République Algérienne Démocratique et Populaire

Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

UNIVERSITÉ MOHAMED KHIDER, BISKRA

FACULTÉ des SCIENCES EXACTES et des SCIENCES de la NATURE et de la VIE

DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES

Mémoire présenté en vue de l'obtention du Diplôme **:**

MASTER en Mathématiques

Option : **Analyse**

Par

Soufiane Masri

Titre :

Systèmes dynamiques discrets

Membres du Comité d'Examen :

Dr.	**REZKI IBRAHIM**	UMKB	Président
Dr.	**SOLTANI SIHAM**	UMKB	Encadreur
Dr.	**DAKHIA HASSIBA**	UMKB	Examinateur

Juin 2019

REMERCIEMENTS

Je tiens tout d'abord à remercier ALLAH qui m'a donné la force et la patience d'accomplir ce modeste travail.

En second lieu, je tiens à remercier mon encadreur Siham Soltani, pour ses précieux conseils et son aide durant toute la période du travail.

Mes vifs remerciements vont également aux membres du jury pour l'intérêt qu'ils ont porté à ma recherche en acceptant d'examiner mon travail et de l'enrichir par leurs propositions.

Mes remerciements s'étendent également à tous mes enseignants durant les années d'études et à ma famille et mes amis qui par leurs prières et leurs encouragements, j'ai pu surmonter tous les obstacles.

Enfin, je tiens à remercier toutes les personnes qui ont participé de près ou de loin à la réalisation de ce travail.

Table des matières

Table des figures

Introduction

Historiquement, les premières questions relevant des systèmes dynamiques concernaient la mécanique à une époque où elle était incluse dans l'enseignement des mathématiques. Une des questions majeures qui ont motivé la recherche mathématique est le problème de la stabilité du système solaire. Les travaux de Lagrange sur le sujet consistèrent à interpréter l'influence des corps autres que le Soleil sur une planète comme une succession de chocs infinitésimaux : ces travaux retrouvent des échos dans le théorème KAM (Kolmogorov - Arnold - Moser).

Les systèmes dynamiques se sont développés et spécialisés au cours du xixe siècle. Ils concernaient en premier lieu l'itération des applications continues et la stabilité des équations différentielles. Mais progressivement, au fur et à mesure de la diversification des mathématiques, les systèmes dynamiques se sont considérablement élargis.

Depuis 1920 jusqu' à présent les systèmes dynamiques (surtout les systèmes dynamiques en temps discret ou bien les systèmes donnés par des suites récurrentes) jouent un rôle très important puisque il y a des applications dans beaucoup de disciplines scientifiques par exemple : La physique (mécanique céleste, météo), la biologie (dynamique de population), la chimie (cinétique chimique) , l'électronique (les circuits électroniques) , l'informatique (traitement de l'images) , cryptographie (chiffrement des messages, images) , l'économie,. . . , etc.

Les systèmes dynamiques sont les notions mathématiques qui permettent de modéliser des phénomènes évoluant dans le temps, ces phénomènes pouvant provenir de la physique, la mécanique, l'économie, la biologie, l'écologie, la chimie...

On distingue deux types de systèmes dynamiques : les systèmes à temps continu et les systèmes à temps discret. Le système dynamique discret a une grande importance pratique, il peut également être utilisé comme modèle approximatif pour l'étude de système continu. Dans ce mémoire, nous allons étudier le système dynamique discret autonome d'ordre 1, où nous nous sommes concentrés sur l'étude de la stabilité en raison de son importance. Nous avons divisé le mémoire en deux chapitres.

Le premier chapitre de ce mémoire est consacré à l'analyse de l'évolution de variable d'état d'un système dynamique du premier ordre autonomes unidimensionnel.

Ce chapitre est divisé en trois parties :

-Dans la première partie de ce chapitre nous donnons des définitions mathématiques aux systémes dynamiques continus et discrets. Et quelques concepts de systèmes dynamiques discret : itération,orbite(trajectoire),répresentation graphique de la trajectoire.

-Dans la deuxième partie du chapitre nous nous concentrons sur le système dynamique discret linéaire unidimensionnel. Nous donnons la formule de la solution de ce système et on donne la définition de point fixe et de stabilité, ensuite nous cherchons des facteurs qui déterminent l'existence, l'unicité et la stabilité d'un point fixe de ce système.

-Dans la troisième partie du chapitre nous avons utilisé certaines théories pour étudier la stabilité de point fixe d'un système non linéaire autonome unidimensionnel, nous avons également utilisé le système linéaire pour étudier la stabilité de point fixe hyperbolique et dans le cas au le point fixe est non hyperbolique nous utilisons autres théorèmes.

Le deuxième chapitre de ce mémoire est consacré pour étudier le système dynamique discret autonome multidimensionnel.

-Dans la première partie du ce chapitre on étude le système linéaire multidimensionnel, on cherche de solution de ce système, on définit le point fixe dans le cas multidimensionnel et on trouve sa formule en utilise les propriétés des matrices, ensuite on définit la stabilité dans le cas multidimensionnel et on utilisons la forme de Jordan pour étudier la stabilité.

-Dans la deuxième partie du chapitre nous nous intéressons à le système non linéaire multidimensionnel, on va étudier la stabilité de ce système à l'aide de système linéaire multidimensionnel et à l'aide d'une fonction de Lyapunov.

Chapitre 1

Systèmes dynamiques discrets de dimension 1

1.1 Systèmes dynamiques

Définition 1.1.1 *Un système dynamique est défini par un triplet* (X, T, φ)*, constitué de l'espace d'états* X*, du domaine temporel* T *et d'une fonction de transition d'état* φ *:* $X \times T \to X$*, qui possède la propriété, pour tout* $x \in X$ *et* t_1*,*$t_2 \in T$ *:*

$$\begin{cases} \varphi(x, 0) = x \\ \varphi(\varphi(x, t_1), t_2) = \varphi(x, t_1 + t_2) \end{cases}$$

On distingue deux grandes catégories de systèmes dynamiques : les systèmes à temps continu et les systèmes à temps discret. Si $T = \mathbb{R}^+$ou $\mathbb{R}$, le système est dit à temps continu, et si $T = \mathbb{N}$ ou $\mathbb{Z}$, le système est dit à temps discret.

1.1.1 Systèmes dynamiques continus

Dans le cas général, un système dynamique continu peut être représenté par une équation différentielle. Selon l'équation, on distingue quelques types différents de systèmes.

