapitres :

Le Chapitre 1 : Dans le premier chapitre nous avons présenté quelques rappels sur l'espace probabilisable puis nous avons défini les variables aléatoires, ensuite nous avons donné les propriétés de l'espérance et quelques lois usuelles et enfin nous avons introduire la fonction de perte.

Le Chapitre 2 : Se décompose en trois sections ; dans la première nous allons définir le risque comme étant un outil de mesure du risque tel que nous allons présentés ces types avec plus de concentration aux risques financiers, la deuxième section n'est plus qu'une motivation et quelques définitions fondamentaux. Nous allons exposer les mesures de risque, et nous allons remarquer que les mesures cohérentes de risque n'étaient qu'un cas particulier de ces dernières. L'exemple le plus célèbre des mesures de risque et la mesure de la (*VaR*) qui est l'objet dans troisième section. Nous citons notamment les exemples des mesures alternatives de la (*VaR*), comme l'(*ES*) et (*TVaR*).

Le Chapitre 3 : Ce chapitre a un aspect expérimentale d'ou l'usage d'un logiciel très sophistiqué c'est le logiciel R dont la tâche est d'illustrer deux méthodes d'estimation pour la (*VaR*) qui existent déjà dans la littérature, appliquées aux données financières. La première section traite d'une manière descriptive les séries de *CAC40* et *S&P500* et leur portefeuille associé. La deuxième section donne des résultats empiriques pour calculer un estimateur de la (*VaR*) basé sur les quantiles et puis basé sur l'hypothèse de normalité qui présente beaucoup d'inconvénients.

Chapitre 1

Généralités

La théorie des probabilités fournit des modèles mathématiques permettant l'étude d'expériences dont le résultat ne peut être prévu avec une totale certitude, alors elle constitue un cadre mathématique pour la description du hasard et de la variabilité, ainsi que pour le raisonnement en univers incertain. Elle forme aussi un tout cohérent dont les concepts, les méthodes et les résultats interviennent dans de très nombreux domaines des sciences et des technologies, parfois de manière fondamentale [11].

Le but de ce premier chapitre est de présenter les concepts et les définitions les plus importantes dans le domaine des probabilités et des statistiques dont nous avons besoin dans notre travail.

1.1 Espace probabilisé

La probabilité est la branche des mathématiques qui étudie les phénomènes aléatoires, sert à modéliser des situations dont notre connaissance est imparfaite. On suppose donné un ensemble de résultats possibles de l'"expérience" considérée, et leurs probabilités respectives, on cherche alors à en déduire les probabilités d'événements plus compliqués, ou les résultats d'expériences plus complexes, comme par exemple le lancer d'un grand nombre de dés.

1.1.1 Espace probabilisé

Événement et ensemble fondamental

Une épreuve est une expérience dont l'issue n'est pas prévisible car répétée dans des conditions identiques, elle peut donner lieu à des résultats différents ou aléatoires (expérience aléatoire). L'ensemble des résultats possibles s'appelle **l'ensemble fondamental** (ou référentiel, univers des possibles) et sera noté Ω . Un **événement** est un ensemble de résultats (un sous-ensemble de l'univers) d'une expérience aléatoire. Comme l'événement est une affirmation concernant le résultat d'une expérience, nous devons pouvoir dire, pour tout résultat de l'univers, si l'événement se réalise ou non. Un événement donné, souvent défini par une proposition, est identifié à la partie de l'univers pour laquelle il est réalisé Voir [11].

Tribu (σ algèbre)

Définition 1.1.1 (Tribu) Soit Ω un ensemble quelconque, une famille \mathcal{F} de parties de Ω (soit un sous-ensemble de $\mathbb{P}(\Omega)$) est appelé tribu sur Ω si et seulement si elle vérifie les propriétés suivantes [20] :

- $\Omega \in \mathcal{F}$
- $\forall A \in \mathcal{F}, A^c \in \mathcal{F}$
- $\forall (A_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathcal{F}^{\mathbb{N}}, (\cup_{n \in \mathbb{N}} A_n) \in \mathcal{F}$

Remarque 1.1.1 Si \mathcal{F} est une tribu sur Ω alors on dit que (Ω, \mathcal{F}) est un **espace probabilisable** (mesurable)

1.1.2 Probabilité sur (Ω, \mathcal{F})

Définition 1.1.2 (Probabilité sur (Ω, \mathcal{F})) Soit Ω un ensemble et \mathcal{F} une tribu sur Ω .

On appelle probabilité sur (Ω, \mathcal{F}) une application \mathbb{P} :

$$\begin{aligned} \mathbb{P} : \quad \Omega &\rightarrow [0, 1] \\ A &\rightarrow \mathbb{P}(A) \end{aligned} ,$$

telle que :

- $\mathbb{P}(\Omega) = 1$,
- pour toute suite $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'éléments de \mathcal{F} disjoints deux à deux (événements deux à deux incompatibles), la série $\sum_{n \geq 0} \mathbb{P}(A_n)$ est convergente et $\mathbb{P}(\cup_{n \in \mathbb{N}} A_n) = \sum_{n \geq 0} \mathbb{P}(A_n)$. Cette dernière propriété est appelée σ -additivité de \mathbb{P} [11].

Remarque 1.1.2 Un tel triplet $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ est appelé **espace probabilisé** et les éléments de \mathcal{F} sont appelés **événements**.

Propriété 1.1.1 • $\mathbb{P}(\emptyset) = 0$.

- $\forall A \in \mathcal{F}, \mathbb{P}(A^c) = 1 - \mathbb{P}(A)$.
- $\forall A, B \in \mathcal{F}, \mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B)$.

Définition 1.1.3 (Fonction mesurable) Soient E et F des espaces mesurables munis de leurs tribus respectives \mathcal{E} et \mathcal{F} . Une fonction $f : E \rightarrow F$ est dite $(\mathcal{E}, \mathcal{F})$ – mesurable si la tribu image réciproque par f de la tribu \mathcal{F} est incluse dans \mathcal{E} , c'est-à-dire :

$$\forall B \in \mathcal{F}, f^{-1}(B) \in \mathcal{E},$$

autrement dit ; f est mesurable $\Leftrightarrow f^{-1}(\mathcal{F}) \subset \mathcal{E}$.

1.1.3 Probabilité conditionnelle et l'indépendance

Définition 1.1.4 (Probabilité conditionnelle) Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé. Si B est un évènement tel que $\mathbb{P}(B) > 0$, alors l'application P_B définie par [17] :

$$\forall A \in \mathcal{F}, \mathbb{P}_B(A) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)},$$

est une probabilité sur (Ω, \mathcal{F}) , appelée probabilité conditionnelle sachant B . On notera également $\mathbb{P}_B(A) = \mathbb{P}(A|B)$, et on lira « probabilité de A sachant B ».

Définition 1.1.5 (Indépendance d'évènements) Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé. Deux évènements A et B de \mathcal{F} sont dits indépendants si et seulement si :

$$\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A) \cdot \mathbb{P}(B),$$

Remarque 1.1.3 Si A et B sont indépendants alors $\mathbb{P}_B(A) = \mathbb{P}(A)$.

1.2 Variables aléatoires

Une variable aléatoire (*v.a.*) est une fonction mesurable définie sur l'ensemble des résultats possibles d'une expérience aléatoire. Ils sont utilisées pour modéliser le résultat d'un mécanisme non-déterministe.

1.2.1 Différents types de variables aléatoires

Définition 1.2.1 (Variables aléatoires) Une variable aléatoire ou (*v.a.*) est une application mesurable

$$X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}.$$

Si $X(\Omega)$ est au plus dénombrable, on dit que X est une (*v.a.*) discrète sinon on dit qu'elle est continue [20].

Variable aléatoire discrète : Si une variable aléatoire X prend un nombre de valeurs fini ou dénombrable (son ensemble de définition est inclus dans \mathbb{N}), on parle de variable discrète. On s'intéresse à définir l'ensemble des valeurs possibles et leurs probabilités associées. Par exemple : nombre de "face" dans un lancer de 3 pièces : $X(\omega)$ de 0 à 3.

Variable aléatoire continue : Une variable aléatoire est dite continue si elle peut prendre toutes les valeurs d'un intervalle de \mathbb{R} . En particulier, dans le cas où la variable aléatoire peut prendre toute valeur réelle (son ensemble de définition contient un intervalle de \mathbb{R}), on parle de variable aléatoire réelle.

1.2.2 Loi de probabilité

Une variable aléatoire est totalement définie par sa loi de probabilité. Cette dernière est caractérisée par [17] :

cas discrète :

- L'ensemble des valeurs qu'elle peut prendre (son domaine de définition).
- Les probabilités attribuées à chacune des valeurs potentiellement prises $\mathbb{P}(X = x)$.

Dans ce cas, la loi de la variable aléatoire est la loi de probabilité sur l'ensemble des valeurs possibles de X qui affecte la probabilité $\mathbb{P}(X = x_k)$ au singleton $\{x_k\}$.

cas continu : Soit $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$. Dans le cas où X prend ses valeurs dans un intervalle réel, on cherche à exprimer par exemple la probabilité que X prenne ses valeurs dans $[\alpha, \beta]$.

1.2.3 Fonction de répartition et densité

Définition 1.2.2 (Fonction de répartition) *La fonction de répartition d'une (v.a) X est l'application :*

$$F : \mathbb{R} \rightarrow [0; 1],$$

définie par :

$$F_X(x) = \mathbb{P}(X \leq x) = \mathbb{P}(X^{-1}[-\infty, x]).$$

Propriété 1.2.1 • F est non décroissante.

- F est continue à gauche.
- $F(-\infty) = 0, F(+\infty) = 1$.
- $\mathbb{P}(a \leq X < b) = F(b) - F(a)$.

Remarque 1.2.1 F est continue à droite dans le cas des v.a. continues.

