

République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

UNIVERSITÉ MOHAMED KHIDER, BISKRA

FACULTÉ des SCIENCES EXACTES et des SCIENCES de la NATURE et de la VIE

DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES



Mémoire présenté en vue de l'obtention du Diplôme :

MASTER en Mathématiques

Option :Analyse

Par

SAADI Imene

Titre :

Théorie de Bifurcations et Applications

Membres du Comité d'Examen :

Dr. HAOUAS Omrane	UMKB	Président
Dr. MENACER Tidjani	UMKB	Encadreur
Dr. KACI Fatima	UMKB	Examineur

Juin 2019

DÉDICACE

♡ Avant tous propos, je tiens à rendre grâce à "**Allah**" qui m'a guidé sur la bonne voie♡.

♡ Je dédie ce modeste travail♡ :

♡ À mes très chers parents ma mère "**Torki Mebarka**" et mon père "**Saadi Mouldi**"
qui m'ont bien élevés, aidés soutenus et encouragés durant toutes ces années d'étude,

qu'Allah les protège♡

♡ Mes sœurs et frères : "**Hoda Djaouida younce Djalal Djamel Oussama Hafed**"♡.

♡ Toute la famille <<**Saadi**>> surtout : "**Nour**"♡.

♡ Toute mes amies♡.

♡ A tous les enseignants du département de Mathématiques♡.

♡ Tous mes collègues de ma promotion de Master **2** Mathématiques **2019**♡.

♡ **Saadi Imane** ♡

REMERCIEMENTS

♡ Je remercie tout d'abord **ALLAH** qui m'aide et me donne la santé, la patience et le courage durant ces longues années d'étude et la force pour finir ce travail ♡.

Je tiens à remercier sincèrement mon encadreur **Dr. "Tidjani Menacer"**, pour m'avoir donné l'opportunité de travailler sur ce projet, pour son grand soutien scientifique et moral, pour les suggestions et les encouragements qu'il m'a apportés durant mon projet.

Mon sincère remerciement aux membres de jury **Dr. "Haouas Omrane"** et **Dr. "Kaci Fatima"** qui ont accepté de juger mon travail.

Je remercie vivement tous les enseignants de notre département qui ont toujours donné le meilleur d'eux-mêmes afin de nous assurer une formation de qualité, je n'oublie pas le chef département **Dr "Hafayed Mokhtar"** pour son aide.

Table des matières

Remerciements	ii
Table des matières	iii
Liste des figures	v
Introduction	1
1 Notions générales sur les systèmes dynamiques	3
1.1 Système dynamique	3
1.1.1 Représentations mathématiques des systèmes dynamiques[8]	4
1.1.2 Système dynamique linéaire	4
1.1.3 Système dynamique non linéaire	5
1.1.4 Trajectoire	5
1.1.5 Espace de phase	6
1.1.6 Orbite	6
1.2 Points d'équilibre	6
1.3 Cycle limite	7
1.4 Stabilité	8
1.4.1 Stabilité au sens de Lyapunov	8
1.4.2 Structurellement stable	10

2	Théorie des Bifurcations	11
2.1	Définition de bifurcation	12
2.2	Diagramme de bifurcation	12
2.3	Codimension d'une bifurcation	12
2.4	Type des bifurcations	13
2.4.1	Bifurcations locales	13
2.4.2	Bifurcations globales	20
3	Application : Bifurcation de Hopf	21
3.1	Introduction	21
3.2	Le modèle	21
3.2.1	Système d'origine	21
3.2.2	Système modifié	22
3.3	Analyse de bifurcation de Hopf	24
3.4	Résultats numériques	25
3.4.1	Période doublant le chemin du chaos	26
3.4.2	Exposants de Lyapunov et dimension de Lyapunov	31
3.5	Conclusion	33
	Conclusion	34
	Bibliographie	35
	Annexe A : Logiciel Matlab	37
	Annexe B : Abréviations et Notations	39

Table des figures

2.1	Diagramme de bifurcation nœud-col	14
2.2	Diagramme de bifurcation transcritique.	16
2.3	Diagramme de bifurcation fourche a)- sur-critique. b)- sou-critique.	18
2.4	Diagramme de bifurcation Hopf	20
3.1	Section de Poincaré Σ pour $\alpha = 0.5$ et $\beta = 0.65$	26
3.2	Diagramme de bifurcation y_n en fonction de β avec $\alpha = 0.5$	27
3.3	Espace de phase du système (3.2) pour $\alpha = 0.5$, (a) en $\beta = 0.2$ points d'équilibre E_{\pm} asymptotiquement stables, (b) à $\beta = 0.35$ cycle limite 1-période, (c) à $\beta = 0.45$ cycle limite 2-période	28
3.4	Espace de phase du système (3.2) pour $\alpha = 0.5$, (a) à $\beta = 0.485$ cycle limite sur 4 périodes, (b) $\beta = 0.49$, (c) à $\beta = 0.5$ min. Il existe des attracteurs chaotiques à 1 défilement	29
3.5	Attracteur chaotique à deux spirales pour $\alpha = 0.5$ et $\beta = 0.65$, (a) projection dans le plan $x - y$, (b) projection dans le plan $x - z$, (c) projection dans le plan $y - z$	30
3.6	Exposants de Lyapunov λ_1, λ_2 et λ_3 , en fonction de β , pour $\alpha = 0.5$	32

Introduction

Les systèmes dynamiques désignent couramment la branche de recherche active des mathématiques, à la frontière de la topologie, de l'analyse, de la géométrie, de la théorie de la mesure et des probabilités, et qui s'efforce d'étudier les propriétés d'un système dynamique. La nature de cette étude diffère suivant le système dynamique étudié, nature qui dépend des outils utilisés (analytiques, géométriques ou probabilistes).

Ainsi historiquement, les premières questions relevant des systèmes dynamiques concernaient la mécanique à une époque où elle était incluse dans l'enseignement des mathématiques. Une des questions majeures qui a motivé la recherche mathématique est le problème de la stabilité du système solaire.[8]

Les systèmes dynamiques ont été développés au XIXe siècle par le mathématicien physicien français Henri Poincaré. Ainsi qu'au le mathématicien russe Aleksandr Lyapunov a effectuait des recherches sur la stabilité du mouvement. Le but de la théorie des systèmes dynamiques avait initialement pour objet l'étude du comportement qualitatif des trajectoires d'un champ de vecteurs.

Pour élaborer un modèle il faut tout d'abord définir quelles sont les valeurs qui évoluent dans le temps, les états du système. Ensuite, nous intéressons à l'évolution des systèmes dynamiques décrits par des équations aux différences (par une récurrence).

Certains modèles des processus dynamiques contenaient un ou plusieurs paramètres, cependant le changement des paramètres pouvait entraîner des changements qualitatifs et quantitatifs de ses propriétés, ce phénomène est appelé souvent bifurcation[11].

Notre mémoire est composée de trois chapitres :

Dans le **premier chapitre**, on introduit les définitions des systèmes dynamiques et ses propriétés, puis on présente la classification et la stabilité des points d'équilibre en passant par les cycles limites.

Le **deuxième chapitre**, sera consacré à la théorie de la bifurcation, où on introduit deux types de bifurcations, et on présente leurs diagrammes de bifurcation.

Le **troisième chapitre** présente une application sur la bifurcation de Hopf dans le système optique hybride

Chapitre 1

Notions générales sur les systèmes dynamiques

Dans ce chapitre, on s'intéresse d'abord à la présentation des notions générales sur les systèmes dynamiques : tels que définition, points d'équilibre, cycle limite, stabilité...

1.1 Système dynamique

Définition 1.1.1 [5] *Un système dynamique est un modèle permettant de décrire l'évolution au cours du temps d'un ensemble des objets en interaction, il est défini par un triplet (X, T, f) constitué de l'espace d'état X , du domaine temporel T , et d'une application de transition d'état $f : X \times T \rightarrow X$, qui permet de définir à partir d'un vecteur de conditions initiales, l'état du système à tout instant.*

Donc, on peut définir un système dynamique comme une description d'un phénomène physique qui évolue au cours du temps (système continu), ou par rapport à une autre variable (système discret).

1.1.1 Représentations mathématiques des systèmes dynamiques[8]

Un système dynamique décrit par une fonction mathématique présente deux types de variables : dynamiques et statiques, les variables dynamiques sont les quantités fondamentales qui changent avec le temps, les variables statiques encore, appelés paramètres du système sont fixes.

