République Algérienne Démocratique et Populaire

Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

UNIVERSITÉ MOHAMED KHIDER, BISKRA

FACULTÉ des SCIENCES EXACTES et des SCIENCES de la NATURE et de la VIE

DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES

Mémoire présenté en vue de l'obtention du Diplôme **:**

MASTER en Mathématiques

Option : **Analyse**

Par

Khelifa Soumia

Titre

Solutions d'ondes progressives pour des systèmes de réaction-diffusion à retard avec monotonie partielle

Membres du Comité d'Examen :

Dr.	**Rahmani Nacer**	UMKB	Président
Dr.	**Guidad Derradji**	UMKB	Encadreur
Dr.	**Taberha warda**	UMKB	Examinateur

Juin 2019

Je dédie se travail

A mes chers parents,

A mes chers fréres,

A mes chéres soeurs,

A mes oncles,

A tous ceux qui me sont chers,

A mes chers amis.

*** Merci papa,merci maman***

KHELIFA SOUMIA

REMERCIEMENTS

avant tout ,Je remercie ALLAH de m'avoir assisté pour realises ce travail.

*Je tiens à remercier, après Dieu, mon encadreur **Guidad Derradji** de m'avoir proposé ce sujet, mais aussi pour sa disponibilité , son écoute et son aide, il m'a beaucoup apporté, je lui en suis infiniment reconnaissante.*

*J'adresse mes sincères remerciements à **Rahmani Nacer**, Maitre de conférences à l'Université de Biskra, pour l'intérêt qu'il a porté à mon travail en me faisant l'honneur de présider le jury de ma soutenance.*

*Je tiens à remercier aussi **Taberha warda** , Maitre assistant à l'Université de Biskra pour m'avoir fait l'honneur d'accepter d'être examinateur de ce travail.*

Enfin je remercie toute personne qui a contribué de prés ou de loin à la réalisation de ce travail

Table des matières

Introduction

On considère le système avec les termes de réaction et quasimonotone, c'est - à - dire les systèmes de la forme

$$\frac{\partial}{\partial t}u(x,t) = D\frac{\partial^2}{\partial x^2}u(x,t) + f(u_t(x)), \quad t > 0, \ x \in \mathbb{R} \tag{1}$$

" équation aux dérivées partielles parabolique "

où $u \in \mathbb{R}^n$, $D = diag(d_1, d_2, ..., d_n)$ est une matrice diagonale définie positive , avec $d_i > 0, \ i = 1, 2, ..., n$, $f : C([-\tau, 0], \mathbb{R}^n) \longrightarrow \mathbb{R}^n$ continue et verifie les conditions : $f(0) = 0 = f(K)$ et $f(u) \neq 0$ pour $u \in]0, K[$, $u_t(x) \in C([-\tau, 0], \mathbb{R}^n)$ et définie par $u_t(x)(s) = u(t+s, x)$ pour tout $s \in [-\tau, 0]\,, t > 0$, $x \in \mathbb{R}$

avec $f : C([-\tau, 0], \mathbb{R}^n) \longrightarrow \mathbb{R}^n$ satisfaisant la quasimonotonicite suivant :

(PQM) il existe 2 constantes positives $\beta_1 > 0$, $\beta_2 > 0$ telles que

$$\begin{cases} f_{1c}(\phi_1, \psi_1) - f_{1c}(\phi_2, \psi_1) + \beta_1 [\phi_1(0) - \phi_2(0)] \geq 0, \\ f_{1c}(\phi_1, \psi_1) - f_{1c}(\phi_1, \psi_2) \leq 0, \\ f_{2c}(\phi_1, \psi_1) - f_{2c}(\phi_2, \psi_2) + \beta_2 [\psi_1(0) - \psi_2(0)] \geq 0, \end{cases}$$

où

$$\phi_1, \phi_2, \psi_1 \text{ et } \psi_2 \in C([-\tau, 0], \mathbb{R})$$

$$avec$$

$$0 \leq \phi_2(s) \leq \phi_1(s) \leq k_1, 0 \leq \psi_2(s) \leq \psi_1(s) \leq k_2, s \in [-\tau, 0].$$

(PQM*) il existe 2 constantes positives $\beta_1 > 0$ et $\beta_2 > 0$ telles que

$$\begin{cases} f_{1c}(\phi_1, \psi_1) - f_{1c}(\phi_2, \psi_1) + \beta_1 \left[\phi_1(0) - \phi_2(0)\right] \geq 0 \\ f_{1c}(\phi_1, \psi_1) - f_{1c}(\phi_1, \psi_2) \leq 0 \\ f_{2c}(\phi_1, \psi_1) - f_{2c}(\phi_2, \psi_2) + \beta_2 \left[\psi_1(0) - \psi_1(0)\right] \geq 0 \\ o\grave{u} \\ \phi_1, \phi_2, \psi_1 \text{ et } \psi_2 \in C(\left[-\tau, 0\right], \mathbb{R}). \end{cases}$$

avec

i) $0 \leq \phi_2(s) \leq \phi_1(s) \leq k_1, 0 \leq \psi_2(s) \leq \psi_1(s) \leq k_2, s \in \left[-\tau, 0\right].$

ii) $e^{\beta_1 s}\left[\phi_1(s) - \phi_2(s)\right]$ et $e^{\beta_2 s}\left[\psi_1(s) - \psi_2(s)\right]$ est non décroissante si $s \in \left[-\tau, 0\right].$

Chapitre 1

Outils Mathématiques

Dans ce chapiter nous proposons quelques définition et propriètés de bases utiles pour la suite de ce mémoire (les équations aux dérivées partielles , théorèmes du point fixes , méthode sous et sur-solution , ...) .

1.1 Les équations aux dérivées partielles

Définition 1.1.1 *(la dérivée partielle)*

la dérivée partielle de la fonction f par rapport à x en (x, y) est la dérivées de la fonction d'une seule variable réelle

$$x \longmapsto f(x, y) \qquad\qquad \text{où } y \text{ est constant}$$

Elle est notée

$$\tfrac{\partial f(x,y)}{\partial x} \quad \text{ou} \quad \tfrac{\partial f}{\partial x}(x, y) \quad \text{ou} \quad \tfrac{\partial}{\partial x} f(x, y) \quad \text{ou} \quad \partial_x f(x, y)$$

En d'autres termes

$$\frac{\partial f(x, y)}{\partial x} = \lim_{\triangle x \longrightarrow 0} \frac{f(x + \triangle x, y) \; - \; f(x, y)}{\triangle x}$$

Dans le cas où la limite n'existe pas , on dit que la fonction f n'est pas partiellement dérivable par rapport à x en (x, y) .

dans le contexte des fonctions de plusieurs variables , l'adjectif partiel signifie par rapport à une seule variable , les autres arguments étants constants .

D'une maniére analogue , la dérivée partielle de la fonction f par rapport à y en (x, y) est la dérivée de la fonction d'une seule variable réelle

$$y \longmapsto f(x, y) \qquad \text{où } x \text{ est constant}$$

Elle est notée

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial y} \quad \text{ou} \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) \quad \text{ou} \quad \frac{\partial}{\partial y} f(x, y) \quad \text{ou} \quad \partial_y f(x, y)$$

En d'autres termes

$$\frac{\partial f(x, y)}{\partial y} = \lim_{\triangle y \longrightarrow 0} \frac{f(x, y + \triangle y) \ - \ f(x, y)}{\triangle y}$$

Exemple 1.1.1 *(calculs à la main)*

Soit $f(x, y) = \frac{x^2}{y}$. Alors,

$\frac{\partial}{\partial x}(\frac{x^2}{y}) = \frac{1}{y}\frac{\partial}{\partial x}(x^2) = \frac{1}{y}(2x) = \frac{2x}{y}$

$\frac{\partial}{\partial y}(\frac{x^2}{y}) = x^2\frac{\partial}{\partial y}(\frac{1}{y}) = x^2\frac{\partial}{\partial y}(y^{-1}) = x^2(-1)y^{-2} = \frac{-x^2}{y^2}$

Soit $v(r, h) = \pi r^2 h$. Alors ,

$\frac{\partial v(r,h)}{\partial r} = \frac{\partial}{\partial r}(\pi r^2 h) = \pi h \frac{\partial}{\partial r}(r^2) = \pi h(2r) = 2\pi r h$

$\frac{\partial v(r,h)}{\partial h} = \frac{\partial}{\partial h}(\pi r^2 h) = \pi r^2 \frac{\partial}{\partial h}(h) = \pi r^2$

Définition 1.1.2 *(L'équations aux dérivées partielles)*

On appelle équation aux dérivées partielles une équation dont l'inconnue est une fonction de plusieurs variables et qui fait intervenir les dérivées partielles de cette inconnue l'étude des équations aux dérivées partielles (EDP pour les intimes) est une branche inportante de la recherche en mathématique on a la forme suivant de EDP :

$$G(x, y, ..., u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, ..., \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}, \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}, ...) = 0$$

où G est une fonction de plusieures variables , $(x, y, ...)$ variables indépendantes , u variable dépendante

♦ $\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$ avec $u = u(x, y)$ (équation de diffusion)

$u_1(x, y) = 2x + y^2$ solution dans tout $\mathbb{R}^2$.

$u_2(x, y) = e^{-x}\sin(y)$ solution dans tout $\mathbb{R}^2$.

$u_3(x, y) = \frac{1}{\sqrt{4\pi x}} e^{\frac{-y^2}{4x}}$ solution dans Ω $\begin{cases} x > 0 \\ y \in \mathbb{R} \end{cases}$

1.1.1 EDP linéaires du 1^{er} ordre

$$A(x, y)\frac{\partial u}{\partial x} + B(x, y)\frac{\partial u}{\partial y} + C(x, y)u = D(x, y)$$

est la forme la plus génerale pour une EDP $\begin{cases} linéaire \\ 1^{er} ordre \end{cases}$.

Définition 1.1.3 *Si u et ses dérivées partielles apparaissent séparément et " à la puissance 1 " dans l'EDP, celle -ci dite linéaire .*

Exemple 1.1.2 $u = u(x, y)$

♦ $\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} = 0$ 1^{er} ordre linéaire

♦ $\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} + \sin u = 0$ 1^{er} ordre non linéaire

♦ $\frac{\partial u}{\partial x} + u\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$ $2^{éme}$ ordre non linéaire

$\cos(xy^2)\frac{\partial u}{\partial x} - y^2\frac{\partial u}{\partial x} = \tan(x^2 + y^2)$ 1^{er} ordre , linéaire , inhomogène

♦ Pour une EDP linéaire homogène :

$\left.\begin{matrix} u_1 \text{ solution} \\ u_2 \text{ solution} \end{matrix}\right\} \Longrightarrow \lambda u_1 + \mu u_2$ est solution

1.1.2 Classification des EDP linéaires du 2nd ordre , à coefficients constants

$$A\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + B\frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} + C\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + D\frac{\partial u}{\partial x} + E\frac{\partial u}{\partial y} + Fu + G = 0$$

Les trois premiers termes correspondent à la partie principale . A,B,.........,G sont des constantes

Le type de l'EDP dépend du signe de $\mathrm{B}^2 - 4\mathrm{AC}$.

<u>**Classification**</u>

Si $\mathrm{B}^2 - 4\mathrm{AC} > 0$, alors l'EDP est dite hyperbolique .

Si $\mathrm{B}^2 - 4\mathrm{AC} = 0$, alors l'EDP est dite parabolique .

Si $\mathrm{B}^2 - 4\mathrm{AC} < 0$, alors l'EDP est dite elliptique .

$$(i) \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - c^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 \quad \text{avec } c > 0$$

$\mathrm{B}^2 - 4\mathrm{AC} = 2c^2 > 0$. Ainsi l'équation des ondes est hyperbolique

$$(ii) \quad \frac{\partial u}{\partial t} - d\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 \quad \text{avec } d > 0$$

$\mathrm{B}^2 - 4\mathrm{AC} = 0$. Ainsi l'équation de la diffusion est parabolique .

$$(iii) \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

$\mathrm{B}^2 - 4\mathrm{AC} = -4 < 0$. Ainsi l'équation de laplace est elliptique .

$$(iv) \quad y\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \qquad \text{équation de Tricomi.}$$

♦ $y > 0 \implies$ l'EDP est hyperbolique .

♦ $y = 0 \implies$ l'EDP est parabolique .

♦ $y < 0 \implies$ l'EDP est elliptique .

