République Algérienne Démocratique et Populaire

Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

UNIVERSITÉ MOHAMED KHIDER, BISKRA

FACULTÉ des SCIENCES EXACTES et des SCIENCES de la NATURE et de la VIE

DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES

Mémoire présenté en vue de l'obtention du Diplôme **:**

MASTER en Mathématiques

Option : **Analyse**

Par

HAMDI Wissem

Titre :

HISTOIRE DE MATHEMATIQUE

Membres du Comité d'Examen :

Dr.	**REZKI Ibrahim**	UMKB	Président
Dr.	**ZERROUG Abdelhamid**	UMKB	Encadreur
Dr.	**LAIADI Abdelkader**	UMKB	Examinateur

Juin 2019

Dédicace

Je dédie ce modeste travail

à ma mère

à l'âme de mon père

à mes sœurs et ses enfants

à toute la famille

à tous ceux qui me sont chers,

à mes chers amies

REMERCIEMENTS

Je remercie Allah le tout puissant de m'avoir donné la santé et la volonté d'entamer et de terminer mon mémoire.

Je tiens à remercier mon encadreur monsieur ZERROUG Abdelhamid, docteur à l'université de Biskra, d'avoir accepté d'être rapporteur de ce mémoire.

Je tiens à remercier les membres du jury Madame REZKI Ibrahim, docteur à l'université de Biskra et Monsieur LAIADI Abdelkader, docteur à l'université de Biskra d'avoir aecccepté d'examiner et d'évaluer ce travail.

Table des matières

Table des figures

Liste des tableaux

Introduction

Les mathématiques sont un ensemble de connaissances abstraites résultant de raisonnementslogiques appliqués à des objets divers tels que les nombres, les formes, les structures et les transformations. Elles sont aussi le domaine de recherche développant ces connaissances, ainsi que la discipline qui les enseigne.

Elles possèdent plusieurs branches telles que l'algèbre, l'analyse, la géométrie, la logique mathématique, etc. Il existe également une certaine séparation entre les mathématiques pures et les mathématiques appliquées.

Les mathématiques, en tant que science morte, a été développé avant même que l'homme ait commencé à écrire car, pour régler les problématiques journalières : le commerce, la mesures des superficies, prédictions des événements astronomiques, ... etc., l'homme a dû se munir d'outils, règles et mesures stables et universelles qui ont été transmises dans les premières civilisations et liés à leurs applications concrètes.

Les mathématiques se distinguent des autres sciences par un rapport particulier au réel car l'observation et l'expérience ne s'y portent pas sur des objets physiques. Elles sont de nature entièrement intellectuelle, fondées sur des axiomes déclarés vrais ou sur des postulats provisoirement admis.

Les racines des mathématiques remontent à plus de 3000 ans quand les Babéliens ont commencé à écrire des nombres et compter les intérêts, spécialement pour le commerce à Babel. Ils inscrivaient leurs comptes sur des plaques d'argile en utilisant un crayon conique. Ils connaissaient l'addition, la soustraction, la multiplication et utilisaient le système sur la base 60 (puis les Egyptiens ont utilisé la base 10). C'est une invention de comptables, qui a comme rôle d'aide-mémoire afin de garder trace des échanges qui deviennent chaque jour plus nombreux et plus complexes avec le commerce avec l'Ègypte et le plateau Anatolien.

C'est ainsi que nous nous sommes demandé ; quel a été le commencement des mathématiques ? quelles sont les développements qui ont fait que c'est devenu cette science, complexe, essentielle et qui est à la base de plusieurs domaines (physiques, informatique, ... etc.), que nous connaissons aujourd'hui ?

Pour pouvoir approfondir l'analyse de l'histoire des mathématiques et pour répondre à cette problématique nous allons traiter, dans ce mémoire, de trois chapitres :

Organisation du mémoire

La partie principale de ce mémoire est composée de trois chapitres, Le mémoire comporte également, un résumé, et une introduction (page 1).

Le chapitre 1 est divisé en quatre sections, la première section est consacré à la histoire de la géometrie , Tandis que la deuxième section est réservé aux les solides de platon, a troiiéme section l'histoire de la trigonometrie ,Finalement la quatreième section est dédiée histoire de l'algebre . . aux point d'équilibre.

Dans le chapitre 2 nous considérons compter par paquets, et classification des numerations, puis les nombre avant et apré J.C .

Dans le chapitre 3 nous considérons les nombre particuliers ; le zero le nombre Pi , e , l'infini (page).

Chapitre 1

Généralité sur les mathématiques

1.1 Histoire de la géométrie

Les origines de la géométrie remontent aux babyloniens et aux égyptiens (2000 ans avant notre ère). Le théorème dit «de Pythagore» est déjà connu dans des cas particuliers. Sur des tablettes babyloniennes, on a retrouvé des problèmes à caractère géométrique (calculs d'aires) dont la résolution passe par l'algèbre (équations du second degré).

La géométrie naît des exigences de la vie pratique : architecture, fabrication et décoration d'objets, ... Mais c'est aux crues répétées du Nil qu'on attribue les origines de la géométrie. Elles contraignent les arpenteurs égyptiens à retracer régulièrement les limites des propriétés agricoles afin de redistribuer les terrains de façon équitable.

Ces arpenteurs déterminent des longueurs, des surfaces divisées en rectangles, carrés et autres triangles. Ils utilisent la corde à 13 nœudspour marquer les angles droits et sont ainsi nommés les tendeurs de cordes.

Pour l'historien grec Hérodote ($484 - 425$ av.J.C.), la géométrie est un don du Nil. Il faut dire également qu'à cette époque et durant tout le Ier millénaire de notre ère, la géométrie se confond avec les mathématiques puisque tout problème mathématique passe pour sa résolution par des concepts et des représentations géométriques.

A cette époque, on sait calculer l'aire de quadrilatères (trapèzes, rectangles) ou de triangles isocèles mais les formules de calculs ne mènent qu'à des valeurs approchées.

C'est le scribe égyptien Ahmès qui par son, aujourd'hui célèbre, Papyrus Rhind nous rapporte ces informations.

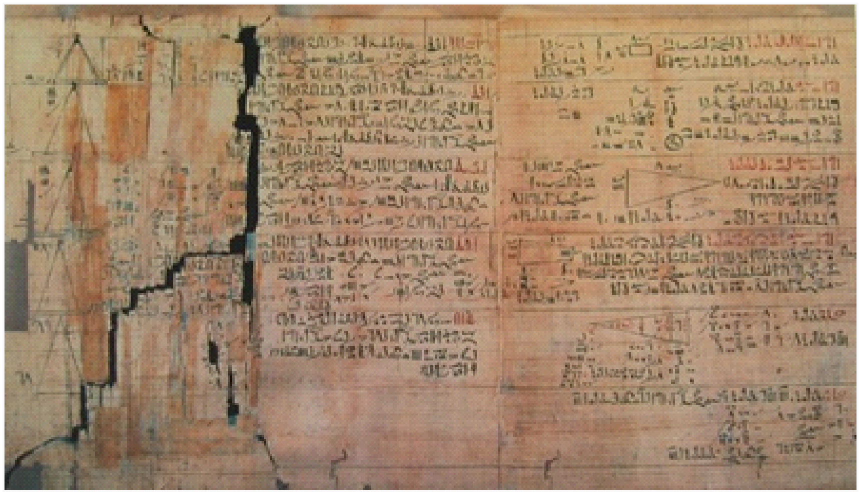


FIG. 1.1 – Papyrus Rhind

1.1.1 Les écoles grecques

Les premiers pas de la géométrie grecque se font avec Thalès de Milet ($624 - 548$ av.J.C.), connu pour avoir calculé la hauteur de la pyramide de Kheops.

La géométrie devient déductive. Fini l'à-peu-près, les formules mènent à des valeurs exactes, les propriétés ne sont plus admises sur des exemples, mais sont démontrées dans le cas général.

Deux écoles marquent cette période :

- La Fraternité pythagoricienne de Crotone, proche d'une secte, donne une interprétation mystique des nombres. On lui attribue la découverte de l'existence d'une longueur incommensurable telle que

- L'Ecole d'Alexandrie, fondée en 331 avant J.C., centre intellectuel de l'époque, connaît trois des plus grands savants de l'Antiquité : Euclide d'Alexandrie ($320 - 260$), Archimède de Syracuse ($287 - 212$) et Apollonius de Perge ($262 - 190$).

Commence ensuite une longue période de stagnation intellectuelle.

Avide de pouvoir et de conquêtes au détriment du développement des sciences, les romains contribueront à la décadence de la civilisation grecque.

1.1.2 La contribution arabe

Des avancées scientifiques s'accomplissent cependant en Orient et au Moyen-Orient chez les arabes et les indiens jusqu'au XIIIème siècle.

Les arabes traduisent les œuvres grecques, développent de nouvelles méthodes de calculs d'aires et de volumes et font progresser la trigonométrie. Ils étudient de nombreux problèmes de construction.

Citons notamment Muhammad al Biruni, Muhammad Abu'l-Wafa $(940; 998)$ ainsi que frères Banu Musa (vers 800).

1.1.3 L'occident

En Europe, la Renaissance voit naître la géométrie projective. Les besoins en dessin et en peinture de vouloir imiter la nature de façon réaliste rendent nécessaire l'introduction d'une nouvelle méthode de représentation : la perspective.

Les règles de géométrie sont précises. L'architecte italien Filippo Brunelleschi $(1377; 1446)$ est le premier à les présenter. Elles seront reprises ensuite par un second italien, Leone Battista Alberti $(1404; 1472)$.

Un autre italien, Piero della Francesca $(1412; 1492)$ écrit un ouvrage destiné aux peintres de l'époque De prospectiva pingendi (La Perspective en peinture) et rédigé à la manière d'un traité de géométrie qui comprend théorèmes et définitions. Ses brillantes études en mathématiques lui auraient permis d'en faire sa profession mais il se dirige très jeune vers les arts comme apprenti chez un artiste local pour devenir un remarquable peintre alliant une utilisation rigoureuse des règles de perspective et un respect de la tradition picturale religieuse.

Le zéro se trouve au centre de la peinture de l'époque. Tout ce qui se trouve suffisamment éloigné dans la réalité se voit concentré en un point de dimension zéro (le point de fuite) contenant un espace infini.

Il faudra attendre le début du XVIe siècle avec un autre architecte, français cette fois, Gérard Desargues $(1591; 1661)$, pour observer un véritable avancement dans géométrie projective.

Pourtant celle-ci tombera rapidement dans l'oubli pendant plusieurs siècles avec l'arrivée de la géométrie analytique exposée par René Descartes $(1596; 1650)$ dans « La géométrie ». En inventant le concept de repère, il passe alors par l'algèbre pour simplifier les méthodes et les démonstrations en géométrie.

Au XIX ème siècle, la géométrie connaît un nouveau tournant avec la naissance des géométries non euclidiennes

L'allemand Felix Klein $(1849; 1925)$ proposera une vue d'ensemble des géométries euclidiennes, non euclidiennes et projectives dans le « Programme d'Erlangen ».

1.2 Les solides de Platon

Philosophe et élève de Socrate, Platon $(-427; -347)$ se consacre d'abord à la poésie, au théâtre et la musique.

Son œuvre « Les Dialogues » nous est parvenue intacte. Elle traite de nombreux thèmes philosophiques tels que le devoir, la vertu, la sagesse, la beauté, l'amour...

Ses origines aristocrates semblent le vouer à une carrière politique. Son père serait descendant de Codrus, dernier roi d'Athènes. Platon est à l'origine des sciences politiques. Il élabore des concepts politiques nouveaux pour son temps.

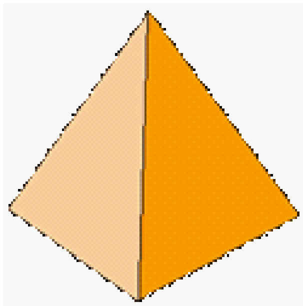
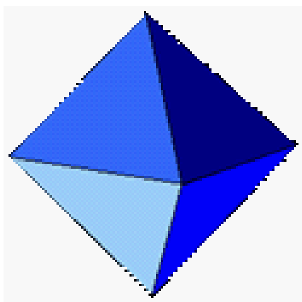
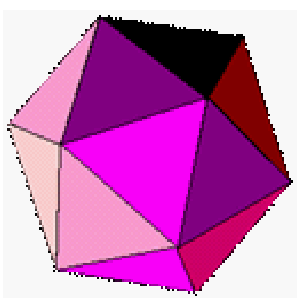
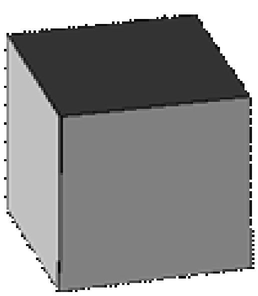
En 399 avant J.C., Socrate est condamné pour des raisons qui restent aujourd'hui mystérieuses. Platon, bouleversé par sa mort, entame une longue série de voyages. Durant douze années, il traversera toute la Méditerranée d'Egypte en Sicile en passant par Mégare, Cyrène, Tarente, ...

