

République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

UNIVERSITÉ MOHAMED KHIDER, BISKRA

FACULTÉ des SCIENCES EXACTES et des SCIENCES de la NATURE et de la VIE

DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES



Mémoire présenté en vue de l'obtention du Diplôme :

MASTER en Mathématiques

Option : **Analyse**

Par

Hebilez Abdelwahab

Titre :

**Sur quelques méthodes pour résoudre
équation intégrale de Fredholm**

Membres du Comité d'Examen :

Dr. Dakhia Hassiba	UMKB	Président
Dr. Laiadi Abdelkader	UMKB	Encadreur
Dr. Adouane Saida	UMKB	Examineur

Juin 2019

DÉDICACE

A mes parents, mes frères et mes soeurs

A toute la promotion master *II* mathématiques appliquées 2019

Je dédie ce modeste travail

REMERCIEMENTS

Je tiens à la fin de ce travail à remercier **ALLAH**.

Mes remerciements s'adressent particulièrement à mon encadreur Docteur **Laiadi**

Abdelkader.

Je remercie également les responsables de départements de mathématique. Ainsi que
tous les enseignants de la faculté.

Ma sincère reconnaissance à tous les membres du jury pour
l'honneur qu'ils me font en acceptant de présider et examiner ce
travail

Dr. Dakhia Hassiba et **Dr. Adouane Saida**

Enfin, je remercie mes amis et camarades de promotion pour ces cinq années passées
ensemble, dans les meilleurs moments comme dans les pires.

Table des matières

Remerciements	ii
Table des matières	iii
Liste des figures	v
Introduction	1
1 Classification et genèse des équations intégrales	2
1.1 Classification des équations intégrales	
1.1.1 Équation intégrale de Fredholm	3
1.1.2 Équation intégrale de volterra	4
1.1.3 Équation intégrale singulière	5
1.1.4 Équations intègro-différentielles	6
1.1.5 Équations à noyau symétrique	7
1.2 Linéarité et l'homogénéité	8
1.2.1 Notion de linéarité	8
1.2.2 Notion d'homogénéité	9
1.3 Exemples de problèmes conduisant à des équations intégrales	9
1.3.1 quelques problèmes qui conduisent à de telles équations	10
1.3.2 Oscillations libres et oscillations forcées de la corde	11
1.3.3 Reduction d'une équation différentielle à une équation intégrale	12

1.4	Origines des équations intégrales	14
2	Les méthodes des résolutions des équations intégrales	22
2.1	Méthodes analytiques	22
2.1.1	Méthode du noyau dégènerè	24
2.1.2	Méthode de décomposition d'Adomian	28
2.1.3	Méthode des approximations successives	31
2.2	Méthodes numériques	34
2.2.1	Méthodes de projection	35
2.2.2	Méthodes de collocation	38
3	Résolution numérique des équations intégrales de Fredholm-Volterra	42
3.1	Opérateurs à noyau	42
3.2	Les polynômes de legendre	43
3.3	Méthode de Galerkin	44
3.3.1	Application de la méthode de collocation	44
3.3.2	Application de la méthode de Galerkin	45
	Bibliographie	56

Table des figures

3.1	Comparaion entre la solution exacte et la solution approchée de l'équation intégrale dans l'exemple 3.3.2.	52
3.2	Comparaison entre la solution exacte et la solution approchée de l'équation intégrale dans l'exemple 3.3.4 pour $n = 3$ et $n = 5$	55

Introduction

Parmi les branches les plus importantes en mathématiques, dans les temps anciens et récents type des équations intégrales qui sont considérées comme l'épine dorsale de la majeure partie de la science actuelle si pas tous.

Est apparu une autre branche d'équations embrassant l'intégrale dans la même équation, à être introduit par Fredholm par la première fois en 1900, il a appelé les équations intégrales. Où nous trouvons un grand nombre de questions dans le domaine de l'ingénierie et les sciences physiques et sociales sont formulées mathématiquement sous la forme d'équations intégrales.

Ainsi notre mémoire se compose de trois chapitres :

Dans le **premier chapitre**, nous commençons par classer les équations intégrales en les illustrant par des exemples, Ensuite nous présentons l'origine des équations intégrales et la relation entre ces dernières et les équations intégrales.

Le **deuxième chapitre** est consacré essentiellement à présenter diverses méthodes de résolution numérique des équations intégrales, cependant nous y développons certaines idées primordiales et les illustrerons avec quelques exemples.

Le **troisième chapitre** est consacré aux méthodes de résolution numérique où nous avons utilisé les méthodes des collocations. En particulier, on applique la méthode de Galerkin pour résoudre numériquement quelques équations intégrales mixtes de Fredholm-Volterra.

Chapitre 1

Classification et genèse des équations intégrales

Définition 1.0.1

On appelle équation intégrale une équation qui contient la fonction inconnue sous le signe d'intégration. Telle est, par exemple, l'équation

$$\varphi(s) = \int_a^b K(s, t) \varphi(t) dt + f(s) \quad (1.1)$$

Où f et K sont des fonctions continues et φ est la fonction inconnue.

1.1 Classification des équations intégrales

Il existe plusieurs types des équations intégrales qui dépendent essentiellement sur les bornes d'intégration et le noyau de l'intégrale. On s'intéresse aux équations suivantes :

1.1.1 Equation intégrale de Fredholm

L'équation intégrale linéaire de Fredholm de seconde espèce est sous la forme suivante :

$$\varphi(s) = \lambda \int_a^b K(s, t) \varphi(t) dt + f(s) \quad a \leq s \leq b \quad (1.2)$$

Où $\varphi(s)$ est la fonction inconnue, la fonction $K(s, t)$ qui s'appelle noyau avec le terme libre f sont données et λ un paramètre numérique.

une équation intégrale de la forme :

$$\int_a^b K(s, t) \varphi(t) ds = f(s) \quad a \leq s \leq b \quad (1.3)$$

est dite équation de Fredholm de première espèce.

Exemple 1.1.1 On considère l'équation de Fredholm de seconde espèce

$$\varphi(s) = 1 + \frac{1}{3} \int_{-1}^1 (s+t) \varphi(t) dt \quad (1.4)$$

où le noyau $K(s, t) = (s+t)$, le terme libre $f(s) = 1$, et le paramètre $\lambda = \frac{1}{3}$.

Exemple 1.1.2 On considère l'équation de Fredholm de première espèce

$$s = \int_{-1}^0 \cos(st) \varphi(t) dt \quad (1.5)$$

où le noyau $K(s, t) = \cos(st)$ et le terme libre $f(s) = s$.

Remarque 1.1.1 $F(\varphi(s)) = \varphi^n(s), n \neq 1$, ou $\sin \varphi(s)$ etc... puis de volterra et équations intégrales de Fredholm sont classés comme des équations intégrales non-linéaires .
 Comme pour les exemples les éléments suivants équations intégrales non-linéaires :

$$\varphi(s) = f(s) + \lambda \int_a^s K(s,t) \varphi^2(t) dt. \quad (1.6)$$

$$\varphi(s) = f(s) + \lambda \int_a^s K(s,t) \sin(\varphi(t)) dt. \quad (1.7)$$

$$\varphi(s) = f(s) + \lambda \int_a^s K(s,t) \ln(\varphi(t)) dt. \quad (1.8)$$

Ensuite, si nous définissons $f(s) = 0$, de Volterra ou équations intégrales de Fredholm, puis la suite équation intégrale homogène, dans le cas contraire, il est appelé équation intégrale non homogène.

1.1.2 Équation intégrale de volterra

L'équation intégrale linéaire de volterra de seconde espèce est sous la forme suivante :

$$\varphi(s) = \lambda \int_a^s K(s,t) \varphi(t) dt + f(s) \quad a \leq s \leq b \quad (1.9)$$

où $\varphi(s)$ est la fonction inconnue, la fonction $K(s,t)$ qui s'appelle noyau avec le terme libre f sont données et λ un paramètre numérique.

une équation intégrale de la forme :

$$\int_a^s K(s, t) \varphi(t) ds = f(s) , \quad a \leq s \leq b \quad (1.10)$$

est dite équation de volterra de première espèce.

Exemple 1.1.3 On considère l'équation de volterra de seconde espèce

$$\varphi(s) = 2 + \int_0^s \varphi(t) dt, \quad (1.11)$$

où le noyau $K(s, t) = 1$, le terme libre $f(s) = 2$ et le paramètre $\lambda = 1$.

Exemple 1.1.4

On considère l'équation de volterra de première espèce

$$\ln(s) = \int_0^s e^{s+t} \varphi(t) dt \quad (1.12)$$

où le noyau $K(s, t) = e^{s+t}$ et le terme libre $f(s) = \ln(s)$.

1.1.3 Équation intégrale singulière

Une équation intégrale singulière est définie comme une intégrale avec des limites infinies ou lorsque le noyau de l'intégrale devient non lié à un certain moment dans l'intervalle.

Exemple 1.1.5 *Le noyau faiblement singulier de la forme :*

$$K(s, t) = \frac{g(s, t)}{|s - t|^\alpha}, \quad 0 < \alpha < 1 \quad (1.13)$$

Où α est donné et $g(s, t)$ est une fonction bornée, $K(s, t)$ est un exemple d'un noyau non borné. Cependant, une équation intégrale définie avec un noyau de type (1.13) est dite équation intégrale faiblement singulière.

Exemple 1.1.6 *L'équation suivante :*

$$f(s) = \int_0^s \frac{1}{\sqrt{s-t}} \varphi(t) dt \quad (1.14)$$

est un exemple d'une équation intégrale singulière est appelée équation intégrale *d'Abel*.

On appelle également équation *d'Abel* généralisée une équation de la forme :

$$f(s) = \int_0^s \frac{\varphi(t)}{(s-t)^\alpha} dt \quad (1.15)$$

où α une constante telle que $0 < \alpha < 1$.

1.1.4 Équations intègro-différentielles

Dans le début des années 1900, Vito Volterra a étudié le phénomène de croissance de la population et nouveaux types d'équations développées et nommées comme équations intègro-différentielles. Dans ce type d'équations, la fonction inconnue $\varphi(s)$ apparaît comme la combinaison du dérivé ordinaire et sous le signe intégral.