1.2 Espace de Banach

1.2.1 Espace Métrique

Définition 1.2.1 *Soit X un ensemble non vide .une distance(métrique) sur X est une application $(x, y) \longmapsto d(x, y)$ de $X \times X$ dans $\mathbb{R}^+$ telle que :*

(D_1) $d(x, y) = 0 \Longleftrightarrow x = y.$

(D_2) $d(x, y) = d(y, x), \ \ \forall x, y \in X.$

(D_1) $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y), \ \ \forall x, y, z \in X$ *(inégalité triangulaire).*

Définition 1.2.2 *(Espace Normés) soit E un espace vectoriel réel une norme sur E est une application $x \longmapsto \|x\|$ de E dans $\mathbb{R}^+ = [0, +\infty[$ telle que :*

(N_1) $\|x\| = 0 \iff x = 0.$

(N_2) $\|\lambda x\| = |\lambda| \, \|x\|, \forall \lambda \in \mathbb{R}, \forall x \in E.$

(N_3) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|, \forall x, y \in E$ *(inégalité triangulaire).*

Définition 1.2.3 *(Suite de Cauchy) Soit (X, d) un espace métrique . Une suite $(x_n) \subset X$ est de cauchy $\iff \forall \epsilon > 0,$ il existe un n_0 tel que $d(x_n, x_m) < \epsilon$ dès que $n, m \geq n_0$.*

Définition 1.2.4 *(Complétude) Un espace métrique (X, d) est complet $\iff$ toute suite de cauchy $(x_n) \subset X$ est convergente.*

Un espace normé $(E, \|.\|)$ est de Banach $\iff$ E est complet pour la distance associée à $\|.\|$.

1.2.2 Espace topologique

Définition 1.2.5 *On appelle espace topologique un couple* (X,T) *où est un ensemble et* T *une famille de parties de* X *vérifiant :*

(T_1) $\phi \in T, X \in T$.

(T_2) *une intersection finie d'éléments de* T *appartient à* T.

(T_3) *une reunion quelconque d'éléments de appartient à* T.

On appelle T *la topologie sur* X.

Exemple 1.2.1 $X = \mathbb{R}^n$ *avec* T *la famille des ensembles ouverts de* $\mathbb{R}^n$.

Définition 1.2.6 *(La Compacité) Soit* u *une famille de parties d'un espace topologique* (X,T) *. on dit que* u *est un recouverement ouvert de* X *si* $X \subset T$ *, c-à-d les membres de* u *sont ouvert, et* $X = \bigcup_{U \in u} U$ *. On dit que* $v \in u$ *est un sous-recouvrement fini si* v *est fini (contient un nombres fini de membres) et* $X = \bigcup_{U \in v} U$.

Définition 1.2.7 *Une espace topologique* X *est compact si tout recouvrement ouvert de* X *admet un sous-recouvrement fini.*

Définition 1.2.8 *(Convexité) On dit que* $C \subset E$ *est un ensemble convexe si :*
$\forall t \in [0,1], \forall (a,b) \in C^2,\ ta + (1-t)b \in C$.

1.3 Théorème du point fixe du Type Schauder

Ce théorème prolonge le résultat du théorème de Brouwer pour montrer l'existence d'un point fixe pour une fonction continue sur un convexe compact dans un espace de Banach . le théorème du point fixe de Schauder est plus topologique , est affirme qu'une application continue sur un convexe compact admet un point fixe , qui n'est pas nécessairement unique.

Théorème 1.3.1 *Soit K un sous-ensemble non vide, compact , convexe dans un espace de Banach E et suppossons $T : K \longrightarrow K$ une application continue. Alors T admet un point fixe.*

Preuve. Soit $T : K \longrightarrow K$ une application continue. comme K est compact , T est uniformément continue ; donc , si on fixe $\epsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que pour tout $x, y \in K$, on a

$$\|x-y\| \leq \delta \implies \|T(x)-T(y)\| \leq \epsilon,$$

de plus , il existe un ensemble fini de points $\{x_1, x_2, ..., x_p\} \subset K$ tel que les boules ouvertes de rayon δ contrée aux x_i recouvrent K ; i.e. $K \subset \cup_{1\leq j\leq p} B(x_j, \delta)$. si on désigne $L := vect(T(x_j))_{1\leq j\leq p}$ alors L est de dimension finie, et $K^* := K \cap L$ est compact convexe de dimension finie. $1 \leq j \leq p$, on définie la fonction continue $\Psi_j : E \longrightarrow \mathbb{R}$ par

$$\Psi j = \begin{cases} 0 \quad \text{si } \|x-x_j\| \geq \delta \\ 1 - \frac{\|x-x_j\|}{\delta} \quad \text{sinon} \end{cases}$$

il est clair que φ_j est strictement positive sur $B(x_j, \delta)$ et nulle en dehors. On a donc , pour tout $x \in K$, $\sum\limits_{j=1}^{p} \Psi_j(x) > 0$, on peut définir sur K les fonctions continue positives φ_j par

$$\varphi_j = \frac{\Psi_j}{\sum_{K=1}^{p} \Psi_k(x)}$$

pour les quelles on a $\sum\limits_{j=1}^{p} \varphi_j(x) = 1$ pour tout $x \in K$, posant , pour $x \in K$

$$g(x) = \sum_{j=1}^{p} \varphi_j(x) T(x_j).$$

La fonction g est continue (car elle est la somme des fonctions continues) et prend ses valeurs dans K^*(car $g(x)$ est un barycentre des $T(x_j)$). si on prend la restriction g/K^* :

$K^* \longrightarrow K^*$, g possède un point fixe $y \in K^*$.De plus :

$$\begin{aligned}
T(y) - y &= T(y) - g(y) \\
&= \sum_{j=1}^{p} \varphi_j(y)T(y) - \sum_{j=1}^{p} \varphi_j(y)T(x_j) \\
&= \sum_{j=1}^{p} \varphi_j(y)\left[T(y) - T(x_j)\right].
\end{aligned}$$

or si $\varphi_j(y) \neq 0$ alors $\|y - x_j\| < \delta$,et par suite $\|T(y) - T(x_j)\| < \epsilon$.On a pour tout j

$$\begin{aligned}
\|T(y) - y\| &\leq \sum_{j=1}^{p} \varphi_j(y)\left[T(y) - T(x_j)\right] \\
&\leq \sum_{j=1}^{p} \epsilon\varphi_j(y) = \epsilon.
\end{aligned}$$

pour tout entier m , en peut trouver un point $y_m \in K$ tel que $\|f(y_m) - y_m\| \leq 2^{-m}$.ET puisque K est compact, de la suite $(y_m)_{m\in Z}$ on peut extraire une sous-suite(y_{mk}) qui converge vers un point $y^* \in K$ .Alors T étant continue , la suite $(T(y_{mk}))$ converge vers $T(y^*)$, et on conclut que $T(y^*) = y^*$,i,e y^* est un point fixe de T sur K. ■

1.4 La méthode des sous-sur solutions

On s'intéresse à l'existence de solutions via la méthode de sous-sur solutions. on considère le problème suivant :

$$\begin{cases} -\Delta u(x) = f(x, u(x)) & \text{dans } \Omega \\ u(x) = 0 & \text{dans } \partial\Omega \end{cases} \tag{1.1}$$

où f est une fonction définie de $\Omega \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$.

i) On dit que $\underline{u}$ est une sous solution du problème (1.1) si :

♦ pour presque tout $x \in \Omega$, $-\Delta\underline{u}(x) \leq f(x, \underline{u}(x))$.

♦ pour tout $x \in \partial\Omega$, $\underline{u}(x) \leq 0$.

$ii)$ On dit que $\overline{u}$ est une sur solution du problème (1.1) si :

♦ pour presque tout $x \in \Omega$, $-\Delta\overline{u}(x) \geq f(x, \overline{u}(x))$.

♦ pour tout $x \in \Omega$, $\overline{u}(x) \geq 0$.

1.4.1 La fonction f de classe $\mathbb{C}^1$

le théorème suivant montre que le problème (1.1) admet une solution $u \in C^2(\Omega) \times C(\overline{\Omega})$ quand $f : \overline{\Omega} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ est une fonction de classe $\mathbb{C}^1$ par rapport à la variable u .

Théorème 1.4.1 *Soient $\underline{U}$ (resp,$\overline{U}$) une sous solution (resp, une sur-solution) du problème (1.1) tel que $\underline{U} \leq \overline{U}$ dans Ω . alors les propriétés suivantes sont satisfaites :*

♦ $i)$ Il existe une solution u du problème (1.1) satisfaisant $\underline{U} \leq u \leq \overline{U}$.

♦ $ii)$ Ils existent des solutions minimales et maximales $u_{\min}et$ $u_{\max}$ du problème (1.1) dant l'intervalle$\left[\underline{U}, \overline{U}\right]$.

1.4.2 sous -sur solutions ordonnées

Théorème 1.4.2 *Soient α et β respectivement une sous-solution et une sur-solution de (1.1) , vérifiant $\alpha \leq \beta$. $f : E \longrightarrow \mathbb{R}$ et L^P-carathéodory (voir [3]) avec $E = \{(x, y) \in \Omega \times \mathbb{R} \ / \ \alpha \leq y \leq \beta\}$ et $p > n$. Alors le problème (1.1) admet une solution $u \in W^{2,p}(\Omega)$ telle que $\alpha \leq u \leq \beta$ démonstration (voir [3])*

Exemple 1.4.1 *Considérons le probléme aux limites unidimensionnel suivant :*

$$\begin{cases} -u" = \frac{1}{\sqrt{u}} - 1 \quad \text{sur} \ \ ]0, \pi[\\ \quad u(0) = u(\pi) = 0 \end{cases} \tag{1.2}$$

Alors $\beta = 1$ est une sur-solution de ce problème (1.2) et $\alpha = Cx^{\frac{3}{2}}(\pi - x)^{\frac{3}{2}}$ est une sous-solution pour $C > 0$ assez petit . ona $\alpha \leq \beta$

On pose

$$f_1 :]0,\pi[\times \mathbb{R}_+^* \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$(x,u) \longmapsto \frac{1}{\sqrt{u}} - 1$$

On remarque la fonction f_1 n'est pas définie pour $u \leq 0$.

Pour cela . On pose

$$E = \{(x,y) \in]0,\pi[\times \mathbb{R} \ / \ \alpha(x) \leq y \leq \beta(x)\}$$

par conséquent , la fonction

$$f_2 : E \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$(x,y) \longmapsto \frac{1}{\sqrt{u}} - 1$$

est L^P-carathéodory.

En effet , f_2 implique que .

$$\forall (x,y) \in E, |f_2(x,y)| \leq h(x) = \frac{1}{\sqrt{C} x^{\frac{3}{2}} (\pi - x)^{\frac{3}{2}}} + 1$$

avec $h \in L^P(0,\pi)$ $\forall p \in \left]1, \frac{3}{4}\right[$

Les conditions du théorème (1.4.2) sont satisfaites . Alors le problème (1.1) admet une solution.

1.4.3 Sous-sur solutions mal ordonnées

Définition 1.4.1 *Une sous-solution α(resp. une sur-solution β) de (1.1) est dite stricte , si pour toute solution u de(1.1) , on a $u \geq \alpha \Longrightarrow u >> \alpha$ resp. $u \leq \beta \Longrightarrow u << \beta$*

Le théorème suivant constitu une alternative du théorème (1.4.2) dans le cas où la sous solution α et la sur solution β ne vérifient pas $\alpha \leq \beta$.

Théorème 1.4.3 *On suppose que la fonction $f : \Omega \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ est L^P- carathéodory avec $p > n$ et que le problème (1.1) admet une sous- solution α et une sur-solution β telles que :*

1) $\exists x_0 \in \Omega, \alpha(x_0) > \beta(x_0)$.

