République Algérienne Démocratique et Populaire

Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

UNIVERSITÉ MOHAMED KHIDER, BISKRA

FACULTÉ des SCIENCES EXACTES et des SCIENCES de la NATURE et de la VIE

DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES

Mémoire présenté en vue de l'obtention du Diplôme **:**

MASTER en Mathématiques

Option : **Analyse**

Par

DEBILI Rachida

Titre :

Etuden d'un système d'épidémie SIR fractionnaire

Membres du Comité d'Examen :

Dr.	**HASSOUNA Houda**	UMKB	Encadreur
Dr.	**KACI Fatima**	UMKB	Président
Dr.	**OUAAR Fatima**	UMKB	Examinateur

Juin 2019

Dédicace

La vie loin des siens est pénible quel que soit l'âge et le degré de maturrité . Mais ce poids constitue une force dans l'ardeur au travail lorsqu'on regarde vers les retrouvailles"

Je dédie ce mémoire

A mon père :Chahlaoui

Rien au monde ne vaut les efforts fournis jour et nuit pour mon éducation et mon bien être.

Ce travail est le fruit de tes sacrifices que tuas consentis pour mon éducation et ma formation.

A ma trés chère mère :Malika

Tu es l'exemple de dévouement qui n'a pas cessé de m'encourager et de prier pour moi

À mon mari :Okba

A mes frères et soeur :

Mahmoud, chems edine, Salsabil, Kaouthar, Ahmad yacin, Lina

Je vous remercie de votre patience vous m'a aidée toujours à avancer vous êtes tous des grandes amies si gentilles, merci d'être toujours près de moi.

REMERCIEMENTS

En terminant mom mémoire de fin d'études, je remercie bien ALLAH qui ma donné la force suffisante et la volonté pour faire ce travail.

Un remerciement tout spécial à mon encadreur : HASSOUNA Houda pour le suivi et l'aide qu'elle m'a apporté pour l'élaboration de ce mémoire.

Je tien aussi d'adresser mes vifs remerciements à l'ensemble des enseigmants de département de mathématique qui nous ont dirigé durant durant ces cinq années.

A la fin, je tien à remercier tous mes collégues d'études, particuliérement notre promotion.

Merci.

Table des matières

Table des figures

Introduction

Le calcul fractionnaire est une théorie des intégrales et des dérivées d'ordre arbitraire réel ou même complexe. C'est une généralisation du calcul classique et par conséquent, conserve de nombreuses propriétés de base.

La dérivation fractionnaire fournit plusieurs outils potentiellement utiles pour la résolution des équations intégrales. Elle s'introduit aussi naturellement dans la modélisation mécanique des matériaux qui conservent la mémoire des transformations passées.D'où l'intérêt particulier porté sur le calcul et l'analyse fractionnaire pendent ces dernières décennies.

L'histoire de la dérivée d'ordre non entier s'étale de la fin du $17^{ème}$ siècle jusqu'à nos jours. les spécialistes s'accrdent pour faire remonter son début à lafin de l'année (1695) quand L'Hospital a soulevé une question à Leibniz en s'interrogeant sur la signification de $\frac{d^n y}{dx^n}$ lorsque $n = \frac{1}{2}$

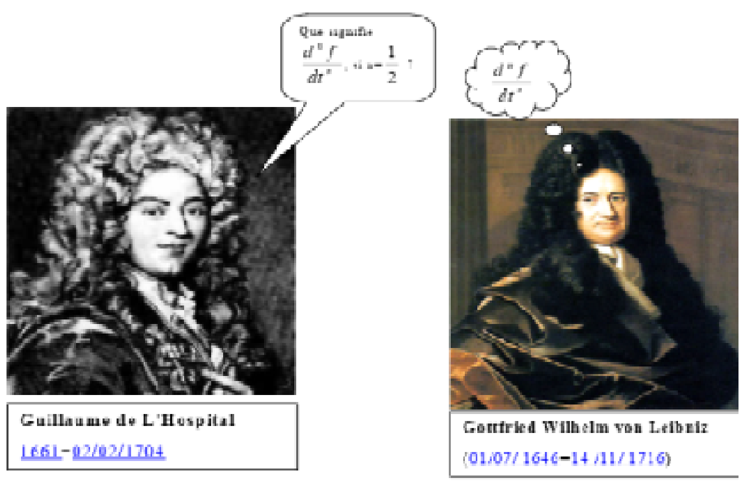

FIG. 1 – Question qui possée par Guillaume

Leibniz, dans sa réponse voulut engager une réflexion sur une possible théorie de la dérivation

non entière, et à écrit à L'Hospital : "... cela conduirait à un paradoxe à partir duquel,un jour, on aura tirer des conséquences utiles". Il a fallu attendre les années (1990) pour voir apparaître les premières "conséquences utiles". la première tentative sérieuse de donner une définition logique pour la dérivée fractionnaire est dû à Liouville qui a publié neuf documents dans ce sujet entre (1832) et (1837). Indépendamment, Riemann a proposé une approche qui s'est avérée essentiellement celle de Liouville, et c'est depuis qu'elle porte le non "Approche de Riemann-Liouville". Plus tard, d'autres théories on fait leurs apparition comme celle de Grunwald-Leitnikov, de Weyl et de Caputo.A cette époque il n'y avait presque pas d'applications pratiques de cette théorie, et c'est pour cette raison qu'elle a été considéré comme une abstraite ne contenant que des manipulations mathématiques peu utiles. Le passage des formulations mathématiques pures à des applications, a commencé à voir le jour depuis les années (1990) , où les équations différentielles fractionnaires sont apparues dans plusieurs domaines tels que la physique, l'ingénierie, la biologie,la mécanique................
Le comportement qualitatif des systèmes d'équations différentielles ordinaires décrivant les maladies est étudié depuis longtemps et constitue un problème important dans le monde réel. Le premier modèle qui peut être utilisé pour interpréter la maladie caractéristique des épidémies est un modèle SIR récupéré-infecté susceptible d'être infecté, qui a été développé par Kermack et McKendrick.Plusieurs extensions de ce modèle ont été utilisées pour décrire des maladies dans la littérature. Récemment, des dérivés fractionnaires ont été utilisés pour généraliser des modèles décrivant une maladie épidémique, les systèmes d'équations différentielles à ordre fractionnel étant motivés,ils généralisent les résultats de la stabilité globale pour les modèles SIR pour un modèle fractionnaire.
Ce travail est divisé en deux chapitres. Dans le premier chapitre, nous résumes la théorie essentielle de calcul fractionnaire (dérivée et intégration).Le deuxième est consacré à l'étude de la stabilité globale d'un modèle d'épidémie SIR fractionnaire.

Chapitre 1

Introduction en analyse fractionnaire

1.1 Fonctions spéciales

Dans cette section on va présenter quelques fonctions spécifiques notamment les fonctions Gamma , Bêta et Mittag-Leffler ; ces fonctions jouent un rôle très important dans la théorie du calcul fractionnaire.