Dans l'électrique problème d'ingénierie, le courant $I(t)$ circulant dans un circuit fermé puisse être obtenu en la forme de l'équation integro-différentielle suivante sont classés comme les équations intégrales singulier.

$$L \frac{dI}{dt} + RI + \frac{1}{C} \int_0^1 I(s) ds = f(t), I(0) = I_0 \quad (1.16)$$

où L est l'inductance, R est la résistance, C la capacitance et $f(t)$ l'applique tension.

Des exemples similaires peuvent être cités comme suit :

$$\varphi''(x) = f(x) + \lambda \int_0^x K(x-t) \varphi(t) dt, \quad \varphi(0) = 0, \quad \varphi'(0) = 1 \quad (1.17)$$

$$\varphi'(x) = f(x) + \lambda \int_0^1 K(xt) \varphi(t) dt, \quad \varphi(0) = 1 \quad (1.18)$$

Équations (1.16) et (1.17) sont des équations integro-différentielles de volterra type, considérant qu'équations integro-différentielles d'équation(1.18) Fredholm type. Ces terminologies ont été conclus en raison de la présence de durée indéterminée et déterminée intégrales.

1.1.5 Équations à noyau symétrique

Considérons l'équation intégrale de Fredholm de deuxième espèce

$$\varphi(s) = \int_a^b K(s,t) \varphi(t) dt + f(s) \quad (1.19)$$

Dont le noyau vérifie les conditions

- 1) $\int_a^b \int_a^b |K(s,t)|^2 ds dt < \infty$
- 2) $K(s,t) = \overline{K(t,s)}$

Nous dirons qu'une telle équation est à noyau symétrique.

1.2 Linéarité et l'homogénéité

Les équations intégrales classées en deux autres types de classifications : la linéarité et d'homogénéité. Ces deux notions jouent un rôle important dans la structure des solutions. Dans ce qui suit, nous soulignons les définitions de ces concepts.

1.2.1 Notion de linéarité

Si l'exposant de la fonction inconnue $\varphi(s)$ dans le signe de l'intégrale est l'un, l'équation intégrale est appelée linéaire. Si la fonction inconnue $\varphi(s)$ est d'exposant autre que un, ou si l'équation contient des fonctions non linéaires de $\varphi(s)$, comme de e^φ , $\cos \varphi$, et $\ln(1 + \varphi)$, l'équation intégrale est appelée non linéaire. Pour expliquer ce concept, nous considérons les équations suivantes :

$$\varphi(s) = 1 - \int_0^s (s-t) \varphi(t) dt \quad (1.20)$$

$$\varphi(s) = 1 - \int_0^1 (s-t) \varphi(t) dt \quad (1.21)$$

$$\varphi(s) = 1 + \int_0^s (1+s-t) \varphi(t)^4 dt \quad (1.22)$$

Les deux premiers exemples sont des équations intégrales linéaires de Volterra et de Fredholm, respectivement, alors que le dernier est une équation intégrale non linéaire de Volterra.

1.2.2 Notion d'homogénéité

Les équations intégrales de seconde espèce sont classées comme homogène ou non homogène, si la fonction $f(s)$ dans le deuxième type de Volterra et Fredholm des équations intégrales est identiquement nulle, l'équation est appelée homogène. Sinon, elle est appelée non homogène. Notez que cette propriété est valable pour les équations de seconde espèce seulement. Pour clarifier ce concept, nous considérons les équations suivantes :

$$\varphi(x) = \sin s + \int_0^s st\varphi(t) dt \quad (1.23)$$

$$\varphi(s) = s + \int_0^1 (s-t)^2 \varphi(t) dt \quad (1.24)$$

$$\varphi(s) = \int_0^s (1+s-t) \varphi(t)^4 dt \quad (1.25)$$

Les deux premières équations sont non homogène car $f(s) = \sin s$ et $f(s) = s$, tandis que le dernier est homogène parce que les équations $f(s) = 0$.

1.3 Exemples de problèmes conduisant à des équations intégrales

Dans les paragraphes suivants du présent chapitre nous établirons les propriétés fondamentales des équations intégrales mais pour l'instant nous nous proposons de considérer

1.3.1 quelques problèmes qui conduisent à de telles équations

Equilibre d'une corde, c-à-d un fil matériel élastique et flexible de longueur l qui oppose à la traction une résistance, proportionnelle à la valeur de cette traction.

Supposons les extrémités de la corde fixées aux points $s = 0$ et $s = l$. Alors dans sa position d'équilibre la corde coïncide avec le segment $0 \leq s \leq l$ de l'axe s .

Supposons maintenant que la corde soit soumise à une force $P = P_\xi$ qui agit verticalement en un point $s = \xi$. Sous l'action de cette force la corde s'écarte de sa position d'équilibre et prend, évidemment, la forme de la ligne brisée.

Cherchons l'écart δ de la corde au point ξ sous l'action de la force P_ξ agissant en ce point. Si la force P_ξ est petite par rapport à la tension T_0 de la corde non chargée, alors la tension de la corde chargée peut être supposée aussi égale à T_0 . Cela étant, de la condition d'équilibre de la corde on obtient l'égalité

$$T_0 \frac{\delta}{\xi} + T_0 \frac{\delta}{l - \xi} = P_\xi, \quad (1.26)$$

d'où

$$\delta = \frac{(l - \xi) \xi}{T_0 l} P_\xi$$

Désignons par $u(s)$ la flèche de la corde en un point quelconque s sous l'action de la force P_ξ . Alors

$$u(s) = P_\xi G(s, \xi) \quad (1.27)$$

Où

$$G(s, \xi) = \begin{cases} \frac{s(l-\xi)}{T_0 l} & \text{si } 0 \leq s \leq \xi. \\ \frac{(l-s)\xi}{T_0 l} & \text{si } \xi \leq s \leq l. \end{cases} \quad (1.28)$$

De ces formules on voit immédiatement que $G(s, \xi) = G(\xi, s)$.

Supposons à présent que la corde soit soumise à une force répartie uniformément sur cette corde avec la densité $p(\xi)$. Si cette force est petite, la déformation dépend encore linéairement de la force, et la forme de la corde chargée est décrite par la fonction

$$u(s) = \int_0^l G(s, \xi) p(\xi) d\xi \quad (1.29)$$

Donc, si la charge agissant sur la corde est donnée, la formule (1.29) permet de déterminer la forme prise par la corde sous l'action de cette charge.

considérons maintenant le problème inverse : déterminer la répartition de la charge p telle que la corde ait la forme donnée u . On voit alors que pour trouver la fonction p connaissant u , nous avons une équation qui aux notations près coïncide avec l'équation (1.3), c-à-d. une équation intégrale de Fredholm de première espèce.

1.3.2 Oscillations libres et oscillations forcées de la corde

Supposons maintenant que la corde oscille de façon quelconque. Soit $u(s, t)$ la position, à l'instant t , du point de la corde ayant l'abscisse s , et soit p la densité linéaire de la corde. La force d'inertie qui agit sur un élément de longueur ds de la corde est égale à

$$-\frac{\partial^2 u(s, t)}{\partial t^2} \rho ds$$

donc

$$p(\xi) = -\frac{\partial^2 u(\xi, t)}{\partial t^2} \rho$$

En substituant cette expression à $p(\xi)$ dans la formule (1.29), on obtient

$$u(s, t) = -\int_0^l G(s, \xi) \rho \frac{\partial^2 u(\xi, t)}{\partial t^2} d\xi \quad (1.30)$$

Supposons que la corde produit des oscillations harmoniques de fréquence constante ω et d'amplitude $u(s)$ dépendant de s . Autrement dit, soit

$$u(s, t) = u(s) \sin \omega t \quad (1.31)$$

En portant cette expression dans (1.21) et en simplifiant par $\sin \omega t$, on obtient pour u l'équation intégrale suivante :

$$u(s) = \rho \omega^2 \int_0^l G(s, \xi) u(\xi) d\xi \quad (1.32)$$

Si, sous l'action d'une force extérieure, les oscillations de la corde ne sont plus libres, mais forcées, alors, comme le montre un calcul simple, l'équation des oscillations harmoniques de la corde prend la forme

$$u(s) = \rho \omega^2 \int_0^l G(s, \xi) u(\xi) d\xi + f(s) \quad (1.33)$$

c-à-d. est une équation de Fredholm non homogène de deuxième espèce.

1.3.3 Réduction d'une équation différentielle à une équation intégrale

Parfois il y a intérêt à réduire la résolution d'une équation différentielle à la résolution d'une équation intégrale. En démontrant l'existence et l'unicité de la solution de l'équation différentielle

$$y' = f(s, y)$$

avec la condition initiale $y(x_0) = y_0$, nous avons vu qu'il est commode de réduire cette équation à l'équation intégrale (non linéaire)

$$y = y_0 + \int_0^s (\xi, y) d\xi. \quad (1.34)$$

une telle réduction est possible aussi pour des équations d'ordre supérieur à un. considérons, par exemple, l'équation du second ordre

$$y'' + f(s)y = 0. \quad (1.35)$$

En posant $f(s) = \rho^2 - \sigma(x)$ où $\rho = \text{const}$, mettons-la sous la forme

$$y'' + \rho^2 y = \sigma(s)y. \quad (1.36)$$

comme on le sait, la solution de l'équation

$$y'' + \rho^2 y = g(s) \quad (1.37)$$

peut s'écrire sous la forme

$$y(s) = \cos \rho(s - a) + \frac{1}{\rho} \int_a^s \sin \rho(s - \xi) g(\xi) d\xi. \quad (1.38)$$

Donc, trouver la solution de l'équation (1.27) revient à résoudre l'équation intégrale

$$y(s) - \frac{1}{\rho} \int_a^s \sigma(\xi) \sin \rho(s - \xi) y(\xi) d\xi = \cos \rho(s - a). \quad (1.39)$$

1.4 Origines des équations intégrales

Les équations intégrales se posent dans de nombreuses applications scientifiques et d'ingénierie. Les équations intégrales de Volterra peuvent être obtenues à partir de la conversion de problèmes aux conditions initiales. Cependant, les équations intégrales de Fredholm peuvent être déduites des problèmes aux limites.

