République Algérienne Démocratique et Populaire

Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

Université Mohamed Khider, Biskra

Faculté des Sciences Exactes et des Sciences de la Nature et de la Vie

Département de Mathématiques

Mémoire présenté en vue de l'obtention du

DIPLÔME DE MASTER en MATHÉMATIQES

Option : **Analyse**

Par

Boumerzoug Walid

Thème

Etude d 'un modèle épidémique avec diffusion

Membres du Comité d'Examen

Pr.	**Mokhtari Zohir**	UMKB	Président
Dr.	**Amrane Houas**	UMKB	Encadreur
Dr.	**Hamdi Soumia**	UMKB	Examinatrice

Juin 2019

Je dédie se modeste travail à ma chere mère,qui a sacrifié toujours pour moi.

A mon cher père qui a sacrifié pour ma réussite.

A mon frère et mes petites soeurs

A tous mes amis

REMERCIEMENTS

Merci à Dieu le tout puissant de m'avoir aidé à accomplir ce modeste travail.

Je remercie tout particulièrement mon directeur de mémoire,monsieur le Dr.*Amrane Houas*, pour son accompagnement et ses précieux conseils qui ont largement contribué à l'aboutissement de ce travail.

Je tiens également à remercier Monsieur Pr.**Mokhtari Zohir** et madame Dr **Hamdi Soumia** d'avoir acceptés d'examiner ce travail.

Enfin je remercie tous ceux qui ont contribué de près ou de loin à la réalisation de ce travail.

TABLE DES MATIÈRES

INTRODUCTION

Durant les derniéres années, les systèmes de réaction-diffusion jouent un role très important, ils ont reçu un intérêt considérable dans la recherche mathématique, puisque la modélisation montre que plusieurs des maladies, épidimies, polution ont des modèles mathématiques sous forme de reaction-diffusion.

Ce travail est organisé de la façon suivante :

Dans le premier chapitre, nous commençons par rappeler brièvement quelques notions générales qui nous seront utiles dans les chapitres ultérieurs.

Le deuxième chapitre est consacré à la l'étude de l'existence du solution pour des systèmes dits de réaction-diffusion.

Dans le dernier chapitre, nous nous intéressons à l'étude de l'existence globale des solutions d'un modèle épidémique de réaction-diffusion

CHAPITRE 1

Notions et résultats préliminaires

1.1 Opérateurs différentiels

1) Soit n un entier, on note $x = (x_1, ..., x_n)$ un point (ou vecteur) de $\mathbb{R}^n$. On appelle **champ de vecteurs** sur $\mathbb{R}^n$ une application $v : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$, qui à $x = (x_1, ..., x_n)$ associe $v(x) = (v_1(x), ..., v_n(x))$.

2) Pour une fonction $u : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$, son **gradient** est le champ de vecteurs défini par :

$$grad u(x) = \nabla u(x) = \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_1}(x), ..., \frac{\partial u_n}{\partial x_n}(x) \right). \tag{1.1}$$

3) Pour un champ de vecteurs v :$\mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ on appelle **divergence** de v la fonction définie par :

$$\text{div } v(x) = \frac{\partial v}{\partial x_1}(x) + ... + \frac{\partial v}{\partial x_n}(x). \tag{1.2}$$

4) On appelle **Laplacien** d'une fonction $u : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie par :

$$\Delta u(x) = \text{div}(\nabla u)(x) = \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + ... + \frac{\partial^2 u}{\partial x_n^2}. \tag{1.3}$$

5) Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^n$ de frontière $\partial\Omega$ régulière. On appelle **normale** à $\partial\Omega$ un champ de vecteurs $v(x)$ défini sur le bord $\partial\Omega$ tel qu'en tout point $x \in \partial\Omega$,

$v(x)$soit orthogonal au bord et unitaire.

6) On appelle **normale extérieure** une normale qui pointe vers l'extérieur du domaine en tout point.

7) On appelle **dérivée normale** d'une fonction régulière u sur le bord $\partial\Omega$ la fonction définie sur les points de $\partial\Omega$ par :

$$\frac{\partial u}{\partial v}(x) = \nabla u(x).v(x) \tag{1.4}$$

(produit scalaire du vecteur $\nabla u(x)$ avec le vecteur $v(x)$).