Définition 1.2.3 (Densité de probabilité) Pour une variable continue, on travaille la plupart du temps avec un ensemble de définition sur les réels. La probabilité ponctuelle $\mathbb{P}(X = x) = f(x)$ est la fonction de densité. La fonction de répartition $F(x) = \mathbb{P}(X < x)$ est définie par :

$$F(x) = \int_{-\infty}^x f(t)dt.$$

La densité de probabilité d'une variable aléatoire continue est la dérivée première par rapport à x de la fonction de répartition. Cette dérivée prend le nom de fonction de densité, notée $f(x) = \frac{dF(x)}{dx}$. Elle est équivalente à $\mathbb{P}(X = x)$ dans le cas des variables discrètes.

1.2.4 Quantile d'ordre α

Définition 1.2.4 (Quantile d'ordre α) Soient X est une (v.a) et F sa fonction de répartition, On appelle quantile (fractile) d'ordre α , le nombre x défini par :

$$x_\alpha = Q_\alpha = \inf\{x \in \mathbb{R}/F(x) \geq \alpha\} \text{ avec } \alpha \in [0, 1].$$

Remarque 1.2.2 Si F est continue et strictement croissante alors x_α est l'unique point tq : $F(x_\alpha) = \alpha \Leftrightarrow x_\alpha = F^{-1}(\alpha)$ (inverse).

1.3 Espérance

1.3.1 L'espérance mathématique

Définition 1.3.1 (Quantile d'ordre α) Soit X une (v.a) discrète prenant ses valeurs dans $[x_1, \dots, x_n]$ et dont les probabilités associées sont $\mathbb{P}(X = x_i) = p_i$. On définit l'espérance mathématique de X , notée $E(X)$ par [11] :

$$E(X) = \sum_{i=1}^n p_i x_i.$$

Cette quantité n'est définie que si la série est convergente. Dans le cas continue :

$$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) dx,$$

où $f(x)$ est la densité de probabilité de X . Cette quantité n'existe que si $\int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) dx$ est absolument convergente.

1.3.2 L'espérance conditionnelle

Définition 1.3.2 (L'espérance conditionnelle) Soit X une (v.a) sur $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ tq : $E(X) < \infty$, soit G une σ algèbre ($G \subset \mathcal{F}$) [11]. On appelle espérance conditionnelle $E(X|G)$ de la (v.a) X par rapport à la σ algèbre G une (v.a) qui vérifie les condition suivante :

- $E(X|G)$ est G - mesurable
- $\int_B E(X|G) dp = \int_B X dp, \forall B \in G$

Proposition 1.3.1 (Linéarité) Soient $\alpha \in \mathbb{R}$, et $X, Y \in L^1(\Omega)$. Alors

$$E(\alpha X + Y|G) = \alpha E(X|G) + E(Y|G) \quad p.s.$$

Proposition 1.3.2 (Monotonie) Soient $X, Y \in L^1(\Omega)$ telles que $X \leq Y$ presque sûrement. Alors

$$E(X|G) \leq E(Y|G) \quad p.s.$$

Propriété 1.3.1 - Si X est une variable aléatoire réelle G -mesurable alors $E[X|G] = X$ p.s

- Si X est une variable aléatoire dans $L^1(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, telle que $\sigma(X)$ et G sont indépendantes, alors

$$E(X|G) = E(X)$$

1.4 Lois continues usuelles

1.4.1 La loi uniforme

Définition 1.4.1 (La loi uniforme) la variable aléatoire X est distribuée uniformément sur l'intervalle $[a, b]$ si sa densité de probabilité est constante sur cet intervalle [20] :

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & \text{si } a \leq x \leq b \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} .$$

On dit que X suit la loi uniforme et on note $X \sim \mathcal{U}_{[a,b]}$. Par conséquent, sa fonction de répartition est donnée par :

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < a \\ \frac{x-a}{b-a} & \text{si } a \leq x \leq b \\ 1 & \text{si } x > b \end{cases} .$$

L'espérance et la variance de la loi uniforme sont : $E(X) = \frac{a+b}{2}$, $Var(X) = \frac{(b-a)^2}{12}$.

1.4.2 La loi normale

Définition 1.4.2 (La loi normale) *On appelle loi normale (ou gaussienne) la loi dont la densité de probabilité est définie par [20] :*

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left\{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2\right\}, \forall x \in \mathbb{R}.$$

On dit que X suit la loi normale et on note $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma)$, et on a aussi :

$$E(X) = \mu, \text{Var}(X) = \sigma^2.$$

Si $\mu = 0$ et $\sigma = 1$ on parle de la loi normale centrée réduite.

Théorème 1.4.1 (Théorème centrale limite) *Soit X_1, X_2, \dots, X_n une suite de variables aléatoires indépendantes, avec $E(X_i) = \mu_i$ et $V(X_i) = \sigma_i^2$ pour $i = 1, 2, \dots, n$. Alors la variable aléatoire*

$$\begin{aligned} Z &= \frac{\sum_{i=1}^n X_i - n\mu}{\sigma\sqrt{n}} \xrightarrow{D} \mathcal{N}(0, 1) \quad \text{quand } n \rightarrow \infty \\ &= \sqrt{n} \frac{\bar{X}_n - \mu}{\sigma} \xrightarrow{D} \mathcal{N}(0, 1) \quad \text{quand } n \rightarrow \infty \end{aligned}$$

1.5 Fonction de perte et risque

En statistique inférentielle, on souhaite prendre une décision. En se basant sur un critère $\theta \in \Theta$ inconnu, mais que l'on peut estimer. Pour juger de la pertinence de la prise de décision, on définit \mathcal{D} l'ensemble des décisions possibles. Alors la fonction de perte est une fonction mesurable telle que [10] :

$$\begin{aligned} L : \Theta \times \mathcal{D} &\rightarrow \mathbb{R} \\ (\theta, d) &\rightarrow L(\theta, d) \end{aligned}.$$

Elle est définie selon le problème étudié et constitue l'armature du problème statistique.

Définition 1.5.1 (Fonction de risque) *Pour $(\theta, d) \in (\Theta, \mathcal{D})$, la fonction de risque est défini par :*

$$R(\theta, d) = E(L(\theta, d)) = \int L(\theta, d)f_{\theta}(x)dx,$$

où la règle de décision est $d(x)$ pour chaque résultat d'une expérience aléatoire.

Remarque 1.5.1 *La fonction de coût la plus classique est le coût quadratique :*

$$L(\theta, d) = (\theta - d)^2.$$

On en déduit un critère usuel de mesure d'incertitude associé à un estimateur $\hat{\theta}$ l'erreur quadratique moyenne (le *mean square error*).

$$mse(\hat{\theta}) = E[(\hat{\theta} - \theta)^2] = Var(\hat{\theta}) + (biais(\hat{\theta}, \theta))^2.$$

Aussi, pour un estimateur sans biais, c'est la variance qui permet de quantifier l'erreur associée à cette estimation.

Chapitre 2

La mesure de risque

Le risque est inhérent à la plupart des activités humaines ; le transport aérien, l'énergie nucléaire, le jeu, etc comportent des risques facilement identifiables. Cependant il n'est pas facile de mesurer ces risques. De point de vue mathématiques, le risque est une variable aléatoire représentant une valeur future et on cherche à déterminer le montant de fonds propre nécessaire pour la couverture d'un portefeuille ¹ risqué. Comme il est impossible d'accéder à l'ensemble de la loi de distribution de cette valeur future. On va chercher un indicateur qui nous permettra de décider du montant de fonds propre à allouer et qui nous donnera donc une idée du niveau d'exposition au risque. Pour la gestion de ces risques, plusieurs mesures de risque ont été proposées. Chacune a ses avantages et ses inconvénients.

Dans ce chapitre on va traiter la notion de risque en donnant quelques définitions existant dans la littérature puis on va introduire quelques connaissances relatives aux mesures de risque telles que leurs propriétés, nous présenterons aussi quelques mesures de risque usuelles dont la (*VaR*) est abordée profondément.

¹Un portefeuille : désigne une collection d'actifs financiers détenus par un établissement ou un individu. Une caractéristique importante d'un portefeuille est son degré de diversification qui permet d'atteindre un juste milieu entre le risque, la volatilité et la rentabilité du portefeuille, tout en tenant compte de la durée prévue du placement (horizon de temps).

2.1 La notion de risque

Plusieurs définitions sont données à la notion du risque selon le domaine et l'application, nous présenterons l'essentiel dans ce qui suit.

2.1.1 Définitions

Le "*Webster's Collegiate Dictionary*", 5^{ème} édition, définit le risque comme "*la possibilité de perte, le degré de probabilité de la perte, le montant de la perte éventuelle, le type de la perte qu'une société d'assurance couvre, et ainsi de suite*". Des autres dictionnaires posent des définitions telles que celles-ci ne sont pas suffisamment précises pour l'évaluation des risques. La littérature scientifique et professionnelle propose plusieurs définitions différentes [19], par exemple :

Définition 2.1.1 (Risque en littérature) *Le risque est la prise en compte par une personne de la possibilité de réalisation d'un évènement contraire à ses attentes ou à son intérêt, il est alors la probabilité objective que les résultats réels de l'évènement différeront de manière significative du revenu prévu c'est une perte potentielle, identifiée et quantifiable. Par abus de langage, le risque peut aussi désigner à la fois l'évènement considéré et la probabilité de sa survenue. Il est alors la réunion d'ensembles de triplets comprenant : un scénario (c'est-à-dire un évènement), une probabilité et une conséquence de cet évènement.*

Définition 2.1.2 (Risque en mathématiques) *Soit (Ω, \mathcal{F}) un espace probabilisable telle que Ω représente l'ensemble de tous les scénarios possibles (espace de résultats) et \mathcal{F} est une tribu. Un risque est une variable aléatoire (v.a) définie sur (Ω, \mathcal{F}) désigné par X telle que : $X \in \mathcal{X}$. ou \mathcal{X} est l'ensemble des (v.a) de pertes réelles définies sur un espace probabilisable (Ω, \mathcal{F}) .*

- Pour un scénario $\omega \in \Omega$, la position $X(\omega)$ s'interprète comme une **perte** (si $X(\omega) < 0$, alors $[-X(\omega)]$ s'interprète comme un gain). Par exemple dans les opérations bancaires

on utilise des (*v.a*) de gain positives alors les résultats de la perte X seraient alors des (*v.a*) négatives, mais dans le domaine de l'assurance, il est habituellement approprié (cependant non essentiel) de supposer que la perte X est positif.