Une équation différentielle de type :

$$\begin{cases} \frac{dX(t)}{dt} = F(X(t)) \\ X(0) = X_0 \end{cases} \tag{1.1}$$

Où :

- $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$.
- $\frac{dX(t)}{dt} = (\frac{dx_1(t)}{dt}, \frac{dx_2(t)}{dt}, \cdots, \frac{dx_n(t)}{dt})^t$.
- $X(t) = (x_1(t), x_2(t), \cdots, x_n(t))^t \in D \subset \mathbb{R}^n$.

permet de définir un système dynamique autonome à temps continu $(D, \mathbb{R}^+, \varphi)$ où φ est la solution de 1.1.Cette solution est donnée par :

$$\varphi(X_0, t) = X_0 + \int_0^t F(X(s))ds.$$

Si la fonction F est une fonction de l'état $X(t)$ et de la variable du temps t i.e : $\frac{dX(t)}{dt} = F(t, X(t))$ on dit que le système dynamique est non autonome.

1.1.2 Systèmes dynamiques discrets

Définition 1.1.2 *Dans le cas général un système dynamique discret est décrit par un système d'équations aux différences finies, autrement dit, par une récurrence.*

On appelle système dynamique discret autonome d'ordre 1 *l'équation aux différences suivante :*

$$\begin{cases} X_{t+1} = f(X_t) \\ X_0 \quad \text{donné} \end{cases}, \ t \in \mathbb{N}. \tag{1.2}$$

Où :

- $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ *une fonction différentiable.*

- $X_0 \in D \subset \mathbb{R}^n$: *Valeur initial.*
- $X_t \in D$: *Vecteur des états du système.*

De (1.2) on obtient :

$X_1 = f(X_0)$.

$X_2 = f(X_1) = f(f(X_0)) = f^2(X_0)$.

En général : $X_t = f^t(X_0)$ où $f^t = \underbrace{f \circ \cdots \circ f}_{t \text{ fois}}$.

- $f(X_0)$ est appelée premiére itération de X_0 par la fonction f.
- $f^2(X_0) = f(f(X_0))$ est appelée seconde itération de X_0 par la fonction f.
- $f^t(X_0)$ est appelée $t^{ième}$ itération de X_0 par la fonction f.

Donc, le triplet $(D, \mathbb{N}, \varphi)$ définit un système dynamique discret autonome, où φ est donné par : $\varphi(X_0, t) = f^t(X_0)$.

Remarque 1.1.1

- *Si la fonction f est une fonction de l'état X_t et de la variable du temps t i.e :*

$X_{t+1} = f(t, X_t)$ *alors le système s'appelle système dynamique discret non autonome.*

- *Si l'équation aux différences est d'ordre $p \geq 2$ autonomes ou non i.e :*

$X_{t+p} = f(X_t, X_{t+1}, X_{t+2}, \cdots, X_{t+p-1})$ *alors le système s'appelle systèmes dynamiques discrets d'ordre supérieur.*

Définition 1.1.3 *On appelle la suite $\{f^t(X_0)\}_{t=0}^{\infty}$ un orbite (ou un trajectoire) du point X_0 et on le note par $O(X_0)$ i.e :*

$$O(X_0) = \left\{X_0, f(X_0) = X_1, \cdots, f^t(X_0) = X_t, \cdots\right\}.$$

Représentation graphique de l'orbite

Dans le cas où f est une fonction de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ on peut représenter sur le plan (x, y) l'évolution d'une orbite $O(x_0)$ qui commence dans le point $(x_0; 0)$ en suivant ces étapes :

-**Etape 1** : tracer la courbe représentant la fonction f et la droite $y = x$.

-**Etape 2** : placer le point de coordonnées $(x_0; 0)$.

-**Etape 3** : chercher le point d'ordonnée $f(x_0)$, on l'obtient en traçant une droite verticale passant par $(x_0; 0)$ et en cherchant son intersection avec la courbe de la fonction f. Ce point a comme ordonnée $f(x_0)$, ce qui correspond à x_1 (puisque $x_1 = f(x_0)$).

-**Etape 4** : projeter horizontalement le point de coordonnées $(x_0; x_1)$ sur la droite $y = x$ pour obtenir le point de coordonnées $(x_1; x_1)$, une projection verticale permet ensuite de repporter le point $(x_1; 0)$ sur l'axe des ordonnées.

Réaliser ensuite pour x_1 les même opérations que pour x_0 afin d'obtenir x_2 et ainsi de suite pour les termes de rang suivant.

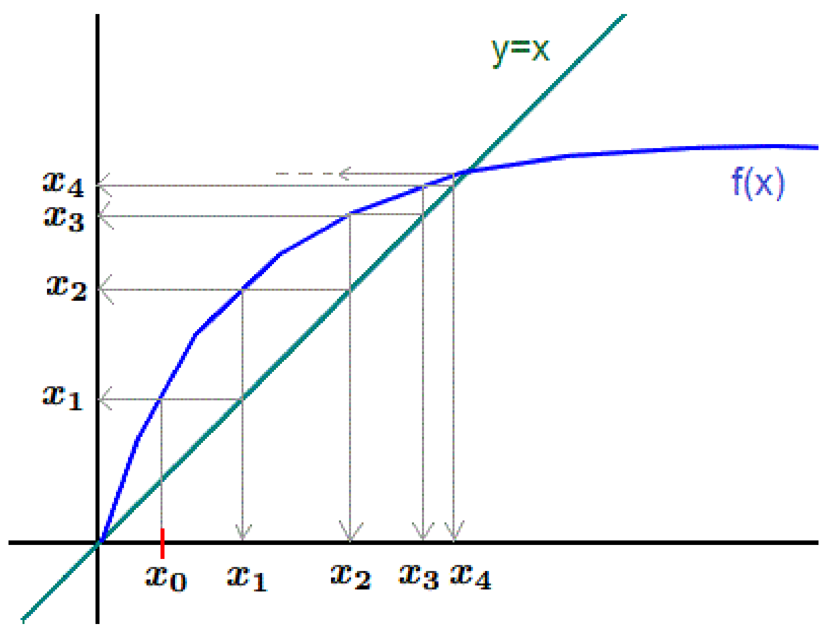

Fig. 1.1 – Représentation graphique

Passage de temps continu à temps discret

Nous pouvons transformer un système dynamique continu en un système dynamique discret en utilisant la méthode d'Euler. Soit une système dynamique continu

$$\frac{dX(t)}{dt} = F(X(t))$$

Nous voulons étudier la trajectoire de cette équation seulement à des instants choisis, équidistants $t_n = t_0 + n.\Delta t$. Si la période d'échantillonnage t est choisie assez petite, on peut approcher la dérivée de $X(t)$ par la différence :

$$\frac{dX(t)}{dt} \approx \frac{X(t_n) - X(t_{n+1})}{\Delta t}$$

Alors, le système dynamique à temps continu peut être approché par le système dynamique à temps discret suivant :

$$X(n+1) = X(n) + \Delta t.F(X(n))$$

Maintenant dans tout ce que suit nous ne considérons que des systèmes dynamiques discrets autonomes qui sont décrits par l'équation aux différences finies.