2)$\exists h \in L^P(\Omega), \forall p.p.x \in \Omega, \forall u \in R, |f(x,u) - \lambda_1 u| \leq h(x)$.

le problème (1.1) admet au moins une solution $u \in \vartheta$ où $\vartheta = \left\{u \in C_0^1(\overline{\Omega})/u \ngeq \alpha \text{ et } u \nleq \beta\right\} = \left\{u \in C_0^1(\overline{\Omega})/\min(u-\alpha) < 0 < \max(u-x)\right\}$

la démonstration de ce théorème fait appel au théorème d'Amman . Un résultat de multiplicité qui est connu sous le nom théorème de trois solution

Théorème 1.4.4 *Supposons que nous ayons deux sous-solution strictes $\alpha_1$et $\alpha_2$de (1.1) et deux sur-solution $\beta_1$et β_2 de (1.1) qui vérifient*

$$\alpha_1 << \beta_1, \alpha_2 << \beta_2, \alpha_2 \nleq \beta_1, \alpha_1 \leq \alpha_2, \beta_1 \leq \beta_2.$$

si $f : E \longrightarrow R$ est L^p-carathéodory avec $E = \{(x,y) \in \Omega \times R/\alpha(x) \leq y \leq \beta(x)\}$et $p > n$ alors (1.1) admet au moins trois solution u_1, u_2et $u_3$qui vérifient

$$\alpha_1 << u_1 << \beta_1, \alpha_2 << u_2 << \beta_2, \text{et } \alpha_1 << u_3 << \beta_2, \text{avec } u_3 \nleq \beta_1 \text{ et } u_3 \ngeq \alpha_2.$$

Remarque 1.4.1 *L'hypothèse $\underline{u} \leq \overline{u}$ n'est pas toujours satisfaite. c'est -à-dire il se peut que $\underline{u} > \overline{u}$ sur Ω . L'exemple èlèmentaire est suivant :*

Considérons le problème de la valeur propre suivant :

$$\begin{cases} -\triangle u = \lambda_1 u \quad \text{dans } \Omega \\ \quad u = 0 \quad \text{sur } \partial\Omega \end{cases}$$

Le problème admet une solution u de la forme $u = Ce_1$ où C est une constante réel et $e_1(x) > 0$ pour tout $x \in \Omega$. Choisissons

$$\underline{u} = e_1 \text{ et } \overline{u} = e_1$$

Alors $\underline{u}(resp\ \overline{u})$ est sous-solution (resp. sur-solution) du problème (1.1) mais $\underline{u} > \overline{u}$.

Chapitre 2

Solutions d'ondes progressives pour des systèmes de réaction-diffusion à retard avec monotonie partielle

Dans ce chapitre on étudier l'existence des solutions d'ondes progressives pour des systèmes de réaction -diffusion et preuve de quelques lemmes et quelque théorème

2.1 Introduction

Soit le problème (1)

On peut trouver beaucoup de tels systèmes et immédiat pourtant simple et le système de Lotka-Volterra suivant de type coopération de concurrence

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t}u(t,x) = d_1\frac{\partial^2}{\partial x^2}u(t,x) + r_1u(t,x)\left[1 - a_1u(t-\tau_1,x) - b_1v(t,x)\right] \\ \frac{\partial}{\partial t}v(t,x) = d_1\frac{\partial^2}{\partial x^2}v(t,x) + r_2v(t,x)\left[1 + a_1u(t,x) - b_2v(t-\tau_2,x)\right] \end{cases} \tag{2.1}$$

Dans ce chapitre , nous considérons les systèmes avec "monotonicity quasipartiel" (PQM) ou "le monotonicité quasi partiellement exponentiel" affaibli (PQM*) dans le sens d'etre indiqué plus tard. Afin les idées mathématiques de ne pas être obscurci par la complexité d'un système, nous nous limitons notre travail seulement sur les systèmes retardés de deux équations de la forme suivante

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t}u(t,x) = d_1 \frac{\partial^2}{\partial x^2}u(t,x) + f_1(u_t(x), v_t(x)) \\ \frac{\partial}{\partial t}v(t,x) = d_2 \frac{\partial^2}{\partial x^2}v(t,x) + f_2(u_t(x), v_t(x)) \end{cases} \tag{2.2}$$

L'approche peut etre prolongée aux systèmes de plus de deux équations sans difficultés assentielles. nos nouveaux états monotonie quasi-partiele sont motivés près (2.1)et beaucoup d'autre systèmes est une combinaison de la méthode d'itération à travers qui été employée pour étudier l'initiale et des problèmes de valeur limite pour des systèmes de réaction-diffusion sans retarder

2.2 Préliminaires.

Dans tout ce chapitre nous adaptons les notations habituelles dans $\mathbb{R}^2$.pour $u = (u_1, u_2)^T$ et $v = (v_1, v_2)^T$, nous notons par $u \leq v$ si $u_i \leq v_i$, pour $i = 1, 2$ et par $u < v$ si $u \leq v$ mais $u \neq v$ et par $u << v$ si $u \leq v$ mais $u_i \neq v_i$ pour $i = 1, 2$.

Si $u \leq v$ nous nontons également

$$\begin{cases} (u,v] := \{w \in \mathbb{R}^2 : u < w \leq v\} \\ [u,v) := \{w \in \mathbb{R}^2 : u \leq w < v\} \\ [u,v] := \{w \in \mathbb{R}^2 : u \leq w \leq v\} \end{cases}$$

nous utilisons $|.|$ pour désigner la norme euclidienne dans $\mathbb{R}^2$ et $\|.\|$ pour désigner la norme supremume dans $C\left([-\tau, 0], \mathbb{R}^2\right)$.

Une solution onde progressive de (2.2) est une solution $(u(t,x), v(t,x))$ de la forme spéciale

$$u(t,x) = \phi(x+ct), v(t,x) = \psi(x+ct) \text{ où } \phi, \psi \in C^2(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \text{ et } c > 0.$$

substituant $u(t,x) = \phi(x+ct), v(t,x) = \psi(x+ct)$ où on a noté $x+ct$ par t, nous obtenons les équations d'onde correspondantes

$$\begin{cases} d_1\phi"(t) - c\phi' + f_{1c}(\phi_t, \psi_t) = 0 \\ d_2\psi"(t) - c\psi'(t) + f_{2c}(\phi_t, \psi_t) = 0 \end{cases} \tag{2.3}$$

où $f_{ic}(\phi_s, \psi_s) : X_{c\tau} = C\left([-c\tau, 0], \mathbb{R}^2\right) \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$\begin{cases} f_{ic}(\phi, \psi) = f_i(\phi^c, \psi^c) \text{ où} \\ \phi^c(s) = \phi(cs), \psi^c(s) = \psi(cs), s \in [-\tau, 0], i = 1, 2. \end{cases} \tag{2.4}$$

ici (ϕ, ψ) s'appelle un profil de la solution onde progressive ,et (2.4) s'appelle l'équation d'onde correspondante pour (2.3).

Dans ce travail , nous somme seulement intéréssés par les fronts d'onde progressive qui sont les solutions ondes progressive avec le profil satisfaisant les conditions de frontière asymptotiques suivantes :

$$\begin{cases} \lim_{t\to-\infty} \phi(t) = \phi_- & \lim_{t\to+\infty} \phi(t) = \phi_+ \\ \lim_{t\to-\infty} \psi(t) = \psi_- & \lim_{t\to+\infty} \psi(t) = \psi_+ \end{cases} \tag{2.5}$$

sans perte de la généralité, nous supposons que $\phi_- = \psi_- = 0, \phi_+ = k_1$ et $\psi_+ = k_2$. Ainsi, (2.5) devient

$$\begin{cases} \lim_{t\to-\infty} \phi(t) = 0 & \lim_{t\to+\infty} \phi(t) = k_1 \\ \lim_{t\to-\infty} \psi(t) = 0 & \lim_{t\to+\infty} \psi(t) = k_2 \end{cases} \tag{2.6}$$

En correspondance à (2.6), nous faisons les hypothèses suivantes :

(A_1) $f(\widetilde{0}) = f(\widetilde{k}) = 0$ avec $O < k = (k_1, k_2)$, où $\widetilde{u}$ est fonction constante de $[-\tau, 0] \to \mathbb{R}^2$prise de valeur$u$ pour tout $t \in [-\tau, 0]$.

(A_2) $f_2(\phi, \psi) = \psi(0)\,[h(\psi) + a\phi(0)]$ où la fonction $h(\psi)$ est continue et $a > 0$.

(A_3) Ils existe deux constantes positives $L_1 > 0, L_2 > 0$ tels que :

$$\begin{cases} |f_1(\phi_1, \psi_1) - f_1(\phi_2, \psi_2)| \leq L_1 \|\Phi - \Psi\| \\ |f_2(\phi_1, \psi_1) - f_2(\phi_2, \psi_2)| \leq L_2 \|\Phi - \Psi\| \end{cases}$$

où

$$\begin{cases} \Phi = (\phi_1,\psi_1), \Psi = (\phi_2, \psi_2) \in C([-\tau, 0], \mathbb{R}) \text{ avec} \\ \quad 0 \leq \Phi(s), \Psi(s) \leq k, s \in [-\tau, 0], i = 1, 2. \end{cases}$$

soit $\mu > 0$ et muni $C(\mathbb{R}, \mathbb{R}^2)$ avec la norme d'affaiblissement exponentiel définie par

$$|\Phi|_\mu = \sup_{t \in R} e^{-\mu|t|} \left|\Phi(t)\right|_{\mathbb{R}^2}.$$

notons également

$$B_\mu(\mathbb{R}, \mathbb{R}^2) := \left\{ \Phi \in C(\mathbb{R}, \mathbb{R}^2) : |\Phi|_\mu < \infty \right\}.$$

Il est claire que $(B_\mu(\mathbb{R}, \mathbb{R}^2), |.|_\mu)$ est un espace de Banach.

Définition 2.2.1 *Une paire de fonctions continues*

$$\begin{cases} \overline{\rho}(t) = (\overline{\phi}(t), \overline{\psi}(t)) \quad et \\ \underline{\rho}(t) = (\underline{\phi}(t), \underline{\psi}(t)), pour \ t \in \mathbb{R}, \end{cases}$$

est appelée sur et sous solution de (2.3)si $\overline{\rho}^{'}, \overline{\rho}^{''}, \underline{\rho}^{'}$ *et* $\underline{\rho}^{''}$ *existe presque partout dans* $\mathbb{R}$ *et bornées sur* $\mathbb{R}$.

Et sont vérifiées par

$$\begin{aligned} &d_1\overline{\phi}^{''}(t) - c\overline{\phi}^{'}(t) + f_{1c}(\overline{\phi_t}, \underline{\psi}_t) \leq 0, \ pp \text{ dans } \mathbb{R} \\ &d_2\overline{\psi}^{''}(t) - c\overline{\psi}^{'}(t) + f_{2c}(\overline{\phi}_t, \overline{\psi}_t) \leq 0, \ pp \text{ dans } \mathbb{R} \end{aligned} \tag{2.7}$$

$$et$$

$$\begin{aligned} &d_1\underline{\phi}^{''}(t) - c\underline{\phi}^{'}(t) + f_{1c}(\underline{\phi}_t, \overline{\psi}_t) \geq 0, \ pp \text{ dans } \mathbb{R} \\ &d_2\underline{\psi}^{''}(t) - c\underline{\psi}^{'}(t) + f_{2c}(\underline{\phi}_t, \underline{\psi}_t) \geq 0, \ pp \text{ dans } \mathbb{R} \end{aligned}$$

2.3 Cas quasi monotonie partielle

Bien que beaucoup des systèmes modèles ne satisfait pas (QM) ou (QM*), ils peuvent être quasi monotones en ce concerne une certaine composante particulière. le système (2.1) fourni un prototype de ce système par lesquels nous sommes motivés pour proposer l'état quasi partiel de monotonie suivant la condition :

(PQM) il existe 2 constantes positives $\beta_1 > 0$, $\beta_2 > 0$ telles que

$$\begin{cases} f_{1c}(\phi_1, \psi_1) - f_{1c}(\phi_2, \psi_1) + \beta_1 [\phi_1(0) - \phi_2(0)] \geq 0, \\ f_{1c}(\phi_1, \psi_1) - f_{1c}(\phi_1, \psi_2) \leq 0, \\ f_{2c}(\phi_1, \psi_1) - f_{2c}(\phi_2, \psi_2) + \beta_2 [\psi_1(0) - \psi_2(0)] \geq 0, \end{cases}$$

où

$$\phi_1, \phi_2, \psi_1 \text{ et } \psi_2 \in C([-\tau, 0], \mathbb{R})$$

avec

$$0 \leq \phi_2(s) \leq \phi_1(s) \leq k_1, 0 \leq \psi_2(s) \leq \psi_1(s) \leq k_2, s \in [-\tau, 0].$$

Dans cette chapitre, explorons l'existence des solutions de (2.3)-(2.6) avec $f_{1c}(\phi_t, \psi_t)$ et $f_{2c}(\phi_t, \psi_t)$ satisfait (PQM).

Dans ce qui suit, nous supposons que les sur et sous solution $(\overline{\phi}(t), \overline{\psi}(t))$ et $(\underline{\phi}(t), \underline{\psi}(t))$ de (2.3) sont données, telles que

(P_1) $(0,0) \leq (\underline{\phi}(t), \underline{\psi}(t)) \leq (\overline{\phi}(t), \overline{\psi}(t)) \leq (k_1, k_2), t \in \mathbb{R}$.

(P_2) $\lim_{t\to-\infty}(\overline{\phi}(t), \overline{\psi}(t)) = (0,0)$ et $\lim_{t\to\infty}(\overline{\phi}(t), \overline{\psi}(t)) = (k_1, k_2)$.