2.1.2 Types de risque

Le risque est généralement classé en trois grandes catégories [13] :

Risque de marché : Le risque de marché peut se définir comme le risque de perte associé aux variations des conditions de marché (prix, taux, taux de change, volatilités, etc). Les différents facteurs de risques liés au Marchés financiers ² sont les taux, les cours de change, les cours des actions et les prix des matières premières. Toute variation de ces données a un impact sur les positions et les portefeuilles. Il s'agit du principal champ d'utilisation de la (*VaR*).

Risque de liquidité : C'est un risque lié à liquidité, autrement dit si vous souhaitez vendre à un prix donné, il faut qu'une autre partie accepte d'acheter à ce prix. Si personne ne souhaite acheter, vous ne pouvez pas vendre ou vous devez accepter de vendre moins cher. C'est-à-dire à vendre rapidement en cas de besoin de liquidité.

Risque de crédit : Le risque de crédit est défini comme le risque de perte lié à l'évolution de la qualité de la signature d'un émetteur. Il résulte de l'incertitude quant à la possibilité des contreparties ou des clients de remplir leurs obligations. Il existe un risque pour une banque, dès qu'elle se met en situation d'attendre une entrée de fonds de la part d'un client ou d'une contrepartie du marché.

²Marchés financiers : Le marché financier, appelé aussi « Bourse des valeurs », est le lieu où se rencontrent les agents à capacité de financement et les agents à besoins de financement. C'est un marché de capitaux à long terme sur lequel s'échangent des produits financiers telles que les valeurs mobilières, actions et obligations.

2.2 Mesure de risque

On donne la définition d'une mesure de risque et les propriétés associées, puis on présentera les principales mesures de risque.

2.2.1 Définitions et propriétés

Définitions

Une mesure de risque est un moyen défini pour permettre d'évaluer de degré d'une telle exposition pour objectif de quantifier ces pertes selon les types de risque. Il est un problème actuariel³ important basé sur de divers systèmes d'axiomes.

Pour chaque type d'activité, elle peut déterminé les mesures du risque les plus convenables, alors il existe de nombreuses façons de mesurer le risque par exemple : la variance, Value-at-Risk (*VaR*) et Conditional Value-at-Risk (*CVaR*) qui sont basées sur l'espérance, le quantile et sur l'espérance conditionnelle respectivement [7].

Soit \mathcal{X} l'ensemble des variables aléatoires X_i définies sur Ω telles que : $\|X\|_\infty = \sup_{\omega \in \Omega} |X(\omega)| < \infty$ et $\mathcal{X} \subset L^\infty$ un cône convexe⁴. De point de vue mathématique une mesure de risque ou un besoin en capital, d'une (*v.a*) de perte X , est définie comme une fonction d'une perte aléatoire à un nombre réel.

Définition 2.2.1 (Une mesure de risque) *Une mesure de risque est une fonction définie sur l'espace des variables aléatoires \mathcal{X} à valeur dans \mathbb{R} et on la note par R [10] :*

$$\begin{aligned} R: \mathcal{X} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ X &\longrightarrow R(X) \end{aligned}$$

³Actuariel : technique appliquant les méthodes statistiques et du calcul des probabilités aux opérations financières, aux problèmes d'assurance, de prévoyance et d'amortissement.

⁴Un cône convexe : c'est à dire que pour $X_1, X_2 \in \mathcal{X}$ on a : $X_1 + X_2 \in \mathcal{X}$ et $\lambda X_1 \in \mathcal{X}$ pour tout $\lambda > 0$.

X est le montant de **perte** et $R(X)$ est le capital ⁵ à détenir pour faire face aux pertes X . C'est à dire pour une position X , $R(X)$ s'interprète comme **le montant des fonds propres** exigés associé a cette position.

- $R(X)$ est grand $\implies X$ est dangereux

Exemple 2.2.1 On peut considérer :

$$R_{\max}(X) = \sup_{\omega \in \Omega} X(\omega)$$

$$R(X) = \sup_{\mathbb{P} \in \mathcal{P}} \mathbb{E}_{\mathbb{P}}(X(\omega)), \text{ ou } \mathcal{P} \text{ est un ensemble de probabilités sur } (\Omega, \mathcal{F})$$

Définition 2.2.2 (Chargement de sécurité) Une mesure de risque contient un chargement de sécurité si pour tout risque X on a, $R(X) \geq \mathbb{E}(X)$

Remarque 2.2.1 Il existe de nombreuses mesures de risque introduites dans la littérature et la pratique, et le choix d'une mesure de risque peut être difficile. Une approche pour traiter la question de la mesure du risque consiste à commencer par une liste des propriétés qu'une mesure de risque doit satisfaire.

Propriétés

Dans [1] les mesures de risque sont analysés, où un ensemble d'axiomes ont été énoncés qui devraient être souhaitables pour toute mesure de risque. Pour les définitions de tous les axiomes, X et Y sont des (v.a) représentant la perte, et R est une mesure de risque.

1. *Invariance en loi*, $X \stackrel{\mathcal{L}}{=} Y \implies R(X) = R(Y)$.
2. *Monotonie*, $X \leq Y \implies R(X) \leq R(Y)$.
3. *Invariance par translation* : $\forall k \in \mathbb{R} \implies R(X + k) = R(X) + k$.
4. *Homogénéité positive* : $\forall \lambda \in \mathbb{R}_+, R(\lambda X) = \lambda R(X)$.
5. *Sous additivité* : $R(X + Y) \leq R(X) + R(Y)$.
6. *Convexité* : $\forall \beta \in [0, 1], R(\beta X + (1 - \beta)Y) \leq \beta R(X) + (1 - \beta)R(Y)$.

⁵Capital : désigne un ensemble de biens ou de richesses accumulés générant de nouveaux biens ou revenus.

7. *Comonotone additive* : $R(X + Y) = R(X) + R(Y)$, X et Y sont comonotone⁶.

La vérification de ces propriétés axiomatiques amène à la notion de mesure de risque cohérente.

Mesure de risque cohérente et convexe

Le concept de mesure de risque cohérente a été abordé pour la première fois par Artzner voir [1] et [5].

Définition 2.2.3 (Mesure du risque cohérente) *Une mesure du risque $R(X)$ est dite cohérente si elle vérifie les quatre axiomes suivantes :*

L'invariance par translation : signifie que l'addition d'un investissement ⁷ X sans risque, avec les pertes connues k au portefeuille initial décroît simplement la mesure de risque R par k .

La Sous-additivité : C'est l'axiome le plus important elle a une interprétation facile .Le risque d'un portefeuille comprenant des investissements en X et Y est aussi plus grand que la somme des risques individuels (Diversification⁸ du risque).

L'homogénéité positive : Cet axiome est un cas limite de la propriété de sous additivité qui représente l'absence de diversification, elle s'assure que nous ne pouvons pas augmenter ou diminuer le risque en investissant des montants. Il est clair que si l'investissement est multiplié, par conséquent le risque est également multiplié.

La monotonie : L'axiome de monotonie nous indique que nous associons un plus gros risque à une perte plus élevée. Lorsque la perte de l'investisseur X est toujours plus grande que celle de l'investisseur Y , alors le risque de l'investisseur X est également plus grand.

⁶Comonotone : Le vecteur aléatoire (X_1, X_2) , de fonctions de répartition marginales F_1, F_2 (resp), est un vecteur comonotone s'il existe une v.a $U \sim \mathcal{U}_{[0,1]}$ tq : (X_1, X_2) a la même loi que $(F_1^{-1}(U), F_2^{-1}(U))$

⁷L'investissement : est une écquisition de l'entreprise qui est inscrite a son actif c'est une action d'investir pour obtenir de nouveaux moyens de production, d'améliorer leur rendement ou de placer des capitaux dans une activité économique, dans une entreprise, etc.

⁸Diversification : est le fait pour une entreprise de créer ou d'acquérir de nouvelles activités, Elle est destinée à diviser ses risques d'exploitation ou au contraire à prendre de nouveaux risques pour profiter d'occasions et si possible de synergies ou éventuellement compenser un recul de rentabilité de ses activités c'est alors un outil de reconversion.

Proposition 2.2.1 (Caractérisations des mesures du risque cohérentes) *Si R est une mesure de risque cohérente, alors il existe un ensemble de mesures de probabilité \mathbb{Q} tel que : $R(X) = \sup_{Q \in \mathbb{Q}} \{\mathbb{E}_Q(X)\}$*

Proposition 2.2.2 (Mesure de risque convexe) [16] *Une mesure de risque est dite convexe si elle est monotone, invariante par translation et convexe.*

Remarque 2.2.2 - *Une mesure cohérente est toujours normalisée à $R(0) = 0$, par homogénéité [19].*

- *Si une mesure convexe est normalisée par $R(0) = 0$, alors :*

$\forall \lambda \in [0, 1], R(\lambda X) = R(\lambda X + (1 - \lambda)0) \leq \lambda R(X) + (1 - \lambda)R(0) \leq \lambda R(X)$ donc $R(\lambda X) \leq \lambda R(X)$.