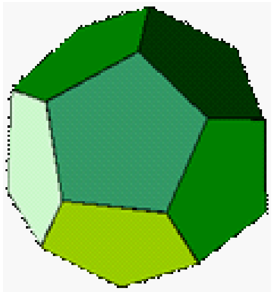
Eveillé aux mathématiques par Théodore de Cyrène $(-470; -420)$ et influencé par la pensée pythagoricienne, Platon se consacre aux sciences et fonde à son retour à Athènes, dans les jardins d'Akadêmos,

Pour Platon, le monde s'appuie sur cinq éléments essentiels : le Feu, l'Air, l'Eau, la Terre et l'Univers. Il associe à chacun d'eux un polyèdre régulier inscriptible dans une sphère. Toutes ses faces sont des polygones réguliers isométriques : tous les côtés sont de même longueur et tous les angles sont de même mesure. Il en existe cinq et cinq seulement possédant de telles propriétés : le tétraèdre, l'octaèdre, l'icosaèdre, le cube et le dodécaèdre.

Selon Platon, la perfection de ces polyèdres symbolise par excellence les cinq éléments.

On les appelle aujourd'hui « Les solides de Platon ».

1.  **Le tétraèdre** symbole du FeIl Il est composé de 4 faces qui sont des triangles équilatéraux Il a 4, sommets et 6 arêtes
2.  **L'octaèdre** , symbole de l'Air Il est composé de 8 faces qui sont des triangles équilatéraux Il a 6 sommets et 12 arêtes
3.  **L'icosaèdre** , symbole de l'Eau Il est composé de 20 faces qui sont des triangles équilatéraux. Il a 12 sommets et 30 arêtes
4.  **Le cube** , symbole de la Terre Il est composé de 6 faces qui sont des carrés Il a 8 sommets et 12 arêtes.

5.  **Le dodécaèdre** symbole de l'Univers Il est composé de 12 faces qui sont des pentagones réguliers. Il a 20 sommets et 30 arêtes.

Euclide d'Alexandrie $(-320; -260)$ démontrera que ces polyèdres sont exactement au nombre de cinq. Car la justification de Platon est plutôt naïve : il n'en existe que cinq car le cosmos ne contient que cinq éléments !

Beaucoup plus tard, à la Renaissance, Johannes Kepler $(1571 - 1630)$ publie en 1596 "Mysterium Cosmographicum" où il propose un modèle de l'univers s'appuyant sur les solides de Platon.

A cette époque, six planètes seulement sont connues. Kepler remarque que les sphères représentant les orbites des planètes peuvent contenir les solides de Platon.

A Saturne, il associe le cube, à Jupiter le tétraèdre, à Mars le dodécaèdre, à Venus l'icosaèdre et à Mercure l'octaèdre. La terre qu'il présente comme l'image de Dieu, sert de séparation entre deux solides.

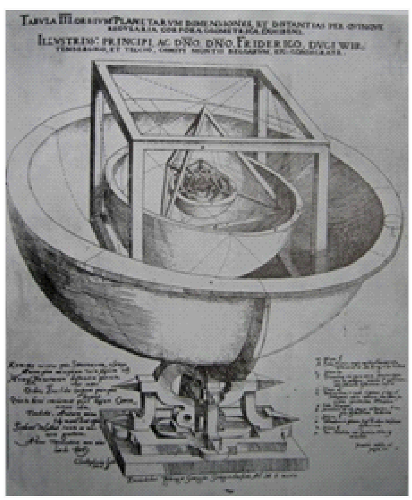


Fig. 1.2 – L'Univers selon Kepler extrait de "Le secret du monde" 1596

Nous pouvons aussi vérifier que chaque solide de Platon répond à la formule d'Euler, démontrée en 1752 par le mathématicien suisse Leonhard Euler $(1707; 1783)$ obtenue avec un nombre F de faces, A d'arêtes et S de sommets :

$F + S - A = 2$

Pour comprendre pourquoi il n'existe pas plus de cinq polyèdres réguliers convexes il faut s'attacher aux propriétés de leurs sommets. Pour être régulier, un polyèdre doit posséder le même nombre de polygones réguliers en chacun de ses sommets et la somme des angles au sommet des polygones réguliers doit être strictement inférieure à 360°.

1^{er} **cas** : les polygones réguliers sont des triangles équilatéraux

S'il y a 3 triangles équilatéraux en chaque sommet, nous obtenons un **tétraèdre**.

S'il y en a 4, nous obtenons un **octaèdre**.

S'il y en a 5, nous obtenons un **icosaèdre**.

S'il y en a 6, c'est impossible car la somme des angles au sommet serait égale à $6 \times 60° = 360°$.

De la même façon, plus que 6 est impossible.

$2^{éme}$ **cas** : les polygones réguliers sont des carrés

S'il y a 3 carrés en chaque sommet, nous obtenons un **cube**.

S'il y en a 4, c'est impossible car la somme des angles au sommet serait égale à $4 \times 90° = 360°$.

De la même façon, plus que 4 est impossible.

$3^{éme}$ **cas** : les polygones réguliers sont des pentagones réguliers

S'il y a 3 pentagones en chaque sommet, nous obtenons un **dodécaèdre**.

S'il y en a 4, c'est impossible car la somme des angles au sommet serait égale à $4 \times 108° = 432°$.

De la même façon, plus que 4 est impossible.

4^{eme} **cas** : les polygones réguliers sont des hexagone réguliers

S'il y a 3 hexagones en chaque sommet, c'est impossible car la somme des angles au sommet serait égale à $3 \times 120° = 360°$.

De la même façon, plus que 3 est impossible.

angle (degrés)	cosinus de l'angle	sinus de l'angle		angle (en egrés)	cosinus de l'angle
0	1.0000	0.0000		30	0.86
1	0.9998	0.0175		31	0.85
2	0.9994	0.0349		32	0.84
3	0.9986	0.0523		33	0.83
4	0.9976	0.0698		34	0.82
5	0.9962	0.0872		35	0.81
6	0.9945	0.1045		36	0.80
7	0.9925	0.1219		37	0.79
8	0.9903	0.1392		38	0.78

TAB. 1.1 – Tables trigonométriques

1.3 L'histoire de la trigonométrie

Quand on parle de trigonométrie, on associe nécessairement le mot aux fonctions cosinus, vues en 4e, puis sinus et tangente, vues en 3e pour le calcul de longueurs ou d'angles dans le triangle.

Aujourd'hui, l'usage de la calculatrice est incontournable lorsqu'on applique ces fonctions. Mais si l'on remonte à la fin des années 70, les collégiens ne disposaient pas encore de calculatrice et devaient se munir de tables trigonométriques pour effectuer les calculs.

Le mot vient du grec "trigone" (triangle) et "metron" (mesure).

Dans l'Encyclopédie (1751), Jean le Rond d'Alembert $(1717; 1783)$ définit la trigonométrie comme « l'art de trouver les parties inconnues d'un triangle par le moyen de celles qu'on connaît ». C'est bien la démarche qui est demandée aux élèves du collège. Et pourtant la trigonométrie n'est pas à l'origine un outil de calcul du triangle mais du cercle.

Il faut remonter jusqu'aux babyloniens, 2000 ans avant notre ère, pour trouver les premières traces

de **tables de données astronomiques**. Car à la base, la trigonométrie est une géométrie appliquée à l'étude du monde, de l'univers et est indissociable de l'astronomie.

L'héritage de ces tables données aux grecs et la numération sexagésimale des babyloniens (base 60) contribuera à l'introduction du partage du cercle en 360°.

Eratosthène de Cyrène $(-276; -196)$ et Aristarque de Samos $(-310; -230)$ utilisent ces tables pour l'astronomie. Eratosthène se rendra célèbre pour avoir calculé la circonférence de la terre avec une précision tout à fait remarquable (seulement 3% d'erreur).

Mais on attribue à Hipparque de Nicée $(-190; -120)$ les premières **tables trigonométriques**. Elles font correspondre l'angle au centre et la longueur de la corde interceptée dans le cercle.

Le grec Claude Ptolémée $(90; 160)$ poursuit dans l'Almageste les travaux d'Hipparque avec une meilleure précision et introduit les premières formules de trigonométrie. Ptolémée croyait au géocentrisme : le terre est le centre de l'univers, tous les astres gravitent autour d'elle. Il faudra attendre le XVIe siècle pour rétablir la vérité pourtant déjà connue de Pythagore de Samos $(-569; -475)$ au Ve siècle avant J.C.

En Orient, l'indien Aryabhata l'Ancien $(476; 550)$ utilise la demi corde et donne les premières tables de sinus. On retrouve la configuration du sinus dans le triangle rectangle telle qu'elle est enseignée aux collégiens aujourd'hui. Aryabhata est le premier à voir la trigonométrie hors du cercle.

Dès le XIIIe siècle, les arabes, tel que le perse Mohammed al Khwarizmi$(780; 850)$ traduisent les ouvrages provenant d'Orient.

Mohammed al Battani $(850; 929)$ introduit les tables de tangentes et de nouvelles formules, puis après lui Muhammad Abu'l-Wafa $(940; 998)$ précise encore ces tables.

Avec le perse al Tusi $(1201 - 1274)$, la trigonométrie se sépare de l'astronomie.

Plus tard, l'astronome et mathématicien Regiomontanus, de son vrai nom Johann Müller développe la trigonométrie comme une branche indépendante des mathématiques.

Il serait à l'origine de l'usage systématique du terme sinus.

Au XVIe siècle, le français François Viète $(1540; 1607)$, conseiller d'Henri IV, fera évoluer la trigonométrie pour lui donner le caractère qu'on lui connaît aujourd'hui.

De nos jours, la trigonométrie trouve des applications très diverses, particulièrement dans les sciences physiques. La propagation des ondes, par exemple, est transcrite par des fonctions trigonométriques.

Ayons enfin une petite pensée pleine de compassion aux lycéens des classes scientifiques qui voient arriver leurs premiers cheveux blancs avec les nombreuses et redoutables formules de trigonométrie qu'il faut connaître et savoir appliquer.

Pour exemple, en voici quelques-unes :

$$\cos(x) + \cos(y) = 2\cos\left(\frac{x+y}{2}\right) + \cos\left(\frac{x-y}{2}\right)$$

$$\cos(x) - \cos(y) = -2\sin\left(\frac{x+y}{2}\right) + \sin\left(\frac{x-y}{2}\right)$$

$$\sin(x) + \sin(y) = 2\sin\left(\frac{x+y}{2}\right)\cos\left(\frac{x-y}{2}\right)$$

$$\sin(x) - \sin(y) = 2\sin\left(\frac{x-y}{2}\right)\cos\left(\frac{x+y}{2}\right)$$

$$\sin(2x) = 2\sin(x)\cos(x)$$

$$\cos(2x) = \cos^2(x) - \sin^2(x)$$

$$\cos(2x) = 2\cos^2(x) - 1$$

$$\cos(2x) = 1 - 2\sin^2(x)$$

$$\tan(2x) = \frac{2\tan(x)}{1-\tan^2(x)}$$

1.4 Histoire de l'algèbre

L'algèbre a d'abord été une branche des mathématiques qui concernait les règles des opérations sur les nombres et la résolution des équations pour devenir plus tard une théorie des opérations puis des propriétés sur les êtres mathématiques en général.

Cette rubrique tente de retracer la longue épopée d'une discipline qui a commencé, il y a plus de 4000 ans, à l'époque de la civilisation babylonienne et qui aujourd'hui encore poursuit son évolution...

1.4.1 Les initiateurs de l'algèbre

Deux mille ans avant J.C., babyloniens et égyptiens savent résoudre de façon rhétorique des problèmes concrets du premier et second degré en utilisant implicitement des propriétés sur les opérations sans aucune notation symbolique. Les égyptiens possèdent toutefois quelques symboles comme ceux qui représentent l'addition (une paire de jambes marchant vers la gauche, le sens de l'écriture) et la soustraction (une paire de jambes marchant vers la droite).

FIG. 1.3 – $+$ et $-$

Les calculateurs babyloniens désignent l'inconnue par "le côté" et la puissance deux est appelée "le carré".

Il y a un peu plus de 2000 ans, les chinois connaissaient des méthodes pour résoudre les systèmes linéaires proches de notre méthode des combinaisons linéaires. Ils employaient également la méthode de fausse position.

Chez les grecs, les nombres sont intimement liés à des concepts géométriques, de ce fait, ils n'apporteront pas de techniques nouvelles de calculs. Ils s'attacheront à passer par des constructions à la règle et au compas pour représenter les solutions qui sont nécessairement des rationnels positifs.

L'amorce du symbolisme en algèbre voit le jour dans « Les arithmétiques » avec Diophante d'Alexandrie (IIIe siècle) qui introduit un certain nombre d'abréviations. Les raisonnements restent cependant écrits en toute lettre. Sa notation est dite syncopée, ce qui signifie que les mots sont remplacés par des abréviations. Diophante utilise des techniques algébriques sans faire référence à la géométrie et par là, il s'oppose radicalement aux méthodes passées des géomètres grecs.

1.4.2 En Inde

Chez Aryabhata l'Ancien $(476; 550)$, on trouve dans son « Aryabhatîya », écrit en sanscrit en 510, des problèmes énoncés de façon concrète qui correspondent à des équations linéaires ou à des systèmes d'équations du premier degré.