- Dans le cas où la composante temps est **continue**, le système dynamique est présenté par un système **d'équations différentielles** de la forme :

$$\frac{dx}{dt} = f(x, t, p) \text{ où } x \in \mathbb{R}^n \text{ et } p \in \mathbb{R}^r, \text{ } n \text{ et } r \in \mathbb{N}.$$

- Dans le cas où le temps est **discret**, le système dynamique est présenté par une application (**fonction itérative**)

$$x_{k+1} = f(x_k, p), \quad x_k \in \mathbb{R}^n \text{ et } p \in \mathbb{R}^r, \quad k = 1, 2, 3, \dots$$

1.1.2 Système dynamique linéaire

Un système dynamique linéaire ou système différentiel linéaire est une équation portant sur une fonction vectorielle $x(t)$, qui peut s'écrire

$$\dot{x} = A(t)x(t). \tag{1.1}$$

Où plus généralement

$$\dot{x} = A(t)x(t) + g(t).$$

Où A est une matrice carrée et g un vecteur dont les éléments sont des fonctions de t .

Le mot linéaire concerne uniquement la dépendance par rapport à x , les éléments de $A(t)$ et de $g(t)$ n'ont pas à être linéaires en t . [4]

1.1.3 Système dynamique non linéaire

Un système dynamique non linéaire peut toujours être écrit par une équation différentielle de la forme suivante :

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t)) = \begin{pmatrix} f_1(x(t)) \\ f_2(x(t)) \\ \cdot \\ \cdot \\ f_n(x(t)) \end{pmatrix}.$$

Où $x(t) \in \mathbb{R}^n$, et f est une fonction non linéaire. On note $f(t, x(t)) = F(x(t))$.

A la section (1.1), on va étudier le cas où f est linéaire bien entendu, dans le cas non linéaire, on ne peut pas faire une description aussi détaillée, puisque la fonction f est arbitraire, l'analyse des systèmes linéaires va nous aider énormément dans l'étude des systèmes non linéaires ; plus précisément, on montre qu'au voisinage des champs de vecteurs, le comportement des solutions d'une équation est presque toujours du même type que celui des solutions de son approximation linéaire.[4]

1.1.4 Trajectoire

Soient $(M, \{\varphi^t\}_{t \in G})$ un système dynamique et x un état de l'espace des phases. On appelle trajectoire d'un point x de M l'application définie sur G et à valeurs dans M Par :

$$\begin{aligned} \varphi : G &\rightarrow M, \\ t &\rightarrow \varphi^t(x). \end{aligned}$$

Donc, la trajectoire est une solution du système différentiel.[5]

1.1.5 Espace de phase

L'espace de phase est un espace souvent multi-dimensionnel permettant d'interpréter géométriquement le mouvement d'un système dynamique décrit par des équations différentielles par rapport au temps.[5]

1.1.6 Orbite

Définition 1.1.2 [5] *On appelle orbite d'un point x , l'image de la trajectoire issue de x c'est à dire le sous ensemble $\gamma(x)$ de l'espace des phases défini par :*

$$\gamma(x) = \varphi^t(x), t \in G.$$

1.2 Points d'équilibre

Définition 1.2.1 [6] *On dit que $x_e \in \mathbb{R}^n$ est un point d'équilibre ou point critique de l'équation différentielle*

$$\dot{x} = f(x).$$

Si

$$f(x_e) = 0.$$

Remarque 1.2.1 [8] *Par un changement de variable $y = x - x_e$, on peut ramener le point à l'origine (0).*

Exemple 1.2.1 [6] *Considérons*

$$f(x) = \begin{bmatrix} x_1^2 - x_2^2 - 1 \\ 2x_2 \end{bmatrix}.$$

L'équation $\dot{x} = f(x)$ a deux points d'équilibre, $x_e^1 = (1, 0)^T$ et $x_e^2 = (-1, 0)^T$.

1.3 Cycle limite

Soit le système différentiel de la forme :

$$\begin{cases} \dot{x} = P(x, y), \\ \dot{y} = Q(x, y). \end{cases} \quad (1.2)$$

Où P et Q sont des polynômes en x et y à coefficients réels de degré d .

Définition 1.3.1 *Un cycle limite C du système (1.2) est une trajectoire fermée isolée dans l'espace de phases, c'est à dire qu'il existe un voisinage de C dans lequel il n'y a pas d'autres courbes fermées.*

Théorème 1.3.1 *C étant la trajectoire d'un cycle limite, toutes les trajectoires intérieures et extérieures voisines de C sont telle que :*

Soit elles s'enroulent toutes en spirales autour de C pour $t \rightarrow +\infty$ ou bien $t \rightarrow -\infty$.

1. *Si toutes les trajectoires intérieures et extérieures s'enroulent autour de C , pour $t \rightarrow +\infty$, le cycle limite est stable.*
2. *Si toutes les trajectoires intérieures et extérieures s'enroulent, toutes en spirale autour de C , pour $t \rightarrow -\infty$, le cycle limite est instable.*

Exemple 1.3.1 *Soit le système :*

$$\begin{cases} \dot{x} = \alpha x - y - \alpha x(x^2 + y^2), \\ \dot{y} = x + \alpha y - \alpha y(x^2 + y^2). \end{cases}$$

Tel que α est un paramètre.

En coordonnées polaires :
$$\begin{cases} x = r \cos(\theta) \\ y = r \sin(\theta) \end{cases} \quad \text{tel que } x^2 + y^2 = r^2, \text{ le système précède}$$

devient :

$$\begin{cases} \dot{r} = \alpha r(1 - r^2), \\ \dot{\theta} = 1. \end{cases}$$

$r = 1$ correspond à l'orbite périodique est un cycle limite stable pour $\alpha > 0$, et instable pour $\alpha < 0$. Si $\alpha = 0$, le système a une infinité d'orbites périodiques et il n'ya pas de cycles limites.

Remarque 1.3.1 Les cycles limites apparaissent seulement dans les systèmes différentiels non linéaires.[3]

1.4 Stabilité

La notion de stabilité a pour but de formaliser la propriété d'un système dynamique tel que le système reste proche d'un état dit d'équilibre (dans un sens à préciser et à quantifier). Il existe des dizaines de types de stabilités différentes pour caractériser l'évolution d'un point vers son état stable. Les principaux types de stabilité sont abordés ici.

1.4.1 Stabilité au sens de Lyapunov

Soit le système dynamique suivant :

$$\dot{x} = f(x, t), \quad (1.3)$$

avec f une fonction non linéaire.

Définition 1.4.1 Le point d'équilibre x_e du système (1.3) est :

1. *Stable si :*

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 : \|x(t_0) - x_e\| < \delta \implies \|x(t, x(t_0)) - x_e\| < \varepsilon, \forall t \geq t_0. \quad (1.4)$$

2. *Asymptotiquement stable si :*

$$\exists \delta > 0 : \|x(t_0) - x_e\| < \delta \implies \lim_{t \rightarrow \infty} \|x(t, x(t_0)) - x_e\| = 0.$$

3. *Exponentiellement stable si :*

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 : \|x(t_0) - x_e\| < \delta \implies \|x(t, x(t_0)) - x_e\| < a \|x(t_0) - x_e\| \exp(-bt), \forall t > t_0.$$

4. *Instable si l'équation (1.4) n'est pas satisfais.[8]*

Théorème 1.4.1 [10] *Considérons le champ de vecteur suivant :*

$$\dot{x} = f(x), \quad x \in \mathbb{R}^n. \quad (1.5)$$

Soit x_e un point d'équilibre de (1.5) et $V : U \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe C^1 définie sur un voisinage U de x_e tel que :

1. $V(x_e) = 0$ et $V(x) > 0$ si $x \neq x_e$.

2. $\dot{V}(x) \leq 0$ dans $U \setminus \{x_e\}$.

Alors x_e est stable. De plus, si

3. $\dot{V}(x) < 0$ dans $U \setminus \{x_e\}$.

Alors x_e est asymptotiquement stable.

Exemple 1.4.1 [9] *Soit le système :*

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 + x_1(x_1^2 + x_2^2), \\ \dot{x}_2 = -x_1 + x_2(x_1^2 + x_2^2). \end{cases}$$

Ce système à un point d'équilibre unique $(0, 0)$. Considérons la fonction suivant :

$$V(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2.$$

On a : $V(0, 0) = 0$ et $V(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2 > 0, \forall (x_1, x_2) \neq (0, 0)$.