1.2 Espaces fonctionnels

1) On désigne par $\mathbf{L}^p(\boldsymbol{\Omega})$, $1 \leq p < \infty$ l'espace de fonctions (ou plus exactement des classes d'équivalence de fonctions, au sens de l'égalité presque partout) u mesurables sur Ω tel que $\int_\Omega |u|^p \, dx < \infty$, $\mathbf{L}^p(\boldsymbol{\Omega})$ est muni de la norme $\|u\|^p_{L^p(\Omega)} = \frac{1}{|\Omega|} \int_\Omega |u|^p \, dx$

2) On désigne par $\mathbf{L}^\infty(\boldsymbol{\Omega})$ l'espace de fonctions u mesurables vérifiant : $|u| < C \quad p.p$ (presque partout) sur Ω. où C est une constante positive, $L\infty(\Omega)$ est muni de la norme : $\|u\|_{L^\infty(\Omega)} = \sup_{x\in\Omega} ess \, |u(x)| = \inf \{C, |u| \leq C, p.p..sur..\Omega\}$

3) On définit l'espace $\mathbf{L}^p(\mathbf{0}, \mathbf{T}, \mathbf{X})$,$1 \leq p < \infty$ comme suit :

$L^p(0, T, X) = \left\{ u : [0, T] \longrightarrow X, mesurable, \int_0^T \|u\|^p_X \, dt < 0 \right\}$

muni de la norme $\|u\|^p{}_{L^p(0,T,X)} = \int_0^T \|u\|^p_X \, dt$

4) On définit l'espace $\mathbf{L}^\infty(\mathbf{0}, \mathbf{T}, \mathbf{X})$ comme suit

$L^\infty(0, T, X) = \left\{ u : [0, T] \longrightarrow X, \text{ mesurable}, \sup_{t\in(0,T)} ess \, \|u\|_X < \infty \right\}$

muni de la norme $\|u\|^p{}_{L^\infty(0,T,X)} = \sup_{t\in(0,T)} ess \, \|u\|_X$

Naturellement on a : $L^p(0, T, L^p(\Omega)) = L^p((0, T) \times \Omega), 1 \leq p \leq \infty.$

5) $\mathbf{C}(\boldsymbol{\Omega})$ désigne l'espace des **fonctions continues et bornées** sur Ω muni de la norme

$\|u\|_{C(\Omega)} = \max_{x\in\Omega} |u(x)|$.

6) $\mathbf{C}^k(\boldsymbol{\Omega}), k \in \mathbb{N}$ désigne l'espace des fonctions k **fois continûment différentiables** sur Ω et on écrit $C^\infty(\Omega) = \cap_{k\geq 0} C^k(\Omega)$

7) $\mathbf{H}^1(\boldsymbol{\Omega})$ c'est l'espace de **Sobolev** défini par $H^1(\Omega) = \left\{ u \in L^2(\Omega) : \frac{\partial u}{\partial x_i} \in L^2(\Omega), 1 \leq i \leq n \right\}$

muni de la norme $\|u\|^2_{H^1(\Omega)} = \int_\Omega |u|^2\, dx + \int_\Omega \sum_{i=1}^n \left|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right|^2 dx = \int_\Omega |u|^2\, dx + \int_\Omega |\nabla u|^2\, dx$

8) D'une façon générale pour $m \in \mathbb{N}^*$ et $1 \leq p < \infty$ les espaces de **Sobolev** $H^m(W)$ **et** $W^{m,p}(W)$ sont définis comme suit :

a) $H^m(W) = \{u \in L^2(\Omega) : D^\alpha u \in L^2(\Omega) \textit{ pour tout } \alpha \in \mathbb{N}^n : |\alpha| \leq m\}$

muni de la norme $\|u\|^2_{H^1(\Omega)} = \sum_{|\alpha|\leq m} \int_\Omega |D^\alpha u|^2\, dx = \sum_{|\alpha|\leq m} \|D^\alpha u\|^2_{L^2(\Omega)}$

b) $W^{m,p}(\Omega) = \{u \in L^p(\Omega) : D^\alpha u \in L^p(\Omega), |\alpha| \leq m\}$ muni la norme $\|u\|^p_{m,p} = \sum_{|\alpha|\leq m} \|D^\alpha u\|^p_{L^p(\Omega)}\, n$

où $D^\alpha = \frac{\partial^{a_1+a_2+\ldots+a_n}}{\partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2} \ldots \partial x_n^{\alpha_n}}$

$|\alpha| = \sum_{i=1}^n \alpha_i$ est la dérivée au sens des distributions. Naturellement on a :

$W^{1,2}(\Omega) = H^1(\Omega)$ et $W^{m,2}(\Omega) = H^m(\Omega)$.