Plus tard, dans le « Brahma SphutaSiddhanta » (L'ouverture de l'Univers), datant de 628, Brahmagupta $(598; 660)$ exprime des solutions d'équations quadratiques.

La naissance de l'algèbre dans le monde arabo-musulman

Le développement de l'algèbre dans le monde arabo-musulman s'est effectué en deux temps.

Au VIIe et VIIIe siècle, les mathématiciens héritent du savoir passé (grec, indien, ...) et entre dans une longue période de traduction.

Puis à partir du IXe siècle, de nouveaux travaux voient le jour.

Pour y arriver, il utilise des méthodes de résolutions :

- al jabr (le reboutement,$4x - 3 = 5$devient $4x = 5 + 3$). Dans l'équation, un terme négatif est accepté mais al Khwarizmi s'attache a s'en débarrasser au plus vite. Pour cela, il ajoute son opposé des deux côtés de l'équation.

Le mot "al jabr" est réutilisé dans de nombreux manuels antérieurs et deviendra en Europe : l'algèbre.

- al muqabala (la réduction, $4x = 9 + 3x$ devient $x = 9$)

Les termes semblables sont réduits.

- al hatt ($2x = 8$ devient $x = 4$)

Division de chaque terme par un même nombre.

Al Khwarizmi peut être considéré comme le fondateur d'une véritable théorie de résolution des équations quadratiques.

Il propose également quelques problèmes d'héritages menant à des systèmes d'équations mais qu'il ramène, pour les résoudre, à une équation linéaire.

Il faudra ensuite distinguer deux courants dans le monde arabe :

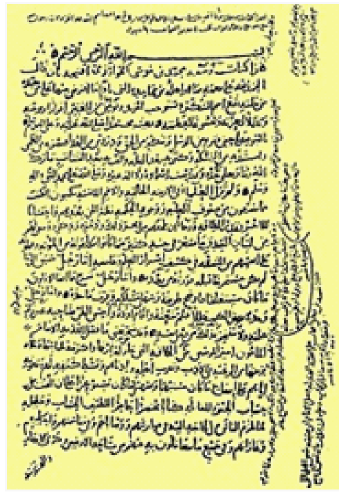


FIG. 1.4 – L'Algèbre d'Al Khwarizmi

1.4.3 Les algébristes arithméticiens

qui voient l'arithmétique au service de l'algèbre au moyen d'algorithmes numériques performants aidant à la résolution des équations. Abu Bakr al Karaji $(953; 1029)$, au travers de son traité « al Kitab al fakhri fi l-jabrwa l-muqabala » (Le Fakhri en algèbre) en sera un acteur et fera progresser les méthodes sous l'influence des techniques algébriques des « Arithmétiques » de Diophante. Ses méthodes de calculs algébriques sur l'inconnue et ses différentes puissances donneront naissance à la théorie des polynômes. A cette occasion, al Karaji expose un triangle de détermination du binôme $(a + b)^n$.

1.4.4 Les géomètres algébristesfont

algébristes font avancer l'algèbre par la géométrie en étudiant en particulier les constructions géométriques permettant de représenter les racines des équations. Muhammad al Mahani $(820; 880)$ s'intéresse au problème d'Archimède de Syracuse $(-287; -212)$ exposé dans le traité « Sur la sphère et le cylindre » (Proposition 4 du Livre II). Ce problème consiste à étudier l'intersection d'une sphère par un plan. Il sera amené à résoudre par radicaux une équation du 3e degré du type $x^3 + r = px^2$, ce que les algébristes arithméticiens n'avaient pas encore tenté. Toutefois ses recherches resteront vaines.

En 1170, dans « Les équations », Sharaf al Din al Tusi $(1135; 1213)$ reprend les travaux des deux courants. Il passe par des discussions sur l'existence des racines positives en étudiant des courbes et en donnant des solutions numériques approximées. Son approche est locale et analytique. Cette conception sera poursuivie par Jemshid Al Kashi $(1380; 1430)$ dans son « Traité de la corde et du sinus ». Il sera mené à donner une valeur approchée d'une équation du type $x^3 + q = px$ pour étudier le problème de la trisection de l'angle.

A partir du début du XVe siècle, les recherches mathématiques vont périclitées dans le monde arabe pour se propager en Europe en passant par l'Espagne musulmane

1.4.5 L'algèbre en Occident

En Italie :

Au XVe et XVIe siècle, l'algèbre prend son essor avec des méthodes de résolution pour des équations du 3^e et 4^e degré et l'apparition des nombres complexes. Les premières traductions de traités arabes comme le « Livre d'algèbre » d'al Khwarizmi ou le « Livre complet » d'Abu Kamil commencent à faire leur apparition.

L'Italie prend une certaine avance dans la réalisation de copies des ouvrages arabes. Celà s'explique par la constitution d'une grande classe de marchands ayant besoin de manuels de calcul.

Vers le symbolisme

En 1484, Nicolas Chuquet $(1445; 1500)$ écrit un remarquable ouvrage d'algèbre « Triparty en la science des nombres », mais son oeuvre n'est pas publiée et mal comprise de ses contemporains. Chuquet résout des systèmes d'équations du premier degré, utilise habilement les nombres négatifs jusqu'aux puissances négatives et établit des notations exponentielles. Par exemple, pour $12x^3$, il note 12^3.

En 1544, le moine allemand Michaël Stifel $(1486; 1567)$ note l'inconnue par une sorte de r et travaille avec les nombres négatifs qu'il appelle nombre absurde.

Avec le français François Viète $(1540; 1603)$, l'algèbre prend un nouveau tournant. Il conçoit l'écriture d'expressions à plusieurs inconnues et à coefficients littéraux. Ce qui permet d'apporter des méthodes de résolution dans des cas généraux. Il conserve une conception géométrique puisque les lettres représentent des grandeurs géométriques mais il n'hésite pas à dépasser la dimension 3 ce qui étonne Stifel qui qualifie sa vision de « contre-nature ». Viète peut être considéré comme le créateur du symbolisme mathématique moderne.

Avec René Descartes (1596; 1650), l'algèbre quitte sa forme syncopée et devient une branche totalement indépendante des mathématiques. C'est lui qui met en place les notations modernes que nous connaissons en algèbre, comme par exemple l'exposant pour les puissances.

Il propose d'utiliser les premières lettres de l'alphabet pour des quantités connues et les dernières pour les inconnues. Aujourd'hui encore, les paramètres sont habituellement notés a, b ou c alors que les variables sont x, y ou z. Grâce à un bon symbolisme, Descartes développe l'aspect « mécanique » du calcul algébrique qui, selon lui, permet de simplifier la pensée.

Utilisant ses récentes découvertes dans le domaine de la géométrie analytique, Descartes résout des équations du 3^e et 4^e degré en passant par la construction de courbes..

Evolution moderne :

Au XVIIIe siècle, les progrès en algèbre se font plus rares avec les efforts donnés au calcul infinitésimal et le développement de l'analyse.

Au XIXe siècle, l'algèbre voit arriver les calculs de déterminants puis matriciels et d'autres mathématiciens tels Evariste Galois, ouvriront les portes de l'algèbre moderne

Pour finir, remontons le temps au travers d'une même "équation" :

	Aujourd'hui	$4x^2 + 3x - 10 = 0$
René Descartes	Vers 1640	$4xx + 3x \propto 10$
François Viète	Vers 1600	4 in A quad + 3 in A aequatur 10
Simon Stevin	Fin XVIe	4 2 + 3 1 egales 10 0
Tartaglia	Début XVIe	4q p 3R equale 10N
Nicolas Chuquet	Fin XVe	4^2 p 3^1 egault 10^0
Luca Pacioli	Fin XVe	Quattro qdrat che gioto agli tre n^0 facia 10 (traduit par 4 carrés joints à 3 nombres font 10)
Diophante	IIIe	$\Delta^Y \delta \; \zeta \gamma$ ἐστι ι (traduit par inconnue carré 4 et inconnue 3 est 10)
Babyloniens et Egyptiens	IIe millénaire avant J.C.	Problèmes se ramenant à ce genre d'équation.

Chapitre 2

Histoire des nombres

L'évolution de nos chiffres s'étale sur plusieurs millénaires. C'est au Paléolithique (il y a 30000ans) qu'on trouve les premières marques permettant de conserver les nombres sur des supports tels que les os ou le bois. La plus ancienne est un péroné de babouin portant 29 encoches trouvé au Swaziland en Afrique australe.

2.1 Compter par paquets : la base du système

Nous réinventons le système de numération de base 10 (système décimal)car, pour obtenir un petit paquet, il faut 10 unités et pour obtenir un gros paquet, il faut 10 petits paquets.

Pour passer au rang des dizaines (petits paquets), il faut 10 unités et pour passer au rang des centaines (gros paquets), il faut 10 dizaines.

10 unités d'un rang valent 1 unité du rang immédiatement supérieur.

L'écriture décimale demande 10 symboles $(0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9)$. Nos 10 doigts en sont incontestablement à l'origine.

2.2 Classification des numérations

Chaque civilisation avait son système de numération plus ou moins performant dans sa propre base.

Dans le principe additif, la valeur d'un nombre est égale à la somme des symboles qui le composent. Pour noter le chiffre 9 par exemple, les égyptiens répètent neuf fois le symbole de l'unité.

Le principe de position, la valeur du symbole varie en fonction de la place qu'il occupe dans l'écriture du nombre.Dans 553, par exemple, le "5 de gauche" occupe la place des centaines et vaut 10 fois plus que le "5 du centre" occupant la place des dizaines. Ce sont pourtant les mêmes symboles.

Certaines civilisations ont adopté un principe mixte appelé numération hybride faisant intervenir simultanément l'addition et la multiplication dans le principe de position.

Pour comprendre, le nombre 932 représenté dans un tel type de numération s'écrirait :910031021

2.3 Les nombre avant J.C

2.3.1 En Mésopotamie

Depuis l'Anatolie à la vallée de l'Indus, et de la mer Caspienne au Soudan, on utilise des petits jetons de terre cuite de formes et de tailles différentes suivant la quantité qu'ils représentent. Les plus anciens retrouvés remontent à une époque allant du IXème au VIIème millénaire avant J.C.

En 3500 avant J.C., en Mésopotamie, ces jetons sont emprisonnés dans une boule creuse en argile qui permet de vérifier que les transactions commerciales sont exactes, on leurs donnera le nom de calculi.

FIG. 2.1 – systèmes de numérotation de En Mésopotamie

-Petit cône = 1

-Petite bille = 10

-Grand cône = 60

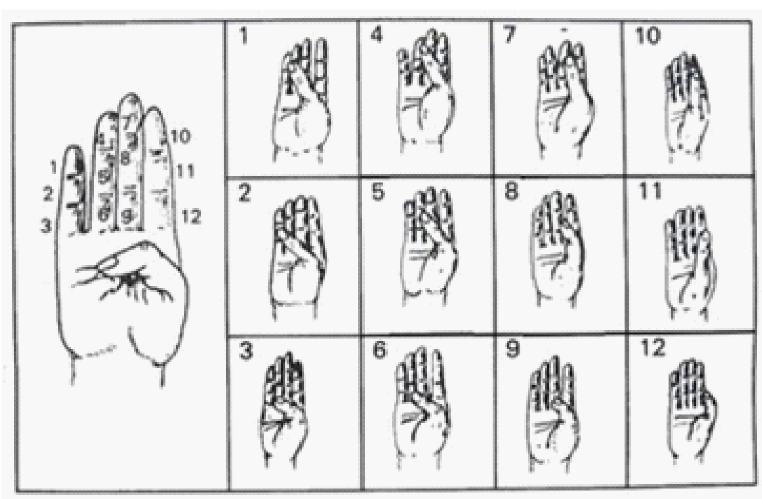
-Grand cône percé = 600

-Grosse bille = 3600

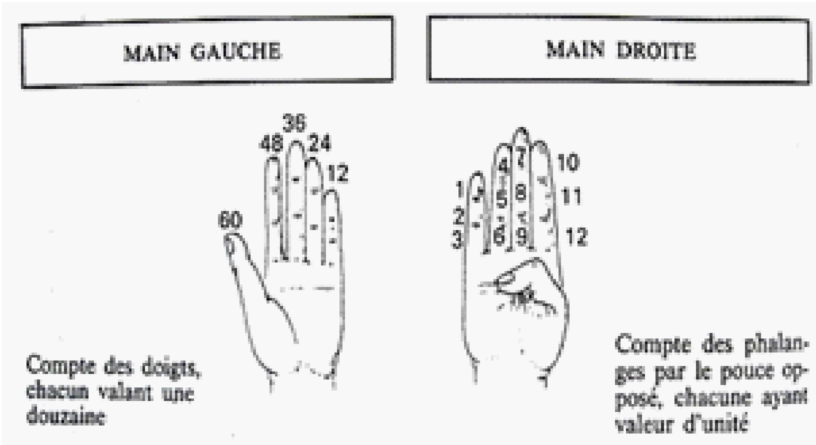
-Grosse bille percée = 36000

Ces cailloux constituent l'un des premiers systèmes de numération. Ce système suit le principe additif et sa base est sexagésimale (base 60).