De plus :

$$\begin{aligned}\dot{V}(x_1, x_2) &= \frac{d}{dt}V(x_1, x_2) \\ &= 2x_1\dot{x}_1 + 2x_2\dot{x}_2 \\ &= 2(x_1^2 + x_2^2)^2\end{aligned}$$

donc $\dot{V}(x_1, x_2) > 0, \forall (x_1, x_2) \neq (0, 0)$. Alors : *l'origine est instable.*

1.4.2 Structurellement stable

Un système dynamique (champ de vecteurs ou application) structurellement stable si le portrait de phase ne change pas dans une perturbation de ses paramètres. Par conséquent une bifurcation correspond à une perte de stabilité structurelle.

Définition 1.4.2 *Un système dynamique (champ de vecteurs ou application) est structurellement stable ou robuste si les systèmes suffisamment "proches" présentent un même comportement dynamique.[7]*

Chapitre 2

Théorie des Bifurcations

L'aspect fondamental de l'étude des systèmes dynamiques est la notion de bifurcation. Un terme qui a été introduit par Henri Poincaré au début du XX^e siècle dans ces travaux sur les systèmes différentiels. Pour certaines valeurs critiques des paramètres de contrôle du système, la solution de l'équation différentielle change qualitativement : on dit qu'il y a bifurcation. Une première approche pour l'étude des systèmes dynamiques consiste à rechercher les points d'équilibre, c'est-à-dire les solutions stationnaires ne présentant pas l'évolution temporelle. L'étape suivante consiste à faire varier les paramètres de contrôle du système. On regarde alors que deviennent les points d'équilibre, en particulier ceux qui étaient stables avant de modifier les paramètres du système et les bifurcations qui apparaissent. Pour les valeurs des paramètres auxquelles de tels changements qualitatifs apparaissent, valeurs dites de bifurcation, la construction du portrait de phase nécessite des outils adoptés.[5]

2.1 Définition de bifurcation

Soit le système dynamique non linéaire de dimension n :

$$\frac{dx}{dt} = f(x, t, \mu), \quad (2.1)$$

tel que μ est un paramètre de contrôle, et x_e la solution de ce système.

Définition 2.1.1 *Une bifurcation est un changement qualitatif de la solution x_e du système (2.1) lorsqu'on modifie μ , et d'une manière plus précise la disparition ou le changement de stabilité et l'apparition de nouvelles solutions.*[8]

2.2 Diagramme de bifurcation

Dans les systèmes dynamiques, un diagramme de bifurcation montre les comportements possibles d'un système, à long terme, en fonction des paramètres de bifurcation.

Définition 2.2.1 *Un diagramme de bifurcation est une portion de l'espace des paramètres sur laquelle sont représentés tous les points de bifurcation.*[5]

2.3 Codimension d'une bifurcation

Si l'ensemble des valeurs de bifurcation est défini par k conditions

$$C_1(\mu) = C_2(\mu) = \dots = C_k(\mu) = 0 \text{ avec } 1 \leq k \leq p.$$

La bifurcation est dite de codimension k (on peut dire que la codimension est la plus petite dimension de l'espace des paramètres permettant d'aboutir à cette bifurcation).[1]

2.4 Type des bifurcations

2.4.1 Bifurcations locales

La codimension est la plus petite dimension de l'espace des paramètres permettant d'aboutir à cette bifurcation. On parle ici seulement de la bifurcation de codimension un et il existe quatre types de bifurcations de codimension un (nœud-col, transcritique, fourche, hopf), qui correspondent tous à des comportements génériques.

a- Bifurcation nœud-col[8]

Une fonction linéaire ne change pas le nombre de racines. Le polynôme le plus simple qui change de nombre de racines en fonction du paramètre μ est le polynôme quadratique $f(x) = \mu - x^2$, comme celui de la figure suivante FIG(2.1).

Considérons le système (2.1). Si on peut réécrire la fonction f sous la forme :

$$f(x, \mu) = \mu - x^2. \quad (2.2)$$

On appelle la fonction (2.2) la forme normale de la bifurcation nœud-col.

Nous allons étudier le comportement de cette équation selon le paramètre de contrôle μ :

$$f(x, \mu) = 0 \iff \mu - x^2 = 0$$

$$\mu - x^2 = 0 \iff x^2 = \mu.$$

- Si $\mu < 0$, l'équation $f(x, \mu) = 0$ n'admet pas un solution. Alors n'existe pas un point d'équilibre.

- Si $\mu > 0$ on a :

$$x^2 = \mu \iff \begin{cases} x_e = \sqrt{\mu}, \\ x_e = -\sqrt{\mu}. \end{cases}$$

Par conséquent l'équation (2.2) admet deux solution alors il existe deux point d'équilibre.

Leur stabilité est déterminée par :

$$\frac{df(x, \mu)}{dx} = -2x \text{ alors } \frac{df(x, \mu)}{dx} \Big|_{x_e=\sqrt{\mu}} = -2\sqrt{\mu} < 0 \text{ et } \frac{df(x, \mu)}{dx} \Big|_{x_e=-\sqrt{\mu}} = 2\sqrt{\mu} > 0.$$

Par suite direct les signes $\frac{df(x, \mu)}{dx} \Big|_{x_e}$, on voit que :

$$\begin{cases} x_e = \sqrt{\mu} \text{ est stable,} \\ x_e = -\sqrt{\mu} \text{ est instable.} \end{cases}$$

- Si $\mu = 0$ le seul point d'équilibre est $x_e = 0$ par intégration de (2.2) on obtient : [1]

$$x(t) = \frac{1}{t + \frac{1}{x_0}}.$$

Alors le point $x_e = 0$ est semi-stable. (Stable si $x_0 > 0$ et instable si $x_0 < 0$).

Remarque 2.4.1 [8] Même étude faite lorsque $f(x, \mu) = -\mu - x^2$, $f(x, \mu) = +\mu + x^2$ et $f(x, \mu) = -\mu + x^2$.

Mais dans tous les cas, il y a une transition à $\mu = 0$ entre existence d'aucun point d'équilibre et de deux points d'équilibre dont un est stable et l'autre instable.

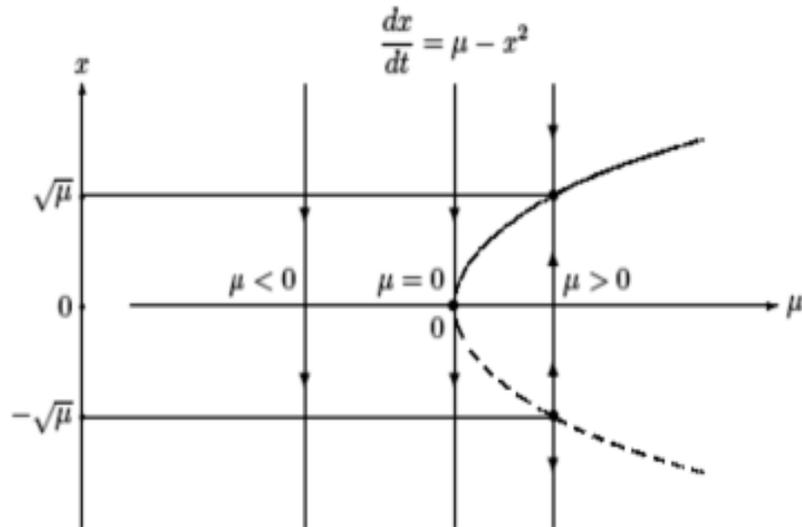


FIG. 2.1 – Diagramme de bifurcation nœud-col

b- Bifurcation transcritique[8]

Si f est contrainte à ne pas avoir de terme constant, le développement limité mène à la forme normale d'une bifurcation transcritique, qui est la dernière bifurcation stationnaire dans une dimension :

$$\dot{x} = \mu x - x^2. \tag{2.3}$$

Système dont l'analyse est aisé :

$$f(x, \mu) = 0 \iff \mu x - x^2 = 0 \iff x(\mu - x) = 0$$

$$\begin{cases} x_e = 0, \\ x_e = \mu. \end{cases}$$

L'équation $f(x, \mu) = 0$ admet deux points d'équilibre.

Nous étudions la stabilité de ces points d'équilibre

$$\frac{df(x, \mu)}{dx} = \mu - 2x \text{ donc } \frac{df(x, \mu)}{dx} \Big|_{x_e=0} = \mu \text{ et } \frac{df(x, \mu)}{dx} \Big|_{x_e=\mu} = -\mu.$$

Donc : le point d'équilibre $x_e = 0$ stable pour $\mu < 0$, instable pour $\mu > 0$ et $x_e = \mu$ est stable pour $\mu > 0$, instable pour $\mu < 0$.