1.3 Formule de Green

C'est en fait une généralisation de la formule d'intégration par partie. On peut écrire la formule de Green sous deux formes :

a) $\forall u \in C^2(\Omega), \forall v \in C^1(\Omega), \displaystyle\int_\Omega v\Delta u dx = \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial \eta} v d\sigma - \int_\Omega \nabla v \nabla u dx$

b) $\forall u \in H^2(\Omega), \forall v \in H^1(\Omega), \displaystyle\int_\Omega v\Delta u dx = \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial \eta} v d\sigma - \int_\Omega \nabla v \nabla u dx$

1.4 Inegalité de Gronwall

Soit $T > 0$ et ω, φ deux fonctions intégrables sur $(0, T)$ non négatives, telles que $\omega; \varphi \in L^1(0, T)$ et

$$\exists C1, C2 \geq 0; \varphi(t) \leq C1 + C2 \int_0^t \omega(s)\varphi(s) ds, \quad p.p \;\; sur\;\; (0, T).$$

Alors :

$$\varphi(t) \leq C1exp(C2\int_0^t \omega(s)ds), \; p.p \;\; sur \;\; (0,T). \tag{1.5}$$

1.5 Opérateurs linéaires

Définition 1.5.1 *Soit A un opérateur linéaire de X dans X. On dit que A est **accrétif** si*

$$Re < Au; u >\geq 0; pour\ tout\ u \in D(A). \tag{1.6}$$

De plus si

$$\forall f \in X; \exists u \in D(A), telque\ u + \lambda Au = f \;\; ; i.eR(I + \lambda A) = H, \forall \lambda > 0$$

*alors on dit que A est **maximal accrétif** .*

Définition 1.5.2 *Soit A un opérateur linéaire de X dans X. On dit que A est **monotone** si :*

$$< Au; u >\geq 0; pour\ tout\ u \in D(A). \tag{1.7}$$

Définition 1.5.3 *Soit A un opérateur linéaire de X dans X. On dit que A est **maximal** si*

$$(I + A) \;\; est\ surjective. \tag{1.8}$$

1.6 Théorème Hille-Yosida(non homogènes)

Les équations d'évolution non homogènes sont de la forme :

$$\begin{array}{lcr} \frac{du}{dt} + Au = f(u) & & ....(1) \\ & sur\ [0, T[& \\ u(0, x) = u_0(x) & & ....(2) \end{array} \tag{1.9}$$

où A est un opérateur de X dans X et f est une application de X dans X.

Le théorème suivant permet d'assurer l'existence de la solution de ce type d'équations.

Théorème 1.6.1 *Soit X un espace de Banach et A un opérateur de $D(A) \subset X$ dans X. On suppose que A est* ***m-accrétif*** *dans X. Alors pour tout $u_0 \in D(A)$ et tout $f \in C^1(0;T;X)$ il existe une unique solution de (1) et (2); $u \in C^1(0;T;X) \cap C(0;T;D(A))$ donnée par la formule :*

$$u(t) = T(t)u_0 + \int_0^t T(t-s)f(s)ds$$

Où $T(t)$ désigne le semi groupe engendré par $-A$.

1.7 Principe du maximum(cas non homogène)

Considérons maintenant le problème non homogène :

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} - d\Delta u = f(u) & sur \quad \Omega \times [0,+\infty]. \\ u = 0 & sur \quad \partial\Omega \times [0,+\infty]. \\ u(x,0) = u_0(x) & sur \quad \Omega. \end{cases} \tag{1.10}$$

où $f \in C^1(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}_+), u_0 \in L^\infty(\Omega)$.soit $u_0 \in L^\infty(\Omega)$,et soit u la solution du problème $f(u) \geq 0 \forall u \geq 0, (i.e) \frac{\partial u}{\partial t} - d\Delta u \leq 0)$:

1) si $u_0 \geq 0$ $p.p$ sur Ω alors $u \geq 0$ sur $\Omega \times [0,+\infty]$.

2) si $u_0 \in L^\infty(\Omega)$ alors $u \in L^\infty(\Omega)$ et $\|u\|_{L^\infty(\Omega)} \leq \|u_0\|_{L^\infty(\Omega)}$.

CHAPITRE 2

Existence et positivité des solutions d'un système de réaction diffusion

2.1 Système de réaction diffusion

Dans un milieu continu, soient N espèces chimiques (où constituants fluides). On note $i = 1, 2, ..., N$ l'une de ces espèces, soient alors $u_i(x,t)$ sa concentration (où densité) au temps

t et au point $x = (x_1,\ x_2,.....,x_n)$ de R^n, et D_i son coeffecient de diffusion. Les concentrations $u_i(x,t)$ représentent les variables étudiées dans un modèle de réaction diffusion dont l'évolution est régie par le système d'équation aux dérivées partielles suivantes, appelées équations de réaction diffusion

$$\frac{du}{dt} - D\Delta u = f(u)$$

où $u(x,t) = (u_1(x,t), u_2(x,t), ..., u_n(x,t))$ est l'inconnue,

$f(x,t,u(x,t)) = (f_1(x,t,u(x,t)), ..., f_m(x,t,u(x,t))$ est la réaction (généralement non linéaire) et $D(x,t,u(x,t))$ est une matrice carrée $m \times m$ définie positive et diagonalisable appelée matrice de diffusion. Les termes de réaction sont le résultat de toute interaction entre les composantes de u.