Nous allons présenter une méthode qui permet de convertir un problème aux limites à une équation intégrale de Fredholm équivalente.

type I

On considère le problème aux limites suivant :

$$u''(s) + g(s)u(s) = h(s), \quad 0 < s < 1 \quad (1.40)$$

Avec les conditions aux limites :

$$u(0) = \alpha, \quad u(1) = \beta \quad (1.41)$$

On pose

$$u''(s) = \varphi(s) \quad (1.42)$$

L'intégration des deux côtés de (1.42) donne :

$$\int_0^s u''(t) dt = \int_0^s \varphi(t) dt \quad (1.43)$$

Cela donne

$$u'(s) = u'(0) + \int_0^s \varphi(t) dt \quad (1.44)$$

Où la condition initiale $u'(0)$ n'est pas donnée dans un problème aux limites. La condition $u'(0)$ sera déterminée plus tard en utilisant la condition aux limites en $s = 1$.

Intégrer les deux côtés de (1.44), on obtient

$$u(s) = u(0) + su'(0) + \int_0^s \int_0^s \varphi(t) dt dt \quad (1.45)$$

Ou de façon équivalente

$$u(s) = \alpha + su'(0) + \int_0^s (s-t) \varphi(t) dt \quad (1.46)$$

Pour déterminer $u'(0)$, nous remplaçons $s = 1$ dans les deux côtés de (1.46) et en utilisant la condition aux limites à $u(1) = \beta$ nous trouvons

$$u(1) = \alpha + u'(0) + \int_0^1 (1-t) \varphi(t) dt \quad (1.47)$$

Cela donne

$$\beta = \alpha + u'(0) + \int_0^1 (1-t) \varphi(t) dt \quad (1.48)$$

Alors

$$u'(0) = (\beta - \alpha) - \int_0^1 (1-t) \varphi(t) dt \quad (1.49)$$

La substitution de (1.49) dans (1.46) donne

$$u(s) = \alpha + (\beta - \alpha)s - \int_0^1 s(1-t) \varphi(t) dt + \int_0^s (s-t) \varphi(t) dt \quad (1.50)$$

La substitution de (1.42) et (1.50) dans (1.40), on obtient

$$\varphi(s) + \alpha g(s) + (\beta - \alpha)sg(s) - \int_0^1 sg(s)(1-t) \varphi(t) dt + \int_0^s g(s)(s-t) \varphi(t) dt = h(s) \quad (1.51)$$

Et donc

$$\varphi(s) = f(s) + \int_0^s t(1-s)g(s) \varphi(t) dt + \int_s^1 s(1-t)g(s) \varphi(t) dt \quad (1.52)$$

Qui mène à l'équation intégrale de Fredholm

$$\varphi(s) = f(s) + \int_0^1 K(s,t) \varphi(t) dt \quad (1.53)$$

Où

$$f(s) = h(s) - \alpha g(s) - (\beta - \alpha)sg(s) \quad (1.54)$$

Et le noyau $K(s, t)$ est donnée par

$$K(s, t) = \begin{cases} t(1-s)g(s), & \text{si } 0 \leq t \leq s \\ s(1-t)g(s), & \text{si } s \leq t \leq 1 \end{cases} \quad (1.55)$$

Exemple 1.4.1

Convertir le problème aux limites suivant pour une équation intégrale équivalente Fredholm :

$$u''(s) + 3u(s) = \cos s, u(0) = u(1) = 0 \quad (1.56)$$

On remarque que $\alpha = \beta = 0$ et $g(s) = 3$ et $h(s) = \cos s$ donc

$$f(s) = \cos s \quad (1.57)$$

Alors l'équation intégrale de Fredholm :

$$\varphi(s) = \cos s + \int_0^1 K(s, t) \varphi(t) dt \quad (1.58)$$

Et le noyau $K(s, t)$ est donnée par

$$K(s, t) = \begin{cases} 3t(1-s) & \text{si } 0 \leq t \leq s. \\ 3s(1-t) & \text{si } s \leq t \leq 1. \end{cases} \quad (1.59)$$

type II

On considère le problème aux limites suivant :

$$u''(s) + g(s)u(s) = h(s), \quad 0 < s < 1 \quad (1.60)$$

Avec les conditions aux limites :

$$u(0) = \alpha_1, u'(1) = \beta_1 \quad (1.61)$$

On pose

$$u''(s) = \varphi(s) \quad (1.62)$$

Intégrer les deux côtés de (1.62) :

$$\int_0^s u''(t) dt = \int_0^s \varphi(t) dt \quad (1.63)$$

Cela donne

$$u'(s) = u'(0) + \int_0^s \varphi(t) dt \quad (1.64)$$

Où la condition initiale $u'(0)$ n'est pas donnée dans un problème de valeur limite. La condition $u'(0)$ sera déterminée par la suite à l'aide de la condition limite à $u'(1) = \beta_1$.

Intégrer les deux côtés de (1.64) de 0 à s donne

$$u(s) = u(0) + su'(0) + \int_0^s \int_0^s \varphi(t) dt dt \quad (1.65)$$

Ou de façon équivalente

$$u(s) = \alpha_1 + su'(0) + \int_0^s (s-t) \varphi(t) dt \quad (1.66)$$

Pour déterminer $u'(0)$ nous avons d'abord différencier (1.66) par rapport à s pour obtenir

$$u'(s) = u'(0) + \int_0^s \varphi(t) dt \quad (1.67)$$

En remplaçant $x = 1$ dans les deux côtés de (1.67) et en utilisant la condition aux limites à $u'(1) = \beta_1$ nous trouvons

$$u'(1) = u'(0) + \int_0^1 \varphi(t) dt \quad (1.68)$$

Cela donne

$$u'(0) = \beta_1 - \int_0^1 \varphi(t) dt \quad (1.69)$$

D'où

$$u(s) = \alpha_1 + s[\beta_1 - \int_0^1 \varphi(t) dt] + \int_0^s (s-t) \varphi(t) dt \quad (1.70)$$

La substitution de (1.62) et (1.70) dans (1.60) donne

$$\varphi(s) + \alpha_1 g(s) + \beta_1 s g(s) - \int_0^1 s g(s) \varphi(t) dt + \int_0^s g(s) (s-t) \varphi(t) dt = h(s) \quad (1.71)$$

Alors

$$\varphi(s) = f(s) + \int_0^s t g(s) \varphi(t) dt + \int_0^s s g(s) \varphi(t) dt \quad (1.72)$$

Qui mène à l'équation intégrale de Fredholm :

$$\varphi(s) = f(s) + \int_0^1 K(s,t) \varphi(t) dt \quad (1.73)$$

Où

$$f(s) = h(s) - (\alpha_1 + \beta_1 s) g(s) \quad (1.74)$$

Et le noyau $K(s,t)$ est donnée par

$$K(s,t) = \begin{cases} t g(s), & \text{si } 0 \leq t \leq s. \\ s g(s), & \text{si } s \leq t \leq 1. \end{cases} \quad (1.75)$$

Exemple 1.4.2

Convertir le problème aux limites suivant pour une équation intégrale équivalente Fredholm :

$$u''(s) + u(s) = 0, \quad u(0) = u'(1) = 0 \quad (1.76)$$

On remarque que $\alpha_1 = \beta_1 = 0$ et $h(s) = 0$ donc

$$f(s) = 0 \tag{1.77}$$

La substitution de ceci dans (1.58) donne l'équation intégrale de Fredholm homogène :

$$\varphi(s) = \int_0^1 K(s, t) \varphi(t) dt \tag{1.78}$$

Et le noyau $K(s, t)$ est donnée par

$$K(s, t) = \begin{cases} t, & \text{si } 0 \leq t \leq s. \\ s, & \text{si } s \leq t \leq 1. \end{cases} \tag{1.79}$$

Chapitre 2

Les méthodes des résolutions des équations intégrales

Dans ce chapitre, nous présenterons quelques méthodes analytiques et numériques importantes pour résoudre les équations intégrales de Fredholm de la deuxième espèce.

2.1 Méthodes analytiques

Certaines équations intégrales ont une solution et d'autres n'ont pas de solution ou qu'il y a un nombre infini des solutions.

Remarque 2.1.1 *Il est important de dire que nous discuterons des méthodes analytiques dans l'espace $C([a, b])$, $\|\cdot\|_\infty$.*

Théorème 2.1.1 *Si l'équation intégrale homogène de Fredholm*

$$u(s) = \lambda \int_a^b K(s, t) u(t) dt, \quad (2.1)$$

N'a que la solution triviale $u(x) = 0$, alors l'équation de Fredholm non homogène correspondante

$$u(s) = g(s) + \lambda \int_a^b K(s, t) u(t) dt, \quad (2.2)$$

A toujours une solution unique. Ce théorème est connu par le théorème alternative de Fredholm.