- Si $\mu = 0$ le seul point d'équilibre est $x_e = 0$ par intégration de (2.3) on obtient :

$$x(t) = \frac{1}{t + \frac{1}{x_0}}.$$

Alors le point $x_e = 0$ est semi-stable. (Stable si $x_0 > 0$ et instable si $x_0 < 0$).

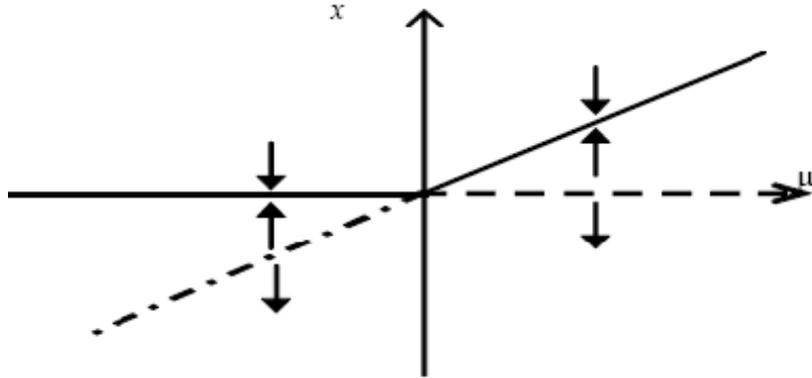


FIG. 2.2 – Diagramme de bifurcation transcritique.

c- Bifurcations fourches (pitchfork)[1]

Au point de bifurcation fourche la stabilité d'un point d'équilibre change au profit de la naissance d'une paire de points d'équilibre.

L'équation générique d'une bifurcation fourche (sur-critique) est :

$$f(x, \mu) = \mu x - x^3. \quad (2.4)$$

Et pour sous-critique est :

$$f(x, \mu) = \mu x + x^3.$$

Nous calculons ses points d'équilibre

- Dans le cas d'une bifurcation fourche sur-critique on a $f(x, \mu) = 0$

$$\mu x - x^3 = 0 \iff x(\mu - x^2) = 0$$

$$\iff \left\{ \begin{array}{l} x = 0 \\ \text{ou} \\ \mu - x^2 = 0 \end{array} \right. \iff \left\{ \begin{array}{l} x = 0, \\ \text{ou} \\ x^2 = \mu. \end{array} \right.$$

Donc : Si $\mu < 0$, on a un seul point d'équilibre $x_e = 0$.

Si $\mu > 0$, on a : trois point d'équilibre :

$$\begin{cases} x_e = 0, \\ x_e = \pm\sqrt{\mu}. \end{cases}$$

Nous étudions la stabilité de ces points d'équilibre :

$$\frac{df(x, \mu)}{dx} = \mu - 3x^2 \text{ alors } \begin{cases} \frac{df(x, \mu)}{dx} \Big|_{x_e=0} = \mu, \\ \frac{df(x, \mu)}{dx} \Big|_{x_e=\pm\sqrt{\mu}} = -2\mu. \end{cases}$$

Par suite :

- Si $\mu < 0$ on a le seul point d'équilibre $x_e = 0$ est stable.
- Si $\mu > 0$ on a le point d'équilibre :

$$\begin{cases} x_e = 0 \text{ est instable,} \\ x_e = \pm\sqrt{\mu} \text{ est stable.} \end{cases}$$

Si $\mu = 0$ le seul point d'équilibre est $x_e = 0$ par intégration de (2.4) on obtient :

$$x(t) = \pm \frac{1}{\sqrt{2t + \frac{1}{x_0^2}}}.$$

Alors le point $x_e = 0$ est semi-stable.

Faisons le même calcul dans le cas d'une bifurcation fourche sous critique on a $f(x, \mu) = 0$

$$\mu x + x^3 = 0 \iff x(\mu + x^2) = 0$$

$$\begin{cases} x = 0, \\ \text{ou} \\ x^2 = -\mu. \end{cases}$$

- Si $\mu > 0$ on a un seul point d'équilibre $x_e = 0$.

- Si $\mu < 0$ on a trois point d'équilibre :

$$\begin{cases} x_e = 0, \\ x_e = \pm\sqrt{-\mu}. \end{cases}$$

Nous étudions la stabilité de ces points d'équilibre :

$$\frac{df(x, \mu)}{dx} = \mu + 3x^2 \text{ alors } \begin{cases} \frac{df(x, \mu)}{dx} \Big|_{x_e=0} = \mu, \\ \frac{df(x, \mu)}{dx} \Big|_{x_e=\pm\sqrt{-\mu}} = -2\mu. \end{cases}$$

Donc :

- Si $\mu > 0$, on a le seul point d'équilibre $x_e = 0$ est instable.
- Si $\mu < 0$, on a les points d'équilibre :

$$\begin{cases} x_e = 0 \text{ est stable,} \\ x_e = \pm\sqrt{-\mu} \text{ est instable.} \end{cases}$$

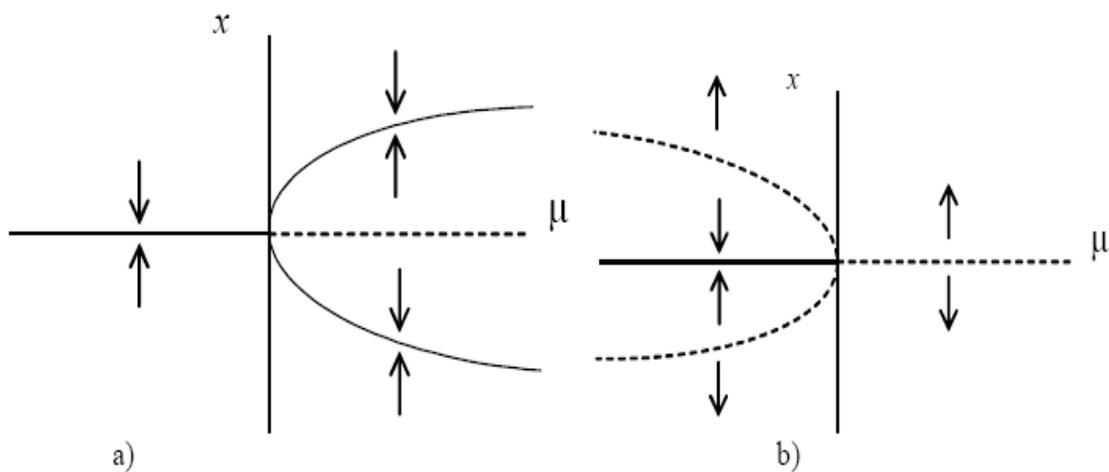


FIG. 2.3 – Diagramme de bifurcation fourche a)- sur-critique. b)- sou-critique.

d- Bifurcation de Hopf[8]

La forme de la bifurcation s'écrit dans le plan complexe :

$$\frac{dZ}{dt} = \mu Z - |Z|^2 Z.$$

En posant $\mu = \mu_1 + i\mu_2$ et $Z = X \exp(i\theta)$, on obtient alors :

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = \mu_1 x - x^3, \\ \frac{d\theta}{dt} = \mu_2. \end{cases}$$

Nous obtenons donc une bifurcation fourche pour l'amplitude tandis que la phase tourne à la vitesse μ_2 . La solution est donc périodique et les trajectoires décrivent une spirale attirée vers une courbe asymptotique nommée : cycle limite. Naturellement la bifurcation de Hopf peut être également sous critique si le coefficient du terme $|Z|^2 Z$ est de signe positif, il faut alors un terme négatif en $|Z|^4 Z$ pour obtenir une saturation non-linéaire.

On va s'intéresser maintenant à l'étape qui suit la régularité temporelle. Selon Landau la bifurcation d'un point d'un comportement stationnaire (point d'équilibre) vers un comportement périodique (cycle limite) puis bipériodique (un tore) constituent les premières étapes de la transition vers la turbulence, cette dernière présente un phénomène très intéressant qu'on appelle le chaos qui est depuis longtemps synonyme de désordre, de confusion et s'oppose à l'ordre et à la méthode. De nombreux chercheurs en sciences se sont intéressés aux mouvements dits chaotiques.

Ils ont confirmé que, contrairement à ce que la pensée déterministe, martèle depuis des lustres, il se pourrait qu'il y ait de l'équilibre dans le déséquilibre, de l'organisation dans la désorganisation.