2.1.1 Existence locale et unicité

L'étude d'existence locale et d'unicité des solutions du problème des équations aux dérivées partielles est basée sur la théorie d'existence pour des équations diffiérentielles semi linéaires abstraites

Soit $(X,\|.\|)$ un espace de Banach et soit $A : D(A) \subset X \to X$ un opérateur linéaire $f : X \to X$, Etant donné $u_0 \in X$

Considérons le problème

$$\begin{cases} \frac{du}{dt} - Au = f \\ u(0) = u_0 \end{cases} \quad t > 0 \qquad (R.D)$$

Définition 2.1.1 *On dit qu'une fonction u de la variable réelle $t > 0$ à valeurs dans X est une solution locale du problème (R-D), s'il existe u définie sur un intervalle maximale $[0, T^*)$*

qui pour tout $t < T^*$ est l'unique solution de (R-D) dans $C^1([0, T^*), X)$. En particulier, l'une des deux éventualités suivantes a lieu

i) $T^* = \infty$.

ii) $T^* < \infty$ et $\lim\limits_{t \to T^*} \|u\| = \infty$.

Remarque 2.1.1 *Si la propriété (i) est satisfaite, on dit que la solution u est globale.*

Si la propriété (ii) est satisfaite, on dit que la solution explose en temps fini.

2.1.2 Existence locale et positivité des solutions

Soit Ω est un ouvert borné de $\mathbb{R}^n$ de frontière $\partial\Omega$ régulière. Nous considérons le système d'équations de réaction-diffusion suivant :

$$\begin{array}{llll}
\frac{du}{dt} - a\Delta u = f(u,v) & sur & (0,+\infty)\times\Omega & (1.1)\\
\frac{dv}{dt} - b\Delta u = g(u,v) & sur & (0,+\infty)\times\Omega & (1.2)\\
u(0,x) = u_0(x), v(0,x) = v_0(x) & sur & \Omega & (1.3)\\
\lambda_1 u - (1-\lambda_1)\frac{du}{dv} = \beta_1 & sur & (0,+\infty)\times\partial\Omega & (1.4)\\
\lambda_2 u - (1-\lambda_2)\frac{dv}{dv} = \beta_2 & sur & (0,+\infty)\times\partial\Omega & (1.5)
\end{array}$$

où les hypothèses suivantes sont supposées vérifiées :

($\mathbf{H}_1$) : $a, b, \lambda_i, \beta_i, i = 1, 2, ..$sont des constantes avec $a, b > 0, \beta_i \geq 0$ et soit $0 < \lambda_i < 1, \lambda_i = 1$ ou $\lambda_i = 0$. Aussi $\beta_i = 0$ si $\lambda_i = 0$.

($\mathbf{H}_2$) : f et g sont deux fonctions continûment différentiables de $\mathbb{R}^2$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ avec $f(0,\eta), g(\zeta,0)$ pour tout $\eta, \zeta \geq 0$.

($\mathbf{H}_3$) : $(u_0, v_0) \in (L^2(\Omega))^2$ avec $u_0(x), v_0(x) \geq 0$ pour tout $x \in \Omega$.

Théorème 2.1.1 *Sous les hypothèses* $(H1) - (H3)$*, le système* $(1.1) - (1.5)$ *admet une unique solution locale et classique* (u, v) *sur* $[0, T_{max}) \times \Omega$*, et il existe deux fonctions* $N_1, N_2 : [0, +\infty) \to [0, +\infty)$ *continues telles que*

$$0 \leq u(t,x) \leq N_1(t) \text{ et } 0 \leq v(t,x) \leq N_2(t) \text{ pour tout } (t,x) \in [0, Tmax) \times \Omega$$

.De plus le temps maximal d'existence T_{max} *est caractérisé par :*

$$si\ T_{max} < +\infty, alors\ lim_{t \longrightarrow T_{\max}}(\|u(t)\| + \|v(t)\|) = +\infty$$

Remarque 2.1.2 *Pour étudier l'existence globale de la solution du système* $(1.1) - (1.5)$*, c'est-à-dire déterminer si* $T_{max} = +\infty$*, nous utilisons la contraposée de la caractérisation* (1.6) *du temps maximal d'existence :*

$$\begin{cases} s\prime il \text{ existe une fonction } M : [0,+\infty) \longrightarrow [0,+\infty) \text{ continue telle que :} \\ \|u(t)\|_\infty + \|v(t)\|_\infty \leq M(t) \text{ pout tout } t \in [0, T_{max}). \\ alors\ T_{max} = +\infty \end{cases} \quad (1.6)$$

c'est-à-dire, si les fonctions $u(t)$ *et* $v(t)$ *sont bornées pour tout* $t \in [0, T]$,$T < T_{max}$,*alors* $T_{max} = +\infty$.

Par conséquent, pour montrer l'existence globale de solutions classiques,il suffit de montrer que celles-ci restent uniformément bornées sur leur temps d'existence.