Théorème 2.1.2 Si le noyau $K(s, t)$ dans l'équation intégrale de Fredholm (2.2) est continu, le réel Fonction évaluée, bornée dans le carré $a \leq s \leq b$ et $a \leq t \leq b$, et si $g(s)$ est une Fonction continue, puis une condition nécessaire à l'existence d'une solution unique pour l'équation intégrale de Fredholm (2.2) est donnée par

$$|\lambda| M (b - a) < 1 \quad (2.3)$$

où

$$|K(s, t)| \leq M \quad M \in \mathbb{R} \quad (2.4)$$

Au contraire, si la condition nécessaire (2.3) ne tient pas, alors une solution continue peut exister pour l'équation intégrale de Fredholm. Pour illustrer ceci

Exemple 2.1.1 Soit l'équation intégrale de Fredholm

$$u(s) = 2 - 3s + \int_0^1 (3s + t) u(t) dt \quad (2.5)$$

Il est clair que si $\lambda = 1$, $|K(s, t)| \leq 4$, et $(b - a) = 1$. Cela donne

$$|\lambda|M(b-a) = 4 \quad (2.6)$$

Cependant, l'équation de Fredholm (2.5) a une solution exacte donnée par

$$u(s) = 6s \quad (2.7)$$

2.1.1 Méthode du noyau dégénéré

Dans cette section, la méthode du noyau dégénéré sera appliquée pour équations intégrales de Fredholm avec des noyaux séparables. Des équations intégrales de Fredholm d'une manière directe et donne la solution sous une forme exacte et non pas sous forme de série, cette méthode sera appliquée pour les noyaux dégénéré ou des noyaux séparables de la forme

$$K(s, t) = \sum_{i=1}^n \omega_i(s) v_i(t)$$

Où les fonction $\omega_1(s), \dots, \omega_n(s)$ et les fonctions $v_1(t), \dots, v_n(t)$ sont Linéairement indépendant. Avec un tel noyau, l'intégrale de Fredholm du seconde type

$$u(s) = g(s) + \lambda \int_a^b K(s, t) u(t) dt \quad (2.9)$$

Devient

$$u(s) = g(s) + \lambda \sum_{i=1}^n \omega_i(s) \int_a^b v_i(t) u(t) dt, \quad (2.10)$$

La technique de résolution de cette équation dépend essentiellement du choix du paramètre complexe λ et sur la définition de

$$\alpha_i = \int_a^b v_i(t) u(t) dt \quad (2.11)$$

Chaque intégrale du côté droit ne dépend que de la variable t avec des limites constantes d'intégration pour t . Cela signifie que chaque intégrale est équivalente à une constante. En se fondant sur ce point, la substitution de (2.11) à (2.10) donne

$$u(s) = g(s) + \lambda \sum_{i=1}^n \alpha_i \omega_i(s) \quad (2.12)$$

Et le problème se réduit à trouver les quantités α_i pour ce faire, on place la valeur de $u(s)$ donnée par (2.12) dans (2.10) et on obtient

$$\sum_{i=1}^n \omega_i(s) \left\{ \alpha_i - \int_a^b v_i(t) \left(g(t) + \lambda \sum_{k=1}^n \alpha_k \omega_k(t) \right) dt \right\} = 0 \quad (2.13)$$

Mais les fonctions $\omega_i(s)$ sont linéairement indépendantes, donc

$$\left\{ \alpha_i - \int_a^b v_i(t) \left(g(t) + \lambda \sum_{k=1}^n \alpha_k \omega_k(t) \right) dt \right\} = 0, \quad i = 1, \dots, n \quad (2.14)$$

Utilisation de la notation simplifiée

$$\int_a^b v_i(t) g(t) dt = h_i, \quad \int_a^b v_i(t) \omega_k(t) dt = c_{ik}, \quad (2.15)$$

Où h_i et c_{ik} sont des constantes connues, l'équation (2.14) devient

$$\alpha_i - \lambda \sum_{k=1}^n c_{ik} \alpha_k = h_i, \quad i = 1, \dots, n \quad (2.16)$$

C'est-à-dire un système de n équations algébriques pour les inconnues α_i le déterminant

$D(\lambda)$ de ce système est

$$D(\lambda) = \begin{bmatrix} 1 - \lambda c_{11} & -\lambda c_{12} & \dots & -\lambda c_{1n} \\ -\lambda c_{21} & 1 - \lambda c_{22} & \dots & -\lambda c_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -\lambda c_{n1} & -\lambda c_{n1} & \dots & 1 - \lambda c_{nn} \end{bmatrix}$$

Qui est un polynôme en λ de degré n au maximum. En outre, il n'est pas identique à zéro, puisque, quand $\lambda = 0$, il se réduit à l'unité. Pour toutes les valeurs de λ pour lesquelles $D(\lambda) \neq 0$, le système algébrique (2.16) admet une solution unique même pour l'équation intégrale (2.9). D'autre part, pour toutes les valeurs de λ pour lesquelles $D(\lambda)$ devient égal à zéro, le système algébrique (2.16), et l'équation intégrale (2.9), soit est insoluble, soit a un nombre infini de solution. Remarque Que nous n'avons considéré que l'équation intégrale du second type, où seule cette méthode est applicable.

Exemple 2.1.2 *Pour illustrer la méthode ci-dessus, nous considérons l'équation intégrale suivante dans le noyau dégénère*

$$u(s) = -\frac{2}{\pi} \cos(s) + \frac{4}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(s-t) u(t) dt \quad (2.17)$$

Maintenant le noyau $K(s, t) = \cos(s-t)$ peut être écrit comme $K(s, t) = \cos(s)\cos(t) + \sin(s)\sin(t)$ qui est un noyau séparable tel que

$$K(s, t) = \sum_{i=0}^n \omega_i(s) v_i(t) \quad (2.18)$$

Où

$$\begin{aligned} \omega_1(s) &= \cos(s) & v_1(t) &= \cos(t) \\ \omega_2(s) &= \sin(s) & v_2(t) &= \sin(t) \end{aligned} \quad (2.19)$$

Maintenant, en utilisant les techniques de la section (2.1.1) dans un domaine $[a, b]$ et les

relations

$$\int_a^b v_i(t) g(t) dt = h_i, \quad \int_a^b v_i(t) \omega_i(t) = c_{ik} \quad (2.20)$$

Nous avons

$$\begin{aligned} c_{11} &= \int_a^b v_1(t) \omega_1(t) dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(t) \cos(t) dt \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2(t) dt = \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} 1 + \cos(2t) dt = \frac{\pi}{4} \end{aligned} \quad (2.21)$$

$$c_{12} = c_{21} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(t) \sin(t) dt = \frac{1}{2} \quad (2.22)$$

$$c_{22} = \frac{\pi}{4} \quad (2.23)$$

$$h_1 = \frac{-2}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(t) \cos(t) dt = -\frac{1}{2}, \quad h_2 = \frac{-1}{\pi},$$

Maintenant pour trouver α_i dans la relation

$$\alpha_i - \lambda \sum_{k=1}^n c_{ik} \alpha_k = h_i \quad (2.24)$$

Lorsque cela peut être écrit sous la forme matricielle comme

$$\begin{aligned} \left[\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \lambda \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix} \right] \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix} \left[\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \frac{4}{\pi} \begin{pmatrix} \frac{\pi}{4} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{\pi}{4} \end{pmatrix} \right] \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{\pi} \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{\pi}{4} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

En utilisant la relation

$$u(s) = g(s) + \lambda \sum_{k=1}^n \alpha_k \omega_k(s)$$

Puis

$$u(s) = \sin(s)$$

Qui est la solution exacte.

2.1.2 Méthode de décomposition d'Adomian

L'idée principale de la méthode d'Adomian est de décomposer la fonction inconnue $u(s)$ de l'équation en une somme d'un nombre infini de composantes définies par la série de décomposition

$$u(s) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n(s) \tag{2.26}$$

Où équivalent

$$u(s) = u_0(s) + u_1(s) + \dots \tag{2.27}$$

Où les composants $u_{n \geq 0}(s)$, doivent être déterminés de manière récursive. La méthode de décomposition se préoccupe de la réalisation des composants. u_0, u_1, \dots .Individuellement. La détermination de ces composantes peut être réalisée de manière simple par une relation de récurrence qui implique habituellement des intégrales simples qui peuvent être facilement évaluées. Pour établir la relation de récurrence, nous substituons (2.26) dans l'équation intégrale de Fredholm

$$u(s) = g(s) + \lambda \int_a^b K(s, t) u(t) dt, \tag{2.28}$$

On obtient

$$\sum_{n=0}^{\infty} u_n(s) = g(s) + \lambda \int_a^b K(s, t) \left[\sum_{n=0}^{\infty} u_n(t) \right] dt, \quad (2.29)$$

On équivalent

$$u_0(s) + u_1(s) + \dots = g(s) + \lambda \int_a^b K(s, t) [u_0(t) + u_1(t) + \dots] dt, \quad (2.30)$$

La composante $u_0(s)$ est identifiée par tous les termes qui ne sont pas inclus sous le signe intégral. Cela signifie que les composantes $u_j(s)$ de l'inconnu $u(s)$ sont complètement déterminées en définissant la relation de récurrence

$$u_0(s) = g(s), \quad u_{n+1}(s) = \lambda \int_a^b K(s, t) u_n(t) dt \quad (2.31)$$

Où équivalent

$$\begin{aligned} u_0(s) &= g(s) \\ u_1(s) &= \lambda \int_a^b K(s, t) u_0(t) dt \\ u_2(s) &= \lambda \int_a^b K(s, t) u_1(t) dt \end{aligned} \quad (2.32)$$

Et ainsi de suite pour les autres composantes. En conséquence, les composantes $u_0(s), u_1(s), \dots$ sont complètement déterminées. Il en résulte que la solution $u(s)$ de l'équation intégrale de Fredholm (2.28) est facilement obtenue sous forme de série en utilisant l'hypothèse de la série dans (2.26). La méthode de décomposition a converti l'équation intégrale en une élégante détermination des composantes calculable, si une solution exacte existe pour le problème, alors la série obtenue converge très rapidement vers cette solution exacte. Ce-

pendant, pour les problèmes concrets, lorsqu'une solution de formée n'est pas obtenue, un nombre tronqué de termes est habituellement utilisé à des fins numériques. Pour nous utilisons de composants, plus nous obtenons de précision.