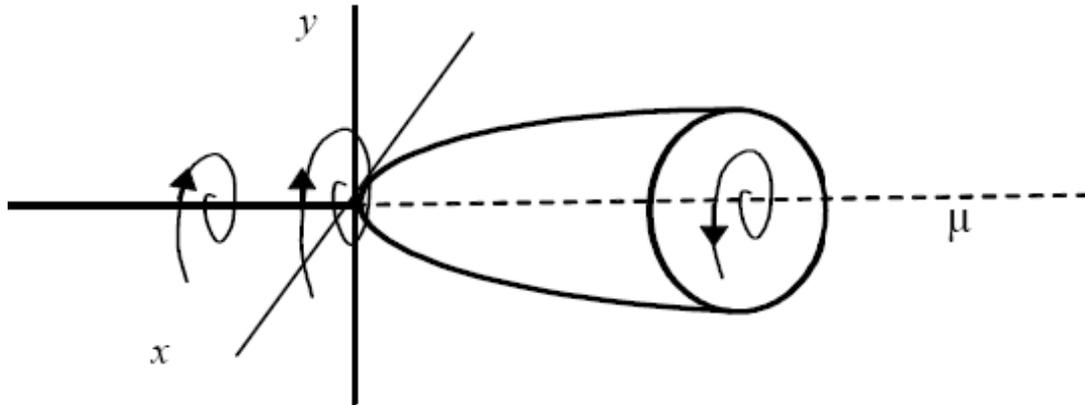


FIG. 2.4 – Diagramme de bifurcation Hopf

2.4.2 Bifurcations globales

Ces types de bifurcations correspondent à des collisions de deux variétés et elles ne font pas forcément intervenir le voisinage de la solution.

Ici, les linéarisations locales autour de la solution ne seront donc d'aucune aide. C'est pour cela que ces bifurcations sont appelées "globales", et deux types sont : orbites hétéroclines et orbites homoclines.

a- Orbites hétéroclines

Ces bifurcations résultent de la collision de variétés stables et instables de deux selles séparées. C'est en fait un phénomène assez rare.

b- Orbites homoclines

Ce sont les variétés stables et instables d'une même selle qui entrent en collision selon le signe d'une certaine quantité.[5]

Chapitre 3

Application : Bifurcation de Hopf

3.1 Introduction

Dans ce chapitre, on présente un nouveau système chaotique autonome tridimensionnel en modifiant un système optique hybride [2] ; une non-linéarité quadratique unique (x^2) est remplacée par une non-linéarité cubique unique (x^3). Le nouveau système peut afficher simultanément deux attracteurs chaotiques à un défilement ou un attracteur chaotique à un défilement.

3.2 Le modèle

3.2.1 Système d'origine

On considère le système de trois équations du premier ordre :

$$\begin{cases} \dot{x} = y, \\ \dot{y} = z, \\ \dot{z} = -\alpha z - y + f(x). \end{cases} \quad (3.1)$$

Où $f(x)$ est la fonction logistique donnée par :

$$f(x) = \beta x(1 - x).$$

Avec α et β sont des nombres réels positifs. Le système (3.1) n'a que deux points d'équilibre $E_0 = (0, 0, 0)$ et $E_+ = (1, 0, 0)$.

3.2.2 Système modifié

Le système (3.1) est modifié par modèle comme suit :

$$\begin{cases} \dot{x} = y, \\ \dot{y} = z, \\ \dot{z} = -\alpha z - y + g(x). \end{cases} \quad (3.2)$$

Où on remplace la fonction logistique quadratique f par une fonction cubique g :

$$g(x) = \beta x(1 - x^2).$$

Stabilité des équilibres

Le nouveau système (3.2) a trois points d'équilibre que l'on trouve en comparant les côtés droits de (3.2) à zéro et qui sont donnés comme suite :

$$E_0 = (0, 0, 0), \quad E_+ = (1, 0, 0) \quad \text{et} \quad E_- = (-1, 0, 0).$$

La matrice jacobienne à l'équilibre $E(x_e, y_e, z_e)$ est :

$$J_E = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \beta(1 - 3x_e^2) & -1 & -\alpha \end{pmatrix}.$$

Son polynôme caractéristique est :

$$P_E(\lambda) = \lambda^3 + \alpha\lambda^2 + \lambda - \beta(1 - 3x_e^2).$$

Pour étudier les conditions de stabilité des points d'équilibre, on applique le critère de Routh-Hurwitz, dans lequel toutes les parties réelles des valeurs propres sont négatives si et seulement si la condition suivante est vérifiée :

$$a_1 > 0, \quad a_3 > 0, \quad \text{et} \quad a_1 a_2 - a_3 > 0. \quad (3.3)$$

Où a_1, a_2 , et a_3 sont définis tels que :

$$P_E(\lambda) = \lambda^3 + a_1\lambda^2 + a_2\lambda + a_3.$$

Condition de stabilité de E_0 Le polynôme caractéristique de J_{E_0} est :

$$P_{E_0}(\lambda) = \lambda^3 + \alpha\lambda^2 + \lambda - \beta.$$

En appliquant le critère de Routh-Hurwitz (3.3), on trouve que E_0 est instable pour chaque valeur positive de α et β .

Condition de stabilité de E_{\pm} Le polynôme caractéristique de $J_{E_{\pm}}$ est :

$$P_{E_{\pm}}(\lambda) = \lambda^3 + \alpha\lambda^2 + \lambda + 2\beta. \quad (3.4)$$

En appliquant le critère de Routh-Hurwitz (3.3), on trouve que E_+ et E_- sont localement asymptotiquement stables pour toute valeur positive de α et β satisfaisant la condition $\alpha > 2\beta$.

3.3 Analyse de bifurcation de Hopf

Cette section décrira la bifurcation de Hopf du système β -paramétrique. Puisque le point d'équilibre E_0 est instable pour chaque valeur positive de α et β , mais que E_+ , E_- changent les propriétés de stabilité à $\alpha = 2\beta$, on étudie la bifurcation de Hopf à partir de E_{\pm} .

Proposition 3.3.1 *Le système (3.2) subit une bifurcation de Hopf supercritique à E_{\pm} pour une valeur positive donnée de α , lorsque le paramètre β croise la valeur critique $\beta_c = \frac{\alpha}{2}$.*

Preuve. On traduit les points d'équilibre E_{\pm} l'origine $(0, 0, 0)$. On obtient le système linéaire :

$$\dot{X} = J_{E_{\pm}} X.$$

Où

$$X = \begin{pmatrix} x \pm 1 \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad J_{E_{\pm}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -2\beta & -1 & -\alpha \end{pmatrix}.$$

On souhaite déterminer les conditions suffisantes pour que $J_{E_{\pm}}$ ait une valeur propre réelle négative $\lambda_0(\beta)$ et deux valeurs propres combinées complexes $\lambda_{\pm}(\beta) = \gamma(\beta) \pm i\omega(\beta)$, avec la partie réelle $\gamma(\beta)$ remplit les conditions :

$$\gamma(\beta_c) = 0 \quad \text{et} \quad \frac{d\gamma}{d\beta} \Big|_{\beta=\beta_c} \neq 0.$$

On écrit l'équation caractéristique comme suit :

$$(\lambda - \lambda_0)(\lambda - \lambda_+)(\lambda - \lambda_-) = 0.$$

Alors

$$\lambda^3 - (2\gamma + \lambda_0)\lambda^2 + (|\lambda_+|^2 + 2\gamma\lambda_0)\lambda - |\lambda_+|^2\lambda_0 = 0. \quad (3.5)$$

De (3.4) et (3.5), on obtient :

$$\begin{cases} 2\gamma + \lambda_0 = -\alpha, \\ |\lambda_+|^2 + 2\gamma\lambda_0 = 1, \\ |\lambda_+|^2 \lambda_0 = -2\beta. \end{cases} \quad (3.6)$$

Alors $\lambda_0 = -(\alpha + 2\gamma) < 0$. La matrice jacobienne $J_{E_{\pm}}$ a deux valeurs propres imaginaires pures si et seulement si $a_1 a_2 = a_3$, donc, $\beta = \frac{\alpha}{2}$ (dans ce cas, on a $\lambda_0 = -\alpha$, $\lambda_+ = i$, et $\lambda_- = -i$).