$\forall \lambda \in [1, \infty[, R(X) = R(\frac{1}{\lambda} \lambda X + (1 - \frac{1}{\lambda})0) \leq \frac{1}{\lambda} R(\lambda X) + (1 - \frac{1}{\lambda})R(0) \leq \frac{1}{\lambda} R(\lambda X)$ donc $R(\lambda X) \geq \lambda R(X)$.

Proposition 2.2.3 *Si R est invariante par translation alors $R(X - R(X)) = 0$.*

Mesure de risque monétaire

Définition 2.2.4 (Mesure de risque monétaire) *Une mesure de risque est dite monétaire si elle est monotone et invariante par translation.*

Lemme 2.2.1 *Toute mesure de risque monétaire est 1 - Lipschitzienne pour la norme $\|\cdot\|_\infty$ c'est à dire que : $|R(X) - R(Y)| \leq \|X - Y\|_\infty$*

Proof. soit $X \leq Y$ alors :

$X \leq Y + \|X - Y\|_\infty \Rightarrow R(X) \leq R(Y + \|X - Y\|_\infty) \Rightarrow R(X) \leq R(Y) + \|X - Y\|_\infty \Rightarrow |R(X) - R(Y)| \leq \|X - Y\|_\infty$ ■

Corollaire 2.2.1 *Si R est une mesure de risque monétaire et homogène, alors la convexité et la sous-additivité sont des notions équivalentes.*

2.2.2 Mesures de risque usuelles

Dans la littérature il y a plusieurs mesures de risque, les plus usuelles comme "La variance", il sagit d'une mesure de dispersion d'une (v.a) par rapport à sa moyenne. Si X est une (v.a) de carré intégrable, sa variance est définie par : $Var(X) = E[(X - E(X))^2]$, Son écart type, généralement noté σ_X est définie par [17] : $\sigma_X = \sqrt{Var(X)} = \sqrt{E[(X - E(X))^2]} = \sqrt{E(X^2) - E(X)^2}$, et la variance empirique définie par : $\hat{\sigma}_X^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{i=n} (x_i - \bar{x})^2$.

Propriété 2.2.1 - $\sigma_X \geq 0$ - $\sigma_{X+c} = \sigma_X$ tq c est une constante. Cette propriété est nommée *invariance par translation*.

- $\sigma_{\lambda X} = |\lambda| \sigma_X$ tq : λ est un constant. Cette propriété est nommée *invariance par dilatation*.

- $\sigma_{X+Y} = \sqrt{\sigma_X^2 + \sigma_Y^2 + 2\sigma_X\sigma_Y\rho(X,Y)}$, Où ρ est le coefficient de corrélation entre les deux variables X et Y .

2.3 VaR comme mesure de risque

L'objectif de cette section est de présenter la mesure de risque la plus utilisée par les praticiens nommé (*VaR*) dont la définition sera bien détaillée bien que sa utilisation dans le chapitre prochain.

2.3.1 La VaR

La (*VaR*) est utilisée pour la première fois dans les années **1980** par la banque **Bankers Trust** sur les marchés financiers américains [8], la notion de (*VaR*) a principalement été démocratisée par la banque **JP Morgan** dans les années **1990** grâce à son système de **RiskMetrics**, en réponse à de nombreux désastres qui ont touché les marchés de capitaux à cette période. La (*VaR*) est ensuite devenue, en moins d'une dizaine d'années, une mesure de référence du risque sur les marchés financiers, consacrée notamment par la

réglementation prudentielle définie dans le cadre des accords de **Bâle**⁹.

La (*VaR*) est considérée comme la mesure de risque la plus populaires elle est appelée également "Valeur à Risque". (*VaR*) semble être une bonne alternative pour répondre à la question que chaque investisseur s'est probablement posé en investissant dans un ou plusieurs actifs risqués c'est que "*Combien, au maximum, je peux perdre sur cet investissement ?*". Le concept de la (*VaR*) est simple et utilisée par tous, elle offre également l'avantage d'être une mesure prospective du risque. La définition générale utilisée par les praticiens est la suivante : **La (*VaR*) correspond au montant des pertes qui ne devrait pas être dépassé pour un niveau de confiance donné et sur un horizon temporel fixé.**

Définition 2.3.1 ((*VaR*) en mathématiques) *On appelle Value-at-Risk de niveau $\alpha \in (0, 1)$ le quantile de niveau α (voir [10] [14]) :*

$$R_\alpha(X) = VaR(X, \alpha) = x_\alpha \text{ où } F(x_\alpha) = \mathbb{P}(X \leq x_\alpha) = \alpha$$

ou encore

$$\begin{aligned} VaR(X, \alpha) &= \inf \{x : \mathbb{P}(X \leq x) > \alpha\} \\ &= \inf \{x : F(x) > \alpha\} \\ &= F_X^{-1}(\alpha) \\ &= Q(\alpha) \end{aligned}$$

⁹Le comité de Bâle : est un comité des autorités de surveillance d'opérations bancaires qui a été établi par les gouverneurs des banques centrales du groupe de Dix pays en 1975. Il se compose des représentants aînés des autorités de surveillance de banque et des banques centrales de Belgique, Canada, France, Allemagne, Italie, Japon, Luxembourg, Pays-Bas, Espagne, Suède, Suisse, U.K, et l'États-Unis. Il se réunit habituellement à la banque pour des règlements internationaux à Bâle, où son secrétariat permanent est localisé.

Lemme 2.3.1 $\forall \alpha \in (0, 1)$, si g est strictement croissante et continue à gauche

$$VaR(g(X), \alpha) = F_{g(X)}^{-1}(\alpha) = g(F_X^{-1}(\alpha)) = g(VaR(X, \alpha))$$

alors que si g est fonction strictement décroissante, continue à droite, et si $F(X)$ est bijective alors :

$$VaR(g(X), \alpha) = F_{g(X)}^{-1}(\alpha) = g(F_X^{-1}(1 - \alpha)) = g(VaR(X, 1 - \alpha))$$

Propriété 2.3.1 - La (VaR) n'est pas cohérente car elle n'est pas sous-additive.

- La (VaR) est comonotone additive.
- La (VaR) est monotone par rapport à $X, VaR(X, \alpha) \leq VaR(Y, \alpha)$ si $X \leq Y$.
- La (VaR) est invariante par translation, $VaR(X + c, \alpha) = VaR(X, \alpha) + c$.
- La (VaR) est positive homogène, $VaR(\lambda X, \alpha) = \lambda VaR(X, \alpha)$.

2.3.2 Représentation graphique de la (VaR)

Supposons par exemple que la distribution des pertes et profits associée à la détention d'un actif sur une période corresponde à une distribution normale standard.

La (VaR) au seuil de confiance de 95% à 1 jour notée $(VaR)(95\%, 1\text{Jour})$, égale à 1 million d'euros signifie qu'il y a 95% de chances pour que la perte associée à la détention de l'actif n'excède pas 1 million d'euros. Graphiquement, la (VaR) un jour avec un indice de confiance de 95% peut être représentée par le graphique ci-dessous :

D'après ce graphique, la $VaR(95\%, 1\text{Jour})$ correspond à une perte approximative de 1,65 million d'euros.

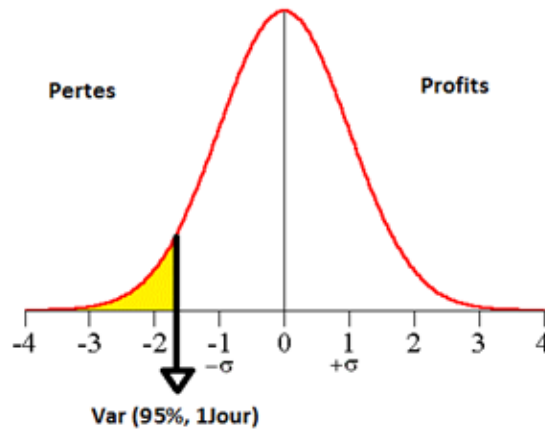


FIG. 2.1 – Représentation graphique de la (VaR).

2.3.3 Avantages et l'inconvénients de la (VaR)

Avantages

1. Elle tend à devenir un indicateur de risque largement utilisée par les établissements financiers¹⁰ car elle résume en un seul numéro tous les risques d'un portefeuille, quelle que soit leur nature (taux de change, actions,...). Elle présente l'avantage d'être plus facile à comprendre par des investisseurs qui ne sont pas spécialistes en techniques de gestion de portefeuille ou de gestion de risque [15].
2. Les mesures traditionnelles du risque comme la déviation standard et le degré de sensibilité ne donnent pas une perception de l'ampleur des pertes possibles mais simplement une information sur le pourcentage de la déviation du prix ou du rendement de l'actif par rapport à sa moyenne. Par contre la (VaR) permet d'évaluer de manière quantitative la perte potentielle maximale qu'une entité financière peut subir à un niveau de probabilité donné et dans un laps de temps donné.
3. Elle est probabiliste, et fournit à un gestionnaire des risques l'information utile sur

¹⁰Finance : désigne les méthodes et les institutions qui permettent d'obtenir les capitaux nécessaires dont on ne dispose pas et de placer ceux dont on a la disposition sans emploi immédiat ou que l'on compte utiliser plus tard. Les acteurs de la finance sont tous les agents économiques qui recherchent des capitaux ou qui souhaitent les placer.

les probabilités associées avec montants spécifiques de perte.

Inconvénients

1. La (VaR) n'est pas une mesure sous-additive. Si un portefeuille est composé de 2 sous portefeuilles A et B , alors la (VaR) du portefeuille total est inférieure à la somme des (VaR) des portefeuilles qui le compose. Cette inégalité est notamment expliquée par la prise en compte de la diversification [15].
2. La (VaR) correspond à un quantile donné, elle ne prend pas en compte les risques au-delà de ce quantile.