Les origines de la base 60 se cachent également sur nos mains : il s'agit d'une combinaison entre les 5 doigts de la main gauche et les phalanges des quatre doigts de la main droite, le pouce servant à compter les phalanges, soit 12 au total. Et $5 \times 12 = 60$!



la base 60



la base 60

L'astronomie a préservé ce système que l'on retrouve aujourd'hui au travers des unités de temps ($1h = 60min = 3600s$) et des mesures d'angles (un tour entier = 360°).

Par exemple, 75 en base 10 s'écrit $1,15$ en base 60. En effet, $75min = 1h15min$.

Mais la manipulation n'est pas facile car pour vérifier que la marchandise correspond bien au nombre de « calculi » enfermés dans la boule, il faut casser celle-ci.

Durant la seconde moitié du IVème millénaire avant J.C., à Sumer, avec la naissance de l'écriture, naît les premières représentations écrites des nombres.

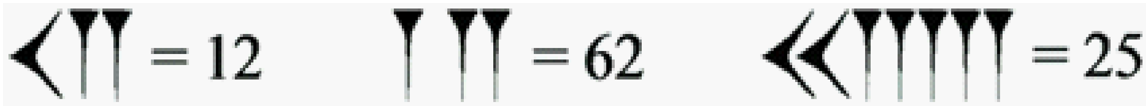
La boule devient une tablette sur laquelle sont gravés des pictogrammes représentant la nature de la marchandise : épis de blé, animaux, ...

Cette écriture évolue vers une forme simplifiée, dite cunéiforme que l'on trouve chez les babyloniens vers 2500 avant J.C.

Vers le IIème millénaire avant J.C., elle évoluera encore pour permettre l'écriture de nombres plus grands et voir apparaître la première numération de position. En fait, cette écriture combine le principe additif et le principe de position. Suivant la place qu'occupe le symbole, celui-ci correspond soit à une unité, soit à une soixantaine, soit à une soixantaine de soixantaines.

Il n'existe que deux symboles le "clou vertical" et le "chevron". Les neuf premiers chiffres se représentent par répétitions de clous verticaux (principe additif). 10 est représenté par le chevron. Pour écrire les nombres de 11 à 59, on répète les symboles autant de fois que nécessaire (principe additif).

Le nombre 60 se représente à nouveau par le clou (principe de position).



Le système de numération babylonien, parfois ambiguë, évoluera au fil du temps. Les scribes auront par exemple l'idée d'un signe de séparation des symboles se présentant sous la forme d'un double chevron exprimant qu'il n'y a rien. Il s'agit de la première trace du zéro (IIIème siècle avant J.C.)

Fig. 2.2 – Tablette de terre cuite portant des nombres en écriture cunéiforme

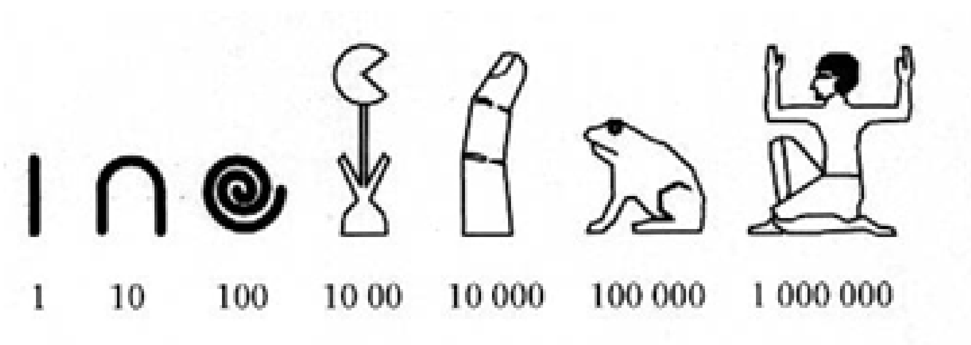
Fig. 2.3 – Autre tablette babylonienne montrant une table de multiplication

FIG. 2.4 – Calcul d'aire de terrain (Umma - Région sumérienne)

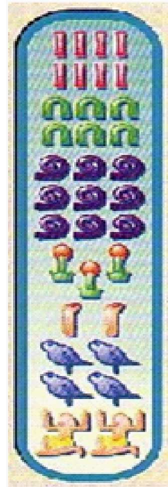
2.3.2 En Egypte

Au IIIème millénaire avant J.C., en Egypte, les scribes écrivent les nombres sur des papyrus sous forme de hiéroglyphes. Les égyptiens utilisent un système de numération (reposant sur le principe additif) moins performant que celui des mésopotamiens mais connaissent déjà l'écriture décimale.

Ils peuvent représenter les nombres jusqu'au million. Chaque signe possède une valeur qui correspond à l'une des 6 premières puissances de 10. L'unité est une barre verticale ; la dizaine est une anse de panier ; la centaine est une corde enroulée ; le millier est une fleur de lotus ; la dizaine de mille est un doigt dressé ; la centaine de mille est un têtard et le million est un dieu.



Le nombre représenté ci-dessous à droite est 2423968.



2.3.3 En Grèce

Grecs et romains ont inventé des systèmes de numération alphabétiques très peu adaptés aux calculs.

Le système romain, par exemple, est composé de symboles $(I, V, X, L, C, D$ et $M)$ notés côte à côte selon le principe additif et combine les bases 5 et 10.

Notons, qu'en réalité, ces symboles ne sont pas tous les formes initiales des chiffres romains. Les plus anciens sont les signes I, V et X qui dérivent directement de la pratique de l'entaille.

Pour voir leur évolution au fil des temps depuis les étrusques

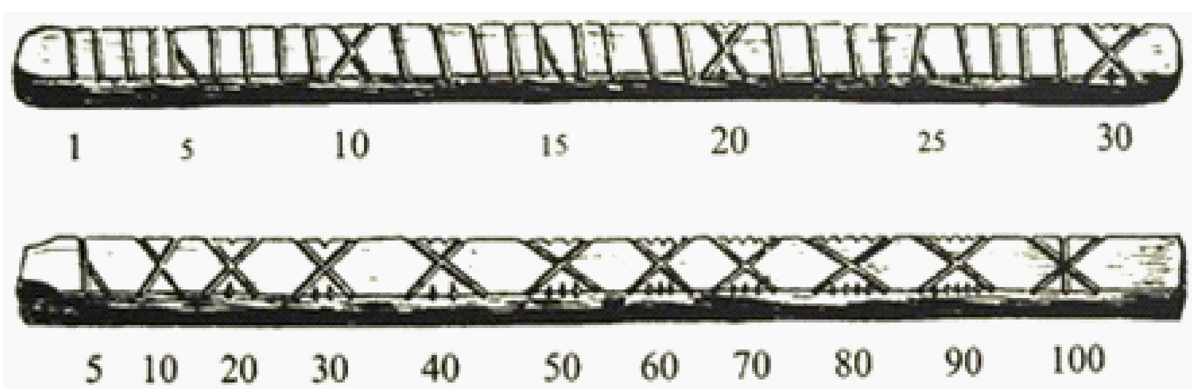


Fig. 2.5 – systém du numérotation en Grèce

Entailles de bergers trouvées en Dalmatie,

extrait de "Histoire universelle des chiffres" Georges Ifrah - Editions Robert Laffont 1994

Un exemple :1789 se note $MDCCLXXXIX$

$M(1000) + D(500) + CC(2x100 = 200) + L(50) + XXX(3x10 = 30) + IX(10 - 1 = 9)$

2.4 Les nombre apres J.C

2.4.1 En Chine

Le premier système de numération chinois est décimal et de type hybride. Il fait appel à 13 symboles fondamentaux : les 9 unités et les 4 premières puissances de 10. Celui-ci a peu évolué au cours de l'histoire. On trouve ces symboles sur les os et les écailles divinatoires de l'époque Yin (XIVème/XIème siècles avant J.C.).

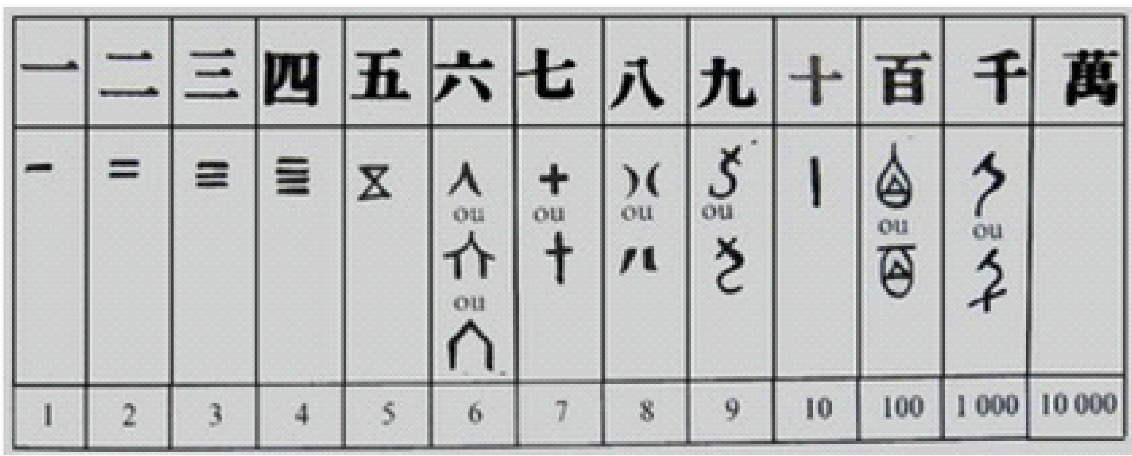


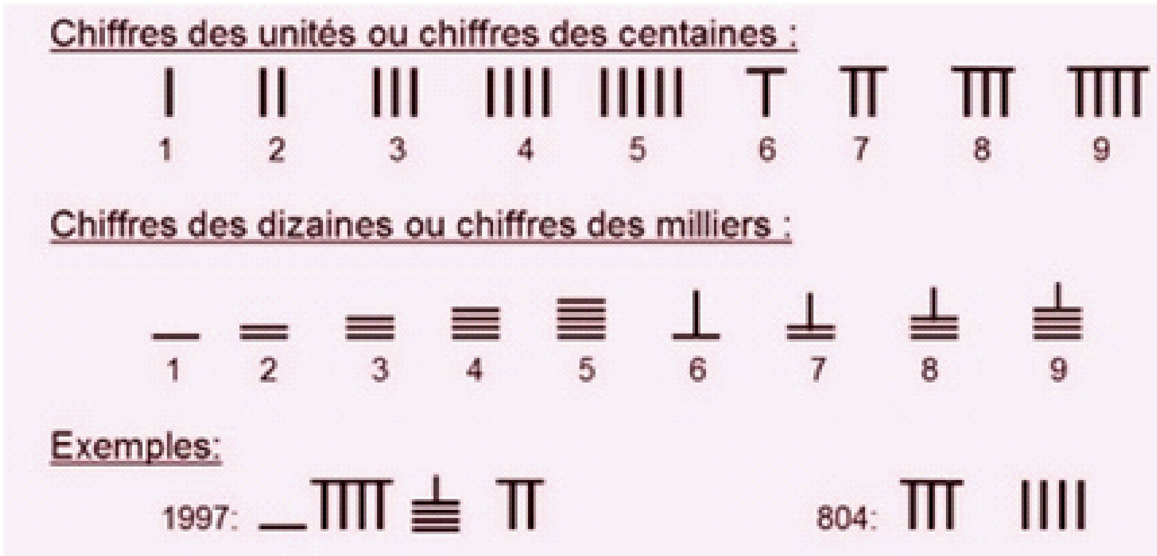
FIG. 2.6 – Comparaison entre les symboles actuels (1ère ligne) et les symboles archaïques (2ème ligne)

Les chinois du IIème siècle avant J.C. disposent d'un autre type de numération dit « numération savante ». Ce système suit le principe additif dans la base 10. Les symboles sont composés de bâtonnets en alternant les rangs par des barres verticales ou horizontales pour éviter la confusion.

2.4.2 Les mayas

Les Mayas se servent des nombres pour calculer le temps dans leur étude des astres. ce sont les inventeurs du calendrier.

Leur système de numération datant du Vème siècle après J.C. suit le principe de position dans la base vigésimale (base 20). Celui-ci trouve ses origines avec nos 10 doigts et 10 orteils ! Les symboles employés sont composés de barres horizontales et de points : les glyphes. Indépendamment des autres civilisations, les mayas inventent le zéro qu'ils représentent par un coquillage.