Donc, le point critique de la bifurcation de Hopf β_c est $\beta_c = \frac{\alpha}{2}$; les deux points d'équilibre E_{\pm} changent leurs propriétés de stabilité en β_c . À partir de (3.6), on obtient :

$$2\beta - 2\gamma - \alpha - 2\gamma(2\gamma + \alpha)^2 = 0.$$

Différencions par rapport à β , on obtient :

$$\frac{d\gamma}{d\beta} = \frac{1}{(2\gamma + \alpha)^2 + 4\gamma(2\gamma + \alpha) + 1}.$$

Alors

$$\frac{d\gamma}{d\beta} \Big|_{\beta=\beta_c} = \frac{1}{\alpha^2 + 1} \neq 0.$$

Il s'ensuit que le système (3.2) satisfait les conditions du théorème de bifurcation de Hopf à E_{\pm} . ■

3.4 Résultats numériques

Dans cette section, les comportements dynamiques du système (3.2) sont étudiés numériquement, où α est fixé à $\alpha = 0.5$ et β est considéré comme un paramètre de contrôle; un quatrième algorithme de Runge-kutta est utilisé pour résoudre le système.

3.4.1 Période doublant le chemin du chaos

Pour dessiner le diagramme de bifurcation, on utilise une section de Poincaré appropriée

Σ définie par :

$$\Sigma = \{(y, z) \in \mathbb{R}^2 / x = 1\}.$$

Comme représenté sur la figure (3.1).

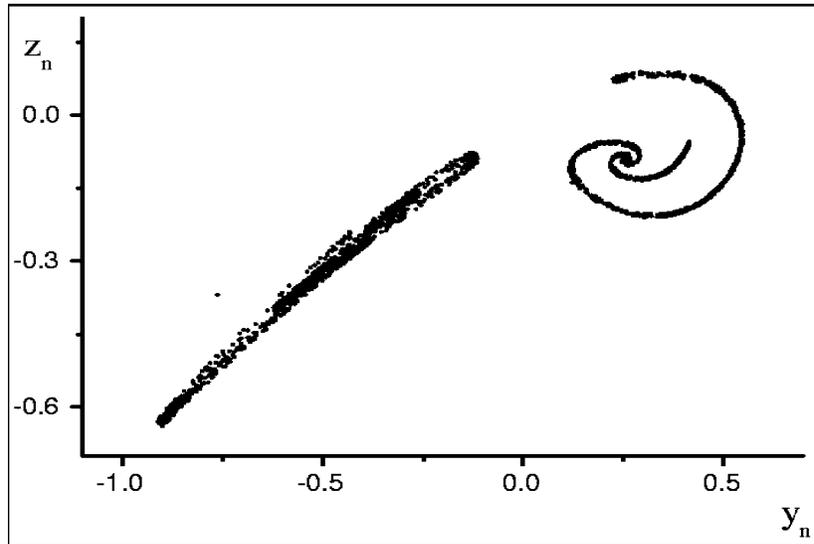


FIG. 3.1 – Section de Poincaré Σ pour $\alpha = 0.5$ et $\beta = 0.65$

Les points résultants $\{y_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ sont tracés en fonction du paramètre souhaité β ; voir la figure(3.2).

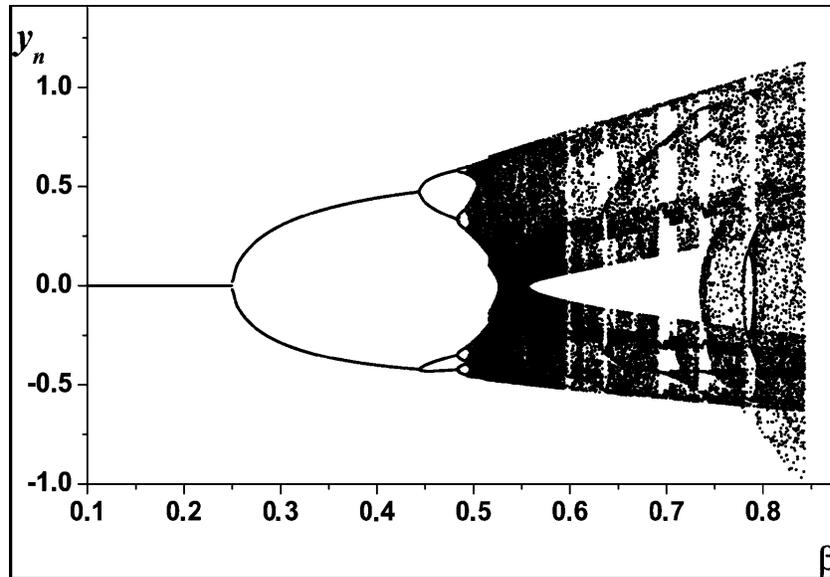


FIG. 3.2 – Diagramme de bifurcation y_n en fonction de β avec $\alpha = 0.5$

L'espace de phase du système (3.2) pour $\alpha = 0.5$ est représenté sur les (3.3), (3.4) en utilisant les conditions initiales $(x_0, y_0, z_0) = (1.5, 0, 0)$, et $(\tilde{x}_0, \tilde{y}_0, \tilde{z}_0) = (-1.5, 0, 0)$,

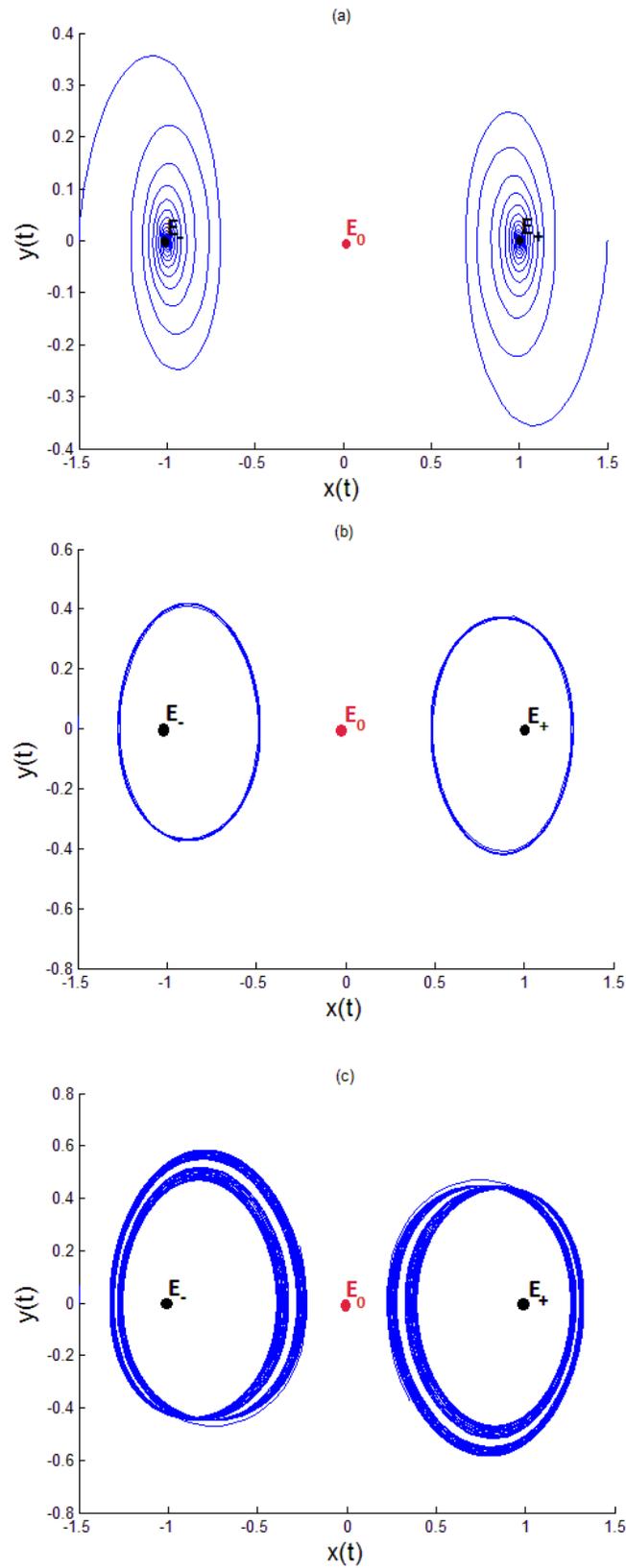


FIG. 3.3 – Espace de phase du système (3.2) pour $\alpha = 0.5$, (a) en $\beta = 0.2$ points d'équilibre E_{\pm} asymptotiquement stables, (b) à $\beta = 0.35$ cycle limite 1-période, (c) à $\beta = 0.45$ cycle limite 2-période