2.3.4 Mesures Alternatives à la (VaR)

Pour remédier à ces défauts de la (VaR), d'autres mesures ont été proposées. Nous en présentons trois très proches, dont l'idée commune est de quantifier le risque lorsque la (VaR) est dépassée [4]. Par exemple :

- La "Tail Value-at-Risk" ou ($TVaR$) est la moyenne des (VaR) de niveau supérieur à α .
- La "Conditional Tail Expectation" ou (CTE) représente la perte attendue sachant que la (VaR) est dépassée.
- "L'Expected Shortfall", ou (ES) au niveau α , c'est la prime "Stop loss¹¹" dont la rétention (ou franchise, ou la priorité) est fixé à (VaR_α)

La Tail-Value-at-Risk : Beaucoup d'auteurs et d'articles dans la littérature définissent la Tail Value-at-Risk ($TVaR$). C'est cependant l'approche de que nous retiendrons.

Définition 2.3.2 ($TVaR$) *La Tail Value-at-Risk notée $TVaR(X, \alpha)$ est définie par :*

$$TVaR(X, \alpha) = \frac{1}{1 - \alpha} \int_{\alpha}^1 VaR(X, t) dt$$

¹¹Stop loss : est le niveau de prix auquel l'investisseur préférera solder sa position, en cas de perte. Il désigne également les ordres (de vente dans le cas d'un achat) à seuil de déclenchement sur ces niveaux de stop.

\Rightarrow la (TVaR) est la moyenne des (VaR) de niveau supérieur à α . Notons que la (TVaR) est plus grande que la (VaR) correspondante.

Propriété 2.3.2 • La (TVaR) est cohérente.

• La (TVaR) est comonotone additive.

Remarque 2.3.1 Notons que, $TVaR[X, 0] = E[X]$. Et comme

$$TVaR[X, \alpha] = \frac{1}{1 - \alpha} \left\{ E[X] - \int_0^\alpha VaR(X, \xi) d\xi \right\}$$

on en déduit que la (TVaR) est une fonction croissante en α . De plus

$$TVaR[X, \alpha] \geq TVaR[X, 0] = E[X]$$

\Rightarrow La (TVaR) contient toujours un chargement de sécurité.

La Conditional Tail Expectation

Définition 2.3.3 (CTE) L'espérance conditionnelle de queue "Conditional Tail Expectation" d'un portefeuille d'actifs au niveau α est définie par l'espérance conditionnelle de la perte X_i sachant que celle-ci dépasse la (VaR), notée $CTE[X, \alpha]$, telle que :

$$CTE[X, \alpha] = E[X/X > VaR(X, \alpha)]$$

la (CTE) est la perte attendue sachant que la (VaR) au niveau est dépassée avec $CTE_0[X] = E[X/X > VaR_0(X)] = E(X)$.

Valeur en risque conditionnel (CVaR)

Définition 2.3.4 (CVaR) La valeur en risque conditionnel "Conditional-VaR" d'une (v.a) $X \sim F(x)$ au niveau de probabilité α proposée par Rockafellar et Uryasev (2001)

est notée $CVaR[X, \alpha]$, tq :

$$\begin{aligned} CVaR[X, \alpha] &= E[X - VaR(X, \alpha) | X > VaR(X, \alpha)] \\ &= CTE(X, \alpha) - VaR(X, \alpha) \end{aligned}$$

La ($CVaR$) est la valeur moyenne des pertes qui excèdent la (VaR), i.e il s'agit de l'excédent moyen de sinistre au-delà de la (VaR).

Expected shortfall (ES)

Définition 2.3.5 (ES) L'Expected shortfall au niveau α , notée $ES[X, \alpha]$, est :

$$\begin{aligned} ES[X, \alpha] &= E[(X - VaR(X, \alpha))_+] \\ &= E[X - VaR(X, \alpha) | X > VaR(X, \alpha)] \times \mathbb{P}(X > VaR(X, \alpha)) \\ &= (1 - \alpha)CVaR[X, \alpha] \end{aligned}$$

Où $(x - d)_+ = \max(x - d, 0)$, $d > 0$.

Proposition 2.3.1 Quel que soit le niveau de probabilité $\alpha \in (0, 1)$, les identités suivantes sont vérifiées :

$$\begin{aligned} TVaR[X, \alpha] &= VaR[X, \alpha] + \frac{1}{1 - \alpha} ES[X, \alpha] \\ CTE[X, \alpha] &= VaR[X, \alpha] + \frac{1}{\bar{F}_X(VaR[X, \alpha])} ES[X, \alpha] \end{aligned}$$

Proposition 2.3.2 La (CTE) et la ($TVaR$) coïncident pour des risques dont la fonction de répartition est continue et $\alpha \in (0, 1)$ i.e :

$$CTE[X, \alpha] = TVaR[X, \alpha]$$

Chapitre 3

Estimation de la (VaR) sous R

Dans ce chapitre nous allons calculer la (*VaR*) par deux méthodes historique (calcul de quantile) et paramétriques (suivant le modèle gaussien). Nous allons également introduire deux indices boursier *CAC40* et *S&P500* sur lequel nous allons mener notre simulation. Nous commençons d'abord par introduire quelques notions importantes des statistiques descriptives de notre séries financières afin d'aboutir aux résultats souhaités.

3.1 Analyse descriptive des données

3.1.1 Environnement de travail

Nous utiliserons le logiciel R comme environnement de travail afin de simuler le risque, prédire les pertes potentielles et analyser les graphes de fluctuation des prix sur le marché financier. R est un logiciel qui offre des solutions statistiques. Sa puissance dans le domaine de l'analyse des données, repose sur la multitude des packages développés et mis librement à la disposition de son utilisateur. Ces paquets couvrent des nombreuses fonctionnalités dans des divers domaines tels que l'économétrie, gestion de risque, série temporelle.

Grâce à cette diversité de fonctionnalités, R est considéré comme la référence de l'ana-

Date	Valeur de <i>CAC40</i>
01/01/2018	346.79
02/01/2018	347.20
03/01/2018	347.67
04/01/2018	349.76
05/01/2018	350.69

TAB. 3.1 – Echantillon du prix de l'indice boursier CAC40 (unité en USA Dollards)

lyse des données et des statistiques. Un des atouts de R est la facilité de production des graphiques de bonne qualité. Nous pouvons ainsi manipuler aisément les équations mathématiques compliquées.

3.1.2 Les indices boursier CAC40 et S&P500

Comme application nous allons utiliser deux indices boursiers connus dans le marché financier et qui sont *CAC40* et *S&P500*. Pour bien présenter l'estimation de la (*VaR*) sur la période allant du 01/01/1990 au 31/12/2018, ils sont disponible sur le site web :

"<https://fr.finance.yahoo.com>"

Définition 3.1.1 (CAC40) *Est le principal indice boursier sur la place de Paris. Créé par la Compagnie des Agents de Change, il est déterminé à partir des cours de 40 actions cotées en continu sur le Premier Marché parmi les 100 sociétés les plus capitalisées sur Euronext Paris. Les cotations des cours de ces actions se fait d'une manière continue : c'est-à-dire que la mise à jours de la valeur de ces cours se fait toutes les 30 secondes. Ainsi, cet indicateur reflète la tendance globale de l'économie française.*

Le tableau (3.1) donne un échantillon de la série financière quotidienne *CAC40*.

Définition 3.1.2 (S&P500) *Est un indice boursier basé sur 500 grandes sociétés cotées sur les bourses américaines. L'indice est possédé et géré par Standard & Poor's, l'une des trois principales sociétés de notation financière. Il couvre environ 80% du marché boursier américain par sa capitalisation. Les actions sont choisies pour leur taille et leur*

Date	Valeur de $S\mathcal{E}P500$
25/02/2019	345.62
26/02/2019	347.75
27/02/2019	348.67
28/02/2019	350.53
01/03/2019	350.65

TAB. 3.2 – Echantillon du prix de l'indice boursier SP500 (unité en USA Dollards)

liquidité cet indice est pondéré par les capitalisations boursières et a fixé à 10 pour la période 1941 – 1943. Il représentait ainsi une capitalisation boursière totale de plus de 10.000 milliards de dollars fin Novembre 2001.

Le tableau (3.2) donne un échantillon de la série financière quotidienne $S\mathcal{E}P500$.

3.1.3 Le portefeuille (CAC40 et S&P500)

Comme ce chapitre a un aspect expérimental, nous avons choisi de travailler sur un portefeuille constitué des actions de deux indices boursier. Nous avons utilisé la valeur du $CAC40$ et $S\mathcal{E}P500$. La stratégie de composition de ce dernier est d'investir ω_1 actions du premier indice et ω_2 actions du second. Donc, notre portefeuille à l'instant t est comme suit :

$$V_t = \omega_1 P_{1,t} + \omega_2 P_{2,t}$$

Où P_t désigne le cours du titre financier (le prix d'actif) à l'instant t . Le rendement d'un actif présente les accroissements quotidiens du logarithme du prix, c'est le gain (ou la perte) relatif. Il est donc le plus intéressant pour l'investisseur que le prix lui même, car il lui permet de déterminer les profits qu'il peut réaliser. C'est pour cela que les analyses financières sont basées sur les rendements des actifs au lieu de leurs prix [12].

Définition 3.1.3 (Rendement logarithmique d'un instrument financier) *Soit P_t le prix de l'actif à la date t (ici, une unité représente un jour). On appelle rendement loga-*

rithmique continu journalier des actifs la suite $(X_t)_{t \in \mathbb{N}}$ tel que :

$$X_t = \log\left(\frac{P_t}{P_{t-1}}\right).$$

Les rendements financiers sont la base de l'étude de la gestion de risque. C'est à partir de ces derniers que nous déterminons les variations du marché financier [9].