CHAPITRE 3

Etude d'un modèle épidémique de réaction-diffusion

Dans ce chapitre, nous sommes motivés à étudier le système épidémique de réaction-diffusion suivant :

$$\begin{cases} S_t - d_s \Delta S = \Lambda(x) - S - \beta(x) SI + \gamma(x) I, & x \in \Omega, t > 0 \\ I_t - d_I \Delta I = \beta(x) SI - [\gamma(x) + \mu(x)]\, I & x \in \Omega, t > 0 \\ \frac{\partial S}{\partial v} = \frac{\partial I}{\partial v} = 0 & x \in \partial\Omega, t > 0 \\ S(x,0) = S_0(x) \geq 0, I(x,0) = I_0(x) \gneq 0 & x \in \Omega \end{cases} \tag{3}$$

♦ $S(t)$ et $I(t)$ représentent respectivement la densité des populations susceptibles et infectées.

♦ les constantes d_s et d_I représentent respectivement le taux de diffusion des individus susceptibles et infectés

♦ $\beta(x)$ et $\gamma(x)$ sont des fonctions continues positives de Holder sur la comptabilisation du taux de transmission de la maladie et du taux de récupération, respectivement

♦ Le terme de recrutement $\Lambda(x) - S$ signifie que la population susceptible est sujette à croissance linéaire

♦ $\mu(x)$ représente le taux de mortalité des personnes infectées,Λ et μ étant supposé être fonctions positives de Holder sur $\overline{\Omega}$

♦ les données initiales S_0 et I_0 sont des fonctions continues non négatives sur $\overline{\Omega}$, et il y a initialement un nombre positif d'individus infectés, c'est-à-dire $\int\limits_{\Omega} I_0(x)dx > 0$

3.1 Existence de solution locale

Etant donnè le système (3)

Pour que nous pouvons appliquer le théorème de Hille-yoshida on va transformer le système (3) sous la forme suivante :

$$\begin{cases} \frac{du}{dt} + Au = f(u) \\ u(0) = u_0 \end{cases} \tag{3.1}$$

alors on pose :

$$u = \begin{pmatrix} S \\ I \end{pmatrix}, \frac{du}{dt} = \begin{pmatrix} \frac{dS}{dt} \\ \frac{dI}{dt} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} S_t \\ I_t \end{pmatrix}, f(u) = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Lambda(x) - S - \beta(x)SI + \gamma(x)I \\ \beta(x)SI - [\gamma(x) + \mu(x)]\, I \end{pmatrix}$$

d'ou

$$Au = \begin{pmatrix} -d_s\Delta S \\ -d_I\Delta I \end{pmatrix} \Longrightarrow A \begin{pmatrix} S \\ I \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -d_s\Delta S \\ -d_I\Delta I \end{pmatrix} \Longrightarrow A = \begin{pmatrix} -d_s\Delta & 0 \\ 0 & -d_I\Delta I \end{pmatrix}$$

et pour démontrer l'existence il suffit de verifier que A est une matrice monotone maximale et f est Lipschitzienne

• $< Au, u > \geq 0$? on a

$$< Au, u >= \int_{\Omega} Au(x)u(x)d = \int_{\Omega} < \begin{pmatrix} -d_s\Delta S \\ -d_I\Delta I \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} S \\ I \end{pmatrix} > dx = \int_{\Omega} -d_s\Delta S.Sdx + \int_{\Omega} -d_I\Delta I.Sdx$$

D'après la formule de Green :

$$\begin{aligned}\int_{\Omega} - d_s\Delta S.Sdx + \int_{\Omega} - d_I\Delta I.Sdx &= d_s(\int_{\Omega}(\nabla S)^2dx - \int_{\partial\Omega} S\frac{\partial S}{\partial v}dx) + d_I(\int_{\Omega}(\nabla I)^2dx - \int_{\partial\Omega} I\frac{\partial I}{\partial v}dx) \\ &= d_s\int_{\Omega}(\nabla S)^2dx + d_I(\int_{\Omega}(\nabla I)^2dx \geq 0\end{aligned}$$

donc A monotone

pour montrer que A est maximale, il suffit de montrer que $(I + A)$ est surjective

• $(I + A)$ est surjective ?

on a

$$(I + A) = \begin{pmatrix} 1 + d_s\Delta & 0 \\ 0 & 1 + d_I\Delta I \end{pmatrix}$$

la matrice $M = I + A$ de dimension égale 2 et le rang de M égale 2 car $detM$=$(1 + d_s\Delta)(1 + d_I\Delta I) \neq 0$, alors : $dimM$ =$rangM$, on conclure que ($I + A$) est surjective d'ou A est maximale

• $f(u) = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Lambda(x) - S - \beta(x)SI + \gamma(x)I \\ \beta(x)SI - [\gamma(x) + \mu(x)]\, I \end{pmatrix}$ est localement Lipschitzienne?