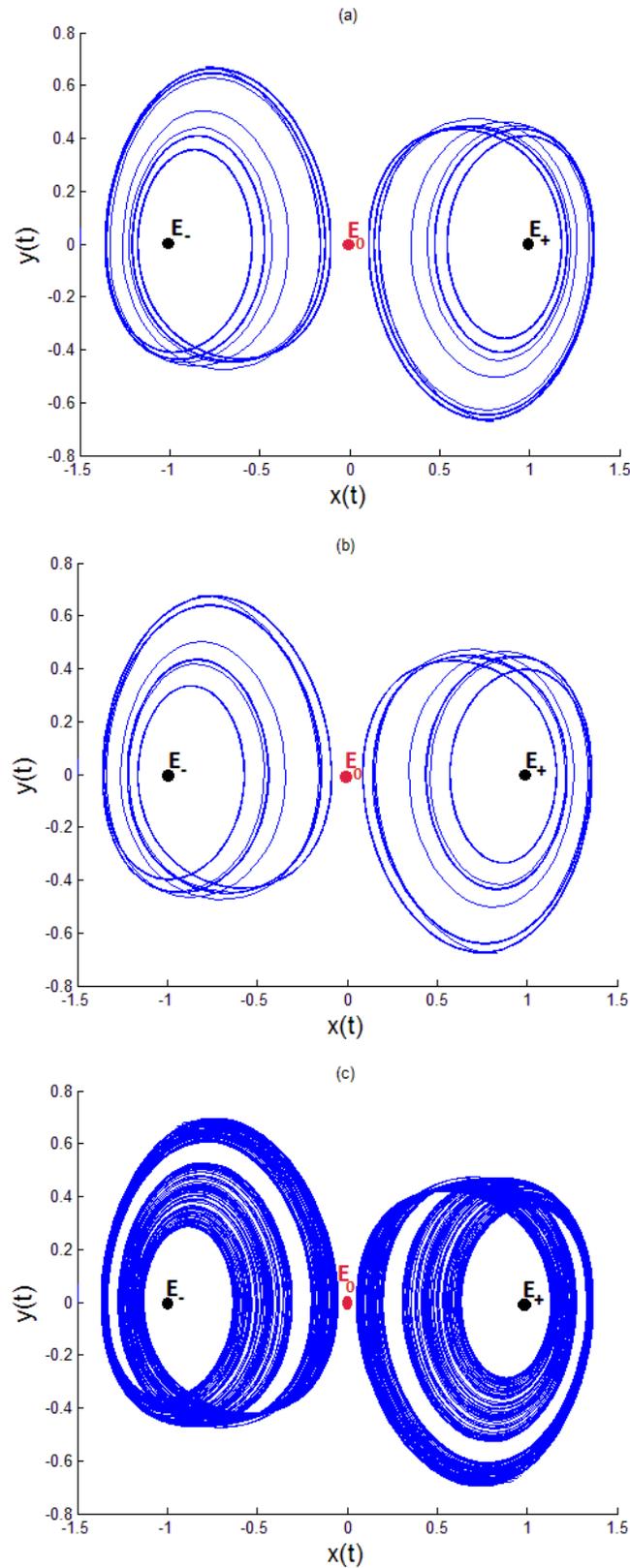


FIG. 3.4 – Espace de phase du système (3.2) pour $\alpha = 0.5$, (a) à $\beta = 0.485$ cycle limite sur 4 périodes, (b) $\beta = 0.49$, (c) à $\beta = 0.5$ min. Il existe des attracteurs chaotiques à 1 défilement

et sur la figure (3.5) en utilisant les conditions initiales $(x_0, y_0, z_0) = (1.5, 0, 0)$.

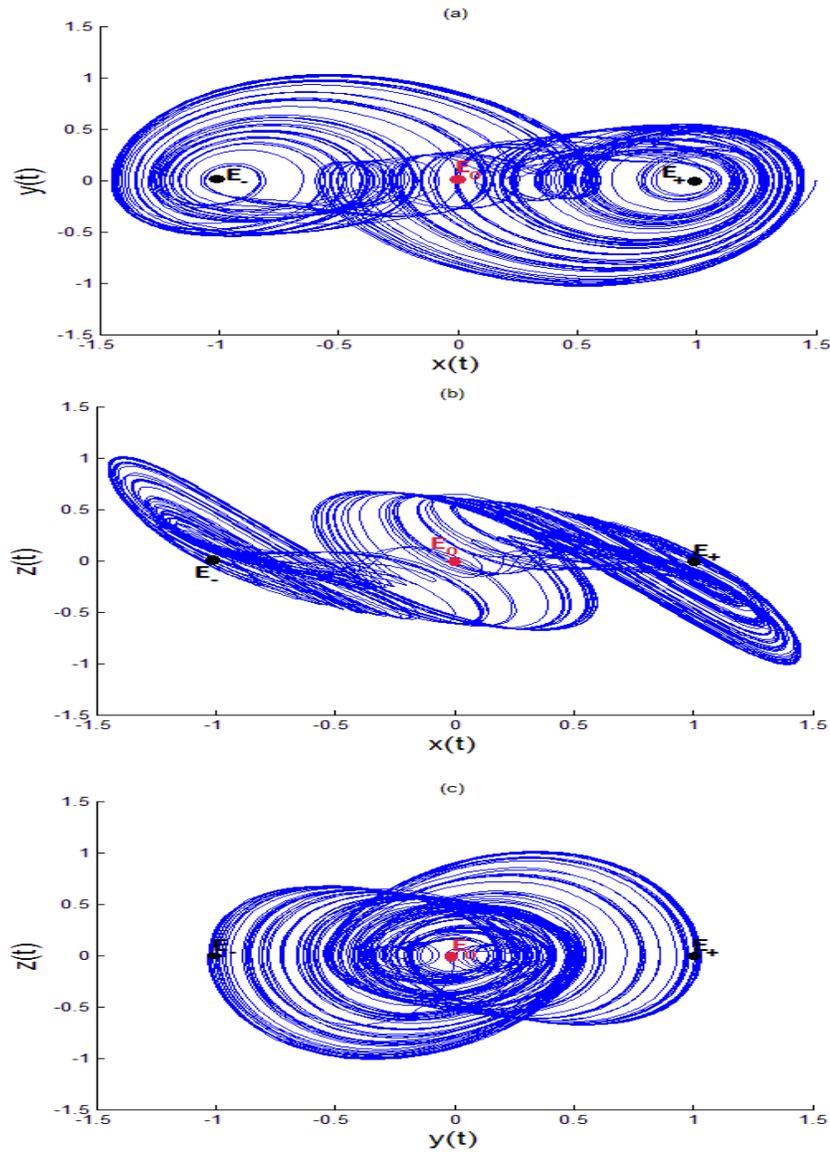


FIG. 3.5 – Attracteur chaotique à deux spirales pour $\alpha = 0.5$ et $\beta = 0.65$, (a) projection dans le plan $x - y$, (b) projection dans le plan $x - z$, (c) projection dans le plan $y - z$

Pour $\beta < 0.25$, la trajectoire converge vers les points d'équilibre E_{\pm} localement asymptotiquement stables; voir la Fig.3a.

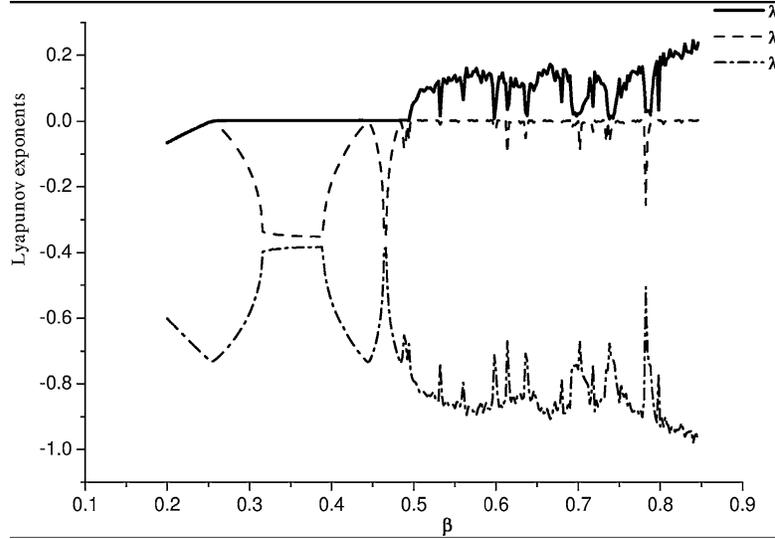
Lorsque $\beta > 0.25$, on trouve les deux cycles limites qui ont émergé des deux points d'équilibre E_{\pm} par une bifurcation de Hopf, comme décrit ci-dessus; voir la Fig.3b. Avec une

dissipation décroissante (augmentation de β), on observe une succession de bifurcations supplémentaires, où la période double. À $\beta \approx 0.44$, les cycles limites d'une période deviennent instables et un cycle limite de deux-périodes apparaît ; voir la Fig.3c, suivie d'une bifurcation à quatre cycles limites à $\beta \approx 0.48$; voir la Fig.4a. Ce processus de bifurcation se poursuit jusqu'à une valeur critique de $\beta \approx 0.5$, où deux attracteurs chaotiques apparaissent voir Fig.4c.