(P_3) $\sup_{s\leq t}(\underline{\phi}(t), \underline{\psi}(t)) \leq (\overline{\phi}(t), \overline{\psi}(t))$ pour tout $t \in \mathbb{R}$.

Nous précisons cela si l'un ou l'autre $(\overline{\phi}(t), \overline{\psi}(t))$ ou $(\underline{\phi}(t), \underline{\psi}(t))$ est non décroissant, puis (P_3) implique (P_1).

Pour les constantes $\beta_1 > 0$ et $\beta_2 > 0$ dans (PQM), on définit

$$H : C(\mathbb{R}, \mathbb{R}^2) \longrightarrow C(\mathbb{R}, \mathbb{R}^2)$$

par :

$$H_1(\phi,\psi)(t) = f_{1c}(\phi_t,\psi_t) + \beta_1\phi(t), \quad \phi,\psi \in C(\mathbb{R},\mathbb{R}), \tag{2.8}$$

$$H_2(\phi,\psi)(t) = f_{2c}(\phi_t,\psi_t) + \beta_2\psi(t), \quad \phi,\psi \in C(\mathbb{R},\mathbb{R}), \tag{2.9}$$

L'opérateurs H_1et H_2 vérifie les propriétés suivantes.

Lemme 2.3.1 *Soit* (A_1) *et (PQM) vérifiés, alors*

$$\begin{cases} H_1(\phi_2,\psi_1)(t) \leq H_1(\phi_1,\psi_1)(t), \\ H_1(\phi_1,\psi_1)(t) \leq H_1(\phi_1,\psi_2)(t), \end{cases}$$

pour tout $t \in R$, $\phi_i,\psi_i \in C(\mathbb{R},\mathbb{R})$ *et* $i = 1,2$ *avec*

$$\begin{cases} 0 \leq \phi_2(t) \leq \phi_1(t) \leq k_1, \\ 0 \leq \psi_2(t) \leq \psi_1(t) \leq k_2. \end{cases}$$

Preuve. D'aprés (PQM) et par un calcul simple on obtient

$$\begin{aligned} H_1(\phi_1,\psi_1)(t) - H_1(\phi_2,\psi_1)(t) &= f_{1c}(\phi_{1t},\psi_{1t}) + \beta_1\phi_1(t) - f_{1c}(\phi_{2t},\psi_{1t}) - \beta_1\phi_2(t) \\ &= f_{1c}(\phi_{1t},\psi_{1t}) - f_{1c}(\phi_{2t},\psi_{1t}) + \beta_1\left[\phi_1(t) - \phi_2(t)\right] \end{aligned}$$

$$\text{Donc} \qquad H_1(\phi_1,\psi_1)(t) - H_1(\phi_2,\psi_1)(t) \geq 0.$$

de plus,

$$\begin{aligned} H_1(\phi_1,\psi_1)(t) - H_1(\phi_1,\psi_2)(t) &= f_{1c}(\phi_{1t},\psi_{1t}) + \beta_1\phi_1(t) - f_{1c}(\phi_{1t},\psi_{2t}) - \beta_1\phi_2(t) \\ &= f_{1c}(\phi_{1t},\psi_{1t}) - f_{1c}(\phi_{1t},\psi_{2t}) \\ &\leq 0 \end{aligned}$$

■

Lemme 2.3.2 *Supposons* (A_1) *et (PQM) vérifiés, alors pour tout* $(0,0) \leq (\phi,\psi) \leq (k_1,k_2), \phi(t)$ *et* $\psi(t)$ *non décroissantes, on a :*

i) $H_2(\phi,\psi)(t) \geq 0, t \in \mathbb{R}$

ii) $H_2(\phi,\psi)(t)$ *est non décroissante pour tout* $t \in \mathbb{R}$

iii) $H_2(\phi_2,\psi_2)(t) \leq H_2(\phi_1,\psi_1)(t)$ *pour tout* $t \in \mathbb{R}, \phi_i, \psi_i \in C(\mathbb{R},\mathbb{R})$

En terme de H_1et H_2, (2.3) peut être écrit

$$\begin{cases} d_1\phi''(t) - c\phi'(t) - \beta\phi(t) + H_1(\phi,\psi)(t) = 0 \\ d_2\psi''(t) - c\psi'(t) - \beta\psi(t) + H_2(\phi,\psi)(t) = 0 \end{cases} \tag{2.10}$$

On définit

$$\begin{cases} \lambda_1 = \frac{c-\sqrt{c^2+4\beta_1 d_1}}{2d_1}, \quad \lambda_2 = \frac{c+\sqrt{c^2+4\beta_1 d_1}}{2d_1} \\ \lambda_3 = \frac{c-\sqrt{c^2+4\beta_2 d_2}}{2d_2}, \quad \lambda_4 = \frac{c+\sqrt{c^2+4\beta_2 d_2}}{2d_2} \end{cases}$$

On voit facillment que $\lambda_1 < 0,\ \lambda_2 > 0, \lambda_3 < 0,\ \lambda_4 > 0$, soit

$C_k(\mathbb{R},\mathbb{R}^2) := \{(\phi,\psi) \in C(\mathbb{R},\mathbb{R}^2) : (0,0) \leq (\phi,\psi) \leq (k_1,k_2)\}$ et définissons

$F = (F_1,F_2) : C_k(\mathbb{R},\mathbb{R}^2) \longrightarrow C(\mathbb{R},\mathbb{R}^2)$ par :

$$\begin{cases} F_1(\phi,\psi)(t) = \frac{1}{d_1(\lambda_2-\lambda_1)}\left[\int\limits_{-\infty}^{t} e^{\lambda_1(t-s)}H_1(\phi,\psi)(s)ds + \int\limits_{t}^{+\infty} e^{\lambda_2(t-s)}H_1(\phi,\psi)(s)ds\right] \\ F_2(\phi,\psi)(t) = \frac{1}{d_2(\lambda_4-\lambda_3)}\left[\int\limits_{-\infty}^{t} e^{\lambda_3(t-s)}H_2(\phi,\psi)(s)ds + \int\limits_{t}^{+\infty} e^{\lambda_4(t-s)}H_2(\phi,\psi)(s)ds\right]. \end{cases}$$

pour $(\phi,\psi) \in C_k(\mathbb{R},\mathbb{R}^2)$, il est facile de montrer que $F : C_k(\mathbb{R},\mathbb{R}^2) \longrightarrow C(\mathbb{R},\mathbb{R}^2)$ est bien définie. et pour toutes $\phi,\psi \in C_k(\mathbb{R},\mathbb{R}^2)$. $F_1(\phi,\psi)$ et $F_2(\phi,\psi)$ vérifies

$$\begin{cases} d_1F_1''(\phi,\psi) - cF_1'(\phi,\psi) - \beta_1F_1(\phi,\psi) + H_1(\phi,\psi) = 0 \\ d_2F_2''(\phi,\psi) - cF_2'(\phi,\psi) - \beta_2F_2(\phi,\psi) + H_2(\phi,\psi) = 0 \end{cases} \tag{2.11}$$

Ainsi, $F(\phi,\psi) = (F_1(\phi,\psi),F_2(\phi,\psi)) = (\phi,\psi)$, $i.e$ (ϕ,ψ) est un point fixe de F.

Lemme 2.3.3 *Suppossons que* (A_1) *et (PQM) sont vérifiés, alors pour tout*

$(0,0) \leq (\phi,\psi) \leq (k_1,k_2)$,*on a* *a)* $F_2(\phi,\psi)$ *est non décroissant pour tout* $t \in \mathbb{R}$,

$$b)\ \begin{cases} F_1(\phi_2,\psi_1) \le F_1(\phi_1,\psi_1) \\ \text{et } F_1(\phi_1,\psi_1) \le F_1(\phi_1,\psi_2) \\ F_2(\phi_2,\psi_2) \le F_2(\phi_1,\psi_1), \text{pour } t \in \mathbb{R} \text{ et } \phi_i,\psi_i \in C(\mathbb{R},\mathbb{R}), i=1,2 \end{cases}$$

avec $0 \le \phi_2(t) \le \phi_1(t) \le k_1$ *et* $0 \le \psi_2(t) \le \psi_1(t) \le k_2$.

Preuve. Prouvous a) : Soit $t \in \mathbb{R}$ et $s > 0$ donné, nous avons

$$\begin{aligned} F_2(\phi,\psi)(t+s) - F_2(\phi,\psi)(t) &= \frac{1}{d_2(\lambda_4-\lambda_3)}\left[\int_{-\infty}^{t+s} e^{\lambda_3(t+s-\theta)}H_2(\phi,\psi)(\theta)d\theta + \int_{t+s}^{+\infty} e^{\lambda_4(t+s-\theta)}H_2(\phi,\psi)(\theta)d\theta\right] \\ &- \frac{1}{d_2(\lambda_4-\lambda_3)}\left[\int_{-\infty}^{t} e^{\lambda_3(t-\theta)}H_2(\phi,\psi)(\theta)d\theta + \int_{t}^{+\infty} e^{\lambda_4(t-\theta)}H_2(\phi,\psi)(\theta)d\theta\right] \\ &= \frac{1}{d_2(\lambda_4-\lambda_3)}\left\{\int_{-\infty}^{t} e^{\lambda_3(t-\theta)}[H_2(\phi,\psi)(s+\theta) - H_2(\phi,\psi)(\theta)]d\theta\right\} \\ &+ \frac{1}{d_2(\lambda_4-\lambda_3)}\left\{\int_{t}^{\infty} e^{\lambda_4(t-\theta)}[H_2(\phi,\psi)(s+\theta) - H_2(\phi,\psi)(\theta)]d\theta\right\}. \end{aligned}$$

Le lemme2.3.2 nous donne : $H_2(\phi,\psi)(s+\theta) - H_2(\phi,\psi)(\theta) > 0$, ce qui implique que $F_2(\phi,\psi)(t)$ est non décroissante pour $t \in \mathbb{R}$. ■

Maintenant, nous définissons l'ensemble

$$\Gamma((\underline{\phi},\underline{\psi}),(\overline{\phi},\overline{\psi})) := \left\{ \begin{array}{c} i)\ \psi(t) \text{ est non décroissante} \\ (\phi,\psi) \in C(\mathbb{R},\mathbb{R}^2) \\ ii)\underline{\phi}(t) \le \phi(t) \le \overline{\phi}(t) \\ \text{et } \underline{\psi}(t) \le \psi(t) \le \overline{\psi}(t). \end{array} \right\}$$

Il est facile de voir que $\Gamma((\underline{\phi},\underline{\psi}),(\overline{\phi},\overline{\psi}))$ est non vide . En fait, soit

$$\phi_0(t) = \sup_{s\le t} \underline{\phi}(s) \quad \text{et} \quad \psi_0(t) = \sup_{s\le t} \underline{\psi}(s),$$

ainsi, (P_3) implique $(\phi_0(t), \psi_0(t)) \in \Gamma((\underline{\phi}, \underline{\psi}), (\overline{\phi}, \overline{\psi}))$.

$$\Gamma((\underline{\phi}, \underline{\psi}), (\overline{\phi}, \overline{\psi})) \text{ est convexe, fermé et borné.}$$

Choisissons, maintenant le paramètre $\mu > 0$, pour la norme d'affaiblissement exponentiel telle que $\mu < \min\{-\lambda_1, \lambda_2, -\lambda_3, \lambda_4\}$. Nous vérifions après la continuité de F.

Lemme 2.3.4 *Supposons que* (A_3) *est vérifiée, alors* $F = (F_1, F_2)$ *est continue par rapport à la norme* $|.|_\mu$ *dans* $B_\mu(\mathbb{R}, \mathbb{R}^2)$.