1.1.1 Fonction Gamma

L'une de ces fonctions de base du calcul fractionnaire est la fonction Gamma Euler notée par Γ.

Définition 1.1 *On appelle fonction Gamma Euler*

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty \exp(-t) t^{x-1} dt \tag{1.1}$$

où $x \in \mathbb{C}$ *avec* $\mathrm{Re}(x) > 0$ *et* $0 < \alpha < 1$.

Proposition 1.1 *Pour tout* $x > 0$ *et pour tout* $n \in \mathbb{N}^*$ *on a :*

$$\Gamma(x+1) = x\Gamma(x).$$

$$\Gamma(n) = (n-1)!$$

Cas Particuliers :

$$\Gamma(1) = \int_0^{+\infty} e^{-x} x^{1-1} dx = 1. \tag{1.2}$$

1.1.2 La fonction Bêta

Définition 1.2 *Soient $\alpha, \beta > 0$, la fonction Bêta notée par B est la fonction définie par :*

$$B(\alpha, \beta) = \int_0^1 t^{\alpha-1}(1-t)^{\beta-1} dt. \tag{1.3}$$

Proposition 1.2 *La fonction Bêta est reliée à la fonctions Gamma par la relation suivante :*

$$\forall \alpha, \beta > 0 \text{ on a : } B(\alpha, \beta) = \frac{\Gamma(\alpha).\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)} \tag{1.4}$$

1.1.3 Fonction Mittag-Leffler

Définition 1.3 *La fonction de Mittag-Leffler notée par $E_\alpha$est définie par :*

$$E_\alpha(z) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\alpha k + 1)}, \ z \in \mathbb{C} \tag{1.5}$$

et la fonction Mittag-Leffler géneralisée notée par $E_{\alpha,\beta}(z)$ est définie par :

$$E_{\alpha,\beta}(z) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\alpha k + \beta)}, \ z \in \mathbb{C}, \alpha > 0, \beta > 0. \tag{1.6}$$

Remarque 1.1 *La fonction de Mittag-Leffler et la fonction Gamma satisfont à l'égalité :*

$$E_{\alpha,\beta}(z) = zE_{\alpha,\alpha+\beta}(z) + \frac{1}{\Gamma(\beta)}. \tag{1.7}$$

1.2 Transformation de Laplace

Dans cette sous-section on discutera la transformée de Laplace en introduisant une définition générale et puis en donnant la transformée de Laplace de la fonction Mittag-Leffler.

De plus on introduit les notions de dérivées de Riemann-Liouville et de Caputo.

Notons que ces résultats sont utilisés pour résoudre et étudier certaines équations différentielles fractionnaires.

Dans la suite, on aura besoin de quelques définitions et quelques propriétés

Définition 1.4 *On définit l'intégrale généralisée d'une fonction f à valeurs réelles ou complexes définie sur un intervalle $[0,+\infty[$ continue par morceaux sur cet intervalle par :*

$$\int_0^{+\infty} f(t)dt = \lim_{x\to+\infty}\int_0^x f(x)dx.$$

Quand cette limite existe et finie, on dit que l'intégrale généralisée converge, sinon on dira qu' elle diverge.

Définition 1.5 *Une fonction f est dite d'ordre exponentiel, s'il existe deux constantes positives M et T telles que $\mid f(t) \mid \leq Me^t$ pour tout $t > T$.*

Définition 1.6 *Soit $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{C}$(ou $\mathbb{R}$), une fonction continue par morceaux, on appelle transformée de Laplace de $f(t)$ la fonction notée $\mathcal{L}\{f(t)\}$ ou $F(s)$ de la variable complexe s définiepar :*

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s) = \int_0^{+\infty} f(t)e^{-st}dt.$$

La fonction f est appellée originale de F et F est l'image de f.

Condition d'existence *:*

$F(s)$ est définie par une intégrale généralisée, donc il faut que :

1. f soit continue par morceaux sur $\mathbb{R}^+$.
2. $\exists\beta \in]0,1[$ tel que $\lim_{t\to 0} t^\alpha \mid f(t) \mid= 0$.

3. La fonction f est d'ordre exponentiel $| f(t)e^{-st} | \leq Me^{-(\mathrm{Re}(s)-\alpha)t}$ or $\int\limits_0^{+\infty} e^{-(\mathrm{Re};(s)-\alpha)t}dt$ converge pour $\mathrm{Re}(s) > \alpha$.

Proposition 1.3 *(Linéarité) :*
Soit $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ *et* $\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s)$, $\mathcal{L}\{g(t)\} = G(s)$ *alors* $\mathcal{L}\{\alpha f(t) + \beta g(t)\} = \alpha\, \mathcal{L}\{f(t)\} + \beta\mathcal{L}\{g(t)\} = \alpha F(s) + \beta G(s)$.

Proposition 1.4 *Soient* α, $\beta \in \mathbb{R}^*$ *et* $a \in \mathbb{R}$ *alors la transformée de Laplace de la fonction Mittag-Leffler est donnée par :*

$$\mathcal{L}\left[t^{\beta-1}E_{\alpha,\beta}(-at^{\alpha})\right] = \frac{s^{\alpha-\beta}}{s^{\alpha}-a}. \tag{1.8}$$

Exemple 1.1 *1. Soit la fonction de Heaviside :*

$$\varepsilon(t) = \begin{cases} 1 & si \;\; t \geq 0 \\ 0 & si \;\; t \leq 0 \end{cases} \tag{1.9}$$

alors :

$$\mathcal{L}(\varepsilon(t))(s) = \int\limits_0^{+\infty} e^{-st}dt = \frac{1}{s}\,;\ \mathrm{Re}(s) > 0.$$

2. On détermine la transformée de Laplace de la fonction cosinus :

On sait que $\cos(\theta t) = \frac{e^{i\theta t}+e^{-i\theta t}}{2}$ *alors :*

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(\cos(\theta t))(s) &= \frac{1}{2}\left[\mathcal{L}(e^{i\theta t}) + \mathcal{L}(e^{-i\theta t})\right] \\ &= \frac{1}{2}\left[\frac{1}{s-i\theta} + \frac{1}{s+i\theta}\right] \\ &= \frac{s}{s^2-\theta^2}. \end{aligned}$$

1.3 Transformée inverse

Définition 1.7 *La transformée de Laplace inverse unilatérale $f(t)$ d'une fonction $F(s)$ est définie par :*

$$\mathcal{L}^{-1}F(s) = f(t) = \frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{+\infty} F(s)e^{st}ds.$$

Exemple 1.2 $F(s) = \frac{1}{s^2+3s+2} = \frac{1}{(s+1)(s+2)} = \frac{1}{(s+1)} + \frac{1}{(s+2)}$ *donc* $f(t) = (e^{-t} - e^{-2t}).\varepsilon(t)$ *où* $\varepsilon(t)$ *est la fonction Heaviside donnée par(1.9).*

Proposition 1.5 *La transformée de Laplace inverse est linéaire :*

$$\mathcal{L}^{-1}\{\alpha F(s) + \beta G(s)\} = \alpha\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\} + \beta\mathcal{L}^{-1}\{G(s)\} = \alpha f(t) + \beta g(t)\ \forall\alpha,\ \beta \in \mathbb{C}.$$