Lorsque $\beta \approx 0.6$, les deux attracteurs chaotiques se joignent et donnent un attracteur chaotique à 2-rouleaux ; voir Fig.5a, b, c. On peut observer quelques autres fenêtres périodiques à $\beta \approx 0.68$ et $\beta \approx 0.72$.

3.4.2 Exposants de Lyapunov et dimension de Lyapunov

Les exposants de Lyapunov mesurent les vitesses exponentielles de divergence ou de convergence des trajectoires proches dans l'espace des phases. $\lambda > 0$ est lié à la nature croissante de différentes directions dans l'espace de phase, $\lambda < 0$ est lié à la nature contractante en expansion de différentes directions dans l'espace de phase, et $\lambda = 0$ à la nature critique entre la nature contractante en expansion de différentes directions dans l'espace de phase. L'algorithme efficace donné par Wolf et al. est utilisé pour calculer les exposants de Lyapunov λ_1, λ_2 , et λ_3 du système (3.2). Les résultats sont représentés sur la (3.6) en fonction du paramètre β .


 FIG. 3.6 – Exposants de Lyapunov λ_1 , λ_2 et λ_3 , en fonction de β , pour $\alpha = 0.5$

Lorsque $\beta < 0.25$, les exposants de Lyapunov satisfont à $\lambda_1 < 0$, $\lambda_2 < 0$, $\lambda_3 < 0$, il existe donc un régime stationnaire.

Pour $0.25 < \beta < 0.5$ ils satisfont $\lambda_1 \approx 0$, $\lambda_2 < 0$, $\lambda_3 < 0$, puis le système (3.2) subit des orbites périodiques. Pour la plupart des valeurs de $\beta \geq 0.5$, ils satisfont à $\lambda_1 > 0$, $\lambda_2 \approx 0$, $\lambda_3 < 0$, alors le système (3.2) est chaotique. Selon Kaplan et Yorke, la dimension de Lyapunov de l'attracteur chaotique est définie comme suit :

$$D_L = j + \frac{\sum_{i=1}^{i=j} \lambda_i}{|\lambda_{j+1}|}. \quad (3.7)$$

Où $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \lambda_3 \geq \dots$ sont les exposants de Lyapunov, j est le plus grand entier tel que $\sum_{i=1}^{i=j} \lambda_i \geq 0$, et $\sum_{i=1}^{i=j+1} \lambda_i < 0$.

Lorsque $\alpha = 0.5$ et $\beta = 0.65$, les trois exposants de Lyapunov sont $\lambda_1 \approx 0.13$, $\lambda_2 \approx 0.00$, $\lambda_3 \approx -0.87$.

3.5 Conclusion

Dans ce chapitre, on a donné un exemple fondamental sur type de bifurcation de Hopf et on a fait des études sur ce type (points d'équilibres et leurs stabilités, diagramme de bifurcation associé à une section de Poincaré et au spectre des exposants de Lyapunov).

Conclusion

Dans ce mémoire, on a présenté une étude sur la théorie de bifurcation et ses applications, pour atteindre l'objectif de cette étude on a divisé notre travail en trois chapitres :

Dans le premier chapitre on a présenté les différentes définitions et les critères de stabilité pour les points d'équilibre d'un système dynamique, ensuite on a étudié les cycles limites.

Le deuxième chapitre est basé sur la théorie de la bifurcation, où on a considéré deux types de bifurcation qui sont les bifurcations locales et bifurcations globales et leurs diagrammes.

Le mémoire se termine par à un exemple détaillé sur les bifurcations de Hopf.

Bibliographie

- [1] Abd Elouahab, Mohamed Salah. (02/03/2009). Les systèmes Chaotiques à dérivées Fractionnaires. Mémoire Magistère en Mathématiques Université Mentouri-Constantine.
- [2] Abdelouahab, Mohammed-Salah et Hamri, Nasreddine. (17/03/2011). A New Chaotic Attractor Form Hybrid Optical Bistable System.
- [3] Berrehail, Chemseddine. (2014). Cycles limites de trois classes d'équations différentielles ordinaires perturbées. Doctorat Université Badji Mokhtar-Annaba.
- [4] Charif, Manel. (06/2018). Systèmes dynamiques linéaires et non linéaires. Mémoire Master en Mathématiques Université Mohamed Khider-Biskra.
- [5] Gasri, Ahlem. (12/07/2018) Chaos et synchronisation (généralisé) dans les systèmes dynamiques. Doctorat en sciences de Mathématiques Université Freres Mentouri-Constantine-1.
- [6] Lamnabhi-Lagarrigue, Françoise. (1994). Analyse des systèmes non linéaires. Hermès, Paris.
- [7] Mammeri, Mohammed. (16/06/2011). Sur la stabilité Structurale des Difféomorphismes Quadratiques en Dimension 2. Mémoire Magistère Université kasdi merbah-ouargla.

- [8] Menacer, Tidjani. (26/05/2014). Synchronisation des Systèmes Dynamiques Chaotiques à Dérivées Fractionnaires. Doctorat en Sciences en Mathématiques Université-Constantine1.

- [9] Soltani, Siham. (2017). Cours Equations différentielles. Licence en Mathématiques Université Mohamed Khider-Biskra.

- [10] Wiggins, Stephen. (2003). Introduction to Applied Nonlinear Dynamical Systems and Chaos.Vol. 2. Springer Science et Business Media.

- [11] Zaamoune, Faiza. (05/2016). Bifurcations de codimension 1 et 2 dans les systèmes dynamiques discrets. Université Mohamed Khider-Biskra.

Annexe A : Logiciel Matlab

Code Matlab

#Résultats numériques

Fig. 3.3 et Fig. 3.4

```
hold on

Alpha=0.5;beta=0.2;

Med=@(t,x) [x(2);x(3);beta*x(1)*(1-(x(1))^2)-Alpha*x(3)-x(2)];

options = odeset('RelTol',1e-4,'AbsTol',1e-4);

[t,xa]=ode45(Med,[9000 10000],[-1.5,0,0],options);

plot(xa(:,1),xa(:,2))

[t,xa]=ode45(Med,[9000 10000],[1.5,0,0],options);

plot(xa(:,1),xa(:,2))

title('a')

fontsize=15;

xlabel('x(t)','FontSize',fontsize);

ylabel('y(t)','FontSize',fontsize);

zlabel('z(t)','FontSize',fontsize);
```

Fig. 3.5

```
hold on

Alpha=0.5;beta=0.65;

Med=@(t,x) [x(2);x(3);beta*x(1)*(1-(x(1))^2)-Alpha*x(3)-x(2)];
```

```
options = odeset('RelTol',1e-4,'AbsTol',1e-4);
[t,xa]=ode45(Med,[9000 10000],[1.5,0,0],options);
plot(xa(:,1),xa(:,3))
title('a')
fontsize=15;
xlabel('x(t)', 'FontSize',fontsize);
ylabel('y(t)', 'FontSize',fontsize);
zlabel('z(t)', 'FontSize',fontsize);
```

Annexe B : Abréviations et Notations

Les différentes abréviations et notations utilisées tout au long de ce mémoire sont expliquées ci-dessous.

\mathbb{R}^n $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \dots \times \mathbb{R}$ n fois.

\mathbb{R}^r $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \dots \times \mathbb{R}$ r fois.

\mathbb{N} L'ensemble des nombres naturels.

$\dot{x}(t) = \frac{dx}{dt}$ Dérivée temporelle.

cos Fonctions cosinus.

sin Fonctions sinus.

\forall Pour tout.

\exists Il existe.

$\|\cdot\|$ Norme sur \mathbb{R}^n .

\implies Implique.

lim La limite.

V Fonction de Lyapunov.

U Ensemble ouverte.

exp Fonction exponentielle.

J_E La matrice jacobienne de E .

$|\cdot|$ Valeur absolue ou module.