1.2 Systèmes dynamiques discrets linéaires

Définition 1.2.1 *Un systéme dynamique linéaire discret est définie par équation aux différences suivant :*

$$\begin{cases} x_{t+1} = ax_t + b \\ x_0 \qquad \textit{donné} \end{cases}, \; t \in \mathbb{N} \tag{1.3}$$

Où :

- $a, b \in \mathbb{R}$: *sont des constantes.*
- $x_t \in \mathbb{R}$: *variable d'état.*
- x_0 : *valeur initiale.*

A partir de la valeur initiale x_0 on déduit de (1.3) :

-à l'instant $t = 0$: $x_1 = ax_0 + b$.

-à l'instant $t = 1$: $x_2 = ax_1 + b = a(ax_0 + b) + b = a^2x_0 + ab + b$.

-à l'instant $t = 2$: $x_3 = ax_2 + b = a(a^2x_0 + ab + b) + b = a^3x_0 + a^2b + ab + b$.

$\vdots$

En général : $x_t = a^t x_0 + a^{t-1}b + a^{t-2}b + \cdots + ab + b$.

$= a^t x_0 + b\sum_{i=0}^{i=t-1} a^i$, $t \in \mathbb{N}^*$.

On a $\sum_{i=0}^{i=t-1} a^i$ est une somme d'une série géométrique, donc pour $t \in \mathbb{N}^*$:

$$x_t = \begin{cases} a^t x_0 + b\dfrac{1-a^t}{1-a} & a \neq 1 \\ x_0 + bt & a = 1 \end{cases}$$

1.2.1 Point fixe

La notion de points d'équilibre est centrale dans l'étude de la dynamique de tout système physique. Dans de nombreuses applications en biologie, économie, physique, ingénierie, etc., il est souhaitable que tous les états (solutions) d'un système donné tendent à son état d'équilibre (point d'équilibre). C'est le sujet d'étude de la théorie de la stabilité, un sujet d'une grande importance pour les scientifiques et les ingénieurs.

Définition 1.2.2 *Un point d'équilibre (ou point fixe) est une valeur de la variable d'état x_t qui est invariante selon la loi du mouvement dictée par le système dynamique.*
En d'autres termes, le point fixe d'un système dynamique $x_{t+1} = f(x_t)$ est $\overline{x} \in \mathbb{R}$ tel que $\overline{x} = f(\overline{x})$ où $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable.
Graphiquement, les points fixes peuvent être trouvés en identifiant les intersections de la fonction $f(x)$ avec la diagonale $y = x$.

Existence et unicité du point fixe

On suppose que le système (1.3) est a l'état d'équilibre i.e : $\overline{x} = a\overline{x} + b$.
-pour $a \neq 1$, on a : $\overline{x} = \dfrac{b}{1-a}$. Donc il existe une unique point fixe.

-pour $a = 1$ et $b = 0$, on a : $\forall t \in \mathbb{N}$, $x_{t+1} = x_t$. C-à-d toute condition initiale est un point fixe.

-pour $a = 1$ et $b \neq 0$, le point fixe n'existe pas.

Finalement, on déduit que :

$$\overline{x} = \begin{cases} \dfrac{b}{1-a} & a \neq 1 \\ x_0 & a = 1 \text{ et } b = 0 \end{cases}$$

Proposition 1.2.1 *Le point fixe d'un système dynamique $x_{t+1} = ax_t + b$ exists si et seulement si $a \neq 1$ ou $(a = 1$ et $b = 0)$.*

Proposition 1.2.2 *Le point fixe d'un système dynamique $x_{t+1} = ax_t + b$ est unique si et seulement si $a \neq 1$.*

Remarque 1.2.1 *La solution de* (1.3) *peut être écrite en termes de son point fixe $\overline{x}$ el la valeur initial x_0 comme suit :*

$$x_t = \begin{cases} a^t(x_0 - \overline{x}) + \overline{x} & a \neq 1 \\ x_0 + bt & a = 1 \end{cases}$$

1.2.2 Stabilité du point fixe

Définition 1.2.3 *On dit que le point fixe $\overline{x}$ d'un système dynamique $x_{t+1} = f(x_t)$ (où $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable) est stable si :*

$$\forall \varepsilon \succ 0, \exists \delta \succ 0 \text{ tel que si } |x_0 - \overline{x}| \prec \delta \Rightarrow |f^t(x_0) - \overline{x}| \prec \varepsilon \ \forall t \in \mathbb{N}^*.$$

Autrement dit, toutes les orbites qui commencent près du point $\overline{x}$ restent dans un voisinage de ce point.

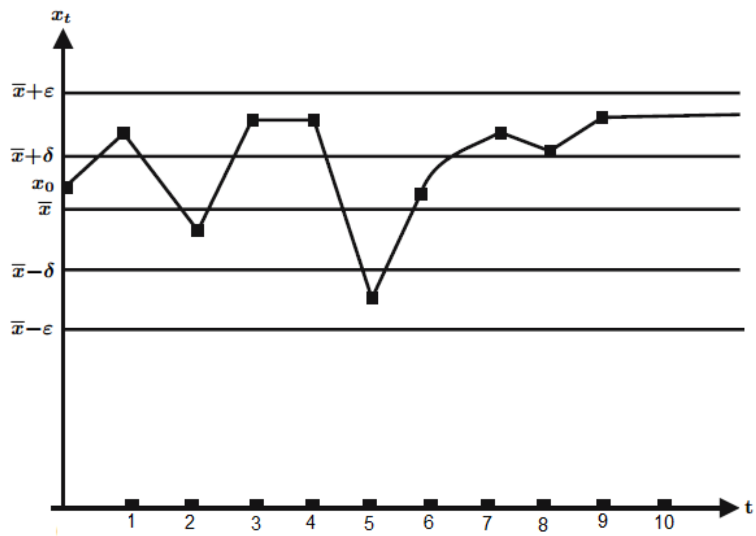

FIG. 1.2 – Point fixe stable

Définition 1.2.4 *On dit que le point fixe $\overline{x}$ est localement asymptotiquement stable s'il est stable et s'il existe $V_\varepsilon(\overline{x})$ un voisinage de $\overline{x}$ ($V_\varepsilon(\overline{x}) = \{y : |\overline{x} - y| \prec \varepsilon|\}$) tel que $\forall x_0 \in V$ $\lim\limits_{t\to\infty} x_t = \overline{x}$.*