1.4 Analyse et calcul fractionnaire

1.4.1 Intégrale fractionnaire de Riemann-Liouville

La notion d'intégrale fractionnaire d'ordre $\alpha \in \mathbb{C}$ ($\operatorname{Re}\alpha > 0$), selon l'approche de Riemann-Liouville, généralise la célèbre formule (attribuée à Cauchy) d'intégrale répétée n-fois :

$$\begin{aligned}
(I_a^n f)(x) &= \int_a^x dt_1 \int_a^{t_1} dt_2 .... \int_a^{t_{n-1}} f(t_n)dt_n \\
&= \frac{1}{(n-1)!}\int_a^x (x-t)^{n-1}f(t)dt \\
&= \frac{1}{\Gamma(n)}\int_a^x (x-t)^{n-1}f(t)dt.
\end{aligned}$$

Définition 1.8 *Soit $f \in L^1(\mathbb{R}^+)$, l'intégrale fractionaire de Riemann-Liouville de la fonction f d'ordre $\alpha \in \mathbb{C}$ $(\mathrm{Re}(\alpha) > 0)$ notée I_a^α est définie par :*

$$I_a^\alpha f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^x (x-t)^{\alpha-t}f(t)dt\ ;\ x > a$$

où $\Gamma(\alpha)$ est la fonction gamma donnée par (1.1)

Proposition 1.6 *On a les proprietés suivantes :*

1. *L'opérateur intégrale I_a^α est lineaire :*

$$I_a^\alpha(f+g)(x) = I_a^\alpha f(x) + I_a^\alpha g(x)$$

2. $I_a^0 f(x) = f(x)$.
3. $\frac{d}{dx}(I_a^\alpha f)(x) = (I_a^{\alpha-1} f)(x)$.

Théorème 1.1 *Pour $f \in C[a,b]$; l'intégrale fractionaire de Riemann-Liouville possède la propriété suivante :*

$$I_a^\alpha \left[I_a^\beta f(x)\right] = I_a^{(\alpha+\beta)} f(x) \text{ ; pour tout } \alpha, \beta > 0.$$

Proof.

$$\begin{aligned} I_a^\alpha \left[I_a^\beta f(x)\right] &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x (x-y)^{\alpha-t} (I_a^\beta f(y)) dy \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x (x-y)^{\alpha-t} \left[\frac{1}{\Gamma(\beta)} \int_a^y (y-t)^{\alpha-t} f(t) dt\right] dy \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_a^x f(t) dt \int_a^y (x-y)^{\alpha-t} (y-t)^{\alpha-t} dy \end{aligned}$$

d'aprés le théoréme de Fubini on a :

$$I_a^\alpha \left[I_a^\beta f(x)\right] = \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_a^x f(t) dt \int_t^x (x-y)^{\alpha-t} (y-t)^{\alpha-t} dy$$

et par le changement de variables :

$$y = t + (x-t)z$$

on a :

$$I_a^{\alpha}\left[I_a^{\beta}f(x)\right] = \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}\int\limits_a^x f(t)dt\left[\int\limits_0^1 (1-z)^{\alpha-t}z^{\beta-1}\right](x-t)^{\alpha+\beta-1}dz$$
$$= \frac{B(\alpha,\beta)}{\Gamma(\alpha).\Gamma(\beta)}\int\limits_a^x f(t)(x-t)^{\alpha+\beta-1}dt$$

où $B(\alpha,\beta)$ est la fonction bêta donnée par (1.3) et comme (1.4) on a :

$$I_a^{\alpha}\left[I_a^{\beta}f(x)\right] = \frac{1}{\Gamma(\alpha+\beta)}\int\limits_a^x f(t)(x-t)^{\alpha+\beta-1}dt$$
$$= I_a^{\alpha+\beta}f(x).$$

■

Exemple 1.3 *Soit* $f(t) = (t-a)^{\beta}$ *;*$\alpha > 0$ *et* $\beta > -1$*.*

Calculer l'intégrale fractionnaire au sens de Riemann-Liouville de f *?*

Solution 1 *On a :*

$$I_a^{\alpha}f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int\limits_a^t (x-t)^{\alpha-t}(x-a)^{\beta}dx \tag{1.10}$$

En effectuant le changemement de variables :

$$x = a + (t-a)u$$
$$dx = (t-a)du$$

donc (1.10) devient :

$$\begin{aligned}
I_a^\alpha f(x) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^1 (t-a-(t-a)u)^{\alpha-t}((t-a)u)^\beta (t-a)du \\
&= \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^1 (1-u)^{\alpha-t}(t-a)^{\alpha-1}(t-a)^\beta u^\beta (t-a)du \\
&= \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^1 (1-u)^{\alpha-t}(t-a)^{\beta+\alpha} u^\beta du \\
&= \frac{(t-a)^{\beta+\alpha}}{\Gamma(\alpha)}\int_0^1 (1-u)^{\alpha-t} u^\beta du \\
&= \frac{(t-a)^{\beta+\alpha}}{\Gamma(\alpha)} B(\alpha,\beta+1)
\end{aligned}$$

où $B(\alpha,\beta)$ est la fonction bêta donnée par (1.3) et de (1.4) on aura :

$$I_a^\alpha f(x) = \frac{(t-a)^{\beta+\alpha}}{\Gamma(\alpha)}.\frac{\Gamma(\alpha).\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\alpha+\beta+1)} = \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\alpha+\beta+1)}.(t-a)^{\beta+\alpha}$$

1.5 Dérivation fractionnaire

1.5.1 La dérivée fractionnaire au sens de Riemann-Liouville

Définition 1.9 *On appelle dérivée fractionnaire au sens de Riemann-Liouville de f d'ordre α ($\alpha \in \mathbb{C}$) la fonction définie par :*

$$^{RL}D_a^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)}(\frac{d^n}{dx^n})\int_a^x (x-t)^{n-\alpha-1} f(t)dt = (\frac{d^n}{dx^n})I^{n-\alpha} f(t) = D^n I_\alpha^{n-\alpha} f(t) \quad (1.11)$$

avce ($\operatorname{Re}\alpha \geq 0$), $x > \alpha$ et $n \in \mathbb{N}^*$ et ($\frac{d}{dx^n} = D$).

Exemple 1.4 *Soit $f(t) = (t-a)^\beta$, $\alpha > 0$ et $\beta > -1$ tel que $n-1 < \alpha < n$.*

Calculer la dérivée fractionnaire au sens de Riemann-Liouville de f ?