Preuve. La démonstration sera en 2 étapes. ■

étape1 : Est de prouver que $H = (H_1, H_2) : B_\mu(\mathbb{R}, \mathbb{R}^2) \longrightarrow B_\mu(\mathbb{R}, \mathbb{R}^2)$ est continue par rapport à la norme $|.|_\mu$ dans $B_\mu(\mathbb{R}, \mathbb{R}^2)$. pour tout $\epsilon > 0$ fixe , soient $\delta < \frac{\epsilon}{L_1 e^{\mu c\tau} + \beta_1}$ et $\Phi = (\phi_1, \psi_1), \Psi = (\phi_2, \psi_2) \in B_\mu(\mathbb{R}, \mathbb{R}^2)$ avec

$$|\Phi - \Psi| = \sup_{t \in \mathbb{R}} |\phi(t) - \psi(t)|\, e^{-\mu|t|} < \delta.$$

Ona

$$
\begin{aligned}
& \left|H_1(\phi_1,\psi_1)(t)-H_1(\phi_2,\psi_2)(t)\right|e^{-\mu|t|} \\
& \leq \left|f_1(\phi_{1t},\psi_{1t})-f_1(\phi_{2t},\psi_{2t})\right|e^{-\mu|t|}+\beta_1\left|\phi_1-\phi_2\right|_\mu \\
& \leq L_1\left\|\Phi_t-\Psi_t\right\|_{X_{c\tau}}e^{-\mu|t|}+\beta_1\left|\phi_1-\phi_2\right|_\mu \\
& = L_1\sup_{s\in[-c\tau,0]}\left|\Phi(s+t)-\Psi(s+t)\right|e^{-\mu|t|}+\beta_1\left|\Phi-\Psi\right|_\mu \\
& \leq L_1\sup_{s\in[-c\tau,0]}\left|\Phi(s+t)-\Psi(s+t)\right|e^{-\mu|t+s|}+\sup_{s\in[-c\tau,0]}e^{\mu|t+s|}e^{-\mu|t|}+\beta_1\left|\Phi-\Psi\right|_\mu \\
\overset{(1)}{} & \leq L_1\left|\Phi-\Psi\right|_\mu e^{-\mu|t|}e^{-\mu|t|}e^{\mu c\tau}+\beta_1\left|\Phi-\Psi\right|_\mu \\
& \leq L_1e^{\mu c\tau}\left|\Phi-\Psi\right|_\mu+\beta_1\left|\Phi-\Psi\right|_\mu \\
& \leq \left(L_1e^{\mu c\tau}+\beta_1\right)\left|\Phi-\Psi\right|_\mu \\
& \leq \epsilon
\end{aligned}
$$

(1) car

$$
\begin{cases}
\sup_{s\in[-c\tau,0]}\left|\Phi(s+t)-\Psi(s+t)\right|e^{-\mu|s+t|}=\left|\Phi(s+t)-\Psi(s+t)\right|e^{-\mu t} \\
\sup_{s\in[-c\tau,0]}e^{\mu|s+t|}e^{-\mu|t|}=e^{\mu|t|}e^{-\mu|-c\tau|}=e^{\mu|t|}e^{\mu c\tau}.
\end{cases}
$$

Donc : $H:B_\mu(\mathbb{R},\mathbb{R}^2)\longrightarrow B_\mu(\mathbb{R},\mathbb{R}^2)$ est continue.

étape 2 :Démontrons la continuite de F

Si $F=(F_1,F_2),t\geq 0$

$$
\begin{aligned}
& \left|F_1(\phi_1,\psi_1)(t)-F_1(\phi_2,\psi_2)(t)\right|e^{-\mu|t|} \\
& \leq \frac{1}{d_1(\lambda_2-\lambda_1)}\left[\frac{\lambda_2-\lambda_1}{(\mu-\lambda_1)(\lambda_2-\mu)}+\frac{2\mu}{\lambda_1^2-\mu^2}e^{(\lambda_1-\mu)t}\right]\left|H_1(\phi_1,\psi_1)-H_1(\phi_2,\psi_2)\right|_\mu \\
& \leq \frac{1}{d_1(\lambda_2-\lambda_1)}\left[\frac{\lambda_2-\lambda_1}{(\mu-\lambda_1)(\lambda_2-\mu)}+\frac{2\mu}{\lambda_1^2-\mu^2}\right]\left|H_1(\Phi)(t)-H_1(\Psi)(t)\right|_\mu.
\end{aligned}
$$

Si $t < 0$, nous obtenons

$$\begin{aligned}
&|F_1(\phi_1,\psi_1)(t) - F_1(\phi_2,\psi_2)(t)|\, e^{-\mu|t|} \\
&\leq \frac{1}{d_1(\lambda_2-\lambda_1)}\left[\frac{\lambda_2-\lambda_1}{-(\mu+\lambda_1)(\lambda_2+\mu)} + \frac{2\mu}{\lambda_1^2-\mu^2}e^{(\lambda_2+\mu)t}\right]|H_1(\phi_1,\psi_1) - H_1(\phi_2,\psi_2)|_\mu \\
&\leq \frac{1}{d_1(\lambda_2-\lambda_1)}\left[\frac{\lambda_2-\lambda_1}{-(\mu+\lambda_1)(\lambda_2+\mu)} + \frac{2\mu}{\lambda_1^2-\mu^2}\right]|H_1(\Phi)(t) - H_1(\Psi)(t)|_\mu .
\end{aligned}$$

Par conséquent, la continuite de F_1 suit celle de H_1. la preuve de la continuité de F_2 par rapport à la norme $|.|_\mu$ dans $B_\mu(\mathbb{R},\mathbb{R}^2)$ est analogue à celle de F_1.

Lemme 2.3.5 *Soit* (A_1) *et (PQM), alors*

$$F(\Gamma((\underline{\phi},\underline{\psi}),(\overline{\phi},\overline{\psi}))) \subset \Gamma((\underline{\phi},\underline{\psi}),(\overline{\phi},\overline{\psi})).$$

Preuve. Pour quel (ϕ,ψ) avec $(\underline{\phi},\underline{\psi}) \leq (\phi,\psi) \leq (\overline{\phi},\overline{\psi})$, nous réclamons que

$$\begin{cases} F_1(\underline{\phi},\underline{\psi}) \leq F_1(\phi,\psi) \leq F_1(\overline{\phi},\overline{\psi}) \\ F_2(\underline{\phi},\underline{\psi}) \leq F_2(\phi,\psi) \leq F_2(\overline{\phi},\overline{\psi}) \end{cases} \tag{2.12}$$

On a $\underline{\phi} \leq \phi \leq \overline{\phi}$ et $\underline{\psi} \leq \psi \leq \overline{\psi}$ il s'ensuite d'après (PQM)

$$\begin{aligned}
H_1(\overline{\phi},\underline{\psi})(t) - H_1(\phi,\psi)(t) &= f_1(\overline{\phi}_t,\underline{\psi}_t) - f_1(\phi_t,\psi_t) + \beta_1(\overline{\phi}(t)-\phi(t)) \\
&= f_1(\overline{\phi}_t,\underline{\psi}_t) - f_1(\phi_t,\underline{\psi}_t) + \beta_1(\overline{\phi}(t)-\phi(t)) \\
&+ f_1(\phi_t,\underline{\psi}_t) - f_1(\phi_t,\psi_t) \\
&\geq f_1(\phi_t,\underline{\psi}_t) - f_1(\phi_t,\psi_t) \\
&\geq 0
\end{aligned}$$

■

Ce qui implique que

$$H_1(\overline{\phi}, \underline{\psi})(t) \geq H_1(\phi, \psi)(t).$$

de même

$$H_1(\underline{\phi}, \overline{\psi})(t) \leq H_1(\phi, \psi)(t),$$

par consequent, on obtient

$$H_1(\underline{\phi}, \overline{\psi})(t) \leq H_1(\phi, \psi)(t) \leq H_1(\overline{\phi}, \underline{\psi})(t). \tag{2.13}$$

Par un argument semblable, nous pouvons également obtenir

$$H_2(\underline{\phi}, \overline{\psi})(t) \leq H_2(\phi, \psi)(t) \leq H_2(\overline{\phi}, \underline{\psi})(t). \tag{2.14}$$

De (2.13), il résulte

$$\begin{aligned} F_1(\overline{\phi}, \underline{\psi})(t) - F_1(\phi, \psi)(t) &= \frac{1}{d_1(\lambda_2 - \lambda_1)}[\int_{-\infty}^{t} e^{\lambda_1(t-s)} \left[H_1(\overline{\phi}, \underline{\psi}) - H_1(\phi, \psi)\right] ds \\ &+ \int_{t}^{+\infty} e^{\lambda_2(t-s)} \left[H_1(\overline{\phi}, \underline{\psi}) - H_1(\phi, \psi)\right] ds] \\ &\geq 0 \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} F_1(\phi, \psi)(t) - F_1(\underline{\phi}, \overline{\psi})(t) &= \frac{1}{d_1(\lambda_2 - \lambda_1)}[\int_{-\infty}^{t} e^{\lambda_1(t-s)} \left[F_1(\phi, \psi) - F_1(\underline{\phi}, \overline{\psi})\right] ds \\ &+ \int_{t}^{+\infty} e^{\lambda_2(t-s)} \left[F_1(\phi, \psi) - F_1(\underline{\phi}, \overline{\psi})\right] ds] \\ &\geq 0 \end{aligned}$$

Ceci établit la première partie de (2.11). Répétons l'argument ce-déssus mais en utilisant (2.13) à la place de nous arrivons à la deuxième partie de (2.11).

Après, nous prouvons que $F_1(\overline{\phi}, \underline{\psi}) \leq \overline{\phi}$ et $F_1(\underline{\phi}, \overline{\psi}) \geq \underline{\phi}$, par la définition de la sur et sous solution, nous avons

$$d_1\overline{\phi}^{''}(t) - c\overline{\phi}^{'}(t) - \beta\overline{\phi}(t) + H_1(\overline{\phi}, \underline{\psi})(t) \leq 0. \tag{2.15}$$

En choisissons $(\phi, \psi) = (\overline{\phi}, \underline{\psi})$ dans (2.11) et notons par

$$\overline{\phi}_1(t) = F_1(\overline{\phi}, \underline{\psi})(t),$$

alors

$$d_1\overline{\phi}_1^{''}(t) - c\overline{\phi}_1^{'}(t) - \beta\overline{\phi}_1(t) + H_1(\overline{\phi}, \underline{\psi})(t) = 0 \tag{2.16}$$

Soit $w(t) = \overline{\phi}_1(t) - \overline{\phi}(t)$ et la combinaisons de (2.15) et (2.16) nous donne

$$d_1 w^{''}(t) - cw^{'}(t) - \beta w(t) \geq 0$$

donc $w \leq 0$ i.e. $\overline{\phi}_1(t) \leq \overline{\phi}(t)$ donc $F_1(\overline{\phi}, \underline{\psi}) \leq \overline{\phi}$. Par un argument semblable, nous pouvons démontrer que

$$F_1(\underline{\phi}, \overline{\psi}) \leq \underline{\phi},\ \ F_2(\overline{\phi}, \underline{\psi}) \leq \overline{\psi},\ \ F_1(\underline{\phi}, \overline{\psi}) \leq \underline{\psi}.$$

Lemme 2.3.6 *Supposons que (PQM) est vérifié, alors*

$$F : \Gamma((\underline{\phi}, \underline{\psi}), (\overline{\phi}, \overline{\psi})) \longrightarrow \Gamma((\underline{\phi}, \underline{\psi}), (\overline{\phi}, \overline{\psi})), \textit{ est compact.}$$

Preuve. *Nous établissons d'abord une évaluation pour $F^{'}$ .pour tout $(\phi, \psi) \in \Gamma((\underline{\phi}, \underline{\psi}), (\overline{\phi}, \overline{\psi}))$,*

$$F_1^{'}(\phi, \psi)(t) = \frac{\lambda_1 e^{\lambda_1 t}}{d_1(\lambda_2 - \lambda_1)} \int_{-\infty}^{t} e^{-\lambda_1 s} H_1(\phi, \psi)(s)ds + \frac{\lambda_2 e^{\lambda_2 t}}{d_1(\lambda_2 - \lambda_1)} \int_{t}^{+\infty} e^{-\lambda_2 s} H_1(\phi, \psi)(s)ds.$$

Ainsi,

$$\begin{aligned}
\left\|F_1'(\phi,\psi)(t)\right\|_\mu &= \sup_{t\in\mathbb{R}}[e^{-\mu|t|}\frac{\lambda_1 e^{\lambda_1 t}}{d_1(\lambda_2-\lambda_1)}\int_{-\infty}^{t} e^{-\lambda_1 s}H_1(\phi,\psi)(s)ds \\
&+ e^{-\mu|t|}\frac{\lambda_2 e^{\lambda_2 t}}{d_1(\lambda_2-\lambda_1)}\int_{t}^{\infty} e^{-\lambda_2 s}H_1(\phi,\psi)(s)ds] \\
&\leq \frac{|\lambda_1|}{d_1(\lambda_2-\lambda_1)}\sup_{t\in\mathbb{R}} e^{\lambda_1 t-\mu|t|}\int_{-\infty}^{t} e^{-\lambda_1 s}e^{\mu|s|}e^{-\mu|s|}H_1(\phi,\psi)(s)ds \\
&+ \frac{\lambda_2}{d_1(\lambda_2-\lambda_1)}\sup_{t\in\mathbb{R}} e^{\lambda_2 t-\mu|t|}\int_{t}^{\infty} e^{-\lambda_2 s}e^{\mu|s|}e^{-\mu|s|}H_1(\phi,\psi)(s)ds \\
&\leq \frac{|\lambda_1|}{d_1(\lambda_2-\lambda_1)}\|H_1(\phi,\psi)\|_\mu \sup_{t\in\mathbb{R}} e^{\lambda_1 t-\mu|t|}\int_{-\infty}^{t} e^{-\lambda_1 s}e^{\mu|s|}ds \\
&+ \frac{\lambda_2}{d_1(\lambda_2-\lambda_1)}\|H_1(\phi,\psi)\|_\mu \sup_{t\in\mathbb{R}} e^{\lambda_2 t-\mu|t|}\int_{t}^{\infty} e^{-\lambda_2 s}e^{\mu|s|}ds.
\end{aligned}$$