Définition 1.2.5 *On dit que Le point fixe $\overline{x}$ est globalement asymptotiquement stable s'il est stable et :$\lim\limits_{t\to\infty} x_t = \overline{x}, \forall x_0 \in \mathbb{R}$.*

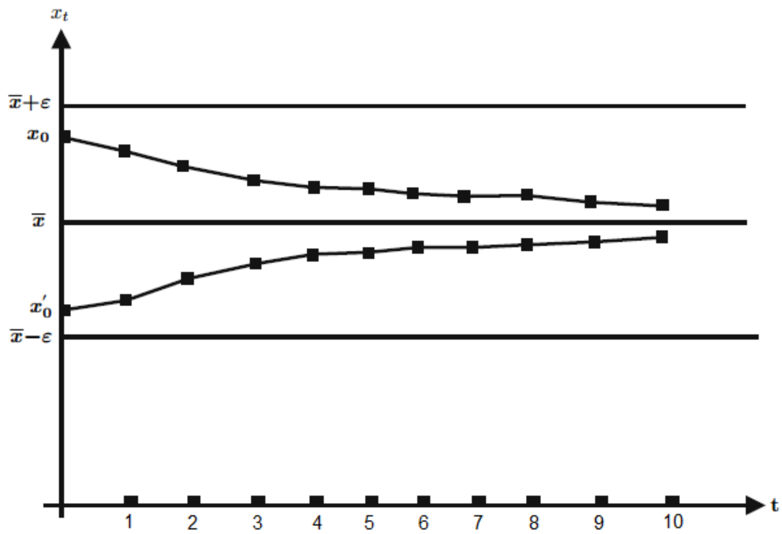

FIG. 1.3 – loc-as-stable

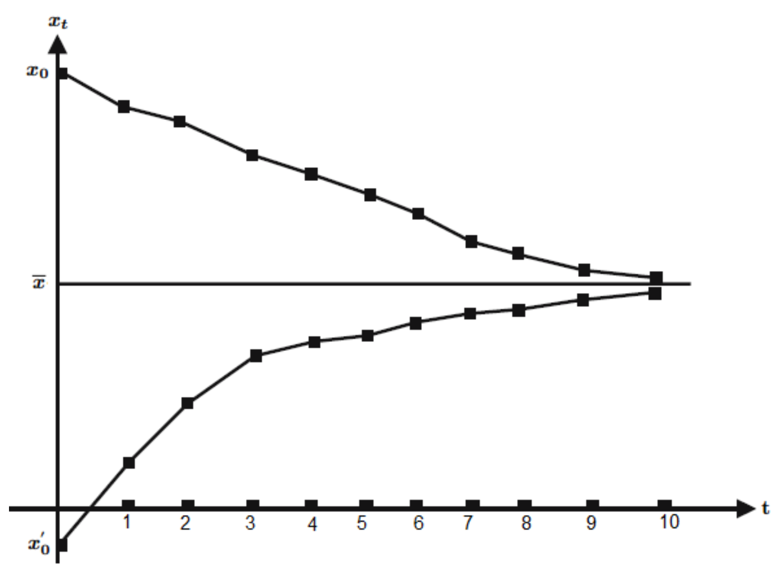

FIG. 1.4 – Point fixe globalement asymptotiquement stable

Remarque 1.2.2 *La stabilité globale d'un point fixe implique l'unicité du point fixe et la stabilité locale implique l'unicité local du point fixe.*

Définition 1.2.6 *Un point fixe s'appelle instable s'il existe un* $\varepsilon > 0$ *tel que* $\forall r > 0$ *il existe un* $x_0 \in V_r(\overline{x})$ *et il existe un* $t \in \mathbb{N}$ *tels que* $|f^t(x_0) - \overline{x}| \succ \varepsilon$.

Cela signifie que pour tout voisinage du point fixe $\overline{x}$ il existe une orbite qui, en commençant dans ce voisinage s'éloigne du point $\overline{x}$.

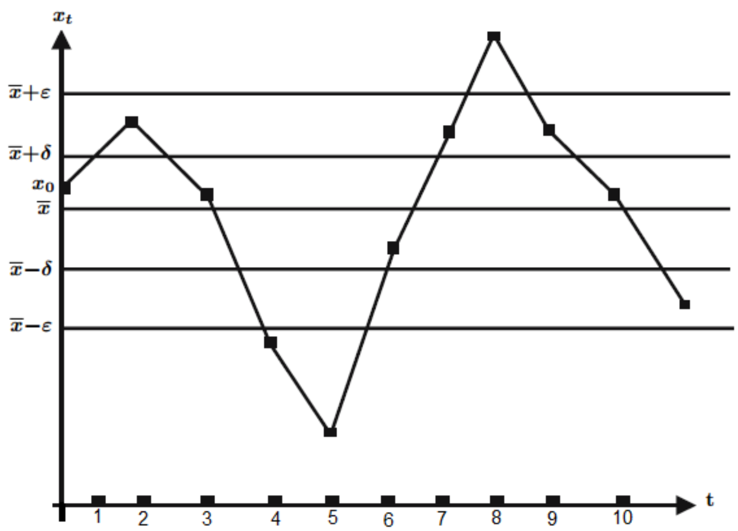

FIG. 1.5 – Point fixe instable

D'après les définitions de la stabilité asymptotique locale et globale, la stabilité asymptotique du point fixe peut être obtenue en calculons la limite de du variable d'état x_t.

On a :

$$\lim_{t\to\infty}|x_t| = \begin{cases} \lim\limits_{t\to\infty}|(x_0-\overline{x})a^t+\overline{x}| & \text{si } a \neq 1 \\ \lim\limits_{t\to\infty}|x_0+bt| & \text{si } a = 1 \end{cases} = \begin{cases} |\overline{x}| & \text{si} \begin{cases} |a| \prec 1 \\ |a| \succ 1 \text{ et } x_0 = \overline{x} \end{cases} \\ |x_0| & \text{si } a = 1 \text{ et } b = 0 \\ |x_0| & t \text{ paire et } \ a = -1 \\ |b-x_0| & t \text{ impaire } \quad a = -1 \\ \infty & \quad \text{autres cas.} \end{cases}$$

On distingue les cas suivants :

1$^{\text{ér}}$ cas : Si le coefficient$|a| \prec 1$ alors le systéme est globalement asymptotiquement stable car $\lim\limits_{t\to\infty} x_t = \overline{x}$, $\forall x_0 \in \mathbb{R}$.