Solution 2 *On a d'aprés l'éqution (1.11) puis du résultat de l' exemple 1.3.*

$$\begin{aligned} {}^{RL}D_a^{\alpha} f(t) = D^n I_{\alpha}^{n-\alpha} f(t) &= \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(n-\alpha+\beta+1)}.(t-a)^{\beta+(n-\alpha)} \\ &= \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(n-\alpha+\beta+1)}.(t-a)^{n-(\alpha-\beta)}. \end{aligned}$$

Alors, pour $(\alpha-\beta) \in \{1, 2, ..., n\}$ *on a :*

$$D_a^{\alpha} f(t) = 0.$$

Par ailleurs si $(\alpha-\beta) \notin \{1, 2, ..., n\}$ *on trouve :*

$${}^{RL}D_a^{\alpha} f(t) = \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta-\alpha+1)}.(t-a)^{\beta-\alpha}.$$

Proposition 1.7 *Pour* $n-1 < \alpha < n$, *et* $\lambda \in \mathbb{R}$ *on a :*

1. *La dérivée fractionnaire de Riemann-Liouville est linéaire :*

$${}^{RL}D_a^{\alpha}(\lambda f(t) + g(t)) = \lambda^{RL} D_a^{\alpha} f(t) +^{RL} D_a^{\alpha} g(t)$$

Proof. Soit $f, g \in L^1(\mathbb{R})$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, on a :

$$\begin{aligned} {}^{RL}D_a^{\alpha}(\lambda f(t) + g(t)) &= D^n I^{n-\alpha}(\lambda f(t) + g(t)) \\ &= \lambda D^n I^{n-\alpha}(f(t) + g(t)) \end{aligned}$$

Comme la dérivée $n - ième$ et l'intégrale sont linéaires alors :

$$\begin{aligned} {}^{RL}D_a^{\alpha}(\lambda f(t) + g(t)) &= \lambda D^n I^{n-\alpha} f(t) + D^n I^{n-\alpha} g(t) \\ &= \lambda^{RL} D_a^{\alpha} f(t) +^{RL} D_a^{\alpha} g(t). \end{aligned}$$

■

Lemme 1.1 *Soient $\alpha \in \mathbb{C}$ et $f \in L^1(\mathbb{R})$ alors l'égalite :*

$$^{RL}D_a^\alpha I_a^\alpha f(t) = f(t)$$

Proof. En utilisante l'éqution (1.11).

$$\begin{aligned} ^{RL}D_a^\alpha I_a^\alpha f(t) &= D^n I_a^{n-\alpha} I_a^\alpha f(t) \\ &= D^n I_a^n f(t) = f(t) \end{aligned}$$

■

Transformée de Laplace d'un opérateur fractionnaire

Lemme 1.2 *Supposons que $F(s)$ est la transfornée de Laplace de $f(t)$ alors :*

1. *La transformée de Laplace de l'integrale fractionnaire d'ordre α est donnée par :*

$$\mathcal{L}\left\{I^\alpha f(t)\right\}(s) = s^{-\alpha} F(s) \tag{1.12}$$

2. *La transformée de Laplace de l'opérateur différentiel fractionnaire de Riemann-Liouville d'ordre α, $n-1 < \alpha < n$ est donnée par :*

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\left\{D^\alpha f(t)\right\}(s) &= s^\alpha F(s) - \sum_{k=0}^{n-1} s^k \left[D^{\alpha-k-1} f(t)\right]_{t=0} \\ &= s^\alpha F(s) - \sum_{k=0}^{n-1} s^{n-k-1} \left[D^k I^{n-\alpha} f(t)\right]_{t=0} \end{aligned}$$

1.5.2 Dérivées fractionnaires au sens de Caputo

Définition 1.10 *La dérivée fractionnaire de Caputo d'ordre $\alpha(\alpha \in \mathbb{C})$ d'une fonction f est donneé par :*

$$^{c}D_a^\alpha f(t) = I_a^{n-\alpha}[f^{(n)}(t)] = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_a^x (t-s)^{n-\alpha-1} f^{(n)}(s) ds$$

avec $n-1 \leq \alpha \leq n\,;\, n \in \mathbb{N}^*$.

Lemme 1.3 *Soit* $n-1 \leq \alpha \leq n$, $n \in \mathbb{N}^*$, $\alpha \in \mathbb{R}$ *et soit* $f(t)$ *tell que* ${}^cD_t^\alpha f(t)$ *existe alors :*

$$ {}^cD_t^\alpha f(t) = I^{n-\alpha} D^n f(t) $$

Exemple 1.5 *La dérivée d'une fonction constante au sens de Caputo est nulle :*

$$ {}^cD_t^\alpha c = 0 $$

Proposition 1.8 *L'opérateur dérivée* ${}^cD_t^\alpha$ *est linéaire :*
${}^cD_t^\alpha (f+g)(t) = {}^cD_t^\alpha f(t) +{}^c D_t^\alpha g(t)$.

Proof. Soit $f\ ,g \in L^1(\mathbb{R})$, on a :

$$ \begin{aligned} {}^cD_t^\alpha (f(t)+g(t)) &= I^{n-\alpha} D^n (f(t)+g(t)) \\ &= I^{n-\alpha} D^n (f(t)+g(t)) \end{aligned} $$

Comme la dérivée $n-i\grave{e}me$ et l'intégrale sont linéaires alors on a :

$$ \begin{aligned} {}^cD_t^\alpha (\lambda f(t)+g(t)) &= I^{n-\alpha} D^n f(t) + I^{n-\alpha} D^n g(t) \\ &={}^c D_t^\alpha f(t) +{}^c D_t^\alpha g(t). \end{aligned} $$

■

Proposition 1.9 *Les deux opérateurs fractionnaires de Riemann-Liouville et de Caputo ne coincident pas i.e :*

$$ {}^cD^\alpha f(t) \neq{}^{RL} D^\alpha f(t) $$

Transformée de Laplace d'un opérateur fractionnaire de Caputo

Théorème 1.2 *Supposons que $F(s)$ est la transformée de Laplace de $f(t)$ alors la transformée de Laplace de l' opérateur fractionnaire de Caputo d'ordre α est donnée par :*

$$\mathcal{L}({}^cD_a^\alpha f(t)) = s^\alpha F(s) - \sum_{k=0}^{n-1} s^{\alpha-k-1} f^k(0) \tag{1.13}$$

avec $n-1 \leq \alpha \leq n$, $n \in \mathbb{N}^*$.