Si $t>0,$ *alors*

$$\begin{aligned}
\left\|F_1'(\phi,\psi)(t)\right\|_\mu &\leq \frac{\lambda_1}{d_1(\mu+\lambda_1)(\lambda_2-\lambda_1)}\|H_1(\phi,\psi)\|_\mu + \frac{\lambda_2}{d_1(\lambda_2-\mu)(\lambda_2-\lambda_1)}\|H_1(\phi,\psi)\|_\mu \\
&\leq \frac{1}{d_1(\lambda_2-\lambda_1)}\left[\frac{\lambda_1}{(\mu+\lambda_1)}+\frac{\lambda_2}{(\lambda_2-\mu)}\right]\|H_1(\phi,\psi)\|_\mu .
\end{aligned}$$

Si $t<0,$ *alors*

$$\begin{aligned}
\left\|F_1'(\phi,\psi)(t)\right\|_\mu &\leq \frac{-\lambda_1}{d_1(\lambda_2-\lambda_1)}\frac{1}{|\mu+\lambda_1|}\|H_1(\phi,\psi)\|_\mu \\
&+ \frac{\lambda_2}{d_1(\lambda_2-\lambda_1)}\left[\left|\frac{1}{\lambda_2-\mu}-\frac{1}{\lambda_2+\mu}\right|+\frac{1}{\mu+\lambda_2}\right]\|H_1(\phi,\psi)\|_\mu \\
&\leq \frac{1}{d_1(\lambda_2-\lambda_1)}\left[\frac{\lambda_1}{(\mu+\lambda_1)}+\frac{\lambda_2}{(\lambda_2-\mu)}\right]\|H_1(\phi,\psi)\|_\mu .
\end{aligned}$$

Par la monotonie opposé de $H_1(\phi,\psi)$ *on écrit* ϕ *et* ψ *respectivement (voir le lemme 2.3.1) et on a* $(0,0)\leq(\phi,\psi)\leq(k_1,k_2)$*. nous avons cela* $\|H_1(\phi,\psi)\|_\mu$ *est borné par un nombre* *positive . Par conséquent, il existe une constante* M *telle que* $\left\|F_1'(\phi,\psi)(t)\right\|_\mu \leq M$. *pour* $F_2(\phi,\psi)$, *le calcul directe montre que*

$$\begin{aligned} F_2'(\phi,\psi)(t) &= \frac{\lambda_3 e^{\lambda_3 t}}{d_2(\lambda_4-\lambda_3)} \int_{-\infty}^{t} e^{-\lambda_3\theta} H_2(\phi,\psi)(\theta)d\theta \\ &+ \frac{\lambda_4 e^{\lambda_4 t}}{d_2(\lambda_4-\lambda_3)} \int_{t}^{\infty} e^{-\lambda_4\theta} H_2(\phi,\psi)(\theta)d\theta. \end{aligned}$$

i.e. $F'(\phi,\psi)(t) \geq 0$. *le point ii) du lemme 2.3.3 montre que* $F'(\phi,\psi)(t) \geq 0$, *cependant le point i) du lemme 2.3.2 et sachant que* $\lambda_3 < 0$ *et* $\lambda_4 > 0$, *alors on a*

$$\begin{aligned} 0 \leq F_2'(\phi,\psi)(t) &\leq \frac{\lambda_4 e^{\lambda_4 t}}{d_2(\lambda_4-\lambda_3)} \int_{t}^{+\infty} e^{-\lambda_4\theta} H_2(\phi,\psi)(\theta)d\theta \\ &\leq \frac{\lambda_4 e^{\lambda_4 t}}{d_2(\lambda_4-\lambda_3)} H_2(\overline{\phi},\overline{\psi})(t) \int_{t}^{+\infty} e^{-\lambda_4\theta} d\theta \\ &\leq \frac{1}{d_2(\lambda_4-\lambda_3)} H_2(\overline{\phi},\overline{\psi})(t). \end{aligned}$$

Par conséquent (P_1) *montre que* $\left\|F_i'(\phi,\psi)(t)\right\|_\mu$ *est également borné par une certaine constante positive. L'évaluation ci-dessus pour* F' *montre que* $F(\Gamma((\underline{\phi},\underline{\psi}),(\overline{\phi},\overline{\psi})))$ *est equicontinue. On voit facilement que est uniformément borné. Après, nous définissons*

$$F^{(n)}(\phi,\psi)(t) = \begin{cases} F(\phi,\psi)(t), & t \in [-n,n] \\ F(\phi,\psi)(n), & t \in]n,+\infty[\\ F(\phi,\psi)(-n), & t \in]-\infty,-n[\,. \end{cases}$$

Alors, pour quel $n \geq 1$, $F^{(n)}(\Gamma((\underline{\phi},\underline{\psi}),(\overline{\phi},\overline{\psi})))$ *est aquicontinue et uniformément borné dans* $\Gamma((\underline{\phi},\underline{\psi}),(\overline{\phi},\overline{\psi}))$. *Maintenant, dans l'intervalle* $[-n,n]$, *le théorème d'Ascoli-Arzela pour être appliqué à* $F^{(n)}$, *impliquant que* $F^{(n)}$ *est compact.D'autre part,* $F^{(n)} \longrightarrow F$ *dans*

$B_\mu(\mathbb{R},\mathbb{R}^2)$ *si* $n \longrightarrow \infty$,

$$\begin{aligned}
&\sup_{t\in R}\left|F^{(n)}(\phi,\psi)(t)-F(\phi,\psi)(t)\right|e^{-\mu|t|}\\
&=\sup_{t\in[-\infty,-n]\cup[n,+\infty]}\left|F^{(n)}(\phi,\psi)(t)-F(\phi,\psi)(t)\right|e^{-\mu|t|}\\
&\leq 2ke^{-\mu n}\longrightarrow_{n\to\infty}0.
\end{aligned}$$

donc $F:\Gamma((\underline{\phi},\underline{\psi}),(\overline{\phi},\overline{\psi}))\longrightarrow\Gamma((\underline{\phi},\underline{\psi}),(\overline{\phi},\overline{\psi}))$,*est compact.*

Maintenant, nous somme en position pour énoncer et démontrer le théorème principal suivant : ∎

Théorème 2.3.1 *Supposons que* $(A_1)-(A_3)$ *et (PQM) sont vérifiés et qu'il y'a sur et sous solution* $(\overline{\phi},\overline{\psi})$ *et* $(\underline{\phi},\underline{\psi})$ *pour (2.3) satisfat* $(P_1)-(P_3)$ *et* (P_4) $\sup_{t\in\mathbb{R}}\underline{\psi}(t)>0,\underline{\phi}(t)$ *est non décroissante avec*

$$\sup_{t\in\mathbb{R}}\underline{\phi}(t)>0et\begin{cases} f(\widetilde{u},\widetilde{v})=(f_1(\widetilde{u},\widetilde{v}),f_2(\widetilde{u},\widetilde{v}))\neq(0,0),\\ pour\ (u,v)\in\left[\sup_{t\in R}\underline{\phi}(t),k_1\right)\times\left[\sup_{t\in\mathbb{R}}\underline{\psi}(t),k_2\right).\end{cases}$$

Alors, (2.3)-(2.6) possèdent une solution avec la deuxième composante $\psi(t)$ *non décroissante* $(t\in\mathbb{R})$.*C'est-à-dire, le système (2.2) a un front d'onde progressive.*

Preuve. Combinant les lemmes 2.3.1-2.3.6 avec le théorème de point fixe de Schauder qui donne l'existence d'un point fixe $(\phi^*(t),\psi^*(t))$ de F dans $\Gamma((\underline{\phi},\underline{\psi}),(\overline{\phi},\overline{\psi}))$ donc il se donne une solution de (2.3). Reste à prouver que ce point fixe satisfait la condition de frontière asymptotique (2.6). Tout d'abord, d'après (P_2) et le fait que

$$0\leq(\underline{\phi},\underline{\psi})(t)\leq(\phi^*(t),\psi^*(t))\leq(\overline{\phi},\overline{\psi})(t)\leq(k_1,k_2),$$

On a

$$\lim_{t \longrightarrow \infty} (\phi^*, \psi^*)(t) = (0, 0),$$

deuxièmement, $(\phi^*(t), \psi^*(t)) \subset \Gamma((\underline{\phi}, \underline{\psi}), (\overline{\phi}, \overline{\psi}))$ implique que $\psi^*(t)$ est non décroissante monotone pour $t \in \mathbb{R}$, et par conséquent $\lim_{t \longrightarrow \infty} \psi^*(t)$ existe et satisfait

$$k_2^* := \lim_{t \longrightarrow \infty} \psi^*(t) = \sup_{t \in \mathbb{R}} \psi^*(t) \geq \sup_{t \in \mathbb{R}} \underline{\psi}(t) > 0.$$

Maintenant, utilisant la règle de l'Hopital à $\psi^*(t) = F_2(\phi^*(t), \psi^*(t))$, on a

$$\begin{aligned}
\lim_{t \longrightarrow \infty} \psi^*(t) &= F_2(\phi^*(t), \psi^*(t)) \\
&= \lim_{t \longrightarrow \infty} \frac{1}{d_2(\lambda_4 - \lambda_3)} \left[\int_{-\infty}^{t} e^{\lambda_3(t-s)} H_2(\phi^*, \psi^*)(s) ds + \int_{t}^{+\infty} e^{\lambda_4(t-s)} H_2(\phi^*, \psi^*)(s) ds \right] \\
&= \lim_{t \longrightarrow \infty} \frac{1}{d_2(\lambda_4 - \lambda_3)} \left[\frac{\int_{-\infty}^{t} e^{-\lambda_3 s} H_2(\phi^*, \psi^*)(s) ds}{e^{-\lambda_3 t}} + \frac{\int_{t}^{+\infty} e^{-\lambda_4 s} H_2(\phi^*, \psi^*)(s) ds}{e^{-\lambda_4 t}} \right] \\
&= \frac{1}{d_2(\lambda_4 - \lambda_3)} \lim_{t \longrightarrow \infty} \left[\frac{H_2(\phi^*, \psi^*)(t)}{-\lambda_3} - \frac{H_2(\phi^*, \psi^*)(t)}{-\lambda_4} \right] \\
&= \frac{1}{d_2(\lambda_4 - \lambda_3)} \lim_{t \longrightarrow \infty} \left[\frac{H_2(\phi^*, \psi^*)(t)}{-\lambda_3} + \frac{H_2(\phi^*, \psi^*)(t)}{\lambda_4} \right].
\end{aligned}$$