Définition 3.1.4 (Rendement logarithmique de plusieurs instruments financiers)

On appelle rendement d'un portefeuille constitué de n instruments financiers à la date t (t exprimé en unité de jour) la somme X_t^p tel que $X_t^p = \sum_{i=1}^n \omega_i X_{i,t}$ où ω_i est le poids correspondant à l'actif.

Lorsque nous nous proposons d'étudier un portefeuille constitué de plusieurs instruments financiers, nous devons considérer le rendement de ces derniers afin de déterminer sa variation au cours du temps. La fluctuation des rendements décrit des pertes ou bien des gains [9]. Les figures (3.1) et (3.2) représentent les prix et les rendements logarithmiques journaliers des deux indices et leurs portefeuille associé que nous avons construit (constitué de deux indices) [12].

Dans les simulations numériques, nous avons utilisé la composition $\omega_1 = \omega_2 = \frac{1}{2}$ (il s'agit d'un portefeuille equidistribué).

Les pics que nous remarquons sur les graphes de (3.2) reflètent des moments de crise.

Nous essayons dans la suite de représenter les rendements logarithmiques avec la volatilité afin de voir la correspondance entre les pics de chacune au cours du temps. Pour certains financiers qui cherchent un gain sur une courte durée de temps, on parle généralement des spéculateurs, la volatilité constitue un critère d'investissement.

Avant l'apparition des indicateurs (VaR), (ES) et ($CVaR$) [21], les gestionnaires et les économistes ont toujours utilisé la variance et l'écart type comme étant des mesures de risques. Le tableau (3.3) affiche les valeurs des différents paramètres de statistiques descriptive de notre portefeuille.

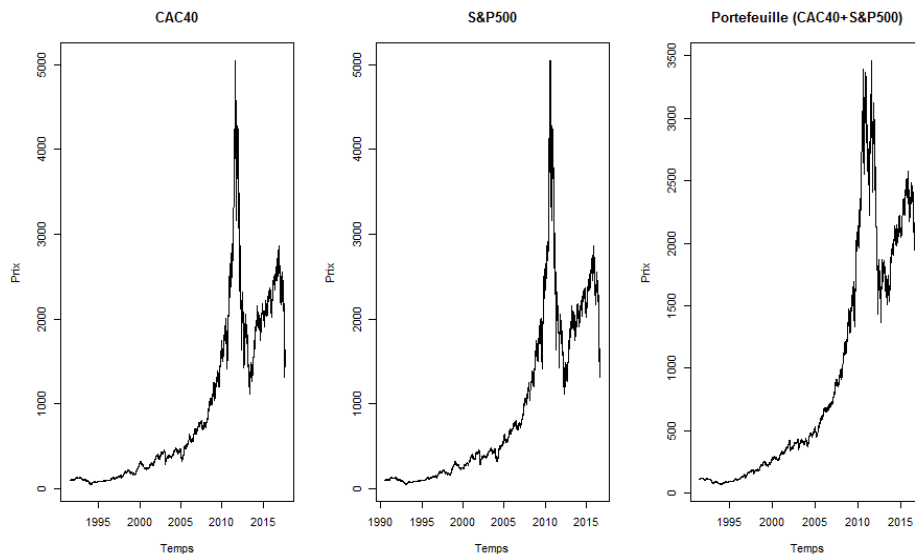


FIG. 3.1 – Prix journalier des deux indices et leurs portefeuille associé.

Paramètre	Valeur
<i>Min</i>	-0.0571
<i>1^{er} Quantile</i>	-0.0045
<i>Mediane</i>	-0.0005
<i>Moyenne</i>	-0.0003
<i>3^{ème} Quantile</i>	00.0037
<i>Max</i>	00.0563
<i>Ecart – type</i>	00.0078
<i>Cov(CAC40, S&P500)</i>	00.0001
<i>Skewness</i>	00.1893
<i>Kurtosis</i>	08.5826

TAB. 3.3 – Statistiques descriptive du portefeuille

La variation de ce portefeuille au cours du temps décrit la fluctuation du marché financier à travers la volatilité qui est une mesure de l'instabilité du cours d'un actif financier¹. La volatilité sert également aux calculs pour optimiser la diversification des portefeuilles d'actifs financiers. Ce phénomène, que nous appelons aussi l'hétéroscédasticité conditionnelle est particulièrement fréquent dans les données boursières, les taux de change ou d'autres prix déterminés sur les marchés financiers.

¹Actif financier : Elle mesure l'amplitude des variations d'une action d'un marché. Il s'agit d'un paramètre de quantification du risque de rendement et de prix.

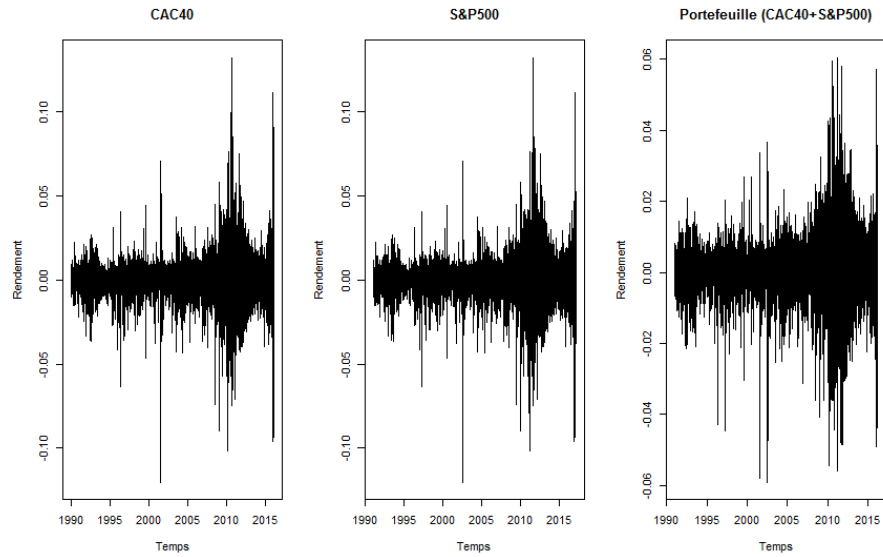


FIG. 3.2 – Rendements journaliers des deux indices et leurs portefeuille associé.

Le courbe de la figure (3.3) représentent la variation de la volatilité au cours du temps de notre portefeuille constitué de deux indices *CAC40* et *S&P500*.

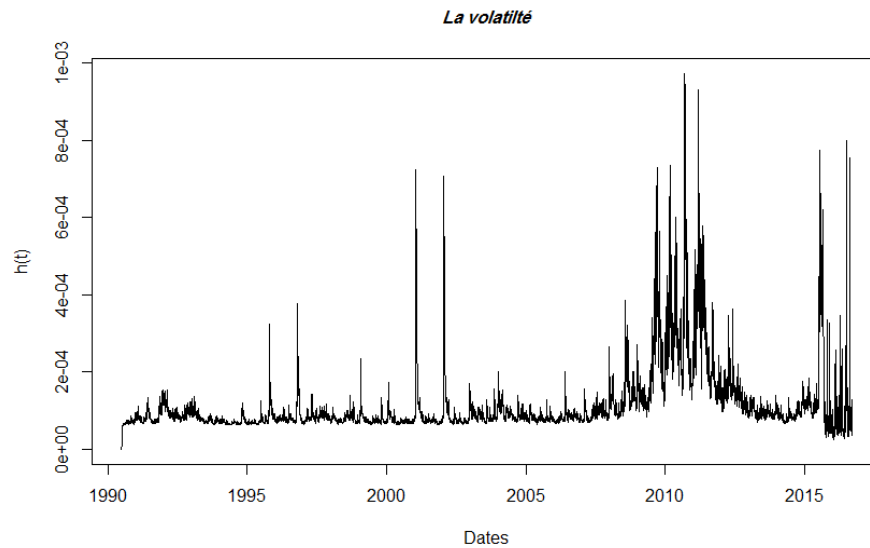


FIG. 3.3 – La variation de la volatilité au cours du temps de notre portefeuille.

Nous pouvons remarquer sur la figure (3.3) la synchronisation de la variation des logrendements et l'évolution de la volatilité au cours du temps. En effet, chaque pic de la volatilité correspond à un pic au niveau du rendement.

3.2 Méthodes d'estimation de la VaR

En finance du marché, il est essentiel d'estimer les mesures de risques afin de modéliser les rendements futurs [3] [6].

3.2.1 VaR historique

La (*VaR*) historique consiste à utiliser la distribution historique. Considerons par exemple, la (*VaR*) historique sur un jour à 99% (par exemple) d'un portefeuille composé de n actifs en proportion $\omega = (\omega_1, \dots, \omega_n)$, avec $\sum_{i=1,n} \omega_i = 1$. Pour chaque jours $t = 1, T$ de l'historique, et les rendements $r_{i,t}$, on calcule les rendements du portefeuille : $r_t = \sum_{i=1,n} \omega_i r_{i,t}$. La (*VaR*) à 99% historique du portefeuille est alors simplement le quantile des rendements obtenus.

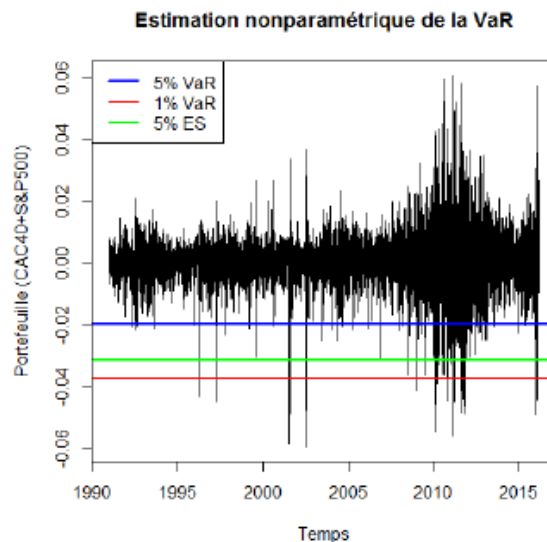


FIG. 3.4 – Estimation non paramétrique de la VaR (VaR historique).