Proof. On sait que pour $n-1 < \alpha < n$, on a :

$${}^cD_a^\alpha f(t) = I^{n-\alpha} D^n f(t)$$

posons $D^n f(t) = g(t)$ alors :

$${}^cD_a^\alpha f(t) = I^{n-\alpha} g(t) \tag{1.14}$$

En utilisant la transformée de Laplace de l'integrael fractionnaire (1.12) d'ordre $n-\alpha$ de $g(t)$ et l'équation (1.14) alors la transformée de Laplace d'un opérateur fractionnaire de Caputo :

$$\mathcal{L}\left\{{}^cD_a^\alpha f(t)\right\}(s) = \mathcal{L}\left\{I^{n-\alpha} g(t)\right\}(s) = s^{-(n-\alpha)} G(s) \tag{1.15}$$

où $G(s) = \mathcal{L}\left\{g(t)\right\}$ c-a-d

$$G(s) = s^n F(s) - \sum_{k=0}^{n-1} s^{n-k-1} f^{(k)}(0) \tag{1.16}$$

Finalement en remplaçant (1.16) dans (1.15) on obtient :

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\left\{{}^cD_a^\alpha f(t)\right\} &= s^{-(n-\alpha)} \left(s^n F(s) - \sum_{k=0}^{n-1} s^{n-k-1} f^{(k)}(0) \right) \\ &= s^\alpha F(s) - \sum_{k=0}^{n-1} s^{\alpha-k-1} f^k(0) \end{aligned}$$

■

1.5.3 La relation entre la dérivée au sens de Riemann-Liouville et Caputo

La relation entre la dérivée fractionnaire de Caputo et celle de Riemann-Liouville sur l'intervalle $[a;b]$ est décrite par le théorème suivant :

Théorème 1.3 *Soit $\alpha > 0$ avec $n-1 < \alpha < n$, $(n \in \mathbb{N}^*)$; supposons que f est une fonction telle que ${}^cD_t^\alpha f(t)$ et $D_a^\alpha f(t)$ existent alors :*

$$ {}^cD_a^\alpha f(t) = {}^{RL} D_a^\alpha f(t) - \sum_{j=0}^{m-1} \frac{f^{(j)}(a)}{\Gamma(j+a+1)}(t-a)^{j-\alpha}. $$

Lemme 1.4 *Si $f^{(k)} = 0, k = 0.......n-1$, on aura :*

$$ {}^cD_a^\alpha f(t) = {}^{RL} D_a^\alpha f(t) $$

Proposition 1.10 *Composition avec l'opérateur d'intégration fractionnaire :*

$$ {}^cD_a^\alpha I_a^\alpha f = f $$

.

Chapitre 2

Stabilité globale d'un modèle SIR fractionnaire

2.1 Préliminaires

Nous introduisons des définitions et des résultats sur la théorie de la comparaison des équations différentielles fractionnaires.

Définition 2.1 *Soit f une fonction Hölder continue, s' il existe des constantes positives c,v tell que $\| f(x) - f(y) \| \leq c \| x - y \|^v$, pour toute x, y dans le domaine de f et où v est l'exposant de Hölder.Nous représentons l' espace des fonctions continues de Hölder par $C^{0,v}$.*

Nous développons une inégalité généralisée, dans laquelle le système de comparaison sous-jacent est un système vectoriel d'ordre fractionnaire un vecteur v négatif (respectivement positif) signifie que chaque composant de v est non négative (respectivement positive).On note un vecteur non négatif (respectivement positif) avec $0 \leq\leq v$ (respectivement $0 << v$).
Considérons le système d'ordre fractionnel :

$$\begin{cases} {}^cD^\alpha u(t) = f(t, u), \\ u(0) = u_0 \end{cases} \tag{2.1}$$

où${}^cD^\alpha\ u(t) = ({}^cD^\alpha u_1(t),{}^c D^\alpha u_2(t)........,{}^c D^\alpha u_m(t))^T$, $0 < \alpha < 1$, $u(t) \in M \subset \mathbb{R}^m$, $t \in [0, T[$ $(T \leq +\infty)$, M est un ensemble ouvert $0 \in M$ et $f : [0, T[\times M \to \mathbb{R}^m$ est une fonction continue en t et satisfait à la condition de Lipschitz $\| f(t, u^{'}) - f(t, u^{"}) \| \leq L \| u^{'} - u^{"} \|$, $t \in [0, T[$ pour tout $u^{'}$, $u^{"} \in \Omega \subset M$ où $L > 0$ est un constante de Lipschitz .

Théorème 2.1 *Soit $u(t)$, $t \in [0, T[$; est une solution du système (2.1) S'il existe une fonction vectorielle $v = (v_1, v_2, ..., v_m)^T : [0, T[\to M$, tell que $v_i \in C^{0,v}$, $\alpha < v < 1$, $i = 1, ..., m$ et ${}^cD^\alpha v(t) \leq\leq f(t,v(t))$, $t \in [0, T[$ Si $v(0) \leq\leq u_0$, $u_0 \in M$ alors $v(t) \leq\leq u(t)$, $t \in [0, T[$.*

Soit $f : D \to \mathbb{R}^n$, $D \subset \mathbb{R}^n$ ensuite, nous étudions le comportement qualitatif des solutions du système d'ordre fractionnaire :

$$\begin{cases} {}^cD_t^\alpha x(t) = f(x(t)) \\ \quad x(0) = x_0 \end{cases} \tag{2.2}$$

Définition 2.2 *On dit que e est un point d'équilibre pour (2.2) si et seulement si $f(e) = 0$.*

Remarque 2.1 *Soit $\alpha \in [0, 1]$ le systéme fractionnaire ${}^cD_t^\alpha x(t) = f(x)$ a les mêmes points d'équilibre que le systéme $x^{'}(t) = f(t)$.*

Définition 2.3 *Le point d'équilibre e du systéme autonome (2.2) est dit stable si qour tout $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tell que si $\| x_0 - e \| < \delta$ alors $\| x(t) - e \| < \varepsilon, t \geq 0$; le point d'équilibre e du système autonome (2.2) est dit asymptotiquement stable s'il est stable et $\lim_{t\to\infty} x(t) = e$.*

Le résultat suivant établit la stabilité du système linéaire fractionnaire similaire à la théorie de l'équation différentielle ordinaire.

Théorème 2.2 *Soit $A \in M_{m\times m}(\mathbb{R})$, l'origine du systéme ${}^cD^\alpha\ x(t) = Ax(t)$ est asymptotiquement stable si et seulement si $| \arg(\lambda_i) | > \frac{\alpha\pi}{2}$ est satisfaite pour toutes les valeurs propres de la matrice A .De plus, ce système est stable si et seulement si $| \arg(\lambda_i) | \geq \frac{\alpha\pi}{2}$ est satisfaite pour toutes les valeurs propres de la matrice A, et les valeurs propres satisfaisant $| \arg(\lambda_i) | = \frac{\alpha\pi}{2}$,avoir une multiplicité géométrique égale à un.*

Le résultat suivant définit le concept de systèmes dynamiques fractionnaires au sens de Caputo pour les systèmes fractionnaires (2.2).

Théorème 2.3 *Soit $f(.)$ un fonction continue et $x(t)$ une solution continue de (2.2) alors il existe Φ_t qui vérifie les propriétés suivantes :*

1. $\Phi_0 = Id$
2. $\Phi = \Phi_t \circ \theta_t \circ \Phi_s,\ s,\ t \in \mathbb{R}^+$ *ou* θ_t *est une carte lineaire satisfaisant :*$\theta_t \circ \Phi_0(x_0) = x_0 + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^s (t+s-\tau)^{\alpha-1} f(\Phi_\tau) d\tau,\ t \geq 0,$ *et si* $\theta_t(x_0) = x_0$
3. $(t, x_0) \rightarrow \Phi_t(x_0)$ *donne une carte continue de* $\mathbb{R}^+ \times \Omega \rightarrow \Omega$.