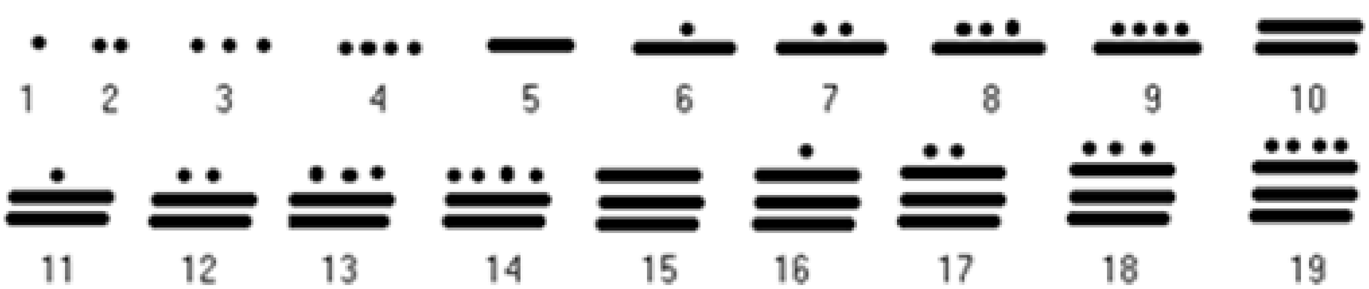


Fig. 2.7 – systém de numérotation des mayas

2.4.3 En Inde

Nos chiffres de « 1 » à « 9 » viennent en réalité des Indes. Leurs "ancêtres" les plus anciens apparaissent dans des inscriptions des grottes de Nana Ghât datant du 2e siècle avant J.C.

Au Veme siècle de notre ère, en Inde, les savants ont l'idée ingénieuse de marier le principe de position, les neuf symboles et le zéro en tant que nombre à part entière représentant une quantité qui n'existe pas.

Dans « 806 », il n'y a pas de dizaine, le «0 » marque cette absence.

Chapitre 3

Les nombres particuliers

3.1 Le zéro “0“

Un nombre qui n'a pas toujours été considère comme tel. Son a apportions fut longue et délicate suivant les civilisation qui n'ont pas touts ressentie le besoin d'invente un symbole pour représenter l'absence d'objets ! . Et quand ce besoin s'est fait sentir , sont introduction a suscité beaucoup de crainte et de mystère –le zéro et pour sa nature différent des autres chiffres

La première trace de zéro parvient des babyloniens (3eme siècle avant J-C).

Leur système de numérations tenant sur la combinaison du principe de position et du principe additif est parfois ambigu.

Comment écrire par exemple le nombre $\ll$ 305 $\gg$ si on ne dispose par du symbole $\ll$ 0 $\gg$ .on peut écrire $\ll$ 32 $\gg$?

Les scribes ont l'idée d'un singe de séparation des symboles se présentant sous la forme d'un double chevron expriment qu'il n'est pas encoure un nombre ni même une quantité.

On le qualifierait plutôt de ((pense bête)) de((marque-place)) qui ne renviât à autre chose qui de fixer la bonne place des chiffre dans le système de numération de position .

Indépendamment des autre civilisation ,les savants mayas développent au cours du 1er millénaire de notre ère un système de numération performant et inventent un $\ll$ *zéro* $\gg$ .le symbole connait des formes très diverses telles que celle d'un coquillage.

Mais le coup de gérie nient encore de l'Inde ou le zero apparait vers le v eme sicle .A l'oppose grecs,

la religion hindoue intègre totalement un univers qui s'étend alors que pour les pythagoriciens, les cosmos est "prisonnier " des sphères de différents tailles qui émettent de la musique l'harmonie des sphères .

Le zéro n'est pas seulement un symbole utilisé pour marquer un vide , mais il devient un nombre à pant entière .

En 628 , dans un traité d'astronomie appelé le Brahma sphut a siddhanta , brahmagupta (598 : 660) d'finira le zéro comme la soustraction d'un nombre par lui-même $(a - a) = 0$ .Il établira aussi qu'un nombre multiple par zéro est égal a zéro. A cette époque ,on l'appelle « sunya » qui de traduit par « vide » en sanskrite (la lange indienne)

Le zéro arrive en accident au XII eme siècle. Mais comme pour les autre chiffres , le zéro fuit une entrée la borieuse dans le langage mathématique .

Il souffre des vestiges de la pensée aristotélicienne , mais aussi de la méfiance de l'Eglise

3.2 Le nombre Pi π

Pi est un nombre qui a fasciné tout de savants depuis l'antiquité . si ce nombre remporte un tel sucées ,c'est d'abord parce qu'il recèle de propriétés passionnantes mais surtout par ca nature qui en fait un nombre d'exception .

Pi est un nombre irrationnel (c'est-à-dire qu'il s'écrit avec un nombre infini de décimales sans suite logique).

Les premières sont :

3.14592653589793238462643383279528841976939937510582

Dans la pratique on utilisé 3.14 mais il est souvent aisé de retenir 22 septièmes au racine de 10 pour valeur approchée de Pi

Les décimales de Pi ont été la proie des savants de puis prés de 400 ans .Une des plus anciennes approximation de Pi se trouve sur le célèbre papyrus R Hind copié par le seribe akmes .

Citons de lui ‘’ l’aire du cercle de diamètre 9 coudées est celle du carré de coté 8 coudées ‘’ ce qui revient à prendre pour Pi la valeur $\left(\frac{16}{9}\right)^2$ soit environ3.16 nous sommes en 1800 avant j.c

Chez les babyloniens on a retrouvé à cause (mésopatarm) des tablettes en écriture cunéiforme qui présentent des calcule d’aires du disque menant à prendre pour PI la valeur $3 + \frac{1}{8} = 3.12$

Cette approximation sera reprise en Inde dans les sulvasutras (livre de règles lvidouses)entre 400 et 200 avant notre ère.

Au IIIeme siècle avant J.C., dans son ouvrage "De la mesure du cercle", Archimède de Syracuse $(-287; -212)$ commence par établir que le rapport de la surface d’un disque au carré de son rayon est égal au rapport de son périmètre à son diamètre.

$(1642; 1727)$, Gottfried Wilhelm von Leibniz $(1646; 1716)$, John Machin $(1680; 1751)$ ou James Stirling $(1692; 1770)$ concoivent des formules de calculs infinis de plus en plus performantes.

La notation , Les nombres parfaitse lettre de l’alphabet grec, n’apparaît qu’en 1647. Elle est due à l’anglais William Oughtred $(1574; 1660)$ qui l’utilise pour nommer le périmètre d’un cercle. Il s’est inspiré d’Archimède qui désignait la longueur de la circonférence par le mot "$\pi\varepsilon\rho\iota\mu\varepsilon\top\rho o\zeta$" (périmètre).

Toutefois, il faudra attendre Leonhard Euler $(1707; 1783)$ et le succès de son ouvrage "Introduction à l’Analyse infinitésimale" (1748) pour que la lettre s’impose définitivement comme notation du nombre Pi.

Archimède s’inspire ensuite de la méthode d’exhaustion due à Eudoxe de Cnide $(-408; -355)$ qui consiste à encadrer un cercle de rayon 1 par des polygones réguliers dont il sait calculer le périmètre de façon précise. Il applique cette méthode en prenant des polygones à 96 côtés et obtient une valeur approchée de la circonférence pour en déduire un encadrement de Pi

En Inde, le plus ancien document connu, le Siddhanta, datant de 380, nous donne comme approximation $3 + 177/1250 = 3,1416$ qui sera égalée au VIème siècle par Aryabhata l’Ancien $(476; 550)$.

En Chine, Liu Hui utilise, en 263 de notre ère, la méthode d’Archimède avec des polygones à 192 côtés puis 3072 côtés pour trouver une approximation de Pi au cent-millième.

Au Veme siècle, les calculs sont simplifiés grace au système décimal. Tsu Chung Chih $(430; 501)$ trouve alors une approximation au millionième près $(3,141592)$: la fraction $355/113$ (facile à retenir en lisant de bas en haut : "$11, 33, 55$").

En occident, il faut attendre le XVIème siècle pour trouver les premières avancées sérieuses sur le sujet bien que Claude Ptolémée $(90?; 160?)$ et Léonard de Pise dit Fibonacci $(1180; 1250)$ aient proposé des approximations intéressantes de Pi.

En 1593, François Viete $(1540; 1603)$ obtient une approximation à 9 décimales grace à des méthodes analytiques novatrices mais peu efficaces où Pi se calcule par des produits infinis dont chaque facteur se déduit du précedent.

En 1609, l'allemand Ludolph van Ceulen $(1540; 1610)$ reprend la méthode d'Archimède avec des polygones à 60×233 côtés!!! Il calcule ainsi Pi avec 34 décimales exactes.

A partir du XVII ème siècle, les recherches vont s'accélérer et les records se succéder. C'est le temps de l'analyse et des mathématiciens tels que John Wallis $(1616; 1703)$, Isaac Newton

3.3 Les nombres premiers

Un nombre premier est donc un nombre dont ses seuls diviseurs sont 1 et lui-même. Citons quelques nombres premiers : $2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, \ldots$ et quelques plus grands : $22091, 9576890767$ ou encore ce géant :

$95647806479275528135733781266203904794419563064407$.

Les plus anciennes traces des nombres premiers ont été trouvées près du lac Edouard au Zaïre sur un os (de plus de 20000 ans), l'os d'Ishango, recouvert d'entailles marquant les nombres premiers $11, 13, 17$ et 19.

On peut supposer aussi, que par leurs travaux sur les nombres, égyptiens et babyloniens ont certainement été menés à rencontrer des nombres premiers, mais nous ne possédons aucune preuve à ce sujet.

Un peu plus tard, les grecs de l'Ecole Pythagoricienne, passionnés par l'arithmétique, étudieront la notion de diviseur et les nombres parfaits (nombre égal à la somme de ses diviseurs propres).

Par exemple, 28 est un nombre parfait, car $28 = 1 + 2 + 4 + 7 + 14$.

C'est avec Euclide d'Alexandrie $(-320?; -260?)$, que les théories sur les nombres premiers se mettent en place.

Dans « Les éléments » (livres VII, VIII, IX), il donne des définitions, des propriétés et démontre certaines affirmations du passé, comme l'existence d'une infinité de nombres premiers.

Il présente aussi la décomposition en facteurs premiers liée à la notion de PGCD.

Exemple : 30 se décompose en $2 \times 3 \times 5$et 70 se décompose en $2 \times 5 \times 7$. Tous les facteurs sont des nombres premiers.

Les diviseurs de 30 sont : $1, 2, 3, 5, 6, 10, 15$ et 30

Les diviseurs de 70 sont : $1, 2, 5, 7, 10, 14, 35$ et 70

Les diviseurs communs à 30 et 70 sont : $1, 2, 5$ et 10. Le plus grand est 10.

On dit que 10 est le PGCD (Plus Grand Commun Diviseur) de 30 et 70.

Cette méthode permettant de déterminer le PGCD de deux nombres voit vite ses limites. Euclide a laissé son nom à un algorithme étudié en 3e et permettant de calculer le PGCD de deux nombres. Pour obtenir plus de détails et essayer l'algorithme d'Euclide, cliquez sur le lien en bas de page.

On dit aussi de deux nombres qu'ils sont premiers entre eux si leur PGCD est égal à 1. Par exemple, 15 et 77 sont premiers entre eux.

Un autre grec, Eratosthène de Cyrène $(-276; -194)$, est l'auteur d'un célèbre crible qui permet par une méthode simple d'obtenir des nombres premiers ! Par éliminations successives des multiples des premiers nombres premiers de la liste, on obtient les suivants : 2 , 3, 5 ,7, 11, 13, 17 , 19, 23 , 29 , 31 ,37 , 41 , 43 , 47 , 53 ,59 , 61 , 67 , 71 , 73 , 79 , 83 , 89 , 97 , 101 , 103, 107, 109 , 113 .

Il faudra ensuite attendre plusieurs siècles et le développement de la numération indienne pour voir apparaître de nouvelles avancées. De plus, la naissance de la trigonométrie et le développement de l'algèbre occupent déjà beaucoup les mathématiciens de l'époque et ne les incitent guère à se lancer dans des problèmes d'arithmétique.

On observe tout de même quelques recherches en Chine et dans le monde musulman avec al-Marrakushi ibn Al-Banna $(1258; 1339)$ qui fait progresser le crible d'Eratosthène.

Et en Italie, Léonard de Pise dit Fibonacci $(1170; 1250)$ donne une liste complète de nombres premiers et étudie certains critères de divisibilité.

C'est un ecclésiastique français, Marin Mersenne qui apporte un souffle nouveau à la recherche sur les nombres premiers. Il en propose une famille nouvelle qui repose sur la question suivante :

« Si p est un nombre premier,$2p - 1$est-il un nombre premier ? »

La réponse est non, mais il affirme à raison que c'est vrai pour $p = 2, 3, 5, 7, 13, 17, 19, 31$. Il ne démontrera pas sa découverte et fera quelques erreurs sur des nombres plus grands. Elle est pourtant remarquable et est encore utilisée aujourd'hui pour la recherche de nombres premiers géants.

Avec $p = 19$, par exemple, on obtient le nombre premier $219 - 1$, soit 524287.

Mersenne entretient des correspondances avec les grands mathématiciens de l'époque tels que Blaise Pascal $(1623; 1662)$ ou Pierre de Fermat $(1601; 1665)$. C'est ce dernier qui est l'auteur de la plus célèbre conjecture des mathématiques :

« L'équation $xn + yn = zn$ n'a pas de solution avec $x, y, z > 0$ et $n > 2$ ».