- $VaR(5\%) = -0.019$, $VaR(1\%) = -0.038$
- Cette méthode ne fait aucune hypothèse sur la distribution, elle est non paramétrique (voir la figure (3.4)). Elle permet de tenir compte des queues épaisses, des asymétries des corrélations, etc. En revanche, elle suppose la disponibilité des données

- En outre, cette méthode suppose que la (*VaR*) future se comporte comme la (*VaR*) passée. Elle peut donc ne pas être représentative des pertes futures dans le cas où des événements extrêmes ne sont pas représentés dans l'historique.
- Un autre problème, que nous allons mettre en évidence, est la difficulté à s'adapter rapidement à de nouvelles conditions de marché. En effet, pour effectuer une estimation suffisamment précise de la (*VaR*) historique, on doit utiliser un historique suffisamment grand.
- L'avantage de cette méthode est donc de ne pas imposer d'hypothèse sur la loi de distribution des rentabilités. Mais le problème qui se pose est la longueur T de l'historique qui, si elle est trop faible, ne fournit pas un calcul précis de la (*VaR*).

3.2.2 VaR Gaussienne

En statistique, une des lois les plus utilisées est la loi gaussienne. Ses différentes propriétés, comme la stabilité, le fait que deux paramètres (moyenne et variance) suffisent à la caractériser ou bien encore le théorème central limite font que cette loi s'adapte bien dans de nombreuses études, et notamment dans le domaine des séries chronologiques financières. De manière classique, le choix du modèle paramétrique se porte sur la loi Normale. Supposons donc que les rentabilités du portefeuille sont issues d'une (*v.a*) Gaussienne : ainsi, F est définie par $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ avec μ l'espérance des rentabilités et σ^2 la variance des rentabilités. Nous obtenons ainsi à partir de l'équation :

$$\Phi\left(\frac{VaR(h, \alpha) - \mu}{\sigma}\right) = \alpha$$

avec Φ la fonction de répartition de la loi Normale centrée réduite. La (*VaR*) Gaussienne est définie de la manière suivante :

$$VaR(h, \alpha) = \mu + \sigma\Phi^{-1}(\alpha)$$

Risque α	1%	2.5%	5%	10%
VaR normale	-0.0185	-0.0156	-0.0132	-0.0103

TAB. 3.4 – Estimation de la VaR paramétrique (loi normale) sur l'ensemble des données.

La tableau (3.4) donne la (*VaR*) pour quelques niveaux de confiance sur l'ensemble des données de notre portefeuille. Nous voyons qu'il y a des différences assez significatives entre les niveaux de risque, et que la (*VaR*) associée donne une perte moindre par rapport à la (*VaR*) associée au niveau précédent.

Cette méthode repose sur des hypothèses irréalistes pour modéliser les rentabilités des actifs financiers puisque deux faits stylisés² caractérisent leur distribution et ne sont pas captés par la modélisation Gaussienne :

1. L'asymétrie : l'occurrence de pertes extrêmes est plus forte que celle de profils extrêmes (valeur négative de skewness (voir 3.3)).
2. Les queues épaisses (grande valeur de kurtosis (voir 3.3)).

Le deuxième fait stylisé peut s'observer sur la figure (3.5) à l'aide de "*QQ-plot*". En effet, on observe à travers ce test graphique sur les rendements qu'ils sont à peu près gaussiens au centre du distribution (autour de la moyenne), et ils divergent au delà, avec des queues épaisses et ça qui confirme la propriété de la non normalité des rendements des séries financières³.

3.2.3 Inconvénient du modèle normal

La distribution des rendements financiers n'est pas toujours normale. Donc l'utilisation de ce modèle limite la recherche et nous empêche de traiter la queue de la distribution comme il est envisager dans la figure (3.6). Donc, le modèle normal n'est pas adapté aux moments

²Faits stylisés : c'est-à-dire les propriétés statistiques observées dans la plupart des données financières comme le prix et le rendement.

³Une série financière : est un processus qui sert à l'explication des phénomènes de marché (prévisions, analyse des risques, ...) et au calcul du prix des actifs, des indices et des options.

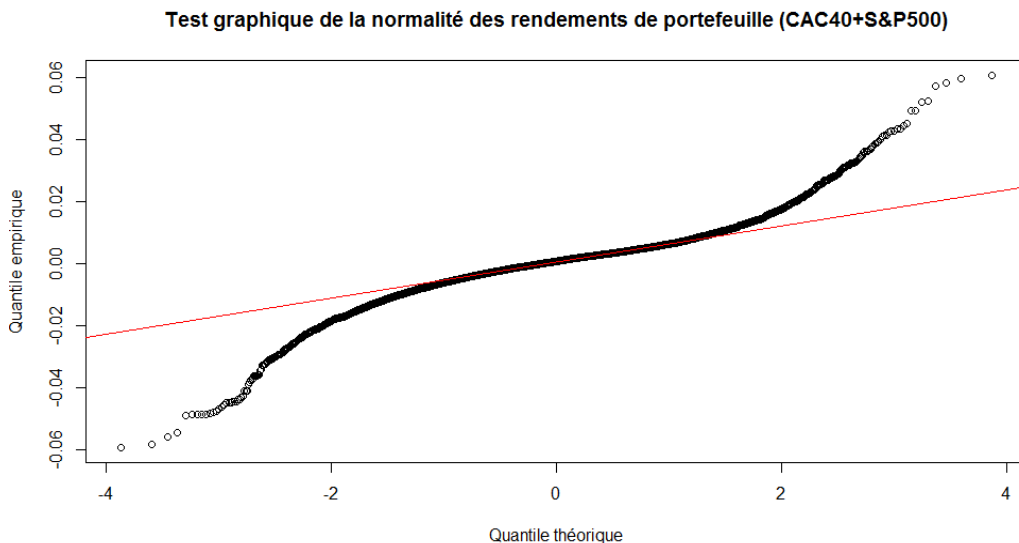


FIG. 3.5 – Test graphique de normalité de la série de rendements de portefeuille étudié.

de crise et restreint la mesure de risque. Cela pose une problématique majeure parce que nous ne pouvons pas estimer correctement la (VaR) pendant les moments extrêmes.

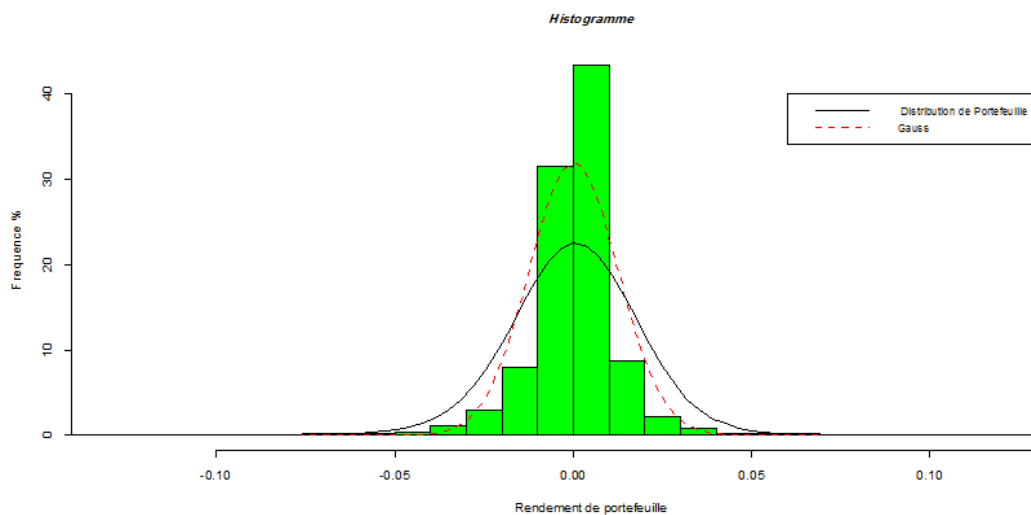


FIG. 3.6 – Histogramme de distribution des rendements de portefeuille étudié.

La figure (3.7) représente un agrandissement au niveaux des queues droite et gauche de l'histogramme de la distribution des rendements de notre portefeuille. Nous pouvons voir que la loi normale ne traite pas les valeurs au delà de la moyenne. Ce qui confirme l'hypothèse que le modèle normal sousestime les informations au niveau de la queue. Le calcul

du kurtosis confirme aussi ce fait (voir tab (3.3)).

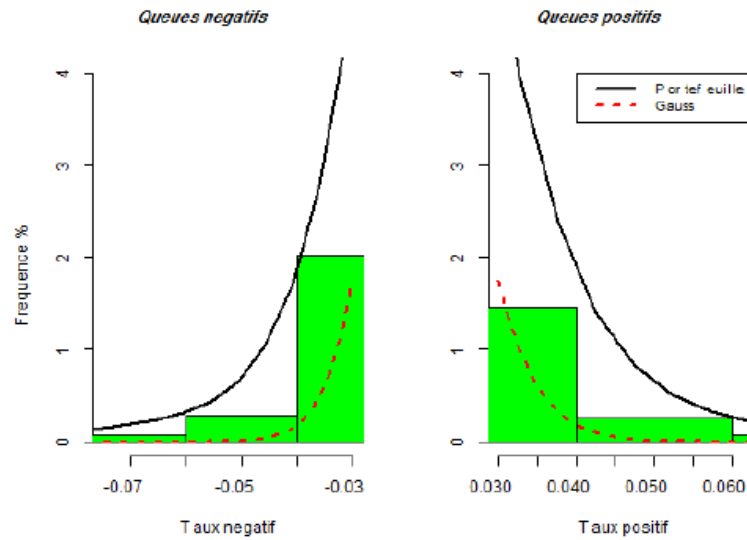


FIG. 3.7 – Agrandissement des queues de distribution des rendements de portefeuille étudié.