Pour montrer que f_1 et f_2 sont localement Lipschitzienne il suffit de montrer que $\frac{\partial f_1}{\partial S}$, $\frac{\partial f_1}{\partial I}$ et $\frac{\partial f_2}{\partial S}$, $\frac{\partial f_2}{\partial I}$ sont bornés

on a toute fonction höldérienne est uniformément continue et bornée

alors il existe $r_1, r_2, r_3 \geq 0$ qui verifient que

$$|\beta(x)| \leq r_1, |\gamma(x)| \leq r_2, |\mu(x)| \leq r_3,$$

et comme S et I sont continues sur une boule fermée $\beta_f(0, \mathbb{R})$ donc elles sont bornées donc

$$\exists k_1, k_2 \geq 0 : |S| \leq k_1 \text{ et } |I| \leq k_2 \text{ sur } \beta_f(0, \mathbb{R})$$

$$\begin{cases} \left|\frac{\partial f_1}{\partial S}\right| = |-1 - \beta(x)I| \leq 1 + |\beta(x)I| \leq 1 + r_1 k_2 = C_1 \\ \left|\frac{\partial f_1}{\partial I}\right| = |-\beta(x)S - \gamma(x)| \leq |\beta(x)S| + |\gamma(x)| \leq r_1 k_1 + r_2 = C_2 \end{cases}$$

$\Longrightarrow \frac{\partial f_1}{\partial S}, \frac{\partial f_1}{\partial I}$ sont localement bornés alors f_1 est localement Lipschitzienne

et on a :++

$$\begin{cases} \left|\frac{\partial f_2}{\partial S}\right| = |\beta(x)I| \leq r_1 k_2 = C_3 \\ \left|\frac{\partial f_2}{\partial I}\right| = |\beta(x)S - \gamma(x) - \mu(x)| \leq |\beta(x)S| + |\gamma(x) + \mu(x)| \leq r_1 k_1 + r_2 + r_3 = C_4 \end{cases}$$

$\Longrightarrow \frac{\partial f_2}{\partial S}, \frac{\partial f_2}{\partial I}$ sont localement bornés alors f_2 est localement lipschitzienne

on conclure que $f(u) = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \end{pmatrix}$ est localement lipschitzienne.

3.2 Positivitè de solution

1) S est positif ?

On a $S^-(0, x) = \sup(-S(0, x), 0) = 0$

On multiple l équation (1) de système (3) par $-S^-, et$ et on intègre sur Ω :

$$-\int_\Omega S_t S^- dx + \int_\Omega d_s \Delta S S^- dx = -\int_\Omega \Lambda(x) S^- dx + \int_\Omega S S^- dx + \int_\Omega \beta(x) S I S^- dx - \int_\Omega \gamma(x) I S^- dx$$

$$\Longrightarrow \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int\limits_{\Omega}(S^-)^2dx = -d_s\int\limits_{\Omega}(\nabla S^-)^2dx - \int\limits_{\Omega}\Lambda(x)S^-dx - \int\limits_{\Omega}(S^-)^2dx - \int\limits_{\Omega}\beta(x)(S^-)^2Idx - \int\limits_{\Omega}\gamma(x)S^-Idx$$

alors pour tout I non négatif :

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int\limits_{\Omega}(S^-)^2dx \leq -\int\limits_{\Omega}(S^-)^2dx$$

On intègre sur $[0,t]$ on obtient :

$$\frac{1}{2}\int\limits_{\Omega}(S^-(t,x))^2dx \leq \frac{1}{2}\int\limits_{\Omega}(S^-(0,x))^2dx - \int\limits_{0}^{t}\int\limits_{\Omega}(S^-)^2dx$$

$$\int\limits_{\Omega}(S^-(t,x))^2dx \leq -2\int\limits_{0}^{t}\int\limits_{\Omega}(S^-)^2dx$$

d'après I'inégalité de Gronwall

$$0 \leq (S^-(t,x))^2 \leq 0 \Longrightarrow S^-(t,x) = 0 \Longrightarrow S(t,x) = S^+(t,x) \Longrightarrow S(t,x) \geq 0$$

alors S est positif

2) I est positif ?