En particulier, si $0 \prec a \prec 1$, la convergence de la variable d'état x_t vers le point fixe $\overline{x}$ est monotone.

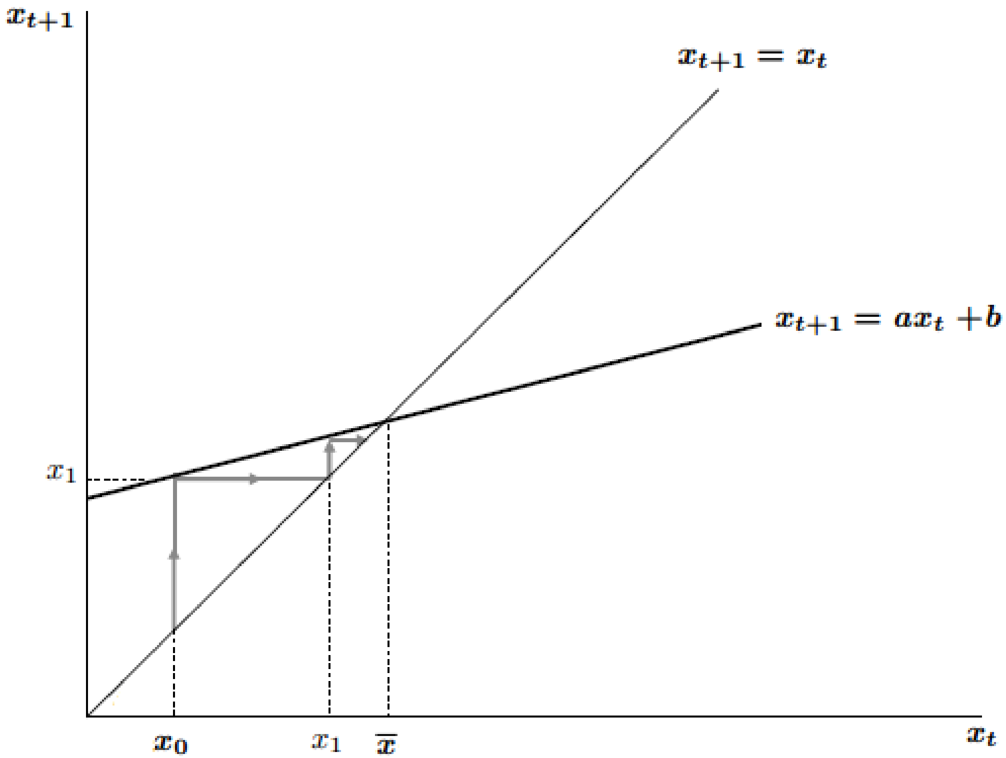

FIG. 1.6 – Point fixe globalement asymptotiquement stable ($0 \prec a \prec 1$)

Si $-1 \prec a \prec 0$, la convergence de la variable d'état x_t vers le point fixe $\overline{x}$ est oscillatoire.

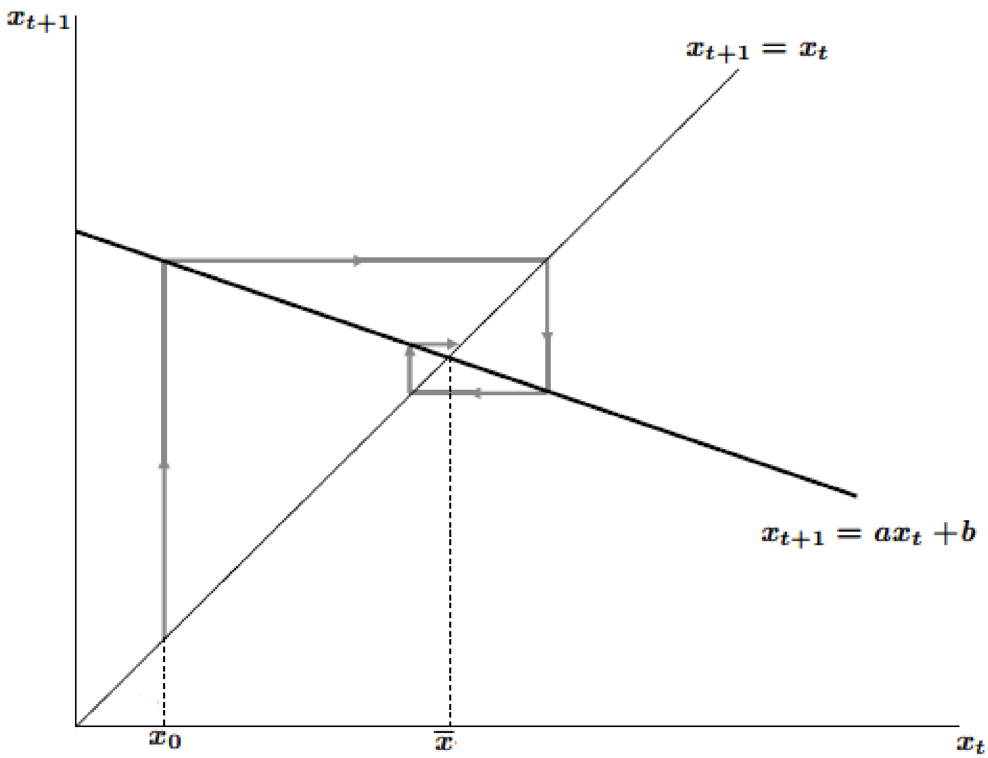

FIG. 1.7 – Point fixe globalement asymptotiquement stable ($-1 \prec a \prec 0$)

2$^{\text{éme}}$cas : Si $a = 1$ et $b = 0$, le système admet une infinité de points fixes et tout voisinage d'un point fixe contient un autre point fixe et il existe donc des conditions initiales dans tout voisinage d'un point fixe qui ne conduisent pas à ce point fixe à long terme.Donc chaque point fixe est instable.