Exemple 2.1.3 *Pour illustrer la méthode ci-dessus, nous considérons l'équation intégrale suivante*

$$u(s) = e^s - s + s \int_0^1 su(t) dt \quad (2.33)$$

La méthode de décomposition adomienne suppose que la solution $u(s)$ a une forme de série donnée en (2 : 26). En remplaçant la série de décomposition (2.26) dans les deux côtés (2.33) donne

$$\sum_{n=0}^{\infty} u_n(s) = e^s - s + s \int_0^1 t \left[\sum_{n=0}^{\infty} u_n(t) \right] dt \quad (2.34)$$

Ou équivalent

$$u_0(s) + u_1(s) + \dots = e^s - s + s \int_0^1 t [u_0(t) + u_1(t) + \dots] dt \quad (2.35)$$

Nous identifions la composante zéro par tous les termes qui ne sont pas inclus sous le signe intégral. On obtient la relation de récurrence suivante

$$u_0(s) = e^s - s, \quad u_{k+1}(s) = s \int_0^1 t [u_k(t)] dt \quad (2.36)$$

Par conséquent, nous obtenous

$$\begin{aligned} u_0(s) &= e^s - s. \\ u_1(s) &= s \int_0^1 t [u_0(t)] dt = s \int_0^1 t [e^t - t] dt = \frac{2}{3}s. \\ u_2(s) &= s \int_0^1 t \left[\frac{2}{3}t \right] dt = \frac{2}{9}s. \end{aligned}$$

Et L'utilisation de (2.26) donne la solution en série

$$u(s) = e^s - s + \frac{2}{3}s \left(1 + \frac{1}{3} + \dots \right) = e^s. \quad (2.37)$$

2.1.3 Méthode des approximations successives

La méthode d'approximation successive fournit un schéma qui peut être utilisé pour résoudre des problèmes de valeur initiale ou des équations intégrales. Cette méthode résout tout problème en trouvant des approximations successives à la solution en commençant par une approximation initiale comme $u_0(s)$ appelée approximation zéro qui peut être toute fonction réelle $u_0(s)$, qui sera utilisée dans une relation de récurrence à déterminer les autres approximations. Compte tenu des équations intégrales de Fredholm du second type

$$u(s) = g(s) + \lambda \int_a^b K(s, t) u(t) dt \quad (2.38)$$

Et selon le choix de $u_0(s)$ il existe deux méthodes des approximations successives.

1) La méthode de Picard

Est obtenu pour $u_0(s) = 0$, 1 ou s est un réel quelconque.

2) La méthode de la série de Neumann

La méthode de la série de Neumann est obtenue lorsque $u_0(s) = g(s)$ dans les autres termes. tous les termes qui ne sont pas inclus sous le signe d'intégrale

$$\begin{aligned} u_1(s) &= g(s) + \lambda \int_a^b K(s, t) u_0(t) dt \\ &= g(s) + \lambda \int_a^b K(s, t) g(t) dt \\ &= g(s) + \lambda \varphi_1(s) \end{aligned} \quad (2.39)$$

Où

$$\varphi_1(s) = \int_a^b K(s, t) g(t) dt$$

La seconde approximation $u_2(s)$ peut être obtenue comme

$$\begin{aligned} u_2(s) &= g(s) + \lambda \int_a^b K(s, t) u_1(t) dt \\ &= g(s) + \lambda \int_a^b K(s, t) g(t) + \lambda \varphi_1(t) dt \\ &= g(s) + \lambda \varphi_1(s) + \lambda^2 \varphi_2(s) \end{aligned} \quad (2.40)$$

Où

$$\varphi_2(s) = \int_a^b K(s, t) \varphi_1(t) dt \quad (2.41)$$

En procédant de cette manière, on peut obtenir la solution finale $u(s)$

$$u(s) = g(s) + \lambda \varphi_1(s) + \lambda^2 \varphi_2(s) + \dots + \lambda^n \varphi_n(s) + \dots = g(s) + \sum_{n=1}^{\infty} \lambda^n \varphi_n(s) \quad (2.42)$$

Où

$$\varphi_n(s) = \int_a^b K(s, t) \varphi_{n-1}(t) dt \quad (2.43)$$

La série (2.41) est connue sous le nom de série Neumann. Cette série infinie est absolument et uniformément convergente, puisque

$$|\lambda| \leq \frac{1}{\sqrt{\int_a^b \int_a^b K^2(s, t) ds dt}}$$

Si en plus nous avons

$$\int_a^b K^2(s, t) dt \leq A$$

Où A est une constante, alors la série de Neumann converge absolument et uniformément

sur $[a, b]$. La solution finale $u(s)$ est obtenue par

$$u(s) = g(s) + \lim_{s \rightarrow \infty} \sum \lambda^k \varphi_k(s), \quad (2.44)$$

Exemple 2.1.4 Soit l'équation Intégrale de seconde espèce

$$u(s) = 1 + \int_0^1 su(t) dt$$

En utilisant la méthode d'approximation successive (méthode de la série de Neumann).

Pour la solution, considérons que l'approximation zéro est $u_0(s) = g(s) = 1$, et alors la première approximation peut être calculée comme

$$\begin{aligned} u_1(s) &= 1 + \int_0^1 su_0(t) dt \\ &= 1 + \int_0^1 s dt \\ &= 1 + s \end{aligned}$$

En procédant ainsi, nous trouvons

$$\begin{aligned} u_2(s) &= 1 + \int_0^1 su_1(t) dt \\ &= 1 + \int_0^1 s(1+t) dt \\ &= 1 + \frac{3}{2}s \end{aligned}$$

Ainsi nous obtenons

$$u_n(s) = 1 + s \left[1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{2^{n-1}} \right]$$

Et donc

$$\begin{aligned}
 u(s) &= \lim_{n \rightarrow \infty} u_n(s) \\
 &= 1 + \lim_{n \rightarrow \infty} s \sum_{k=0}^n \frac{1}{2^k} \\
 &= 1 + \lim_{n \rightarrow \infty} s \cdot 2 \left(1 - \frac{1}{2^n} \right) \\
 &= 1 + 2s
 \end{aligned}$$

C'est la solution.

Convergence de la méthode des approximations successives

Théorème 2.1.3 *Soit $A : X \rightarrow X$ un opérateur continue sur un espace de banach X dont le rayon spectral vérifie $r(A) \leq 1$. Alors la méthode des approximations successive définie par :*

$$u_{n+1} = Au_n + f$$

converge pour tout $u_0 \in X$, et $f \in X$ vers l'unique solution de $u - Au = f$.

Remarque 2.1.2 *Ce résultat est très naturel en dimension finie où le rayon spectral peut être interprété comme la plus grande valeur de $N(A)$ pour l'ensemble des normes d'algèbre N ; et on a déjà vu qu'un critère de convergence est justement qu'une de ces norme veri. . . e $N(A) < 1$:*

2.2 Méthodes numériques

Interpolation polynômiale de lagrange

Soit f une fonction continue sur $[a, b]$, et soit :

$$\Delta : a \leq s_0 < s_1 < \dots < s_n \leq b$$

Une partition de l'intervalle $[a, b]$, alors on choisit $V = C([a, b])$, l'espace des fonctions continues : $V_{n+1} = P_n$, l'espace des polynômes de degré plus n . Alors l'interpolation de Lagrange de degré n de la fonction f est défini par :

$$p_n(s_i) = f(s_i), \quad 0 \leq i \leq n, \quad p_n \in P_n.$$

L'interpolation fonctionnelle linéaire est donnée par :

$$L_i f = f(s_i), \quad 0 \leq i \leq n.$$

On choisit $V_j(s) = s^j, 0 \leq j \leq n$ comme base de P_n , alors

$$\det (L_i V_j)_{(n+1) \times (n+1)} = \prod_{j>i} (s_j - s_i) \neq 0$$

est appelé déterminant de Vandemonde, telle que les formules

$$p_n(s) = \sum_{i=0}^n f(s_i) \phi_i(s), \quad \phi_i(s) = \prod_{j=0, j \neq i}^n \frac{s - s_j}{s_i - s_j}$$

sont appelées les formules d'interpolation polynomiale de Lagrange.

2.2.1 Méthodes de projection

Définition des opérateurs de projection

Définition

Soit V un espace vectoriel, V_1 et V_2 deux sous espace vectoriels de V . on dit que V est une somme direct de V_1 et V_2 et on écrit $V = V_1 \oplus V_2$ si tout $v \in V$ peut être décomposé de la manière unique

$$v = v_1 + v_2, \quad v_1 \in V_1, \quad v_2 \in V_2$$

En outre, si V est muni d'un produit scalaire et que

$$\forall v_1 \in V_1, \quad \forall v_2 \in V_2 : \quad \langle v_1, v_2 \rangle = 0$$

Alors V est appelé la somme directe orthogonale de V_1 et V_2 .

Proposition 2.2.1 *Soit V un espace vectoriel, puis $V = V_1 \oplus V_2$ si et seulement s'il existe un opérateur linéaire $P : V \rightarrow V$ tel que $P^2 = P$ avec $v_1 = P(v)$ et $v_2 = (I - P)(v)$ et aussi $V_1 = P(V)$ et $V_2 = (I - P)(V)$.*

Définition 2.2.1 *Soit V un espace de Banach; un opérateur $P \in \mathcal{L}(V)$ tel que $P^2 = P$ est appelé un opérateur de projection*

Si V est un espace d' Hilbert l'opérateur P est appelé un opérateur de projection orthogonal. Il est facile de remarquer que l' opérateur de projection P est orthogonal si et seulement si

$$\langle Pv, (I - P)(u) \rangle = 0, \quad \forall u, v \in V$$

Exemples d'opérateurs de projection

Exemple 2.2.1 *Soit $V = C([a, b])$, et $V_1 = P_n$ l'espace des polynômes de degré inférieur ou égal à n , et soit $\Delta : a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$ une subdivision de l' intervalle $[a, b]$ dans ce cas pour $v \in C([a, b])$ on définit $Pv \in P_n$ comme l' interpolation de Lagrange de v relativement à Δ (i.e) $Pv(x_i) = v(x_i)$, $0 \leq i \leq n$ l' interpolation Pv est unique et l'unicité de cette interpolation donne*

$$Pv(x) = \sum_{i=0}^n \left(\prod_{j \neq i} \frac{x - x_j}{x_i - x_j} \right) v(x_i)$$

Exemple 2.2.2 *En générale, soit V_n est un sous espace de dimension n de l' espace d' Hilbert V , Supposons que $\{u_1, \dots, u_n\}$ une base orthonormal de V_n dans ce cas pour tout*

$v \in V$ la formule

$$P_v = \sum_{i=1}^n \langle u_i, v \rangle u_i$$

définie un opérateur de projection de V dans V_n .