Définition 2.4 Φ_t *qui vérifie 1-3, est appelé un flux fractionnel au sens de Caputo, et* $\{\mathbb{R}^+, \Omega, \Phi_t\}$ *est un système dynamique fractionnaire au sens de Caputo.*

Définition 2.5 *Soit $x(.)$ une solution de(2.2) ,un point p est dit un point limite positif de $x(.)$ s'il existe un suit $\{t_n\}$ avec $t \rightarrow \infty$ comme $n \rightarrow \infty$ tell que $x(t_n) \rightarrow p$, $n \rightarrow \infty$.L'ensemble de tous les points limites positifs de $x(.)$ est appelé l'ensemble limite positive de $x(.)$, on note cet ensemble par $L_\alpha^+(x)$.*

Définition 2.6 *Un ensembale M est dit être un ensemble invariant par rapport à (2.2) si $x(0) \in M$ implique $x(t) \in M$, pour toute $t \geq 0$.Nous disoms aussi que $x(.)$ approche d'un ensemble M comme t approche l'infini, si pour chacun $\varepsilon \geq 0$ il ya $T > 0$ tell que $dist(x(t), M) \leq \varepsilon$ pour tout $t > T$.*

Nous introduisons maintenant le principe d'invariance de Fractional LaSalle :

Théorème 2.4 *Soit $\Omega \subset D$ un ensemble positivement invariant rapport à (2.2).*
Soit $V : D \rightarrow \mathbb{R}$ être une fonction continuellement différentiable telle que $V(x) > 0$ et ${}^cD_t^\alpha V(x(t)) \leq 0$ en Ω pour $x(t)$ solution du systéme (2.2). Soit E l' ensemble de points de Ω ou ${}^cD_t^\alpha V(x(t)) = 0$.Soit M le plus grand invariant dans E puis chaque solution bornée à partir dans Ω approches M quand $t \rightarrow \infty$.

Lemme 2.1 *Soit la fonction* $f \in C[t_0, t_1]$ *et sa dérivé fractionnaire* ${}^cD_t^\alpha f(t) \in C[t_0, t_1]$ *pour* $0 \leq \alpha \leq 1$ *et* $t_0, t_1 \in \mathbb{R}$ *; alors on a :*

$$f(t) = f(t_0) + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} {}^c D_t^\alpha f(\tau)(t - t_0)^\alpha$$

pour tout $t \in [t_0, t_1]$, *où* $t_0 \leq \tau \leq t$.
Par conséquent, compte tenu de l'intervalle $[0, t_1]$ *pour toute* $t_1 > 0$ *de ce théorème en déduit que la fonction* $f : [0, t_1] \to \mathbb{R}^+$ *est non croissante sur* $[0, t_1]$ *si* ${}^cD_t^\alpha f(t) \leq 0$ *pour tous* $t \in [t_0, t_1]$ *et non décroissante sur* $[0, t_1]$ *si* ${}^cD_t^\alpha f(t) \geq 0$ *pour tous* $t \in [t_0, t_1]$.

2.2 Stabilité globale

Dans cette section, nous introduisons brièvement le modèle mathématique SIR. Nous divisons la population en trois sous-populations d'importance épidémiologique, la classe des Susceptibles c'est à dire la classe des individus qui peuvent contracter la maladie mais ne sont pas infectieux ; la classe infectieuse à savoir les individus qui transmettent la maladie à d'autres ; et enfin la classe des isolés c'est à dire les individus retirés forment l'interaction susceptibilité-infectieuse par immunité ou isolement. La fraction de la population totale dans ces classes est $\overline{S}(t), \overline{T}(t)$,et $\overline{R}(t)$. La population a une taille constante N. Le taux d'élimination des décès est indiqué par μ.La durée de vie moyenne est $\frac{1}{\mu}$.Le nombre moyen de contacts par infectieux, par jour, entraînant une infection, est indiqué par λ.
La fraction moyenne de sujets infectés par la classe infectieuse est de $\lambda\overline{SI}$.Les individus se remettent de la classe infectieuse à un taux constant par habitant γ.Puis le nouveau modèle SIR avec dérivé de Caputo pour $\alpha \in (0, 1)$ est donné par :

$$\begin{cases} D_t^\alpha \overline{S}(t) = \mu - \lambda\overline{SI} - \mu\overline{S} \\ D_t^\alpha \overline{I}(t) = \lambda\overline{SI} - \mu\overline{I} \\ D_t^\alpha \overline{R}(t) = \gamma\overline{I} - \mu\overline{R} \end{cases} \tag{2.3}$$

Dans le système de simplification (2.3) on pose $S(t) = \frac{\overline{S}(t)}{N}$, $I(t) = \frac{\overline{T}(t)}{N}$, et $R(t) = \frac{\overline{R}(t)}{N}$.tell que $S(t) + I(t) + R(t) = 1$

De ci-dessus, nous obtenons le système fractionnaire équivalent suivant qui décrit la dynamique du modèle SIR

$$\begin{cases} D_t^\alpha S(t) = \mu - \lambda SI - \mu S \\ D_t^\alpha I(t) = \lambda SI - (\mu + \gamma) I \end{cases} \tag{2.4}$$

Dans ce système, on obtient les points d'équilibre E_0 et E^* tell que $E_0 = (0, 1)$ et $E^* = (S^*, I^*) = (\frac{1}{R_0}, \frac{\mu}{\lambda}(R_0 - 1))$.
où le paramètre $R_0 = \frac{\lambda}{\gamma+\mu}$ est appelé l'indice de reproduction de base.
Dans le résultat suivant, nous prouvons l'existence d'un ensemble invariant positif pour le différentiel fractionnaire (2.4).

Proposition 2.1 *Soit* $\Omega = \{(S, I) : 0 < S + I < 1\}$ *est un ensemble invariant positif pour le système de (2.4).*

Théorème 2.5 *Soit* (S, I) *la solution du système fractionnaire (2.4) avec la condition initiale* $(S(0), I(0))$ *dans l' ensemble compact.*

$$D = \left\{ (S, I) \in \mathbb{R}_+^2 : S \geq 0, I \geq 0 \text{ et } S + I \leq 1 \right\}$$

Alors, D *est un ensemble positivement invariant.*

Proof. En utilisant le même argument de la proposition 2.1 nous prouvons l'axe $S = 0$ et $I = 0$ sont des ensembles de solutions et invariants.
En guise de contradiction, supposons qu'il existe une solution (S, I) tel que $(S(0), I(0)) \in D$ et la solution (S, I) pour échapper à D.
De l'argument précédent et par l'unicité des solutions,il y a deux possibilités :
-Si le solution $(S(t), I(t))$ s'échappe par la voie $S(t) = 0$ alors il existe t_0 tel que $S(t_0) = 0, I(t_0) > 0$ et pour tout $t > t_0$ suffi somment proche t_0 donc $S(t_0) < 0$ alors : $D_t^\alpha S(t) \mid_{t_0=0} = \mu - \mu S(t_0) > \mu$ (du lemme 2.1) on obtient $S(t) \geq S(t_0) \geq 0$ pour tout t suffi somment proche de t_0, et ce n'est pas vrai.