3$^{\text{éme}}$cas : Si $a = 1$ et $b \neq 0$, n'existe pas des points fixes et de plus

$$\lim_{t\to\infty} x_t = \lim_{t\to\infty} x_0 + bt \ = \begin{cases} +\infty & \text{si } b > 0 \\ -\infty & \text{si } \ b < 0 \end{cases}$$

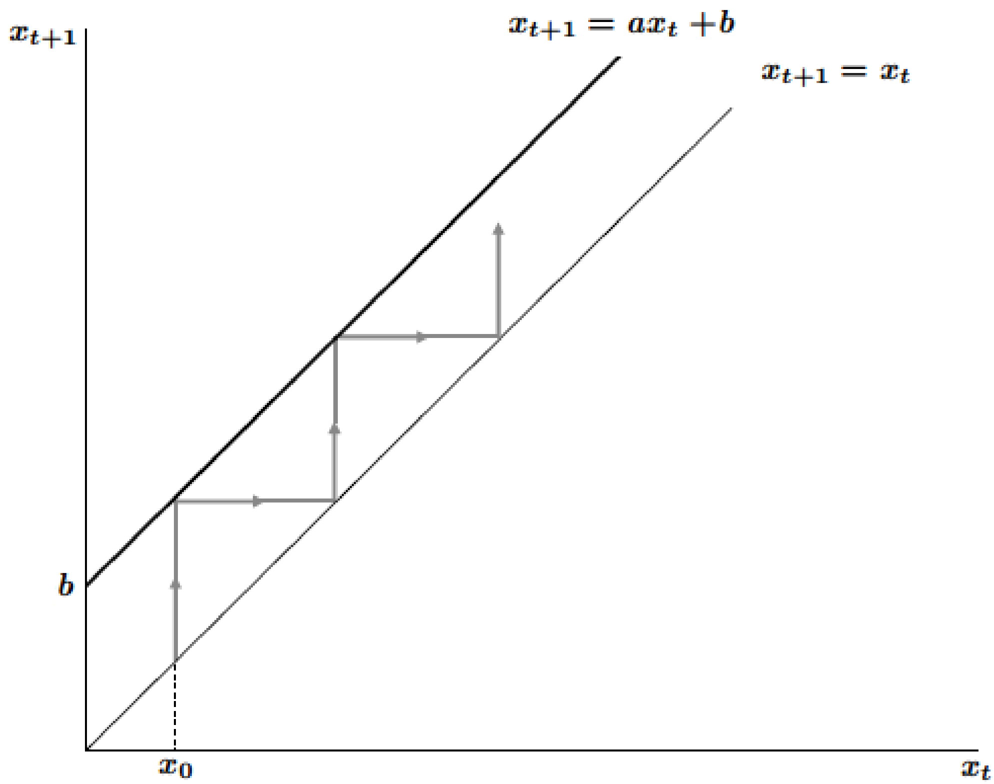

FIG. 1.8 – Non-existence d'un point fixe ($a = 1$ et $b \neq 0$)

4$^{\text{éme}}$cas : Si $a = -1$ le systeme prend alternativement les valeurs x_0 et $b - x_0$ donc le point fixe $\overline{x} = \dfrac{b}{2}$ n'est pas asymptotiquement stable.

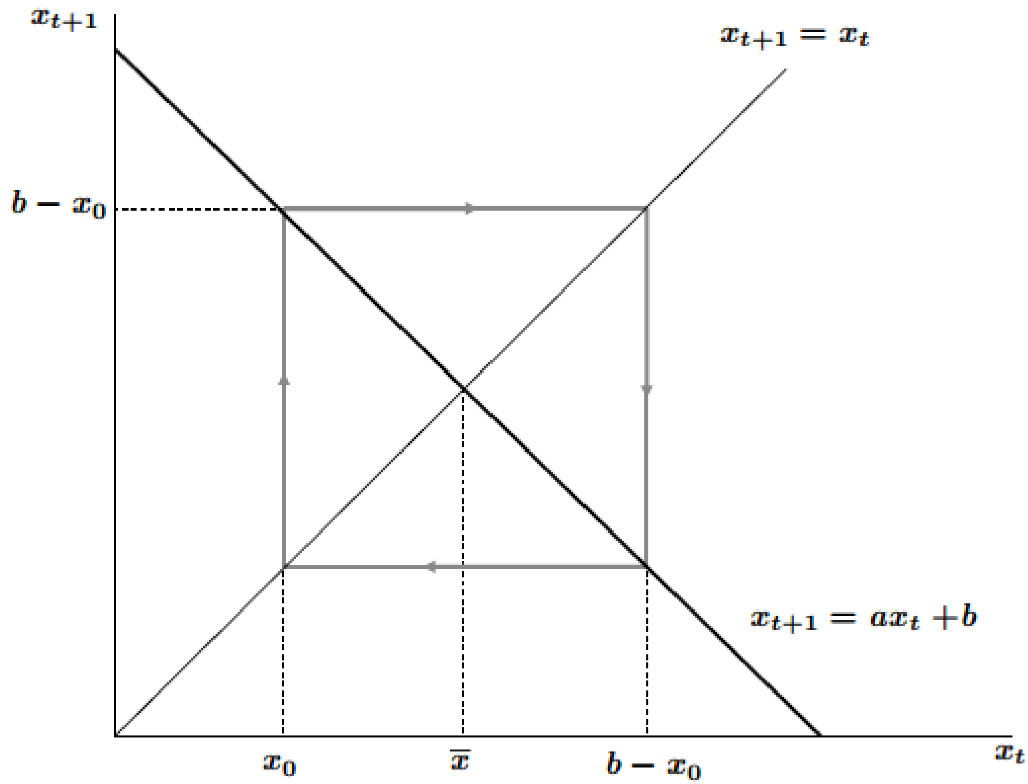

FIG. 1.9 – Point fixe n'est pas asymptotiquement stable ($a = -1$)

5$^{\text{éme}}$cas : Si $|a| > 1$: pour $x_0 \neq \overline{x}$, $\lim\limits_{t\to\infty} |x_t| = +\infty$ et pour $x_0 = \overline{x}$ le système commence au point fixe où il reste ensuite.Chaque perturbation mineure provoque le système à marcher sur un divergent chemin. Donc si $|a| > 1$ le point fixe $\overline{x} = \dfrac{b}{1-a}$ est instable.
En particulier si $a \succ 1$, la divergence de la variable d'état x_t est monotone.