Christian Goldbach $(1690; 1764)$ affirmera que « Tout nombre pair supérieur à 2 est la somme de deux nombres premiers. »

A l'heure où vous lisez ces lignes, cette conjecture dont l'énoncé est pourtant très simple, reste sans preuve.

A partir du XVIII ème siècle, les mathématiciens s'acharnent à battre les records en démontrant l'existence de nombres premiers de plus en plus grands.

L'allemand Carl Friedrich Gauss (1777 ; 1855) et le français Adrien-Marie Legendre $(1752; 1833)$ s'intéressent à leur répartition et démontrent que les nombres premiers se raréfient parmi les grands nombres.

$$p_n = 1 + \sum_{m=1}^{2^n} \left[\left[\frac{n}{1 + \sum_{j=2}^{m} \left[\frac{(j-1)!+1}{h} \right] - \left[\frac{(j-1)!}{j} \right]} \right]^{\frac{1}{n}} \right]$$

Formule de Minàc-Willans permettant de générer les nombres premiers

L'histoire évolue plus rapidement encore avec les progrès des méthodes de calculs et l'apparition de nouvelles formules de plus en plus performantes. Mais c'est quand l'ordinateur prend le relais de l'homme que les nombres premiers découverts (calculés) deviennent "astronomiques".

Aujourd'hui le plus grand nombre premier connu est un nombre de Mersenne, le $50^{ème}$, $277232917 - 1$, qui comprend 23249425de chiffres et qui a été découvert le 3 janvier 2018 par un réseau d'ordinateurs (projet GIMPS) permettant d'accélérer les recherches de façon considérable en distribuant les calculs.

3.4 Les nombres parfaits

Un nombre égal à la somme de ses diviseurs propres est parfait. Un diviseur propre est un diviseur autre que le nombre lui-même.

Le premier nombre parfait est 6. En effet $1, 2$ et 3 sont les diviseurs propres de 6 et $1 + 2 + 3 = 6$.

28 est également un nombre parfait : $1 + 2 + 4 + 7 + 14 = 28$.

Les nombres parfaits sont rares, il n'en existe que trois inférieurs à 1000 qui sont 6, 28 et 496.

Ensuite vient 8128, puis 33550336,

$$8589869056,$$

$$137438691328,$$

$$2305843008139952128$$

(découvert par Leonhard Euler),

$$2658455991569831744654692615953842176, \dots$$

Actuellement, 40 nombres parfaits sont connus. Le plus grands possède 12640858 chiffres et est égal à :

$$2^{20996010}(2^{20996011} - 1)$$

Dans le IXème livre des Eléments, Euclide d'Alexandrie $(-320?; -260?)$ expose une façon de générer des nombres parfaits :

"Lorsque la somme d'une suite de nombres doubles les uns des autres est un nombre premier, il suffit de multiplier ce nombre par le dernier terme de cette somme pour obtenir un nombre parfait."

$1+2=3$ qui est premier donc $2\times 3=6$ est parfait.

$1+2+4=7$ qui est premier donc $4\times 7=28$ est parfait.

$1+2+4+8=15$ n'est pas premier.

$1+2+4+8+16=31$ est premier donc $16\times 31=496$ est parfait.

En découle une formule qui porte aujourd'hui le nom de Formule d'Euclide :

$2p-1(2p-1)$ est parfait si p et $(2p-1)$ sont premiers.

Nous retrouvons la formulation donnée plus haut du 40ème nombre parfait.

Jadis les nombres parfaits étaient considérés comme supérieurs à tous les autres. On voyait en eux un rôle mystique. Citons Saint Augustin dans "La cité de Dieu" (420 après J.C.) : "Six est un nombre parfait en lui même, non parce que Dieu a créé toutes choses en six jours, mais Dieu a créé toutes choses en six jours parce que ce nombre est parfait."

En mathématiques, on appelle conjecture, une règle qui n'a jamais été prouvée. On l'a vérifiée sur beaucoup d'exemples mais on n'est pas sûr qu'elle soit toujours vraie.

-Les nombres parfaits d'Euclide sont tous pairs puisque l'un des facteurs est une puissance de 2. Mais rien ne prouve pour l'instant qu'il n'existe pas de nombres parfaits impairs.

-Par ailleurs, il est aisé de constater que tous les nombres parfaits cités plus haut se terminent par 6 ou 28.

-Un autre problème qui reste ouvert est la preuve de l'infinitude des nombres parfaits.

Le philosophe et mathématicien Nicomaque de Gérase (200 après J.C.) étudie les nombres parfaits en les comparant aux nombres déficients (nombre supérieur à la somme de ses diviseurs propres) et aux nombres abondants (nombre inférieur à la somme de ses diviseurs propres). Il trouve les quatre premiers nombres parfaits.

« ... il arrive que, de même que le beau et le parfait sont rares et se comptent aisément, tandis que le laid et le mauvais sont prolifiques, les nombres excédents et déficients sont en très grand nombre et en grand désordre ; leur découverte manque de toute logique. Au contraire, les nombres parfaits se comptent facilement et se succèdent dans un ordre convenable ; on n'en trouve qu'un seul parmi les unités, 6, un seul dans les dizaines, 28, un troisième assez loin dans les centaines, 496 ; quant au quatrième, dans le domaine des mille, il est voisin de dix mille, c'est 8128. Ils ont un caractère commun, c'est de se terminer par un 6 ou par un 8, et ils sont tous invariablement pairs. »

Si les nombres parfaits sont rares, les nombres amiables ne le sont guère moins. Deux nombres sont amiables (on dit aussi amis) si la somme des diviseurs propres de l'un est égale à l'autre et réciproquement.

Le premier couple de nombres amiables $(220, 284)$ aurait été découvert par les pythagoriciens.

Somme des diviseurs propres de 220 : $1 + 2 + 4 + 5 + 10 + 11 + 20 + 22 + 44 + 55 + 110 = 284$

Somme des diviseurs propres de 284 : $1 + 2 + 4 + 71 + 142 = 220$.

A ce sujet, on attribue à Pythagore une citation :

« Un ami est l'autre moi-même comme sont 220 et 284. »

Le second couple de nombres amiables fut découvert par Pierre de Fermat $(1601; 1665)$, il s'agit de 17296 et 18416. René Descartes $(1596; 1650)$ découvrit le troisième : 9437056 et 9363584.

Aujourd'hui plusieurs milliers de couples sont connus. Le tableau ci-dessous en présente les premiers

220	284
1180	1210
2620	2924
5020	5564
6368	6632
10744	10856
12285	14595
17296	18416
63020	76084
66928	66992
67095	71145
69615	87633
79750	88730

TAB. 3.1 – tableau présente les nombres parfaits

3.5 Les nombres negatifs

Bien qu'on ne les trouve pas dans la nature, ils font aujourd'hui partie intégrante de notre environnement et nous ne sommes pas étonnés de les considérer comme des nombres à part entière.

Pourtant leur introduction dans le langage des mathématiques fut lente et mainte fois remise en cause. Ils naissent des besoins de la comptabilité (calculs de gains et de dettes).

Il semblerait que les premiers à avoir utilisé des quantités négatives soient les chinois. Nous sommes au deuxième siècle avant J.C. et nous ne parlons pas encore de « nombre » car ils n'en ont pas acquis le statut !

Le « Jiuzhangsuanshu » ou les « Neuf chapitres sur l'art du calcul » est un ouvrage chinois datant de 200 avant JC et composé de 246 problèmes ayant pour but de fournir des méthodes pour résoudre les problèmes quotidiens de l'ingénierie, de l'arpentage, du commerce et de la fiscalité. Les calculs s'effectuent en utilisant des baquettes à calculer, les positifs sont représentés par des baguettes rouges, les négatifs par des baguettes noires. Liu Hui (220; 280) explique et enseigne l'arithmétique liée à ses baguettes de calcul.

Les « Neuf chapitres » contiennent certains problèmes équivalant dans le langage d'aujourd'hui à des système d'équations linéaires à plusieurs inconnues. Les nombres négatifs y sont utilisés dans la résolution par combinaison de lignes proche de la méthode actuelle de Gauss.

Mais c'est le plus souvent au mathématicien indien Brahmagupta $(598; 660)$ que l'on attribue la découverte des «nombres» négatifs. Sans justification, il donne des règles de calcul permettant d'expliciter des débits dans les comptes.

« Une dette retranchée du néant devient un bien, un bien retranché du néant devient une dette. »

Dans sa théorie de résolution des équations (muadala), le perse Mohammed al Khwarizmi$(780; 850)$ accepte les termes négatifs dans les équations mais s'attache à s'en débarrasser au plus vite. Pour cela, il ajoute son opposé des deux côtés de l'équation. Pour lui, une équation ne peut avoir de solution négative.

Le français Nicolas Chuquet $(1445; 1500)$ est un des premiers à isoler une valeur négative dans un membre d'une équation.

On les retrouve également dans les travaux du mathématicien italien GerolamoCardano $(1501; 1576)$, au nom francisé de Jérôme Cardan. En 1629 dans "Invention nouvelle en algèbre", Albert Girard s'en inspire pour admettre l'existence de racines négatives ou imaginaires dans une équation.

L'introduction des quantités négatives en occident est cependant difficile et connaît en prime l'obstacle du zéro. De nombreux mathématiciens de l'époque distinguent difficilement le zéro relatif du zéro absolu en dessous duquel rien n'existe.

Tel est le cas du mathématicien et ingénieur Lazare Carnot $(1753; 1823)$:

« Pour obtenir réellement une quantité négative isolée, il faudrait retrancher une quantité effective de zéro, ôter quelque chose de rien : opération impossible. Comment donc concevoir une quantité négative isolée ? »

Progressivement, les négatifs sont soumis à des règles de calcul en prolongeant celles existant pour les nombres positifs.

En 1746 dans "Eléments d'algèbre", le mathématicien et astronome français Alexis Clairaut $(1713; 1765)$ donne quelques-unes de ces règles et exprime la nuance entre le signe d'un nombre et celui de l'opération :

« L'usage des nombres négatifs conduit à des conclusions erronées. »

"Géométrie de la position", 1803.

En 1591, François Viète$(1540; 1603)$ publie "In artemananyticamisagoge" dans lequel il pose les bases du calcul littéral. A cette époque encore, les lettres ne représentent que des quantités positives et les solutions négatives des équations sont écartées.

En 1637 dans "La géométrie", René Descartes $(1596; 1650)$ qualifie de "moindres que rien" de telles solutions :

« En chaque équation autant que la quantité inconnue a de dimensions, autant peut-il y avoir de diverses racines : mais souvent il arrive que ces racines soient fausses ou moindres que rien. »

En géométrie analytique, Descartes place ses axes de façon qu'il n'ait pas à faire intervenir de coordonnées négatives. Il faudra attendre l'écossais Colin Maclaurin $(1698; 1746)$ puis le suisse Leonhard Euler $(1707; 1783)$ pour voir apparaître des axes aux coordonnées positives et négatives.

Il faut dire qu'à cette époque les besoins pour les sciences des quantités négatives sont plutôt rares.

En 1741, le physicien suédois Anders Celsius $(1701; 1744)$ fait construire un thermomètre à mercure dont le 0 est définit par le point de congélation de l'eau et le 100 son point d'ébullition. Il faudra pourtant attendre le début du XIX ème siècle pour que les températures négatives rentrent dans les mœurs.

Daniel Gabriel Fahrenheit $(1686; 1736)$ conçoit en 1715 un thermomètre pourvu d'une graduation évitant les températures négatives.

Progressivement, les négatifs sont soumis à des règles de calcul en prolongeant celles existant pour les nombres positifs.

Au début du XIXème siècle encore, les négatifs n'ont pas acquis le statut de « nombre ». Un nombre est nécessairement positif. Une quantité, telle une dette, peut prendre une valeur négative en la définissant par opposition à une quantité positive. Mais cette quantité n'est pas considérée comme un nombre en tant que tel.

En 1821, Augustin Louis Cauchy $(1789; 1857)$ dans son "Cours d'analyse de l'Ecole royale polytechnique" définit les nombres relatifs comme une partie numérique précédée d'un signe + ou -.

« Le signe $+$ ou $-$ placé devant un nombre en modifiera la signification, à-peu-près comme un adjectif modifie celle du substantif. »

Avec le développement des nombres complexes dans l'univers des mathématiques, l'allemand Hermann Hankel $(1839; 1873)$ donne enfin aux nombres et en particulier aux nombres relatifs le statut d'objet formel obéissant à des règles préétablies.

3.6 Le nombre e

Un nombre qui ne connaît pas la célébrité du nombre Pi et pourtant on lui trouve de très nombreuses ressemblances.

Comme son congénère, e est un nombre irrationnel, c'est à dire qu'il s'écrit avec un nombre infini de décimales sans suite logique.

Ses premières décimales sont :

$e = 2,71828182845904523536028747135266249775724709369995957496696762772407663035354759457$
$13821785251664274\ldots$

Le nombre e est également un nombre transcendant. On dit qu'un nombre est transcendant s'il n'est solution d'aucune équation à coefficients entiers.

Le nombre $\sqrt{2}$par exemple, est irrationnel mais n'est pas transcendant puisqu'il est solution de l'équation $x^2 = 2$. Un tel nombre est dit «algébrique».