Principe des méthodes de projection

Dans toutes les méthodes de projection, on étudie la résolution de l'équation intégrale de Fredholm de deuxième espèce de la forme

$$\lambda \varphi(s) - \int_D K(s, t) \varphi(t) dt = f(s), \quad (s \in D) \quad (2.47)$$

L'ensemble D est fermé et borné d'un espace complet de fonctions V , tel que $V = C(D)$ ou $V = L^2(D)$ presque partout. On choisit une suite finie d'approximation de sous espace V_n , tel que $V_n \subset V, n \geq 1$, et V_n de dimension K_n . Soit la base $(\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_k)$ de V_n , ($k = k_n$). Alors le principe de la méthode de projection consiste à trouver une suite de fonctions $\varphi_n \in V_n$, tel que.

$$\varphi_n(s) = \sum_{j=1}^{k_n} c_j \phi_j(s), \quad s \in D$$

On introduit le résidu $r_n(s)$ pour approcher la solution de (2.47)

$$\begin{aligned} r_n(s) &= \lambda \varphi_n(s) - \int_D K(s, t) \varphi_n(t) dt - f(s) \\ &= \sum_{j=1}^k c_j (\lambda \phi_j(s) - \int_D K(s, t) \phi_j(t) dt) - f(s) \end{aligned}$$

On note cette approximation par $\varphi \approx \varphi_n$. L'équation (2.47) qui peut être écrite sous la

forme de notation d'opérateur, tel que

$$(\lambda - K)\varphi = f$$

et le résidu r_n peut être écrite sous forme

$$r_n = (\lambda - K)\varphi_n - f$$

Les coefficients $\{c_1, c_2, \dots, c_n\}$ doivent être choisis de telle sorte que

$$r_n(s) \rightarrow 0.$$

2.2.2 Méthodes de collocation

Pour résoudre l'équation de Fredholm de deuxième espèce (2.47), on va choisir des noeuds de points distincts $s_1, s_2, \dots, s_k \in D$ telle que

$$r_n(s_i) = 0, \quad (i = 1, \dots, k_n)$$

qui vont déterminer les coefficients $\{c_1, c_2, \dots, c_n\}$ comme solution du système linéaire

$$\sum_{j=1}^k c_j (\lambda \phi_j(s_i) - \int_D K(s_i, t) \phi_j(t) dt) = f(s_i), \quad i = 1, 2, \dots, k \quad (2.48)$$

D'où

$$\sum_{j=1}^k c_j \lambda \phi_j(s_i) = \sum_{j=1}^k c_j \int_D K(s_i, t) \phi_j(t) dt + f(s_i), \quad i = 1, 2, \dots, k$$

et puisque $P_n \varphi(s) = \lambda \varphi_n(s) = \lambda \sum_{j=1}^{k_n} c_j \phi_j(s)$, alors

$$P_n \varphi(s_i) = \sum_{j=1}^{k_n} \int_D c_j K(s_i, t) \phi_j(t) + f(s_i) = \sum_{j=1}^{k_n} c_j \lambda \phi_j(s_i)$$

En posant $\alpha_j = c_j \lambda$, alors l'équation (2.48), peut être écrite sous la forme :

$$P_n \varphi(s) = \sum_{j=1}^{k_n} \alpha_j \phi_j(s)$$

Telle que $s \in C(D)$, et $P_n : V = C(D) \rightarrow V_n$, est un opérateur de projection, et pour déterminer les coefficients α_i , on résout le système

$$\sum_{j=1}^{k_n} \alpha_j \phi_j(s_i) = \varphi(s_i), \quad i = 1, 2, \dots, k_n,$$

Ce système admet une seule solution si et seulement si

$$\det[\phi_j(s_i)] = \begin{vmatrix} \phi_1(s_1) & \phi_1(s_2) & \dots & \phi_1(s_n) \\ \phi_2(s_1) & \phi_2(s_2) & \dots & \phi_2(s_n) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \phi_n(s_1) & \phi_n(s_2) & \dots & \phi_n(s_n) \end{vmatrix} \neq 0$$

Il faut noter que cette condition implique que le système des fonctions $\{\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_{k_n}\}$ constitue un système linéairement indépendant.

Application des Méthodes de collocation Si on considère le système $\{1, s, \dots, s^n\}$ des monômes linéairement indépendants, alors on obtient le déterminant de vandermonde. pour tout $i, (1 \leq i \leq k_n)$, soit $l_i \in V_n$, telle que :

$$l_i(s_j) = \delta_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{si } i = j. \\ 0, & \text{si } i \neq j. \end{cases}$$

D'où

$$P_n \varphi(s) = \sum_{j=1}^{k_n} \varphi(s_j) l_j(s), \quad s \in D$$

Le système $\{l_1, l_2, \dots, l_k\}$ est appelé la base des fonctions de lagrange vérifiant :

$$\|P_n\| = \max_{s \in D} \sum_{j=1}^{k_n} l_j(s).$$

Si on prend $V_n = \text{span}\{1, s, \dots, s^n\}$, alors la base des fonctions de lagrange est donnée par :

$$l_i(s) = \prod_{j=0, j \neq i}^n \frac{(s - s_j)}{(s_i - s_j)}, \quad (i = 0, 1, \dots, n)$$

Exemple 2.2.3 Soit l'équation intégrale de seconde espèce

$$u(x) = 1 - \frac{4}{3}x + \int_{-1}^1 (xt^2 - 1) u(t) dt$$

Prenant pour système complet sur $[-1, 1]$ un système de polynômes de legendre $\{l_i(x)\}$

$i = 1, 2, 3$ avec $l_1(x) = 1, l_2(x) = x, l_3(x) = \frac{3x^2-1}{2}$.

On cherche la solution sous la forme

$$u_3(x) = c_1 + c_2x + c_3 \frac{3x^2 - 1}{2}$$

Le résidu est égale a

$$r_3(x) = u_3(x) - 1 + \frac{4}{3}x - \int_{-1}^1 (xt^2 - 1) \left(c_1 + c_2t + c_3 \left(\frac{3t^2 - 1}{2} \right) \right) dt.$$

En calculant l'intégrale on obtient

$$r_3(x) = \frac{4}{3}x + 3c_1 - \frac{2}{3}xc_1 + xc_2 - \frac{4}{15}xc_3 + c_3 \left(\frac{3}{2}x^2 - \frac{1}{2} \right) - 1$$

d'après l'orthogonalité du résidu r_3 au système $\{1, x, \frac{3x^2-1}{2}\}$ on a

$$\begin{aligned} \langle r_3, 1 \rangle &= 6c_1 - 2 = 0 \\ \langle r_3, x \rangle &= \frac{8}{9} + \frac{2}{3}c_2 - \frac{8}{45}c_3 - \frac{4}{9}c_1 = 0 \\ \langle r_3, \frac{3x^2-1}{2} \rangle &= \frac{2}{5}c_3 = 0 \end{aligned}$$

On obtient

$$c_1 = \frac{1}{3}, c_2 = -\frac{10}{9}, c_3 = 0$$

Donc la solution est

$$u_3(x) = \frac{1}{3} - \frac{10}{9}x$$

Chapitre 3

Résolution numérique des équations intégrales de Fredholm-Volterra

3.1 Opérateurs à noyau

L'équation qui va nous intéresser dans la suite de cette section est l'équation de Fredholm du second type

$$\lambda\varphi(x) - \int_{\Omega} K(x,t)\varphi(t)dt = f(x) \quad \Omega \subset \mathbb{R}^N$$

On désigne par Ω un ensemble compact inclus dans \mathbb{R}^N et soit $C(\Omega)$ l'espace des fonctions continues sur Ω on lui associe le produit scalaire

$$\langle f, g \rangle = \int_{\Omega} f(x)g(x)dx$$

Cet espace est muni de la norme uniforme

$$\|f\|_{\infty} = \max_{x \in \Omega} |f(x)|$$

On va considérer des équations mettant en jeu des intégrales, sous la forme d'un opérateur linéaire.

Définition 3.1.1 Soit $K : \Omega \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue on appelle opérateur intégrale à noyau $K(.,.)$ l'opérateur défini par

$$K : \varphi \in C(\Omega) \rightarrow K(\varphi) \in C(\Omega)$$

$$K(\varphi)(x) = \int_{\Omega} K(x, t) \varphi(t) dt$$

Cet opérateur est continue, de norme

$$\|K\|_{L(C(\Omega), C(\Omega))} = \max_{x \in \Omega} \int_{\Omega} |K(x, t)| dt$$

3.2 Les polynômes de Legendre

Définition Les polynômes de Legendre sur l'intervalle $[-1, 1]$ sont donnés par les formules suivantes :

$$L_0(x) = 1$$

$$L_1(x) = x$$

$$L_{m+1}(x) = \frac{2m+1}{m+1} x L_m(x) - \frac{m}{m+1} L_{m-1}(x) \quad m = 1, 2, 3, \dots$$

La forme générale de la polynôme de Legendre de n -ième degré est définie par

$$L_n(x) = \sum_{r=0}^{\frac{n}{2}} (-1)^r \frac{(2n-2r)!}{2^n r! (n-2r)! (n-r)!} x^{n-2r}, \quad n = 0, 1$$

Les quelques premiers polynômes de Legendre sont donnés ci-dessous :

$$L_0(x) = 1, \quad L_1(x) = x, \quad L_2(x) = \frac{1}{2}(3x^2 - 1),$$

$$L_3(x) = \frac{1}{2}(5x^2 - 3x), \quad L_4(x) = \frac{1}{8}(35x^4 - 30x^2 + 3), \dots$$

L'ensemble des $(L_m(x) : m = 0, 1, 2, 3, \dots)$ dans l'espace de Hilbert $L^2[-1, 1]$ est un ensemble orthogonal complet. L'orthogonalité des polynômes de Legendre sur l'intervalle $[-1, 1]$ implique

$$\langle L_i(x), L_j(x) \rangle = \int_{-1}^1 L_i(x) L_j(x) dx = \begin{cases} 0, & i \neq j \\ \frac{2}{2i+1}, & i = j \end{cases}$$

pour $i, j = 0, 1, 2, \dots$, telle que $\langle \cdot, \cdot \rangle$ note le produit scalaire.