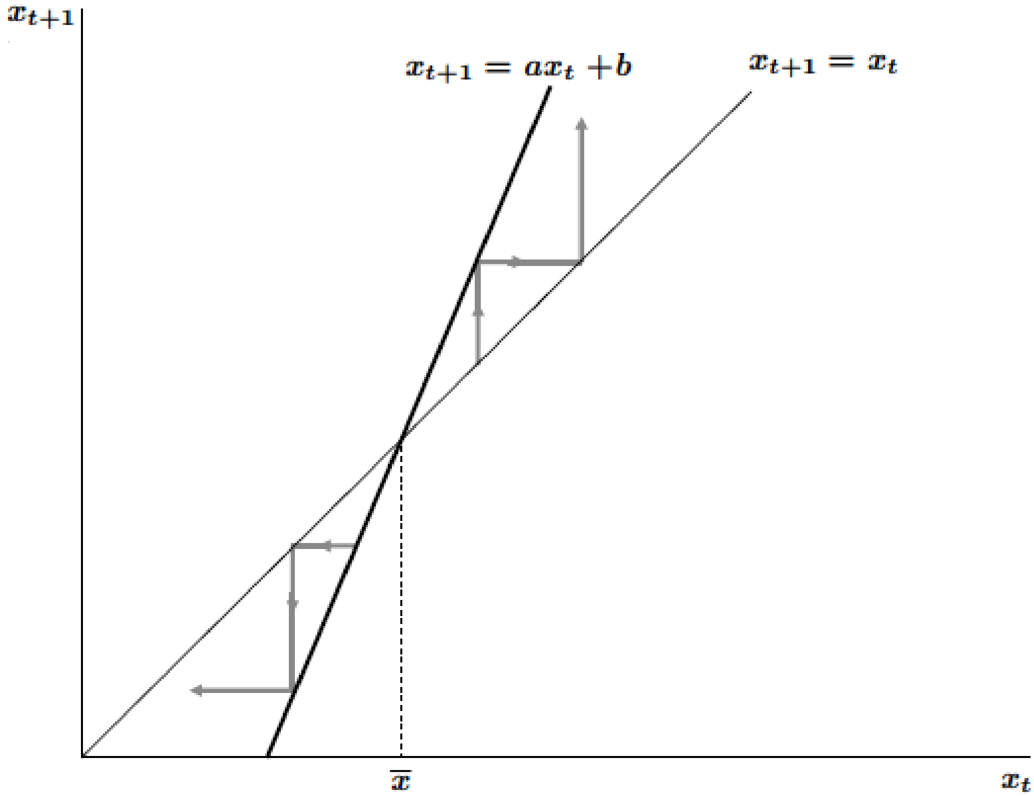

FIG. 1.10 – Point fixe instable ($a > 1$)

Si $a \prec -1$, la divergence de la variable d'état x_t est oscillatoire.

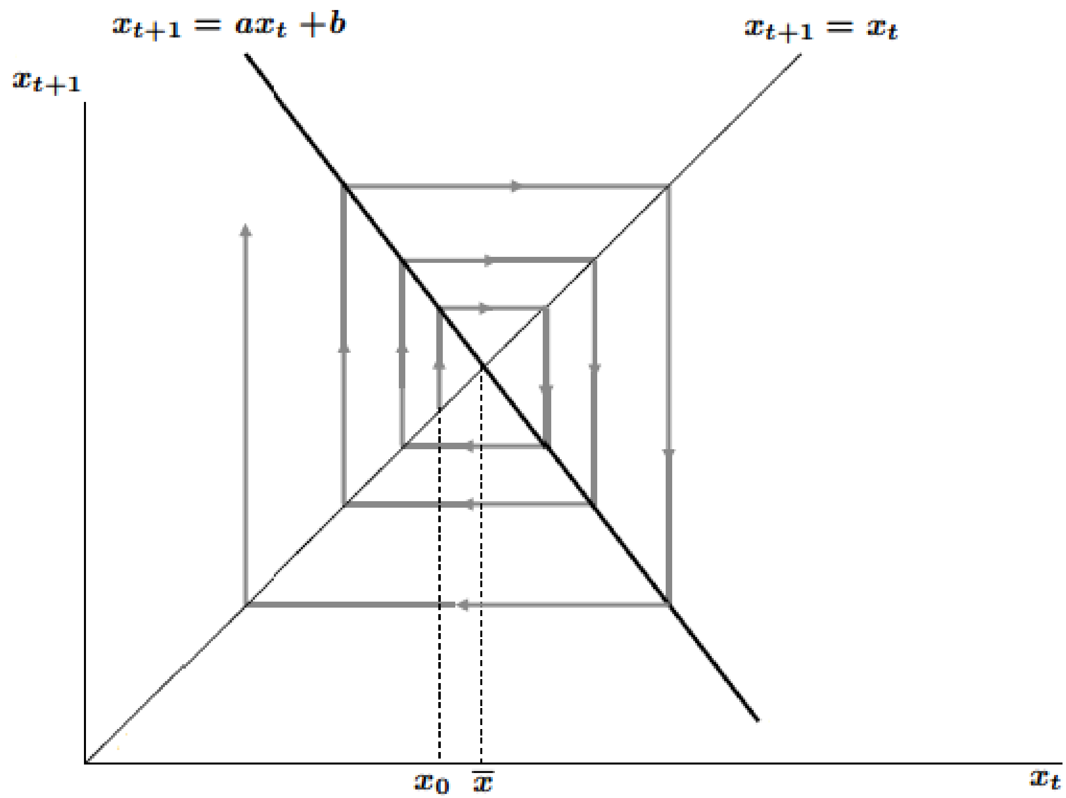

FIG. 1.11 – Point fixe instable ($a < -1$)

Proposition 1.2.3

- *Le point d'equilibre de* (1.3) *est globalement asymptotiquement stable ssi* $|a| \prec 1$.
- *Le point d'equilibre de* (1.3) *est instable si et seulement si* $|a| \succ 1$.

1.3 Systèmes dynamiques discrets non linéaire

Définition 1.3.1 *Un système dynamique discret non linéaire est définie par équation aux différences suivant :*

$$\begin{cases} x_{t+1} = f(x_t) \\ x_0 \quad \text{donné} \end{cases}, \ t \in \mathbb{N} \tag{1.4}$$

où $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *une fonction dérivable et* $x_t \in \mathbb{R}$ *est le variable d'état.*

1.3.1 Stabilié du point fixe

Il n'est pas facile de trouver des solutions de systèmes non linéaires. Souvent, ces solutions ne fournissent pas suffisamment d'informations sur les facteurs qui contrôlent la stabilité du système. Par conséquent, nous avons besoin de méthodes analytiques pour faciliter l'étude du comportement de ce système non linéaire.L'approximation linéaire du système non linéaire est l'un des moyens les plus efficaces d'étudier la stabilité des systèmes non linéaires.