3.3 Synthèse

La première constatation que l'on peut faire que dans l'estimation de la (VaR) notamment pour les rendements de portefeuille financier c'est la présence des périodes de forte volatilité, indiquant parallèlement l'existence des valeurs extrêmes sur la série des rendements. D'après les résultats qu'on a obtenu en utilisant une méthode non paramétrique (la (VaR) historique) et une méthode paramétrique (la (VaR) gaussienne) ne sont pas exactes et sous estime le risque puisque le marché financier est influé par plusieurs et différents facteurs, notamment :

1. Le marché parallèle et l'économie informelle qui jouent un rôle très important dans la détermination des prix des actions bourcières.
2. Après la crise économique et avec les spiritueuses des marchés noirs, les rendements financiers sont perpétuellement variés.

3. Les coups des banques privées qui perdent la confiance des investisseurs de toutes banques, et on donne comme exemple réelle la banque « AL KHALIFA ».

4. Les bonnes et mauvaises nouvelles qui touchent le comportement des investissements.

Ces facteurs, ont des effets sur l'achat et les crédits des investisseurs, et donc sur leurs dépôts à terme dans ces banques, en particulier sur la stabilité du marché financier. On conclu alors que les autres méthodes d'estimation de la (VaR) telle que la (VaR) student, la ($VaR - GARCH$), et la (VaR) semi paramétrique basée sur la théorie des valeurs extrême représentent bien la (VaR) et donne des estimations plus sensibles contre les différents risques, ce qui permet de modéliser la volatilité et de la prédire à long ou à cours terme sans difficulté.

Conclusion

Nous avons au cours de cette étude établi quelques résultats relatifs aux mesures de risque. Nous avons souligné les qualités que doit avoir une bonne mesure de risque et avons ensuite présenté la Value at Risk telle qu'elle est utilisée par les banques.

Ce mémoire est organisé autour d'une idée directrice, qui est l'estimation de la (*VaR*) par deux méthodes, et en particulier à l'aide des quantiles extrêmes et la distribution Gaussienne. Ces résultats permettent alors de construire d'une manière efficace un intervalle de confiance permettant à des directeurs de risque d'évaluer mieux la qualité de l'analytique rapporté de risque.

Des études perspectives ont été proposées pour pouvoir manager le changement liés au domaine de la mesure de risque dont l'adoption des stratégies alternatives peut être prise.

Dans ce cas l'usage de la théorie des valeurs extrêmes permettant de prendre en compte explicitement les événements rares tels que les Krachs boursiers [18].

En effet, une des plus intéressantes mesures de risque dans les dernières années est la théorie spectrale des mesures de risque proposée par [2]. Elle satisfait les propriétés de cohérence. Cependant, les mesures spectrales de risque demeurent exactement une tâche critique pour les établissements financiers.

Bibliographie

- [1] Artzner, P., Delbaen, F., Eber, J.M. Heath, D., 1999. Coherent Measures of Risk, Mathematical Finance.
- [2] Acerbi, C., Tasche, D., 2001. Expected Shortfall : A natural coherent alternative to Value at Risk, Milano, Italy.
- [3] Argaud, J.P., 2007. Des mathématiques pour la finance, Séminaire CERFACS.
- [4] Aurby. H., Lotfi. B., (1999), Au delà de la VaR, vers une nouvelle mesure du risque en gestion de portefeuille. Rapport de recherche.
- [5] Belzile, S., 2008. L'utilisation des mesures cohérentes de risque en gestion de portefeuille, Université de Québec à Montréal, Canada.
- [6] Bensafta, M.K., 2000. La gestion du Risque de Marché : Application de la Valeur-à-Risque, Université de chlef, Algerie
- [7] Benbraïka. Gh. 2009. Dependance des risques et application. Mémoire de Magistère, Universite Biskra.
- [8] Bezat. A., Nikeghbali. A., 2000. La théorie des extrêmes et la gestion des risques de marché, Groupe de Travail ENSAE, sous la direction de Gaël Riboulet et Thierry Roncalli.
- [9] Charpentier, A., 2009. Econométrie de la finance Partie 2 Modéliser les rendements boursiers, Université Rennes 1, France.
- [10] Charpentier, A., 2010. Mesures de risque, Journées d'Études Statistique, Luminy, Université Rennes 1, France.

- [11] Dusart, P. 2013. Cours de probabilités, licence 2-S3 SI-MASS.
- [12] Föllmer, H., 2005. Incertitude financière, mesures de risque et préférences robustes, Université de Berlin, Allemagne.
- [13] Guibert. T., 2013. Mesures de risque de marché, Cours de la chaire Risques Financiers de la fondation du Risque.
- [14] Hervé, F.D., 2004. La VaR comme instrument de mesure des risques de marché?. Crédit Local.
- [15] Herlemont, D., 2008. Value at Risk - Etude de cas.
- [16] Kenioua. Z., 2017. Sur les mesures de risques et leurs applications, Thèse de doctorat, Université Biskra.
- [17] Lévy, P., 1925. Calcul des probabilités. Paris, Gauthier-Villars.
- [18] Longin, F., 1998. Value at Risk : Une nouvelle approche fondée sur les valeurs extrêmes. Annales d'économie et de Statistique.
- [19] Ouaar. F., 2010. Estimation empirique de la mesure sepctrale des risques financiers. Mémoire de Magistère (Universite Biskra).
- [20] Saporta. G, 2006. Probabilités analyse des données et statistique, France.
- [21] Yamai, Y., Yoshihara, T., 2002. Comparative analyses of Expected Shortfall and Value-at-Risk : their validity under market Stress, Monetary and Economic Studies (Bank of Japan), 20 (3), 181–23.

Annexe A : Logiciel *R*



FIG. 3.8 – L'icône du logiciel *R* .

R est un système, communément appelé langage et logiciel, qui permet de réaliser des analyses statistiques. Plus particulièrement, il comporte des moyens qui rendent possible la manipulation des données, les calculs et les représentations graphiques. *R* a aussi la possibilité d'exécuter des programmes stockés dans des fichiers textes et comporte un grand nombre de procédures statistiques appelées paquets. Ces derniers permettent de traiter assez rapidement des sujets aussi variés que les modèles linéaires (simples et généralisés), la régression (linéaire et non linéaire), les séries chronologiques, les tests paramétriques et non paramétriques classiques, les différentes méthodes d'analyse des données,... Plusieurs paquets, tels *ade4*, *FactoMineR*, *MASS*, *multivariate*, *scatterplot3d* et *rgl* entre autres sont destinés à l'analyse des données statistiques multidimensionnelles.

Il a été initialement créé, en 1996, par *Robert Gentleman* et *Ross Ihaka* du département de statistique de l'Université d'Auckland en Nouvelle Zélande. Depuis 1997, il s'est formé une équipe "*R Core Team*" qui développe *R*. Il est conçu pour pouvoir être utilisé avec les systèmes d'exploitation *Unix*, *Linux*, *Windows* et *MacOS*.

Un élément clé dans la mission de développement de *R* est le *Comprehensive R Archive Network* (CRAN) qui est un ensemble de sites qui fournit tout ce qui est nécessaire à

la distribution de *R*, ses extensions, sa documentation, ses fichiers sources et ses fichiers binaires. Le site maître du CRAN est situé en Autriche à Vienne, on peut y accéder par l'URL : "<http://cran.r-project.org/>". Les autres sites du CRAN, appelés sites miroirs, sont répandus partout dans le monde.

R est un logiciel libre distribué sous les termes de la "GNU Public Licence". Il fait partie intégrante du projet GNU et possède un site officiel à l'adresse "<http://www.R-project.org/>". Il est souvent présenté comme un clone de *S* qui est un langage de haut niveau développé par les *AT&T Bell Laboratories* et plus particulièrement par *Rick Becker*, *John Chambers* et *Allan Wilks*. *S* est utilisable à travers le logiciel *S-Plus* qui est commercialisé par la société *Insightful* (<http://www.splus.com/>).

Annexe B : Abréviation et notation

Les différentes abréviations et notations utilisées tout au long de ce mémoire sont expliquées ci-dessous.

n	Nombre entier.
\mathbb{R}	Ensemble des valeurs réelles
Ω	L'espace fondamental.
\mathcal{F}	La tribu des évènements.
\mathbb{P}	Mesure de probabilité sur Ω .
(Ω, \mathcal{F})	Espace mesurable.
$(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$	Espace probabilisé
F	La fonction de répartition de la variable aléatoire X
$F^{-1}(\alpha)$	La fonction des quantiles (l'inverse généralisé)
$v.a$	Variable aléatoire défini sur l'espace $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$.
(X_1, \dots, X_n)	Echantillon de taille n de X
$\mathbb{E}[X]$	Espérance mathématique ou moyenne du v.a. X .
$Var[X]$	Variance mathématique.
$X \stackrel{\mathcal{L}}{=} Y$	Egalité en loi.
$X \stackrel{p.s}{=} Y$	Egalité presque sûr.

VaR	Value-at-Risk.
$CVaR$	Conditional Value-at-Risk.
$TVaR$	Tail-Value-at-Risk.
CTE	Conditional Tail Expectation.
ES	Expected Shortfall.
L^p	L'espace des fonctions de puissance p -ième intégrable pour la mesure de Lebesgue
L^∞	$\{u : \Omega \rightarrow \mathbb{R} \text{ mesurable, } \sup u(t) < +\infty\}$
$CAC40$	Cotation Assistée en Continu.
$S\&P500$	Standard and Poor's