3.3 Méthode de Galerkin

3.3.1 Application de la méthode de collocation

Soit $V = L^2(D)$ l'espace d'Hilbert des fonctions de carré intégrable sur D .

On note par $\langle \cdot, \cdot \rangle$ le produit scalaire sur V . Soit $\{\phi_i\}$ un système de fonctions orthogonales telle que

$$\langle r_n, \phi_i \rangle = 0, \quad i = 1, \dots, k_n$$

Comme :

$$r_n(x) = \sum_{j=1}^{k_k} \left[c_j \left\{ \lambda \phi_j(x) - \int_D K(x, y) \phi_j(x) \right\} \right] - f(x)$$

Donc :

$$\langle r_n, \phi_i \rangle = \sum_{j=1}^{k_k} [c_j \{ \lambda \langle \phi_j, \phi_i \rangle - \langle K \phi_j, \phi_i \rangle \}] - \langle f, \phi_i \rangle = 0, \quad (i = 1, \dots, k_n)$$

C'est le système linéaire de Galerkin, Il suffit de déterminer les coefficients c_i .

3.3.2 Application de la méthode de Galerkin

Soit à chercher une solution approchée de l'équation intégrale

$$\lambda u(x) - \int_a^b K(x, t) u(t) dt = f(x)$$

par la méthode de Galerkin. On choisit un système de fonctions $\{\phi_j\}$ linéairement indépendantes dans $V = L^2(a, b)$. On cherche une solution approchée sous la forme

$$u_n(x) = \frac{1}{\lambda} \left[f(x) + \sum_{i=1}^n A_i \phi_i(x) \right]$$

On a le résidu

$$r_n(x) = \lambda u_n(x) - \int_a^b K(x, t) u_n(t) dt - f(x)$$

Donc

$$r_n(x) = f(x) + \sum_{j=1}^n A_j \phi_j(x) - \frac{1}{\lambda} \int_a^b K(x, t) \left[f(t) + \sum_{j=1}^n A_j \phi_j(t) \right] dt - f(x)$$

D'où

$$r_n(x) = \frac{1}{\lambda} \sum_{j=1}^n A_j \left[\lambda \phi_j(x) - \int_a^b K(x,t) \phi_j(t) dt \right] - \frac{1}{\lambda} \int_a^b K(x,t) f(t) dt$$

D'après

$$\langle r_n, \phi_i \rangle = \langle \lambda r_n, \phi_i \rangle = \int_a^b \lambda r_n(x) \phi_i(x) dx = 0$$

$$\int_a^b \left(\sum_{j=1}^n A_j \left[\lambda \phi_j(x) - \int_a^b K(x,t) \phi_j(t) dt \right] - \int_a^b K(x,t) f(t) dt \right) \phi_i(x) dx = 0$$

Il vient

$$\begin{aligned} & \sum_{j=1}^n A_j \left(\lambda \int_a^b \phi_j(x) \phi_i(x) dx - \int_a^b \int_a^b K(x,t) \phi_j(t) \phi_i(x) dt dx \right) \\ &= \int_a^b \int_a^b K(x,t) f(t) \phi_i(x) dt dx \end{aligned}$$

On pose ;

$$\begin{aligned} \alpha_{ij} &= \int_a^b \phi_j(x) \phi_i(x) dx, & \beta_{ij} &= \int_a^b \int_a^b K(x,t) \phi_j(t) \phi_i(x) dt dx \\ \gamma_i &= \int_a^b \int_a^b K(x,t) f(t) \phi_i(x) dt dx \end{aligned}$$

On obtient le système suivant

$$\sum_{j=1}^n A_j (\lambda \alpha_{ij} - \beta_{ij}) = \gamma_i, \quad i = 1, \dots, n \quad (3.1)$$

Par conséquent, les coefficients A_j , $j = 1, \dots, n$, se définissent à partir de résolution du système (3.1)

Si

$$D(\lambda) = \det(\lambda \alpha_{ij} - \beta_{ij}) \neq 0$$

le système (3.1) détermine de façon unique les coefficients $\{A_j\}$

Exemple 3.3.1 *On se propose de résoudre par le procédé de Galerkin l'équation intégrale suivante*

$$u(x) = 1 - \frac{4}{3}x + \int_{-1}^1 (xt^2 - 1) u(t) dt$$

Prenant pour système complet sur $[-1, 1]$ un système de polynômes de Legendre $\{l_i(x)\}_{1 \leq i \leq 3}$

avec

$$l_1(x) = 1, \quad l_2(x) = x, \quad l_3(x) = \frac{3x^2 - 1}{2}$$

On cherche la solution sous forme

$$u_3(x) = c_1 + c_2x + c_3 \frac{3x^2 - 1}{2}$$

Le résidu est égale à

$$r_3(x) = u_3(x) - 1 + \frac{4}{3}x - \int_{-1}^1 (xt^2 - 1) \left(c_1 + c_2t + c_3 \frac{3t^2 - 1}{2} \right) dt$$

On calcule l'intégrale, on obtient

$$r_3(x) = \left(3c_1 - \frac{c_3}{2} - 1 \right) + \left(-\frac{2}{3}c_1 + c_2 - \frac{4}{15}c_3 + \frac{4}{3} \right) x + \frac{3}{2}c_3x^2$$

D'après l'orthogonalité du résidu r_3 au système $\{1, x, \frac{3x^2-1}{2}\}$ on a

$$\langle r_3, 1 \rangle = 6c_1 - 2 = 0$$

$$\langle r_3, x \rangle = \frac{10}{9} + c_2 - \frac{4}{15}c_3 = 0$$

$$\langle r_3, \frac{3x^2 - 1}{2} \rangle = \frac{1}{5}c_3 = 0$$

Donc

$$c_1 = \frac{1}{3}, \quad c_2 = -\frac{10}{9}, \quad c_3 = 0$$

Ainsi on obtient une solution

$$u_3(x) = \frac{1}{3} - \frac{10}{9}x$$

Cette solution coïncide avec la solution exacte.

Algorithme de la méthode de Galerkin (dans le cas équation intégrale mixte de Fredholm-Volterra)

Soit l'équation intégrale de Fredholm-Volterra

$$u(x) = f(x) + \int_0^x k(x,t)u(t)dt + \int_a^b h(x,t)u(t)dt, x \in [a,b] \quad (3.2)$$

Nous utilisons la technique de la méthode Galerkin pour trouver la solution approximative $u_n(x)$ de l'équation (3.2). Pour cela, nous Supposons que

$$u_n(x) = \sum_{i=1}^n C_i L_i(x)$$

On substitue cet équation dans (3.2), nous obtenons

$$\sum_{i=1}^n C_i \left[L_i(x) - \int_0^x k(x,t) L_i(t) dt - \int_a^b h(x,t) L_i(t) dt \right] = f(x)$$

Donc

$$\sum_{i=1}^n C_j \int_a^b \left[L_i(x) - \int_0^x k(x,t) L_i(t) - \int_a^b h(x,t) L_i(t) dt \right] L_j(x) dx = \int_a^b f(x) L_j(x) dx$$

Ainsi, pour chaque $j = 0, 1, 2, \dots, n$, on obtient le système suivant

$$\sum_{i=0}^n C_j a_{i,j} = f_j, \quad i, j = 0, 1, 2, \dots, n$$

Où

$$a_{i,j} = \int_a^b \left[L_i(x) - \int_a^x k(x,t) L_i(t) dt - \int_a^b h(x,t) L_i(t) dt \right] L_i(x) dx$$

$$f_j(x) = \int_a^b f(x) L_i(x) dx$$

La résolution du système d'équations ci-dessus (c-à-dire trouver les inconnus C_i) qui permet obtenir la solution approchée $u_n(x)$.

L' erreur absolue maximum est donné par $\max \text{erreur} = \text{Max} |u(x) - u_n(x)|$.

Nous avons maintenant quelques exemples suivants :

Exemple 3.3.2 *Considérons l'équation intégrale linéaire mixte de Fredholm-Volterra de la seconde espèce*

$$u(x) = 2 \cos(x) - x \cos(2) - 2x \sin(2) + x - 1 + \int_0^x (x-t) u(t) dt + \int_0^2 xtu(t) dt$$

Avec la solution exacte $u(x) = \cos(x)$.

Pour $n = 3$

$$L_0(x) = 1$$

$$L_1(x) = x$$

$$L_2(x) = \frac{3}{2}x^2 - \frac{1}{2}$$

$$L_3(x) = \frac{1}{2}(5x^3 - 3x)$$

$$\begin{aligned} & \int_0^2 \left(\int_0^x (x-t) L_i(t) L_j(t) dt - \int_0^2 xt L_i(t) L_i(x) dt \right) dx \\ &= \int_0^2 (2 \cos(x) - x \cos(2) - 2x \sin(2) + x - 1) L_j(x) dx \end{aligned}$$

$$u_3(x) = \sum_{i=0}^3 C_i L_i(x).$$

Pour déterminer les coefficients C_i , nous avons un système de quatre équations et quatre inconnues, en utilisant la méthode d'élimination de Gauss, on peut résoudre ce système

$$\begin{aligned} & \int_0^2 \left(L_i(x) L_j(x) - \int_0^x (x-t) L_i(t) L_j(x) dt - \int_0^2 xt L_i(t) L_j(x) dt \right) dx \\ &= \int_0^2 (2 \cos(x) - x \cos(2) - 2x \sin(2) + x - 1) L_j(x) dx, i, j = 0, \dots, 3 \end{aligned}$$