-Si le solution $(S(t), I(t))$ s'échappe par la voie $I(t) = 0$ alors il existe t_0 tel que $I(t_0) = 0, S(t_0) > 0$ et pour tout $t > t_0$ suffi somment proche t_0 donc $I(t_0) < 0$ alors $D_t^\alpha I(t) \mid_{t_0=0} = \lambda I(t_0)S(t_0) > 0$ (du lemme 2.1) on obtient $I(t) \geq I(t_0) \geq 0$ pour tout t suffi somment proche de t_0, et ce n'est pas vrai.

Par conséquent, nous obtenons $S \geq 0$ et $I \geq 0$ pour tout $t \geq 0$

-Si $0 \leq S(0) + I(0) \leq 1$ à partir des deux premières équations du système (2.4),on a :

$$D_t^\alpha(S(t) + I(t)) = \mu - \mu(S(t) + I(t)) - \gamma I(t_0) \leq \mu - \mu(S(t) + I(t))$$

En appliquant la transformation de Laplace à l'inégalité précédente on obtient :

$$\begin{aligned}
\lambda^\alpha \mathcal{L}(S(t) + I(t)) - \lambda^{\alpha-1}(S(0) + I(0)) &\leq \frac{\mu}{\lambda} - \mu\mathcal{L}(S(t) + I(t)) \\
(\lambda^\alpha + \mu)\mathcal{L}(S(t) + I(t)) &\leq \frac{\mu}{\lambda} + \lambda^{\alpha-1}(S(0) + I(0)) \\
\mathcal{L}(S(t) + I(t)) &\leq \frac{\mu\lambda^{-1(+\alpha-\alpha)}}{\lambda^\alpha + \mu} + \frac{\lambda^{\alpha-1}}{\lambda^\alpha + \mu}(S(0) + I(0))
\end{aligned}$$

nous pouvons écrire comme :

$$\mathcal{L}(S(t) + I(t)) \leq \frac{\mu\lambda^{\alpha-(1-\alpha)}}{\lambda^\alpha + \mu} + \frac{\lambda^{\alpha-1}}{\lambda^\alpha + \mu}(S(0) + I(0))$$

De (1.8) on en déduit :

$$\mathcal{L}(S(t) + I(t)) \leq \mu\mathcal{L}(t^\alpha E_{\alpha,\alpha+1}(-\mu t^\alpha)) + \mathcal{L}(E_{\alpha,1}(-\mu t^\alpha))(S(0) + I(0))$$

donc :

$$S(t) + I(t) \leq \mu t^\alpha E_{\alpha,\alpha+1}(-\mu t^\alpha) + E_{\alpha,1}(-\mu t^\alpha)(S(0) + I(0))$$

par $S(0) + I(0) \leq 1$ alors :

$$S(t) + I(t) \leq \mu t^\alpha E_{\alpha,\alpha+1}(-\mu t^\alpha) + E_{\alpha,1}(-\mu t^\alpha)$$

-montre que : $\mu t^{\alpha} E_{\alpha,\alpha+1}(-\mu t^{\alpha}) + E_{\alpha,1}(-\mu t^{\alpha}) = 1$.

De (1.8) on en déduit :

$$\begin{aligned} \mu t^{\alpha} E_{\alpha,\alpha+1}(-\mu t^{\alpha}) + E_{\alpha,1}(-\mu t^{\alpha}) &= E_{\alpha,1}(-\mu t^{\alpha}) - \frac{1}{\Gamma(1)} + E_{\alpha,1}(-\mu t^{\alpha}) \\ &= 2E_{\alpha,1}(-\mu t^{\alpha}) - \frac{1}{\Gamma(1)} \end{aligned}$$

De (1.7) on en déduit :

$$2E_{\alpha,1}(-\mu t^{\alpha}) - \frac{1}{\Gamma(\alpha)} = 2\frac{(-\mu t^{\alpha})^0}{\Gamma(1)} - \frac{1}{\Gamma(1)} = 1$$

alors :

$$\mu t^{\alpha} E_{\alpha,\alpha+1}(-\mu t^{\alpha}) + E_{\alpha,1}(-\mu t^{\alpha}) = 1$$

donc :

$$S(t) + I(t) \leq 1.$$

Cela implique que D est un ensemble positivement invariant. ■

Théorème 2.6 *Si $R_0 \leq 1$, alors l'équilibre de la maladie E_0 est globalement asymptotiquement stable sur D.*

Proof. À partir du changement de variables, $X(t) = S(y) - 1$; le système (2.4) est équivalent au système

$$\begin{cases} D_t^{\alpha} X(t) = -\lambda X I - \lambda I - \mu X \\ D_t^{\alpha} I(t) = \lambda X I + \lambda I - (\mu + \gamma) I. \end{cases} \tag{2.5}$$

Par $X(t) \leq 1$ et $I(t) \leq 1$, il est facile de voir que :

$$-\lambda X I - \lambda I - \mu X \leq -\lambda I - \mu X$$

$$\lambda X I + \lambda I - (\mu + \gamma) I \leq \lambda I - (\mu + \gamma) I.$$

De ce qui précède, il résulte que les solutions du système (2.5) satisfont à l'inégalité différentielle :

$$D_t^\alpha X \leq -\lambda I - \mu X \tag{2.6}$$
$$D_t^\alpha I \leq \lambda I - (\mu+\gamma) I.$$

De plus, motivé par (2.6), soit $(x(t), i(t))$ la solution du système linéaire fractionnaire :

$$\begin{cases} D_t^\alpha x = -\lambda i - \mu x \\ D_t^\alpha i = \lambda i - (\mu+\gamma) i \end{cases} \tag{2.7}$$

avec les conditions initiales $(x(0), i(0)) = (x_0, i_0) \in D$.

Les valeurs propres du système (2.7) sont données par :
$\begin{vmatrix} -\mu-\zeta & -\lambda \\ 0 & \lambda-(\gamma+\mu)-\zeta \end{vmatrix} = (\mu-\zeta)(\lambda-(\gamma+\mu)-\zeta) = 0.$

Il est facile de voir que : $\zeta_1 = -\mu$ et $\zeta_2 = \lambda-(\gamma+\mu) \Rightarrow \zeta_2 = \lambda\frac{(\gamma+\mu)}{(\gamma+\mu)} - (\gamma+\mu) = (\gamma+\mu)(\frac{\lambda}{(\gamma+\mu)} - 1,$ on pose $R_0 = \frac{\lambda}{(\gamma+\mu)}$ donc $\zeta_2 = (\gamma+\mu)(R_0-1)$.

Si $R_0 \leq 1 \Rightarrow \zeta_2 \leq 0$ on en déduit que toutes les valeurs propres sont négatives, donc $\mid \arg(\zeta_i) \mid = \pi, i = 1, 2$ (théorème 2.2).