Sachant que

$$H_2(\phi^*, \psi^*)(t) = f_{2c}(\phi_t^*, \psi_t^*) + \beta_2 \psi^*(t),$$

et

$$\begin{cases} \lambda_3 = \frac{c - \sqrt{c^2 + 4\beta_2 d_2}}{2d_2} \\ \qquad et \\ \lambda_4 = \frac{c + \sqrt{c^2 + 4\beta_2 d_2}}{2d_2}, \end{cases}$$

alors

$$\begin{aligned}
\lim_{t\longrightarrow\infty}\psi^*(t) &= \frac{1}{d_2(\lambda_4-\lambda_3)}\lim_{t\longrightarrow\infty}\left[\frac{f_{2c}(\phi_t^*,\psi_t^*)+\beta_2\psi^*(t)}{-\lambda_3}+\frac{f_{2c}(\phi_t^*,\psi_t^*)+\beta_2\psi^*(t)}{\lambda_4}\right] \\
&= \frac{1}{d_2(\lambda_4-\lambda_3)}\lim_{t\longrightarrow\infty}\left[\frac{(\lambda_4-\lambda_3)\left[f_{2c}(\phi_t^*,\psi_t^*)+\beta_2\psi^*(t)\right]}{(-\lambda_3)(\lambda_4)}\right] \\
&= \frac{1}{d_2}\lim_{t\longrightarrow\infty}\left[\frac{(-4d_2^2)\left[f_{2c}(\phi_t^*,\psi_t^*)+\beta_2\psi^*(t)\right]}{(c-\sqrt{c^2+4\beta_2 d_2})(c+\sqrt{c^2+4\beta_2 d_2})}\right] \\
&= \lim_{t\longrightarrow\infty}\left[\frac{(-4d_2^2)\left[f_{2c}(\phi_t^*,\psi_t^*)+\beta_2\psi^*(t)\right]}{(c^2-c^2-4\beta_2 d_2)}\right] \\
&= \lim_{t\longrightarrow\infty}\left[\frac{f_{2c}(\phi_t^*,\psi_t^*)}{\beta_2}+\psi^*(t)\right],
\end{aligned}$$

ce qui implique que

$$\lim_{t\longrightarrow\infty} f_{2c}(\phi_t^*,\psi_t^*)=0.$$

$$\text{comme } f_{2c}(\phi_t^*,\psi_t^*)=\psi^*(t)\left[h_c(\psi_t^*)+\alpha\phi^*(t)\right],$$

$$\text{alors } \phi^*(t)=\frac{1}{\alpha}\left[\frac{f_{2c}(\phi_t^*,\psi_t^*)}{\psi^*(t)}-h_c(\psi_t^*)\right],$$

ce qui montre que $k_1^* := \lim_{t\longrightarrow\infty}\phi^*(t)$ existe. Nous devons avoir $(f_{1c}(\widetilde{k}_1^*,\widetilde{k}_2^*), f_{2c}(\widetilde{k}_1^*,\widetilde{k}_2^*)) = (0,0)$.la note (P_4) implique que

$$\begin{cases} 0\le \sup_{t\in R}\underline{\psi}(t)\le \widetilde{k}_2^*\le k_2 \\ 0\le \sup_{t\in R}\underline{\phi}(t)=\lim_{t\longrightarrow\infty}\underline{\phi}(t)\le \lim_{t\longrightarrow R}\phi^*(t)=k_1^*\le k_1 \end{cases}$$

Enore d'après (P_4), on conclut que $k_1^* = k_1$ et $\widetilde{k}_2^* = k_2$. Ansi le point fixe satisfait la frontière (2.6) qui donne un front des ondes progressives de (2.2).

Remarque 2.3.1 *Dans la preuve du théorème précédent, on voit que la deuxième composante $\psi^*(t)$ est non décroissante et la première composante $\phi^*(t)$ ne possède pas la monotonie.*

Une telle différence entre les composantes du front ondes progressives est due au fait que nous avons seulement assumé la monotonie quasi partiel (PQM) pour la limite non-

linéaire. De même remarque s'applique également au théorème 2.4.1 dans la prochaine section.

■

2.4 Cas Partiellement exponentiel de non quasi-monotonie.

Dans cette partie on va etudier l'existence de la solution sous les condition :

(PQM*) il existe 2 constantes positives $\beta_1 > 0$ et $\beta_2 > 0$ telles que

$$\begin{cases} f_{1c}(\phi_1, \psi_1) - f_{1c}(\phi_2, \psi_1) + \beta_1 [\phi_1(0) - \phi_2(0)] \geq 0 \\ f_{1c}(\phi_1, \psi_1) - f_{1c}(\phi_1, \psi_2) \leq 0 \\ f_{2c}(\phi_1, \psi_1) - f_{2c}(\phi_2, \psi_2) + \beta_2 [\psi_1(0) - \psi_2(0)] \geq 0 \\ \text{où} \\ \phi_1, \phi_2, \psi_1 \text{ et } \psi_2 \in C([-\tau, 0], \mathbb{R}). \end{cases}$$

avec

i) $0 \leq \phi_2(s) \leq \phi_1(s) \leq k_1$, $0 \leq \psi_2(s) \leq \psi_1(s) \leq k_2$, $s \in [-\tau, 0]$.

ii) $e^{\beta_1 s} [\phi_1(s) - \phi_2(s)]$ et $e^{\beta_2 s} [\psi_1(s) - \psi_2(s)]$ est non décroissante si $s \in [-\tau, 0]$.

plus précisement, nous remplaçons (P_3) (employé pour garantir que l'ensemble $\Gamma^*((\underline{\phi}, \underline{\psi}), (\overline{\phi}, \overline{\psi}))$ est non vide) avec la présentation suivante

(P_3^*) l'ensemble

$$\Gamma^*((\underline{\phi},\underline{\psi}),(\overline{\phi},\overline{\psi})) = \left\{ \begin{array}{c} i)\ \psi \text{ est non décroissante dans } \mathbb{R} \\ ii)\ (\underline{\phi},\underline{\psi})(t) \leq (\phi,\psi)(t) \leq (\overline{\phi},\overline{\psi})(t) \\ iii)\ e^{\beta_1 t}\left[\overline{\phi}(t)-\phi(t)\right], e^{\beta_2 t}\left[\overline{\psi}(t)-\psi(t)\right], \\ (\phi,\psi)\in C(\mathbb{R},\mathbb{R}^2) \\ e^{\beta_1 t}\left[\phi(t)-\underline{\phi}(t)\right], e^{\beta_2 t}\left[\psi(t)-\underline{\psi}(t)\right], \\ \text{est non décroissante, } t\in\mathbb{R}. \\ iv)\ e^{\beta_2 t}\left[\psi(t+s)-\psi(t)\right] \\ \text{est non décroissante, } t\in\mathbb{R},\ s>0 \end{array} \right\}$$

est non vide.

Lemme 2.4.1 *Supposons que (A_1) et (PQM*) sont vérifiés, alors*

$$\left\{ \begin{array}{l} H_1(\phi_2,\psi_1)(t) \leq H_1(\phi_1,\psi_1)(t) \\ H_1(\phi_1,\psi_1)(t) \leq H_1(\phi_1,\psi_2)(t) \\ t\in\mathbb{R},\ \phi_i,\psi_i\in C(\mathbb{R},\mathbb{R}),\ i=1,2 \end{array} \right.$$

avec

i) $0 \leq \phi_2(t) \leq \phi_1(t) \leq k_1,\ 0 \leq \psi_2(t) \leq \psi_1(t) \leq k_2$

ii) $e^{\beta_1 t}\left[\phi_1(t)-\phi_2(t)\right]$ *et* $e^{\beta_2 t}\left[\psi_1(t)-\psi_2(t)\right]$ *sont non décroissantes pour* t.

Lemme 2.4.2 *Supposons que (A_1) et (PQM*) sont vérifié, alors pour tout $(\phi,\psi) \in \Gamma^*((\underline{\phi},\underline{\psi}),(\overline{\phi},\overline{\psi}))$, on a*

(i) $H_2(\phi,\psi)(t) \geq 0,\ t\in\mathbb{R}$.

(ii) $H_2(\phi,\psi)(t) \geq 0$ *est non décroissante pour* $t\in\mathbb{R}$.

(iii) $H_2(\phi_1,\psi_1)(t) \leq H_2(\phi,\psi)(t)$ *pour* $t\in\mathbb{R},\ \phi_i,\psi_i\in C(\mathbb{R},\mathbb{R}),\ i=1,2$

avec

a) $0 \leq \phi_2(t) \leq \phi_1(t) \leq k_1,\ 0 \leq \psi_2(t) \leq \psi_1(t) \leq k_2$

b) $e^{\beta_1 t}[\phi_1(t)-\phi_2(t)]$ *et* $e^{\beta_2 t}[\psi_1(t)-\psi_2(t)]$ *sont non décroissantes pour* t.

Lemme 2.4.3 *Supposons que* (A_1) *et (PQM*) sont vérifié, alors pour tout* $(\phi,\psi) \in \Gamma^*((\underline{\phi},\underline{\psi}),(\overline{\phi},\overline{\psi}))$, *on a*

1)$F_2(\phi,\psi)(t) \geq 0$ *est non décroissante pour* $t \in \mathbb{R}$.

2) $F_2(\phi_1,\psi_1)(t) \leq F_2(\phi,\psi)(t)$ *pour* $t \in \mathbb{R}$, $\phi_i,\psi_i \in C(\mathbb{R},\mathbb{R})$, $i=1,2$

avec

a) $0 \leq \phi_2(t) \leq \phi_1(t) \leq k_1$, $0 \leq \psi_2(t) \leq \psi_1(t) \leq k_2$

b) $e^{\beta_1 t}[\phi_1(t)-\phi_2(t)]$ *et* $e^{\beta_2 t}[\psi_1(t)-\psi_2(t)]$ *sont non décroissantes pour* t.

Il est évident que si (P_3^*) est vérifiée, alors l'ensemble $\Gamma^*((\underline{\phi},\underline{\psi}),(\overline{\phi},\overline{\psi}))$ est fermé, borné et convexe de $B_\mu(\mathbb{R},\mathbb{R}^2)$, ainsi la continuité de F ne dépend pas de (PQM) est le reste vraie. Afin d'appliquer le théorème de point fixe de Schauder, nous exigeons $F:\Gamma^* \longrightarrow \Gamma^*$ est compact.

Lemme 2.4.4 *Supposons que* (A_1) *vérifié, alors*

$$F(\Gamma^*((\underline{\phi},\underline{\psi}),(\overline{\phi},\overline{\psi}))) \subset \Gamma^*((\underline{\phi},\underline{\psi}),(\overline{\phi},\overline{\psi})).$$

Preuve. Soit $(\phi,\psi) \in \Gamma^*((\underline{\phi},\underline{\psi}),(\overline{\phi},\overline{\psi}))$, par un changement semblable du lemme 2.3.5, on peut vérifier que

$$F(\phi,\psi) = (F_1(\phi,\psi), F_2(\phi,\psi))$$

satisfait la première et la deuxième conditions de $\Gamma^*((\underline{\phi},\underline{\psi}),(\overline{\phi},\overline{\psi}))$. On voit facilement que si (PQM*) est satisfait, nous pouvons toujour choisir β_1 et β_2 suffisament grand tels que

$$\begin{cases} c \geq 1-\min\{\beta_1 d_1, \beta_2 d_2\} \\ et \\ \beta_1+\lambda_1>0, \beta_1+\lambda_2>0, \beta_2+\lambda_3>0, \beta_2+\lambda_4>0. \end{cases}$$

Maintenant, d'après le lemme 2.4.2, et par quelque calcul simples, on obtient

$$
\begin{aligned}
&\frac{d}{dt}e^{\beta_2 t}\left[F_2(\phi,\psi)(t+s)-F_2(\phi,\psi)(t)\right]\\
&=\frac{d}{dt}e^{\beta_2 t}\left[\frac{1}{d_2(\lambda_4-\lambda_3)}\left(\int_{-\infty}^{t+s} e^{\lambda_3(t+s-\theta)}H_2(\phi,\psi)(\theta)d\theta+\int_{t+s}^{+\infty} e^{\lambda_4(t+s-\theta)}H_2(\phi,\psi)(\theta)d\theta\right)\right.\\
&\left.-\frac{1}{d_2(\lambda_4-\lambda_3)}\left(\int_{-\infty}^{t} e^{\lambda_3(t-\theta)}H_2(\phi,\psi)(\theta)d\theta+\int_{t}^{+\infty} e^{\lambda_4(t-\theta)}H_2(\phi,\psi)(\theta)d\theta\right)\right]\\
&=\frac{d}{dt}e^{\beta_2 t}\left[\int_{-\infty}^{t}\frac{e^{\lambda_3(t-\theta)}}{d_2(\lambda_4-\lambda_3)}\left\{H_2(\phi,\psi)(s+\theta)-H_2(\phi,\psi)(\theta)\right\}d\theta\right]\\
&+\frac{d}{dt}e^{\beta_2 t}\left[\int_{t}^{\infty}\frac{e^{-\lambda_4(t-\theta)}}{d_2(\lambda_4-\lambda_3)}\left\{H_2(\phi,\psi)(s+\theta)-H_2(\phi,\psi)(\theta)\right\}d\theta\right]\\
&=\frac{d}{dt}e^{(\beta_2+\lambda_3)t}\left[\int_{-\infty}^{t}\frac{e^{-\lambda_3\theta}}{d_2(\lambda_4-\lambda_3)}\left\{H_2(\phi,\psi)(s+\theta)-H_2(\phi,\psi)(\theta)\right\}d\theta\right]\\
&+\frac{d}{dt}e^{(\beta_2+\lambda_4)t}\left[\int_{t}^{\infty}\frac{e^{-\lambda_4\theta}}{d_2(\lambda_4-\lambda_3)}\left\{H_2(\phi,\psi)(s+\theta)-H_2(\phi,\psi)(\theta)\right\}d\theta\right]\\
&=(\beta_2+\lambda_3)e^{(\beta_2+\lambda_3)t}\left[\int_{-\infty}^{t}\frac{e^{-\lambda_3\theta}}{d_2(\lambda_4-\lambda_3)}\left\{H_2(\phi,\psi)(s+\theta)-H_2(\phi,\psi)(\theta)\right\}d\theta\right]\\
&+(\beta_2+\lambda_4)e^{(\beta_2+\lambda_4)t}\left[\int_{t}^{\infty}\frac{e^{-\lambda_4\theta}}{d_2(\lambda_4-\lambda_3)}\left\{H_2(\phi,\psi)(s+\theta)-H_2(\phi,\psi)(\theta)\right\}d\theta\right]\\
&\geq 0.
\end{aligned}
$$