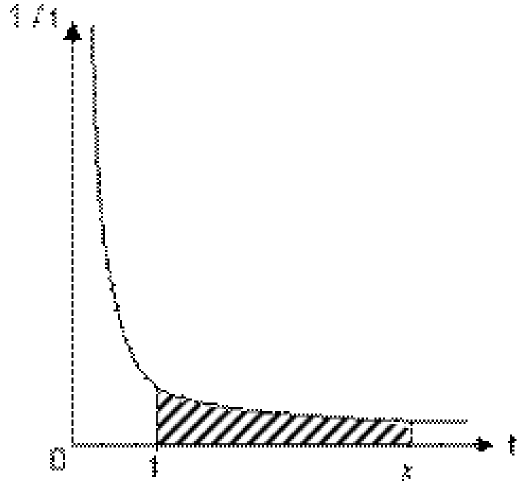
en 1614, le mathématicien écossais, John Napier-francisé de Nepe- $(1550; 1617)$ présente un outil permettant de simplifier les calculs opératoires : le logarithme

Ceci peut paraître dérisoire aujourd'hui, mais il faut comprendre qu'à cette époque, les calculatrices n'existent évidemment pas, les nombres décimaux ne sont pas d'usage courant et les opérations posées telles que nous les utilisons ne sont pas encore connues. Et pourtant l'astronomie, la navigation ou le commerce demandent d'effectuer des opérations de plus en plus complexes.

Mais si Neper s'est lancé dans cette folle aventure, c'est au départ pour simplifier les calculs de trigonométrie utiles en astronomie. Il donne ainsi une première table des logarithmes des sinus d'angles.

Il est à noter qu'un suisse du nom de Joost Bürgi $(1552; 1632)$ invente les logarithmes au même moment et de façon indépendante à Napier mais sa publication lui est postérieure.

Toutefois les logarithmes ne trouveront leur essor qu'après la mort de Neper. Les mathématiciens anglais Henri Briggs $(1561; 1630)$ et William Oughtred $(1574; 1660)$ reprennent et prolongent les travaux de Neper. Briggs publie successivement plusieurs tables de logarithmes et Oughtred invente une nouvelle règle de calcul qui repose sur les calculs de logarithmes.



Mais au fait, qu'est-ce qu'un logarithme ?

Il faudrait plutôt dire « les logarithmes » ou « les fonctions logarithmes » !

Pour comprendre, donnons une définition simplifiée du logarithme de Briggs, le logarithme de base

Mais après tout ça, nous avons un peu oublié notre nombre e. Alors que vient-il faire là ?

Il se trouve que e est pleinement lié au logarithme, plus précisément à un logarithme (nous avons dit plus haut qu'il en existe des différents) : le logarithme népérien, nom donné en hommage à Neper

On le note ln.

Le logarithme népérien ne se définit pas facilement sans les connaissances du lycée.

On peut le voir comme l'aire de la portion du plan comprise entre l'axe des abscisses, la courbe d'équation $y = \frac{1}{t}$et les deux droites d'équation $t = 1$ et $t = x$ (aire hachurée sur la figure ci-contre).

En fait, pour tout x strictement positif, $log(x)$ est égal à $C\ x\ ln(x)$ où C est une constante proche de $0,4343$.

On pourrait se demander alors qu'elle est la solution de l'équation $ln(x) = 1$ autrement dit, pour quelle valeur le logarithme népérien est-il égal à 1 ?

On pourrait, non ?

Cette solution est tout simplement le nombre e ! Tout simplement !

Dans un premier temps, e n'éveille guère l'attention des mathématiciens bien qu'Oughtred l'utilise déjà dans ses calculs. Plus tard Christiaan Huygens $(1629; 1695)$ établira un lien géométrique entre l'aire sous la courbe d'une hyperbole et le nombre e puis le suisse Jakob Bernoulli $(1654; 1705)$ proposera par un calcul de limite une première estimation pour les besoins de la finance. Il trouvera $2 < e < 3$. En 1690, l'allemand Gottfried Wilhelm von Leibniz $(1646; 1716)$ définit le nombre e et propose de le nommer b (le nom actuel n'existe pas encore).

Le premier à s'intéresser de façon sérieuse au nombre e est le mathématicien suisse Leonhard Euler $(1707; 1783)$. C'est à lui que nous devons le nom de ce nombre. Non pas qu'il s'agisse de l'initiale de son nom mais peut être car e est la première lettre du mot exponentiel.

La fonction exponentielle, notée exp, est la fonction réciproque du logarithme népérien.

Autrement dit : si $ln(x) = y$ alors $x = exp(y)$.

Or exp(1) est justement égal à e.

Dans « Introductio in Analysisininfinitorum » publié en 1748, Euler explique que : $e = 1 + 1/1! + 1/2! + 1/3! + ...$

Rappelons que par exemple 5! se lit "factoriel 5" et est égal à $1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5$.

Par cette formule, il obtient une estimation de e avec 18 décimales exactes.

Nous devons aussi à Euler la démonstration de l'irrationalité de e.

Depuis Euler et comme pour Pi, les records se sont succédés. Actuellement, il est détenu par Xavier Gourdon et Shigeru Kondo qui en 2003 ont obtenu 50100000000 décimales.

Aujourd'hui les applications de e sont variées. Par la fonction exponentielle, nous le retrouvons en économie (calculs des intérêts versés de façon continue), en biologie (mesure de la multiplication des cellules vivant dans un organisme), en sciences physiques ...

3.7 L'infini

C'est bien la question récurrente que nous pose un enfant qui apprend à compter : « ...et après ? »

Et après ... les nombres $24, 25, 26$ ... $100, 200, \ldots$ se suivent pour être dépassés par des plus grands (millions, milliards, ...) qui voient à leur tour s'échapper très loin devant eux de très grands nombres (centillions, googol, googolplex, ...), suite qui continue sa course effrénée vers on ne sait où...

Et pourtant on lui attribue un nom : l'infini...

Une notion mathématique des plus abstraites qui ne paraît pas si simple à définir et dont on peut même remettre en doute l'existence.

L'infini ne nous est pas accessible et ne fait pas partie du monde réel. Aristote $(-384; -322)$ parlait d'un infini potentiel au sens d'une éventualité utopique impossible à réaliser.

Alors qu'est ce qu'un infini ? Car il en existe plusieurs, nous le verrons ensuite.

Le plus simple serait de le définir comme tout ce qui n'est pas fini.

Par exemple, les diviseurs de 12 sont en nombre fini $(1, 2, 3, 4, 6$ et $12)$, par contre ses multiples sont en nombre infini $(12, 24, 36, \ldots)$.

Dans ce cas, il n'est pas étonnant d'entendre souvent que l'univers est infini. Comment pourrait-on concevoir qu'il soit fini. Et pourtant les physiciens s'opposent majoritairement à cette idée. Citons l'astrophysicien Christian Magnan :

« L'infini est une notion mathématique qui n'a pas d'équivalent dans le monde physique. Soutenir que notre Univers serait « infini » est absurde car cela ne signifie rien en réalité. Toute théorie physique implique des nombres, en tant que tels forcément répartis sur un intervalle fini. Par conséquent un univers infini, situé hors du domaine de la mesure, s'exclut ipso facto du cadre de la physique. »

Au Vème siècle avant J.C., le grec Zénon d'Elée $(-490; -425)$ propose les premiers paradoxes de l'infini. Exposons-en un :

A priori la somme d'un nombre infini de longueurs est une longueur infinie.

Zénon nous exprime qu'il peut en être autrement : Achille, célèbre pour sa rapidité, court à vitesse constante sur une longueur de 1km (précisons que le km n'existait pas encore à l'époque). Achille doit d'abord parcourir la moitié de la longueur (1/2) puis la moitié de la longueur restante (1/4) et ainsi de suite en poursuivant le processus de division à l'infini.

La longueur totale sera ainsi égale à $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} + \frac{1}{64} + \frac{1}{128} + \ldots$

En effectuant les premiers termes de cette série de nombres, on s'aperçoit que plus on ajoute de termes, plus on se rapproche de 1. Voilà une somme infinie de longueurs dont le résultat est fini et égal à 1!

Mais au IVème siècle avant J.C., Aristote $(-384; -322)$ expose les problèmes de Zénon et réfute tous les paradoxes en opposant l'infini en acte qui peut être atteint (celui de Zénon) à l'infini potentiel qui n'est pas réalisable.

Au IIIème siècle avant J.C., Archimède de Syracuse $(-287; -212)$ propose la méthode dite des anciens qui sera la base du calcul infinitésimal (calcul avec l'infiniment petit).

C'est à partir du XIIIème siècle que les savants d'Occident prennent le relais et exposent puis développent les théories du passé. Citons l'anglais Robert Grosseteste $(1158; 1253)$, le français Pierre de Fermat $(1601; 1655)$ ou le belge Grégoire de Saint-Vincent $(1584; 1667)$ qui rebaptise la méthode des anciens en « la méthode d'exhaustion ».

Le français Blaise Pascal $(1623; 1662)$ participe aussi à l'essor du calcul infinitésimal et donne une approche plus théologique de l'infini. Il écrit au sujet de l'infiniment petit et l'infiniment grand :

En 1665, l'anglais John Wallis $(1616; 1703)$ introduit pour la première fois dans son ouvrage "ArithmeticaInfinitorum" le symbole pour désigner l'infini. Il est hérité des romains qui l'utilisaient pour désigner "1000".

Au XVIIème siècle Isaac Newton $(1642; 1727)$ et Gottfried Wilhelm von Leibniz $(1646; 1716)$ généralisent et propagent le calcul infinitésimal qui devient une branche indépendante des mathématiques possédant ses propres règles.

Mais c'est au XIXème siècle avec le russe Georg Cantor que l'infini prend réellement son envol!!! Son apport est considérable. Il baptise o, qui se lit "aleph 0", l'infini des nombres entiers ou l'infini dénombrable (que l'on peut compter ou numéroter à l'aide des entiers naturels).

1 est l'infini des points se trouvant sur une portion de courbe (le continu), puis vient $2, 3$, ... Il propose d'autres infinis qu'il distingue et essaie de comparer.

Considérons l'ensemble des entiers positifs et celui de leur carré.

A chaque entier, il est possible d'associer son carré, donc si à chaque élément de l'un, il est possible d'associer un élément de l'autre, ces deux ensembles ont la même taille et ils sont équivalents.

3.8 Les equations

Des équations du premier et du second degré (où les coefficients sont des nombres donnés) sont déjà résolues avec une méthode générale par les Babyloniens vers 1700 av. J.C et peut être même plus tôt.

Pour les équations du $3^{ème}$ degré, il faut attendre 1515 avec l'italien Scipio del Ferro $(1465 - 1526)$ dont les papiers sont cependant perdus.

Puis ses compatriotes Nicolo Tartaglia et GérolamoCardano $(1501 - 1576)$ poursuivent ses travaux.

Pour celles du $4^{ème}$ degré, c'est Ludovico Ferrari (Bologne $1522 - 1565$, en 1540), un élève de Cardan, a qui on doit une méthode habile de résolution.

3.8.1 Equations du 2$^{\mathbf{ème}}$degré

– **Les Babyloniens** : $1800 - 1500 av.J. - C.$

Les tablettes de cette époque conservent une foule d'informations, en particulier elles nous révèlent une algèbre déjà très développée et témoignent de la maîtrise des Babyloniens à résoudre des équations du second degré. La tablette d'argile babylonienne $n°$ 13901 du British Museum (Londres), a été qualifiée de « véritable petit manuel d'algèbre, consacré à l'équation du second degré et aux systèmes d'équations, et donnant les procédures résolutoires fondamentales ».

– **Diophante au** $4^{\mathbf{ème}}$ **siècle**.

Diophante ($4^{éme}$ siècle) poursuit les recherches des Babyloniens. Il aura une approche algébrique du problème.

– Au $8^{éme}$ siècle, le mathématicien indien SridharAcharya propose une méthode pour calculer les deux racines réelles.

– **Vers** $820 - 830$**, Al-Khwarizmi.**

Vers $820-830$, Al-Khwarizmi, membre de la communauté scientifique réunie autour du calife al Mamoun, décrit, dans son traité d'algèbre, des transformations algébriques permettant de résoudre des équations du $2^{éme}$ degré.

– **Les racines négatives sont ignorées jusqu'au** $16^{ème}$**.**

Suivant les idées développées par Stevin en 1585, Girard en 1629 donne des exemples d'équations avec racines négatives.

"Le négatif en géométrie indique une régression, alors que le positif correspond à un avancement.". Il n'a d'ailleurs pas plus de scrupules avec les racines complexes.

– **Exemple d'écriture de l'équation** : $2x^2 - 5x = 23$ de Diophante à nos jours.

Equations du $3^{\text{ème}}$ degré.

– **Ménechme :** 375 **à** 325 **av. J.-C., Grèce**.

Les grecs ont résolus ces équations géométriquement, par intersection de coniques (ellipses, paraboles et hyperboles). Le plus ancien des problèmes du 3ème degré remonterait à Ménechme (375 à 325 av.J.-C.).