D'autre part nous avons E_0 le point equilibri de systeme (2.4) alors ona $\lim_{t\to\infty} x(t) = 0$ et $\lim_{t\to\infty} i(t) = 0$ d'aprés la définition 2.3.De la discussion précédente et du principe de comparaison donné par le (théorème 2.1), nous obtenons :

$$(X(t), I(t)) \leq\leq (x(t), i(t))$$

cela implique $\lim_{t\to\infty}(X(t), I(t)) = (0, 0)$, Il en résulte que $(S(t), I(t))$ converge vers le non-infecté point d'équilibre E_0. ■

Lemme 2.2 *Soit $u(t) \in \mathbb{R}^+$ être une fonction continue.*

Puis, pour un temps quelconque $t \leq 0$

$$D_t^\alpha \left[(x(t) - a \ln x(t)\right] \leq (1 - \frac{a}{x(t)}) D_t^\alpha x(t), \;\; \alpha \in \mathbb{R}^+ \tag{2.8}$$

Théorème 2.7 *Si $R_0 > 1$ alors l'état d'équilibre endémique positif E^* du système (2.4) existe et est globalement asymptotiquement stable sur :*

$$D_+ = \{(S, I) \in D : S > 0,\ I > 0\}$$

Proof. Considérons la fonction de Lyapunov $U : D_+ \to \mathbb{R}$,
et $U(S,T) = (S - S^* \ln S) + (I - I^* \ln I)$ .Du Lemme 2.2, on a :

$$\begin{aligned}
D_t^\alpha U(S,T) &= D_t^\alpha (S - S^* \ln S) + D_t^\alpha (I - I^* \ln I) \\
&\leq (1 - \frac{S^*}{S}) D_t^\alpha S(t) + (1 - \frac{I^*}{I}) D_t^\alpha I(t) \\
D_t^\alpha U(S,T) &\leq (\frac{S - S^*}{S}) D_t^\alpha S(t) + (\frac{I - I^*}{I}) D_t^\alpha I(t) \\
&= (\frac{S - S^*}{S})(\mu - \lambda SI - \mu S) + (\frac{I - I^*}{I})(\lambda SI - (\mu - \gamma) I).
\end{aligned}$$

A partir des équations à l'équilibre $-\mu = \lambda I^* - \frac{\mu}{S^*}$ et $-(\mu + \gamma) = -\lambda S^*$ on a :

$$\begin{aligned}
D_t^\alpha U(S,T) &\leq (\frac{S - S^*}{S})(\mu - \lambda SI + (\lambda I^* - \frac{\mu}{S^*}) S) + (\frac{I - I^*}{I})(\lambda SI - \lambda S^* I) \\
&\leq (\frac{S - S^*}{S})(\mu(1 - \frac{S}{S^*}) - \lambda S(I + I^*) + (\frac{I - I^*}{I}) \lambda I(S - S^*) \\
&\leq -(\frac{S - S^*}{S})(\mu \frac{S^* - S}{S^*}) + (\frac{S - S^*}{S})(\lambda S(I^* - I)) - \lambda(S - S^*)(I^* - I) \\
D_t^\alpha U(S,T) &\leq -\frac{(S - S^*)^2}{SS^*} \mu < 0.
\end{aligned}$$

De ce qui précède, on a $U : D_+ \to \mathbb{R}$ et $U(S,T) > 0$ de plus on a $D_t^\alpha U(S,T) < 0$ et (S, I) solution de système (2.4) alors nous pouvons appliquer la théorie (2.4) à l'ensemble limite où chaque solution est contenue dans le plus grand ensemble invariant de $E = \{(S,I) \in D : D_t^\alpha U(S,T) = 0\}$; nous prouvons que $E \subseteq \{(S,I) \in D : S = S^*\}$ .Par contraction, s'il existe(S, I) tel que $D_t^\alpha U(S,T) = 0$ et $S \neq S^*$,
nous en déduisons $0 = D_t^\alpha U(S,T) \leq -\frac{(S-S^*)^2}{SS^*} \mu < 0$ C'est une contradiction alors $S = S^*$ .Cela implique que,
$E \subseteq \{(S,I) \in D : S = S^*, I = I^*\} = \{E^*\}$ Ce qui montre que $E = E^*$ et le point d'équilibre

endémique E^* est globalement asymptotiquement stable à D_+. ■

Conclusion

Dans ce travail nous avons détaillé l'étude de stabilité globale d'un modèle d'épidémie SIR fractionnaire en appliquant les résultats essentiels du calcul fractionnaire.

Bibliographie

[1] Santos.J. P. C dos, Cardoso.L. C., Monteiro.E. , Lemes.N.T.(2015). Modèle d'épidémie d'ordre fractionnaire pour la maladie de la babésiose bovine et les populations de tiques. Analyse abstraite et appliquée, 1,10.

[2] Diethelm.K.(2013) . Un modèle basé sur le calcul fractionnaire pour la simulation d'une épidémie de dengue. Dynamique non linéaire, 613,619.

[3] Diethelm.K.(2004).L'analyse des équations différentielles fractionnaires :Une exposition orientée application utilisant des opérateurs de type Caputo.

[4] Erdelyi.A,Magnus.W,Oberhettinger.F and Tricomi.F.(1981). Higher Transcendental Functions, Vol.III,Krieger Pub, Melbourne, Florida.

[5] Kilbas.A.A.A , Srivastava.H.M. and Trujillo.J.J.(2006).Theory and applications of fractional differential Equations, North-Holland Mathematical studies 204, Ed van Mill, Amsterdam.

[6] Samko S.G, Klbas A.A. and Marichev O.I. (1993), Fractional integrals and derivatives : theory and applications, Gordon and Breach, New York.

[7] Li.C, Ma.Y.(2013) Système dynamique fractionnaire et son théorème de linéarisation. Dynamique non linéaire.621,633.

[8] Lin.W. (2007)Théorie globale de l'existence et contrôle du chaos des équations différentielles fractionnaires.Journal of Mathematical Analysis and Applications 332, 709,726.

[9] Sudsutad.W. Ntouyas.SK. Tariboon.J.(2015).Systèmes d'équations fractionnaires de Langevin des types de Riemann-Liouville et Hadamard.

[10] Matignon.D.(1996). Résultats de stabilité pour les équations différentielles fractionnaires avec applications au traitement de contrôle.v. 2, 963-968.

[11] Wang.Z, Yang.D, Ma.T. et Sun.N.(2014) . Analyse de stabilité pour systèmes non linéaires d'ordre fractionnaire basée sur le principe de comparaison. Dynamique non linéaire,387-402.

[12] Santos.J. P. C dos, Monteiro.E. ,Valverde.J. C. Principe d'invariance fractionnaire de LaSalle et applications sur la stabilité globale du modèle de la dengue, Preprint.

[13] Podlubny.I. (2005) . Dérivés fractionnaires : histoire, théorie, application. Université d'État de l'Utah, Logan.

[14] Vargas.C.(2004) . Fonctions de Volterra Lyapunov pour les systèmes épidémiques d'ordre fractionnaire, Comm. Csi non linéaire. Numer Simulat, 24, 75-85.