On obtient un système sous forme $Ax = b$ telle que

$$A = \begin{bmatrix} -3.3333e+00 & -4.0000e+00 & -7.1333e+00 & -1.7333e+01 \\ -5.3333e+00 & -5.5111e+00 & -8.6667e+00 & -2.0686e+01 \\ -1.1133e+01 & -1.0667e+01 & -1.5062e+01 & -3.4333e+01 \\ -1.1133e+01 & -1.0667e+01 & -1.5062e+01 & -3.4333e+01 \\ -2.7333e+01 & -2.6019e+01 & -3.5333e+01 & -7.7035e+01 \end{bmatrix}$$

$$b = [7.7772e-01 \quad 1.4066e-01 \quad -4.3296e-01 \quad 5.3060e-02]^T$$

La solution du système est les coefficients C_i de polynômes de Legendre de degré 3 telle que

$$c = [7.7772e-01 \quad 1.4066e-01 \quad -4.3296e-01 \quad 5.3060e-02]^T$$

Par conséquent, les résultats numériques en appliquant la méthode de Galerkin (MG) d'

exemple (2) dans le tableau 1.

x	valeur exacte	valeur approximative MG	Erreur $ u_3(x) - u(x) $ MG
	$u(x) = \cos x$	$n = 3$	$n = 3$
0	1.0000e + 000	9.9420e - 01	5.8015e - 03
0.1000	9.9500e - 001	9.9394e - 01	1.0604e - 03
0.2000	9.8007e - 001	9.8150e - 01	1.4297e - 03
0.3000	9.5534e - 001	9.5765e - 01	2.3151e - 03
0.4000	9.2106e - 001	9.2321e - 01	2.1451e - 03
0.5000	8.7758e - 001	8.7896e - 01	1.3727e - 03
0.6000	8.2534e - 001	8.2570e - 01	3.5949e - 04
0.7000	7.6484e - 001	7.6422e - 01	6.2058e - 04
0.8000	6.9671e - 001	6.9533e - 01	1.3761e - 03
0.9000	6.2161e - 001	6.1982e - 01	1.7919e - 03
1.0000	5.4030e - 001	5.3848e - 01	1.8225e - 03
1.1000	4.5360e - 001	4.5211e - 01	1.4843e - 03
1.2000	3.6236e - 001	3.6151e - 01	8.4783e - 04
1.3000	2.6750e - 001	2.6747e - 01	2.8760e - 05
1.4000	1.6997e - 001	1.7079e - 01	8.2100e - 04
1.5000	7.0737e - 002	7.2260e - 02	1.5228e - 03
1.6000	-2.9200e - 002	-2.7318e - 02	1.8812e - 03
1.7000	-1.2884e - 001	-1.2715e - 01	1.6934e - 03
1.8000	-2.2720e - 001	-2.2644e - 01	7.5986e - 04
1.9000	-3.2329e - 001	-3.2440e - 01	1.1064e - 03
2.0000	-4.1615e - 001	-4.2022e - 01	4.0695e - 03

Table 1. Les résultats numériques pour exemple 3.3.2

FIG. 3.1 – Comparaison entre la solution exacte et la solution approchée de l'équation intégrale dans l'exemple 3.3.2.

Exemple 3.3.3 *Considérons l'équation intégrale linéaire mixte de Fredholm-Volterra de la seconde espèce*

$$u(x) = \frac{2}{3}x - \frac{1}{3}x^4 + \int_0^x xu(t) dt + \int_0^1 xtu(t) dt$$

Avec la solution exacte $u(x) = x, x \in [0, 1]$

Pour $n = 1$ on a

$$u_1(x) = C_0L_0(x) + C_1L_1(x)$$

Donc

$$\begin{aligned} & \int_0^1 \sum_{i=0}^n C_i L_i(x) L_j(x) dx - \int_0^1 \int_0^x x \sum_{i=0}^n C_i L_i(t) L_j(x) dt dx - \int_0^1 \int_0^1 xt \sum_{i=0}^n C_i L_i(t) L_j(x) dt dx \\ &= \int_0^1 \left(\frac{2}{3}x - \frac{1}{3}x^4 \right) L_j(x) dx, \quad j = 0, 1 \end{aligned}$$

$$\begin{bmatrix} \frac{5}{8} & \frac{8}{15} \\ \frac{7}{30} & \frac{1}{16} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_0 \\ c_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{4}{15} \\ \frac{1}{6} \end{bmatrix}$$

$$c = [0, 1]^T$$

Alors

$$u(x) = x$$

La solution approximative est coïncide avec la solution exacte.

Exemple 3.3.4 Soit l'équation intégrale de Fredholm-Volterra :

$$u(x) = x - 2 \exp(x) + \exp(-x) + 1 + \int_0^x t \exp(x) u(t) dt + \int_0^1 \exp(x+t) u(t) dt.$$

Avec la solution exacte $u(x) = \exp(-x)$.

On utilise la même méthode précédente pour $n = 3$ et $n = 5$ on obtient deux systèmes sous forme $Ax = b$ telles que

$$\begin{bmatrix} -2.3116 & -1.4061 & -0.3690 & 0.1160 \\ -1.5000 & -0.8215 & -0.1000 & 0.1513 \\ -0.5439 & -0.1972 & 0.1300 & 0.1706 \\ -0.0399 & 0.0364 & 0.1170 & 0.1325 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_0 \\ c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1.3044 \\ -0.9024 \\ -0.3867 \\ -0.0537 \end{bmatrix}$$

La solution du premier système est

$$C = [1.1536 \quad -1.0531 \quad 0.3080 \quad -0.0408]^T$$

$$\begin{bmatrix} -2.3116 & -1.4061 & -0.3690 & 0.1160 & 8.5729 & -0.0446 \\ -1.5000 & -0.8215 & -0.1000 & 0.1513 & 4.8549 & -0.0561 \\ -0.5439 & -0.1972 & 0.1300 & 0.1706 & 0.9467 & -0.0397 \\ -0.0399 & 0.0364 & 0.1170 & 0.1325 & -0.3890 & 0.0197 \\ 9.3767 & 5.0030 & 0.3947 & -1.1315 & -29.2123 & 0.4059 \\ -0.0414 & -0.0655 & -0.0632 & -0.0072 & 0.4982 & 0.0867 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_0 \\ c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ c_4 \\ c_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1.3044 \\ -0.9024 \\ -0.3867 \\ -0.0537 \\ 5.7158 \\ 0.0020 \end{bmatrix}$$

La solution du deuxième système est

$$C = [-1.5942 \quad -2.6087 \quad 2.3188 \quad 0.2435 \quad 0.0250 \quad 0.0003]^T$$

Les résultats numériques obtenus sont présentés dans les tableaux suivants

x	valeur exacte	valeur approximative MG	Erreur $ u_3(x) - u(x) $ MG
	$u(x) = \exp(-x)$	$n = 3$	$n = 3$
0	$1.0000e + 0$	$9.9435e - 1$	$5.6530e - 3$
0.1000	$9.0484e - 1$	$9.0454e - 1$	$2.9402e - 4$
0.2000	$8.1873e - 1$	$8.2087e - 1$	$2.1387e - 3$
0.3000	$7.4082e - 1$	$7.4333e - 1$	$2.5068e - 3$
0.4000	$6.7032e - 1$	$6.7191e - 1$	$1.5903e - 3$
0.5000	$6.0653e - 1$	$6.0663e - 1$	$9.4502e - 5$
0.6000	$5.4881e - 1$	$5.4747e - 1$	$1.3420e - 3$
0.7000	$4.9659e - 1$	$4.9444e - 1$	$2.1416e - 3$
0.8000	$4.4933e - 1$	$4.4755e - 1$	$1.7815e - 3$
0.9000	$4.0657e - 1$	$4.0678e - 1$	$2.1111e - 4$
1.0000	$3.6788e - 1$	$3.7214e - 1$	$4.2643e - 3$

Table 2. Résultats numériques pour l'exemple 3.3.4 ($n = 3$).

x	valeur approximative MG	Erreur $ u_5(x) - u(x) $ MG
	$n = 5$	$n = 5$
0	$1.0000e + 0$	$9.7109e - 7$
0.1000	$9.0484e - 1$	$3.7703e - 7$
0.2000	$8.1873e - 1$	$1.7275e - 7$
0.3000	$7.4082e - 1$	$2.7890e - 7$
0.4000	$6.7032e - 1$	$7.9891e - 8$
0.5000	$6.0653e - 1$	$2.9566e - 7$
0.6000	$5.4881e - 1$	$7.9333e - 7$
0.7000	$4.9659e - 1$	$2.6306e - 7$
0.8000	$4.4933e - 1$	$1.6220e - 7$
0.9000	$4.0657e - 1$	$3.3245e - 7$
1.0000	$3.6788e - 1$	$8.2716e - 7$

Table 3. Résultats numériques pour l'exemple 3.3.4 ($n = 5$).

FIG. 3.2 – Comparaison entre la solution exacte et la solution approchée de l'équation intégrale dans l'exemple 3.3.4 pour $n = 3$ et $n = 5$.

Bibliographie

- [1] ATKISON, K.E. The Numerical Solution of Integral Equations of the Second Kind. Cambridge University Press, Cambridge, 1997.
- [2] Rainer Kress, Linear integral equations, Springer New York Heidelberg Dordrecht London, 2014.
- [3] M.Rahman, Integral equations and their applications, WITpress, 2007.
- [4] Abdul-Majid Wazwaz, Linear and Non linear Integral Equations, Higher education press Beijing, 2011.
- [5] A. Kolmogorov et S. FOMINE, Eléments de la théorie des fonctions et de l'analyse fonctionnelle, Éditions MIR-MOSCOU, 1994
- [6] Rahmoune Azedine, Sur la Résolution Numérique des Équations Intégrales en utilisant des Fonctions Spéciales (Thèse de Doctorat), 2011.
- [7] F.A. Hendi a et A.M. Albugami b, Numerical solution for Fredholm–Volterra integral equation of the second kind by using collocation and Galerkin methods, Journal of King Saud University (Science), (2010) 22, pp 37–40.
- [8] M. M. Rahman, M. A. Hakim, M. Kamrul Hasan, M. K. Alam et L. Nowsher Ali, Numerical Solutions of Volterra Integral Equations of Second kind with the help of Chebyshev Polynomials, Annals of Pure and Applied Mathematics, (2012)Vol. 1, No. 2, pp 158-167.
- [9] E. Babolian et L. M. Delves, An Augmented Galerkin Method for First Kind Fredholm Equations, J. Inst. Maths Applies, (1979) 24, pp 157-174.