Ce qui vérifié la condition (iv) de Γ^* pour $F(\phi,\psi)$. pour la condition (iii) de Γ^* on procède comme suit, par la définition de $(\underline{\phi}, \underline{\psi})$ et $(\overline{\phi}, \overline{\psi})$, on a

$$d_1\overline{\phi}''(t) - c\overline{\phi}'(t) - \beta_1\overline{\phi}(t) + H_1(\overline{\phi}, \underline{\psi})(t) \leq 0 \tag{2.17}$$

$$d_2\overline{\psi}''(t) - c\overline{\psi}'(t) - \beta_2\overline{\psi}(t) + H_2(\overline{\phi}, \overline{\psi})(t) \leq 0 \tag{2.18}$$

$$d_1\underline{\phi}''(t) - c\underline{\phi}'(t) - \beta_1\underline{\phi}(t) + H_1(\underline{\phi}, \overline{\psi})(t) \geq 0 \tag{2.19}$$

$$d_2\underline{\psi}''(t) - c\underline{\psi}'(t) - \beta_2\underline{\psi}(t) + H_2(\underline{\phi}, \underline{\psi})(t) \geq 0. \tag{2.20}$$

Soit par substitution de (2.11) par (2.17) et (2.11) par (2.18) en prenant

$$w_1 = \overline{\phi} - F_1(\phi, \psi) \quad \text{et} \quad w_2 = \overline{\psi} - F_2(\phi, \psi)$$

et en utilisant les lemmes 2.4.1 et 2.4.2

$$d_1w_1''(t) - cw_1'(t) - \beta_1w_1(t) \leq 0$$

$$d_2w_2''(t) - cw_2'(t) - \beta_2w_2(t) \leq 0.$$

Sachant que $cw_1'(t) = c\phi'(t) - cF_1'(\phi, \psi)$,(2.17) nous donne

$$c\overline{\phi}(t) \geq d_1\overline{\phi}''(t) - \beta_1\overline{\phi}(t) + H_1(\overline{\phi}, \underline{\psi})(t).$$

i,e.

$$\begin{aligned}
cw_1'(t) &\geq d_1\overline{\phi}''(t) - \beta_1\overline{\phi}(t) + H_1(\overline{\phi}, \underline{\psi})(t) - cF_1'(\phi, \psi)(t) \\
&= d_1\overline{\phi}''(t) - \beta_1\overline{\phi}(t) + H_1(\overline{\phi}, \underline{\psi})(t) - d_1F_1''(\phi, \psi)(t) \\
&+ \beta_1F_1(\phi, \psi)(t) - H_1(\phi, \psi)(t) \\
&= d_1w_1''(t) - \beta_1w_1(t) + [H_1(\overline{\phi}, \underline{\psi})(t) - H_1(\phi, \psi)(t)] \\
&\geq d_1w_1''(t) - \beta_1w_1(t).
\end{aligned}$$

posons $h(t) = -cw_1^{'}(t) - d_1 w_1^{''}(t) + \beta_1 w_1(t), \ t \in \mathbb{R}$, alors $h(t) \geq 0$. i.e.

$$d_1 w_1^{''}(t) - cw_1^{'}(t) - \beta_1 w_1(t) = -h(t), \quad t \in \mathbb{R}.$$

La théorie fondamentale de l'équation différentielle linéaire du deuxième ordre donne

$$w_1(t) = C_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 e^{\lambda_2 t} + \frac{1}{d_1(\lambda_2 - \lambda_1)} \left[\int_{-\infty}^{t} e^{\lambda_1 (t-s)} h(s) ds + \int_{t}^{\infty} e^{\lambda_2 (t-s)} h(s) ds \right]$$

avec C_1 et C_2 sont 2 constantes, $\lambda_1 < 0$ et $\lambda_2 > 0$ où

$$\lim_{t \longrightarrow -\infty} w_1(t) = \lim_{t \longrightarrow -\infty} \overline{\phi} - \lim_{t \longrightarrow -\infty} F_1(\phi, \psi) = 0$$

et

$$\lim_{t \longrightarrow \infty} w_1(t) = \lim_{t \longrightarrow \infty} \overline{\phi} - \lim_{t \longrightarrow \infty} F_1(\phi, \psi) = k - k = 0$$

i,e.

$$C_1 = C_2 = 0$$

donc

$$\begin{aligned} w_1(t) &= \overline{\phi} - F_1(\phi, \psi) \\ &= \frac{1}{d_1(\lambda_2 - \lambda_1)} \left[\int_{-\infty}^{t} e^{\lambda_1 (t-s)} h(s) ds + \int_{t}^{\infty} e^{\lambda_2 (t-s)} h(s) ds \right] \\ &\geq 0 \end{aligned}$$

Ainsi

$$e^{\beta_1 t} w_1(t) = e^{(\beta_1 + \lambda_1) t} \int_{-\infty}^{t} \frac{e^{-\lambda_1 s}}{d_1(\lambda_2 - \lambda_1)} h(s) ds + e^{(\beta_1 + \lambda_2) t} \int_{-\infty}^{t} \frac{e^{-\lambda_2 s}}{d_1(\lambda_2 - \lambda_1)} h(s) ds$$

par conséquent

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\left[e^{\beta_1 t}w_1(t)\right] &= \frac{d}{dt}\left[e^{(\beta_1+\lambda_1)t}\int_{-\infty}^{t}\frac{e^{-\lambda_1 s}}{d_1(\lambda_2-\lambda_1)}h(s)ds\right] \\
&+ \frac{d}{dt}\left[e^{(\beta_1+\lambda_2)t}\int_{-\infty}^{t}\frac{e^{-\lambda_2 s}}{d_1(\lambda_2-\lambda_1)}h(s)ds\right] \\
&= (\beta_1+\lambda_1)e^{(\beta_1+\lambda_1)t}\int_{-\infty}^{t}\frac{e^{-\lambda_1 s}}{d_1(\lambda_2-\lambda_1)}h(s)ds \\
&+ (\beta_1+\lambda_2)e^{(\beta_1+\lambda_2)t}\int_{-\infty}^{t}\frac{e^{-\lambda_2 s}}{d_1(\lambda_2-\lambda_1)}h(s)ds \\
&+ e^{(\beta_1+\lambda_2)t}\frac{e^{-\lambda_1 t}}{d_1(\lambda_2-\lambda_1)}h(t) - e^{(\beta_1+\lambda_2)t}\frac{e^{-\lambda_2 t}}{d_1(\lambda_2-\lambda_1)}h(t) \\
&= (\beta_1+\lambda_1)e^{(\beta_1+\lambda_1)t}\int_{-\infty}^{t}\frac{e^{-\lambda_1 s}}{d_1(\lambda_2-\lambda_1)}h(s)ds \\
&+ (\beta_1+\lambda_2)e^{(\beta_1+\lambda_2)t}\int_{-\infty}^{t}\frac{e^{-\lambda_2 s}}{d_1(\lambda_2-\lambda_1)}h(s)ds \\
&\geq 0
\end{aligned}$$

i,e.

$$\frac{d}{dt}\left[e^{\beta_1 t}w_1(t)\right] \geq 0, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Ainsi

$$\frac{d}{dt}\left[e^{\beta_1 t}w_1(t)\right] \geq 0, \qquad \frac{d}{dt}\left[e^{\beta_1 t}w_2(t)\right] \geq 0. \tag{2.21}$$

De même remplaçant de nouveau (2.11) respectivement par (2.19) et (2.20) on obtient facilement

$$\frac{d}{dt}\left[e^{\beta_2 t}u_1(t)\right] \geq 0, \qquad \frac{d}{dt}\left[e_2^{\beta_2 t}u_2(t)\right] \geq 0, \tag{2.22}$$

où

$$u_1 = F_1(\phi,\psi) - \underline{\phi}, \quad u_2 = F_1(\phi,\psi) - \underline{\psi},$$

ce qui montre que $F(\phi,\psi)$ satisfait la condition (iii) de Γ^*. par suite

$$F(\phi,\psi) \subset \Gamma^*.$$

■

Lemme 2.4.5 *Si (PQM*) est vérifié, alors*

$$F : \Gamma^*((\underline{\phi},\underline{\psi}),(\overline{\phi},\overline{\psi})) \longrightarrow \Gamma^*((\underline{\phi},\underline{\psi}),(\overline{\phi},\overline{\psi})), \text{ est compact.}$$

Preuve. La preuve est semblable à celle du lemme 2.3.6 ■

En conclusion, combinant les lemmes 2.4.3-2.4.5 avec le théorème de point fixe de Schauder avec les même argument que dans la preuve du théorème 2.3.1, nous pouvons établir le résultat suivant apparenté au théorème 2.3.1.

Théorème 2.4.1 *Supposons que* $(A_1)-(A_3)$ *et (PQM*) sont vérifiés, et qu'il y a sur et sous solution* $(\overline{\phi},\overline{\psi})$ *et* $(\underline{\phi},\underline{\psi})$ *satisfaisant* $(P_1),(P_3),(P_3^*)$ *et* (P_4)*, alors (2.3)-(2.6) possède une solution avec la deuxième composante* $\psi(t)$ *non décroissante pour* $t\in\mathbb{R}$.

C'est -à-dire, le système (2.2) a un front d'onde progressive.

Bibliographie

[1] Britton, N.F. Reaction diffusion equations and their application to biology. Academic Press, New York,1986.

[2] H.Amman, Fixed point equations and non linear eigenvalue problems in ordered Banach spaces, SIAM Review, vol.18 ,n 4 ,(1976), 620-709.

[3] C.De Coster, J.Tapka ,Introduction à la théorie des sous et sur solutions Institut des Sciences et Techniques de Valenciennes (2010) ,1-3.

[4] Huang, J., Zou, X. Travelling wavefronts in diffusive and cooperative lotka-volterra system with delays. J.Math. Anal. Appl., 271 : 455–466 (2002).

[5] Huang, J., Zou, X. Existence of travelling wavefronts of delayed reaction diffusion systems without monotonicity. Disc. Conti. Dynam. Syst. (series A), 9 : 925–936 (2003).

[6] Ma, S. Travelling wavefronts for delayed reaction-diffusion systems via a fixed point theorem. J. Differential Equations, 171 : 294–314 (2001).

[7] Murray J. D. Murray. Mathematical Biology, Springer-Verlag, New York, 1989.

[8] Pao, C.V. Nonlinear parabolic and elliptic equations. New York, Plenum Press, 1992.

[9] Smith, H.L., Thieme, H.R. Monotone semiflows in scalar non-quasimonotone functional differential equations. J. Math. Anal. Appl., 150 : 289–306 (1990).

[10] So, J. W.-H., Zou, X. Travelling waves for the diffusive Nicholson's blowflies equation. Appl. Math.Compt., 122 : 385–392 (2001).

[11] Volpert, A.I., Volpert, V.A., Volpert, V.A. Travelling wave solutions of parabolic Systems. Translations of mathematical monographs Vol. 140, Amer. math. Soc., Providence, 1994.

[12] Ye, Q., Li, Y. Introduction of reaction diffusion equations. Academy Press, BeiJing, 1985.

[13] Zou, X., Wu, J. Existence of travelling wavefronts in delayed reaction-diffusion system via monotone iteration method. Proc. Amer. Math. Soc., 125 : 2589–2598 (1997).

Annexe B : Abréviations et Notations

Les différentes abréviations et notations utilisées tout au long de ce mémoire sont expliquées ci-dessous :

C^1	:	La classe des fonctions continument différentiables.
(X, T)	:	Espace topologique.
(E, d)	:	Espace métrique.
∂	:	Dérivées partielles.
c	:	Constant correspondant à la vitesse d'onde.
(ϕ, ψ)	:	Profil de la solution onde progressive
$\vert . \vert$	:	Désigne la norme eucludidinne dans $\mathbb{R}^2$