Considérons le système (3) ; on multiple l équation (2) de système (3) par $-I^-, et$ on intègre sur Ω :

$$-\int\limits_{\Omega}I_tI^-dx + \int\limits_{\Omega}d_i\Delta II^-dx = -\int\limits_{\Omega}\beta(x)SII^-dx + \int\limits_{\Omega}\left[\gamma(x)+\mu(x)\right]II^-dx \Longrightarrow \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int\limits_{\Omega}(I^-)^2dx$$

$$= -d_i\int\limits_{\Omega}(\nabla I^-)^2dx - \int\limits_{\Omega}\beta(x)S(I^-)^2dx - \int\limits_{\Omega}\left[\gamma(x)+\mu(x)\right](I^-)^2dx$$

$$\Longrightarrow \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int\limits_{\Omega}(I^-)^2dx \leq -\int\limits_{\Omega}\left[\gamma(x)+\mu(x)\right](I^-)^2dx$$

On intègre sur $[0, t]$ on obtient :

$$\frac{1}{2}\int_{\Omega} (I^-(t,x))^2 dx \leq \frac{1}{2}\int_{\Omega} (I^-(0,x))^2 dx - \int_{\Omega} [\gamma(x) + \mu(x)] (I^-)^2 dx$$
$$\Longrightarrow \int_{\Omega} (I^-(t,x))^2 dx \leq -2\int_{\Omega} [\gamma(x) + \mu(x)] (I^-)^2 dx$$

d'après l'inégalité de Gronwall

$$0 \leq (I^-(t,x))^2 \leq 0 \Longrightarrow I^-(t,x) = 0 \Longrightarrow I(t,x) = I^+(t,x) \Longrightarrow I(t,x) \geq 0$$

alors I est positif

3.3 Existence globale et bornage uniforme de la solution

Pour étudier l'existence globale de la solution du système (3), c'est-à-dire déterminer si $T_{max} = +\infty$, nous utilisons la caractérisation du temps maximal d'existence : s'il existe une fonction $M : [0, +\infty) \longrightarrow [0, +\infty)$ continue telle que $\|S(.,t)\|_{L^\infty(\Omega)} + \|I(.,t)\|_{L^\infty(\Omega)} \leq M$; pourtout $t \in [0; T_{max})$, alors $T_{max} = +\infty$

c'est-à-dire, si les fonctions $S(x,t)$ et $I(x,t)$ sont bornées pour tout $t \in [0;T], T < T_{max}$, alors $T_{max} = +\infty$.

Théorème 3.3.1 *Les solutions $(S(x,t), I(x,t))$ du problème (3) existe de manière unique et globale. En outre, il existe une constante positive M en fonction des données initiales et des paramètres $d_I, d_S, \beta, \gamma, \Lambda$ et μ tel que*

$$\|S(.,t)\|_{L^\infty(\Omega)} + \|I(.,t)\|_{L^\infty(\Omega)} \leq M \qquad \forall t \geq 0. \tag{3.1}$$

Preuve. *De la théorie standard des systèmes paraboliques semi-linéaires, il en résulte que*

(3)*admet une solution unique* $(S(x,t), I(x,t))$ *pour* $x \in \overline{\Omega}$ *et* $t \in [0, T_{max})$,*avec* T_{max}*étant le temps maximal d'existence. De plus, le principe maximum pour les équations paraboliques indique que la solution est positif sur* $\overline{\Omega} \times (0, T_{max})$ *Intégrer les deux EDP de* (3) *et ajouter les deux identités résultantes,nous sommes conduits à*

$$\int_{\Omega} S_t dx + \int_{\Omega} I_t dx - d_s \int_{\Omega} \Delta S dx - d_I \int_{\Omega} \Delta I dx = \int_{\Omega} \Lambda(x) dx - \int_{\Omega} S dx - \int_{\Omega} u(x) I dx$$

L'application de la formule de Green donne

$$\int_{\Omega} \Delta S dx = 0 \ \ et \ \int_{\Omega} \Delta I dx = 0$$

alors

$$\int_{\Omega} S_t dx + \int_{\Omega} I_t dx = \int_{\Omega} \Lambda(x) dx - \int_{\Omega} S dx - \int_{\Omega} u(x) I dx$$

d'après le théorème de dérivation sous signe intégrale

$$\frac{d}{dt}\int_{\Omega} S(x,t) dx + \frac{d}{dt}\int_{\Omega} I(x,t) dx = \int_{\Omega} \Lambda(x) dx - \int_{\Omega} S(x,t) dx - \int_{\Omega} u(x) I(x,t) dx$$

où $\theta = \min\{1; u_*\}$

$$\frac{d}{dt}\int_{\Omega} (S(x,t) + I(x,t)) dx \leq \int_{\Omega} \Lambda(x) dx - \theta \int_{\Omega} (S(x,t) + I(x,t)) dx \tag{3.2}$$

on intègre sur $[0, t]$

$$\int_{\Omega} (S(x,t) + I(x,t)) dx \leq \int_0^t \int_{\Omega} \Lambda(x) dx - \theta \int_0^t \int_{\Omega} (S(x,t) + I(x,t)) dx$$

d après l 'inegalité de Gronwall

$$\int_{\Omega}(S(x,t)+I(x,t))dx \leq \int_{0}^{t}\int_{\Omega}\Lambda(x)e^{-\theta t}dx \leq M_1, \forall t \in (0, T_{max}).$$