– **Archimède :** $287 - 212$ **av. J.-C.**

Archimède ($287 - 212$ av.J.-C.) avait lui cherché à couper une sphère de rayon R par un plan de façon que le rapport des volumes des 2 parties ait une valeur donné k. Cela donne une équation de degré 3.

– **Omar Khayyâm (**$1048 - 1131$**) et Sharaf ad Din at Tusi (vers** 1160**).**

Astronome et mathématicien, Omar Khayyâm, dans son traité d'algèbre (1074) étudie les équations du $3^{ème}$ degré à coefficients strictement positifs.

Cent ans plus tard Sharaf ad Din at Tusi classe les équations, non plus comme Omar Khayyâm suivant le signe des coefficients, mais suivant l'existence de racines strictement positives.

– **Scipio del Ferro (**$1465-1526$**), Niccolo Tartaglia (**$1500-1557$**), Jérôme Cardan (**$1501-1576$**).**

Scipio del Ferro ($1465 - 1526$), professeur à Bologne, découvre la résolution algébrique des équations : avec $p, q > 0$

il ne considère pas les coefficients négatifs.

$$x^3 + px = q : (E1)$$

$$x^3 = px + q : (E2)$$

$$x^3 + q = px : (E3)$$

En 1535, Niccolo Tartaglia réussi à résoudre une trentaine de problèmes de type ($E1$), mais il garde secrète sa méthode.

Par la suite, Jérôme Cardan ($1501-1576$), lui arrache son secret (en 1939) et réussi à étendre la méthode aux équations de type ($E2$) et ($E3$).

⇒Pour plus de précisions : Le conflit Tartaglia-Cardan.

- **Euler** ($1707-1783$).

Mais c'est Euler qui a éclairci la détermination des 3 racines dans un article en latin de 1732.

– **La résolution : Comment résoudre une équation de degré** 3?

Equations du $4^{ème}$ degré.

– **Jérôme Cardan** ($1501-1576$) **et Lodovico Ferrari** ($1522-1565$).

Cardan donne une méthode au chapitre 39 de l'Ars Magna. Il précise qu'elle a été trouvée par son élève Lodovico Ferrari.

– **Viète (**$1540; 1603$**, France)**.

Dans son texte de 1615, François Viète expose clairement la méthode de Ferrari.

– **Descartes (**$1596-1650$**)**.

Descartes expose aussi une autre méthode de résolution, par coefficients indéterminés.

$$x^4 + px^2 + qx + r = (x^2 + ax + b)(x^2 + cx + d)$$

Equations de degré 5 et supérieur

– **Le théorème d'Abel**

Ce théorème parfois appelé théorème d'Abel-Ruffini ou encore théorème de Ruffini, indique que :

"Pour tout polynôme à coefficients de degré supérieur ou égal à 5, il n'existe pas d'expression « par radicaux » des racines du polynôme, c'est-à-dire d'expression n'utilisant que les coefficients, la valeur 1, les quatre opérations et l'extraction des racines n-ièmes."

Ce résultat est exprimé pour la première fois par Paolo Ruffini, puis démontré rigoureusement par Niels

Henrik Abel.

C'est cependant le légendaire mathématicien français évariste Galois $(1811-1832)$ qui donne une condition nécessaire et suffisante pour qu'une équation polynomiale soit résoluble par radicaux. Cette version plus précise permet d'exhiber des équations de degré 5, à coefficients entiers, dont les racines complexes qui existent d'après le théorème de d'Alembert-Gauss ne s'expriment pas par radicaux.

Conclusion

Tout au long de nos études des mathématiques, on nous enseigne que le côté pratique de cette science si riche, si complexe, si essentielle, on n'a pas évoqué son histoire que brièvement, alors que l'histoire des mathématiques peut aider à mieux les comprendre et à connaitre le problème qu'on se posait à chaque époque et qui à mener à ce développement, ce qui l'a rendu, ainsi, moins artificielle, moins étrangère, et plus humaine.

Ce n'est qu'en étudiant les origines des mathématiques et le développement de cette science, qui a plus de 3000 ans, que nous pourrons apprécier et les grands bouleversements qu'elle a connus et de reconnaitre que c'est une science qui a beaucoup évolué et qui a touché plusieurs grandes civilisations.

C'est pourquoi, on a présenté, au cours de ce mémoire, l'histoire de la géométrie, la trigonométrie, l'algèbre, et ensuite, les différentes étapes de développement des mathématiques, qui, en 3500 avant J.C., n'entaient que des cailloux et des jetons dans une boulle, qui devient après une tablette sur laquelle sont gravés des pictogrammes.

En suite le système de numération évolue à deux symboles (chez les babyloniens), puis sept signes (chez les Egyptiens). Ensuite, les romains ont inventé des systèmes de numération alphabétiques, les chinois avaient 13 symboles fondamentaux, qui ont peu évolué au cours de l'histoire. Les mayas utilisent des symboles composés de barres horizontales et de points, et un coquillage pour le zéro, au final, en inde, apparait nos chiffres dans leurs anciennes formes et ils évoluent à la numérotation actuelle.

C'est, non seulement, une science qui est très variée et vaste, elle a même contribué à l'évolution de plusieurs autres sciences comme la physique, l'informatique, l'économie (les finances), ... etc.

Les règles et les théorèmes que nous apprenons aujourd'hui et qui nous paraissent si facile et logiques ont pris des année d'études, de pratique, de réflexions et de recherches, et parfois des siècles, pour nous être parvenu de la sorte, simples et concis, qui tiennent dans un livre ou deux mais qui ont une longue histoire. Histoire que nous avons essayé de résumer dans ce mémoire pour prouver que les mathématiques ne sont pas ce cours ennuyeux (pour certains étudiant(e)s), ni ces simples règles à apprendre par cœur juste pour les examens, c'est une science entière, avec une histoire passionnante et une évolution fulgurante qui a contribué à la prospérité de plusieurs civilisations très connus et à l'évolution d'autres connaissances qui sont devenus, grâce à elle, des sciences à part entière.

Bibliographie

[1] http ://www.capes-de-maths.com/divers/Biographie_de_mathematiciens.pdf

[2] http ://serge.mehl.free.fr/base/Liste_alpha.pdf.

[3] http ://www.irem.univ-mrs.fr/expo2013/documents/biographies.pdf

[4] https ://fr.wikiversity.org/wiki/Histoire_des_math%C3%A9matiques/Quelques_math%C3%A9maticien

[5] https ://www.maths-et-tiques.fr/index.php/histoire-des-maths-53

[6] https ://www.universalis.fr/encyclopedie/niels-henrik-abel/

[7] https ://www.universalis.fr/encyclopedie/les-bernoulli/

[8] http ://mathematiques.ac-bordeaux.fr/viemaths/hist/mthacc/euler.htm

[9] https ://www.universalis.fr/encyclopedie/leonhard-euler/2-mathematiques/

Annexe A :Les célèbres mathématiticien

Abel (Niels Henrik) Norvégien $1802 - 1829$:mathematicien, le fondateur, avec Jacobi, de la théorie des fonctions elliptiques

Abu'l-Wafa al-Buzjani Perse $940 - 998$: astronomemathematician, apporte les notions de tangente, des ecante et de cosecante, ainsi que les premi'eres tables de trigonometrie spherique.

Al-Biruni (Abu Arrayhan) Arabe $973 - 1048$: Savant, mathematicien et philosophe,il a contribue a developper la trigonometrie

Al-Kashi (Ghiyath ou Jamshid) Arabe $1390 - 1450$: mathematician,On lui doit la generalisation du theoeme de Pythagore aux triangles quelconques

Al-Khayyam (Omar) Arabe $1048 - 1122$: mathematician, poete, astronome et philosophe, Son oeuvre complete apporte des resolutions de type geometriques a diverses equations du 3^{eme} degre.

Al-Kwarizmi (mohammad) ou Alkarism Arabe $783 - 850$: mathematician,connu comme le fondateur des mathematiques arabes.on lui doit le systeme de numeration decimal.

Al-Tusi (Nasir) Perse $1201 - 1274$: Astronome et mathématicien, Son oeuvre la plus importante est leLivre sur letheoreme de la secante

Archimède de Syracuse Grec $287 - 212$ av.J.C. physicien mathématicien, il donne une approximation de π, calcule l'aire d'un segment de parabole...

Aristarque de Samos Grec $310 - 230$ av.J.C. : astronome mathematicien, Il anticipe la theorie de Copernic sur le mouvement des planetes.

Aryabhata l'ancien Indien $476 - 550$: astronomemathematicien, le premier à utiliser la demi-corde qui correspond au sinus de l'angle

Bernoulli (Jacques) ou (Jacob) Suisse $1654 - 1705$: physicien astronome mathematicien, connu pour la théorie statistiquedu calcul des probabilités

Brahmagupta Indien $598 - 670$:il agénéralise la formule de Héron d'Alexandrie pour l'aire d'un triangle quelconque

Cardan (Jérôme) Italien $1501 - 1576$: medecin et mathematicien, Son oeuvre principale estArs Magna, premier traite en latin consacre uniquement a l'algebre

Cauchy (Augustin-Louis) Français $1789-1857$: Il a crée la théorie des fonctions d'une variable complexe, Son oeuvre se rapporte à de nombreux domaines des mathématiques et de la physique mathématique

Descartes (René) Français $1596 - 1650$: Philosophe, mathématicien et physicien français.Il a développé la géométrie analytique et découvert les lois de la réfraction de la lumière. Il fut l'auteur de plusieurs ouvrages dont "Le discours de la Méthode" et "Géométrie".

Euclide d'Alexandrie Grec $325 - 265$ av.J.C. : mathematicien, a fonde l'ecole de mathematiques du Musee. il a rediger "Les Elements », il a demontre les theoremes a partir des postulats, des définitions et des theoremes deja demontres.

Euler (Leonhard) Suisse $1707 - 1783$: Astronome, physicien et mathématicien, l'auteur de trois grands traités didactiques sur l'analyse infinitésimale, il a fonde la Théorie des Graphes,

Fermat (Pierre de) Français $1601 - 1665$: mathématicien, il est connu grâce à ses résultats en théorie des nombres.

Fibonacci (Leonardo) ou Léonard de Pise Italien $1170 - 1250$: mathematicienSon nom est reste attache a la suite de Fibonacci

Galois (évariste) Français $1811 - 1832$: Mathématicien, connu par sa théorie des équations algébriques, ainsi que des résultats sur les intégrales abéliennes ... Ses travaux sont à la base de la notion de groupe.

Gauss (Carl Friedrich) Allemand $1777 - 1855$: Astronome, physicien et mathématicien, Il a renouvelé les méthodes de l'arithmétique, connu aussi avec la méthode des moindres carrés, la théorie des erreurs (courbe de Gauss) et d'importantes découvertes sur la théorie des surfaces.

Hipparque de Nicée Grec $190 - 120$ av.J.C. : Astronome et mathematicien,a decouvert la precession des equinoxes, On lui doit un des premiers catalogues d'etoiles, la division du cercle en $360°, \ldots$

Jean le Rond d'Alembert $(1717; 1783)$: Mathématicien et philosophe,Il a créé, avec Diderot, l'Encyclopédie"Dictionnaire raisonné des Sciences, des Arts et des Métiers

Klein (Felix) Allemand $1849-1925$: mathematicien, Son programme d'Erlangen a notablement influencé les mathématiques modernes

Kepler (Johannes) Allemand $1571 - 1630$:

Leibniz (Gottfried von) Allemand $1646 - 1716$: Philosophe et mathématicien, Il a résolu des équations différentielles et développé en série les fonctions trigonométriques. On lui doit de nombreuses notations, il invente la première multiplicatrice

Ménechme Grec $380 - 320$ av.J.C. : mathematicien et astronome, a decouvert les sections coniques

Napier (John) ou Neper Ecossais $1550 - 1617$:mathematicien, il a inventé les os de Neper,il a donné quelques formules en trigonométrie sphérique, et a popularisé la notation du point pour séparer la partie entière et la partie fractionnaire d'un nombre.

Ptolémée (Claude) Grec $85 - 165$: Astronome mathematicien, l'auteur de « l'Almageste »

Platon Grec $427 - 347$ av.J.C.philosophe et mathematicien,les solides de Platonsymbolisent pour lui les 5 elements du Cosmos

Pythagore de Samos Grec $569 - 475$ av.J.C : mathématicien, connu par le theoreme de Pythagore

Pascal (Blaise) Français $1623 - 1662$: Philosophe, physicien et mathématicien il construisit la première machine à calculer de l'histoire : la Pascaline.

Thalès de Milet Grec $624-547$ av.J.C. : Astronome, philosophe et mathematicien, Il a calcule la hauteur des pyramides en utilisant le celebre theoreme qui porte son nom.

Tartaglia (Nicolo) Italien $1500 - 1557$: Mathematicien, il a resolu l'equation du troisieme degre du type $x^3 + px = q$.

Viète (François) Français $1540-1603$: mathematicien, On lui doit la notion de variables et de paramètres et des travaux en cryptographie en trigonométrie et en astronomie .

Zénon d'Elée Grec $490 - 425$ av.J.C : Philosophe et mathematicien, Aristote lui attribue l'invention de la dialectique. sa renommee lui vient de ses paradoxes