On pose :

$$M_1 = \int_{0}^{t}\int_{\Omega}\Lambda(x)e^{-\theta t}dx$$

comme $\Lambda(x)$ *est positives, alors*

$$\int_{\Omega}(S(x,t)+I(x,t))dx \leq M_1, \forall t \in (0, T_{max}) \tag{3.3}$$

■

Bornage uniforme :

Nous considérons maintenant

$$\begin{cases} S_t - d_s\Delta S = \Lambda(x) - S + [\gamma(x) - \beta(x)S]I, & x \in \Omega, t \in (0, T_{max}) \\ \frac{\partial S}{\partial v} = 0 & x \in \partial\Omega, t \in (0, T_{max}) \\ S(x,0) = S_0(x) \geq 0 & x \in \Omega \end{cases} \tag{3.4}$$

pour tout I non négatif ,on a le constante positive :

$$M_2 = \max\left\{ \|\Lambda\|_{L^\infty(\Omega)}, \|S_0\|_{L^\infty(\Omega)}, \left\|\frac{\gamma}{\beta}\right\|_{L^\infty(\Omega)} \right\}$$

on multiple la première équation de (3.4) par $(S-M_2)^+$ et on intègre sur Ω,on obtient

$$\int_{\Omega} S_t(S-M_2) - d_s\int_{\Omega}\Delta S(S-M_2)^+ = \int_{\Omega}(\Lambda(x)-S)(S-M_2)^+ + \int_{\Omega}[\gamma(x)-\beta(x)S]I(S-M_2)^+$$

L'application de la formule de Green donne

$$\frac{d}{dt}\int_{\Omega}((S-M_2)^+))^2+d_s\int_{\Omega}\left|\nabla(S-M_2)^+\right|^2=\int_{\Omega}(\Lambda(x)-S)(S-M_2)^++\int_{\Omega}[\gamma(x)-\beta(x)S]I(S-M_2)^+$$

On intègre sur $[0.t]$

$$\int_{\Omega}((S-M_2)^+))^2=-d_s\int_0^t\int_{\Omega}\left|\nabla(S-M_2)^+\right|^2+\int_0^t\int_{\Omega}(\Lambda(x)-S)(S-M_2)^++\int_0^t\int_{\Omega}[\gamma(x)-\beta(x)S]I(S-M_2)^+$$

Ce implique d qpres le principe de maximum

$$\int_{\Omega}((S-M_2)^+))^2\leq+\int_0^t\int_{\Omega}(\Lambda(x)-S_0)(S_0-M_2)^++\int_0^t\int_{\Omega}[\gamma(x)-\beta(x)S_0]I(S_0-M_2)^+$$

Pour $S_0\geq\Lambda(x)$ et $\gamma(x)\leq\beta(x)S_0$;en deduit que

$$\int_{\Omega}((S-M_2)^+))^2\leq C\int_0^t\int_{\Omega}(S_0-M_2)^+$$

Le principe comparaison pour les équations paraboliques donne :

$$S(x,t)\leq M_2\quad\forall x\in\overline{\Omega},t\in(0,T_{max})$$

Puisque S est uniformément borné et que L^1-norm de $I(.,t)$ est également bornée pour $t\in(0,T_{max})$ après(3.3) et en utilisant l équation de I ; on déduit que I est également uniformément borné dans $\overline{\Omega}\times(0,T_{max})$, en conséquence, nous devons avoir $T_{max}=\infty$ et de (3.1) est prouvé.

Conclusion

Dans ce travail, nous avons étudier un modèle de réaction-diffusion épidémique SIS régi par un mécanisme d'infection à action de masse et par une croissance linéaire naissance-mort sans condition de flux, ou nous avons demontré l'existence de la solution globale de ce modèle, en se basons sur le théorème de Hille-Yoschida pour les systèmes réaction diffusion.

BIBLIOGRAPHIE

[1] A. Friedman, Partial Differential Equations of Parabolic Type.Prentice Hall Englewood Chiffs.N.J ;1964.

[2] D.Henry, Geometric Theory of Semi linear Parabolic Equations. Lecture Notes in Mathematics 840, Springer-Verlag, New-York, 1984.

[3] N. Alikakos, Lp bounds of solutions of reaction-diffusion equation, Commun. Partial. Diff. Eqns. 4 (1979),827-868.

[4] A Pazy,Semigroups of Linear Operators and applications to Partial Differential Equations.

[5] R. Peng, X. Zhao, A reaction-diffusion SIS epidemic model in a time-periodic environment, Nonlinearity, 25(2012), 1451-1471.

[6] S. L. Hollis, R. H. Martin and M. Pierre, Global existence and boundedness in reaction-diffusion systems, SIAM J. Math. Anal. 18 (1987), 744–761.(Cité pages 3, 13, 39 et 43).

[7] H. Amman, Invariant sets and existence theorems for semilinear parabolic and elliptic systems, J. Math. Anal.Appl. 65 (1978), 432-467.