Méthode de linéairisation

Le développement de Taylor d'ordre 1 de $f(x_t) = x_{t+1}$ au voisinage $\overline{x}$ est :

$$x_{t+1} = f(x_t) = f(\overline{x}) + f^{'}(\overline{x})(x_t - \overline{x}) + o(x_t - \overline{x}).$$

alors :

$$x_{t+1} \simeq f^{'}(\overline{x})x_t + f(\overline{x}) - f^{'}(\overline{x})\overline{x} = ax_t + b$$

Où $a = f^{'}(\overline{x})$ et $b = f(\overline{x}) - f^{'}(\overline{x})\overline{x}$.

Donc, on obtient une approximation linéaire de (1.4) au voisinage du point fixe par le développement de Taylor d'ordre 1 de la fonction f.

Nous pouvons utiliser les résultats de stabilité du système linéaire pour étudier la stabilité du système non linéaire.

étant donné que le système linéaire n'approche du comportement du système non linéaire que dans une voisinage suffisamment petite d'un point fixe, l'analyse globale du système linéarisé ne donne qu'une analyse locale de systeme dynamique non linéaire.

Proposition 1.3.1

- *Le point d'équilibre* $\overline{x}$ *de* (1.4) *est localemenet asymptotiquement stable ssi* $|f^{'}(\overline{x})| \prec 1$.

- *Le point d'équilibre* $\overline{x}$ *de* (1.4) *est instable si et seulement si* $|f^{'}(\overline{x})| \succ 1$.

Remarque 1.3.1 *La stabilité du système non linéaire à proximité d'un point fixe* $\overline{x}$ *ne peut être étudiée à partir du système linéarisé si* $f^{'}(\overline{x}) = 1$. *À savoir, tout changement infinitésimal dans la dérivée au point* $\overline{x}$ *entraîne un changement dans la nature du système dynamique.*

1.3.2 Stabilité du point fixe non hyperbolique

Définition 1.3.2 *Un point fixe* $\overline{x}$ *de* (1.4) *est dit hyperbolique si on a* $|f^{'}(\overline{x})| \neq 1$.

Dans le cas au $|f^{'}(\overline{x})| = 1$ c-à-d $\overline{x}$ non hyperbolique on peut utiliser les thèorémes suivants pour étudier la stabilité du point fixe.

Théorème 1.3.1 *Soit* $\overline{x}$ *un point fixe de le système* (1.4) *avec* $f \in C^3$ *et* $f^{'}(\overline{x}) = 1$ *et* $f^{''}(\overline{x}) = 0$ *alors :*

$-$*Si* $f^{'''}(\overline{x}) > 0$ *alors* $\overline{x}$ *est instable.*

$-$*Si* $f^{'''}(\overline{x}) < 0$ *alors* $\overline{x}$ *est asymptotiquement stable.*

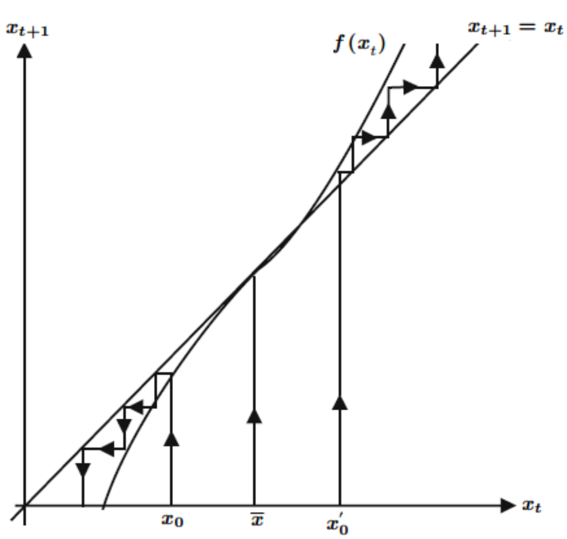

FIG. 1.12 – Point fixe isntable

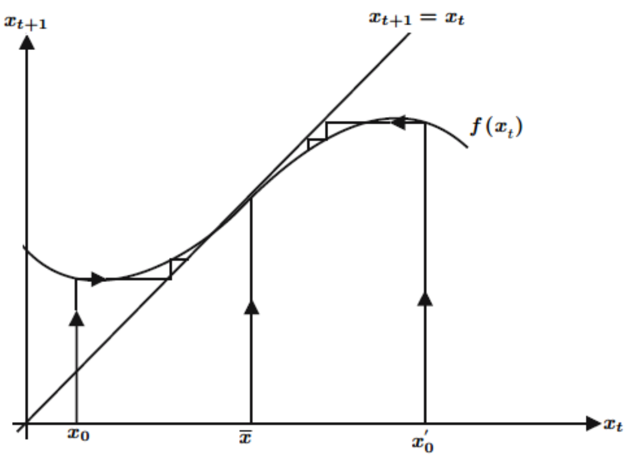

FIG. 1.13 – Point fixe asymptotiquement stable.

Exemple 1.3.1 *Soit le système dyanmique* $x_{t+1} = x_t^3 + x_t$.*On a :*

$$f(\overline{x}) = \overline{x} \Longleftrightarrow \overline{x}^3 + \overline{x} = \overline{x} \Longleftrightarrow \overline{x} = 0$$

Alors, l'unique point fixe de ce système est $\overline{x} = 0$

D'autre part on a : $f'(0) = 1,\ f''(0) = 0$ *et* $f'''(0) = 6 \succ 0$.

Donc d'aprés le théorème (1.3.1) *on déduit que le point fixe* $\overline{x} = 0$ *est instable.*

Exemple 1.3.2 *Soit le système dyanmique* $x_{t+1} = -x_t^3 + x_t$.*On a :*

$$f(\overline{x}) = \overline{x} \Longleftrightarrow \overline{x} = 0$$

Alors, l'unique point fixe de ce système est $\overline{x} = 0$

D'autre part on a : $f'(0) = 1,\ f''(0) = 0$ *et* $f'''(0) = -6 \prec 0$.

Donc d'aprés le théorème (1.3.1) *on déduit que le point fixe* $\overline{x} = 0$ *est asymptotiquement stable.*

Théorème 1.3.2 *Soit* $\overline{x}$ *est un point fixe de le système* (1.4) *avec* $f \in C^2$, *si* $f'(\overline{x}) = 1$ *et* $f''(\overline{x}) \neq 0$ *alors :* $\overline{x}$ *est instable.*

$-$*Si* $f'(\overline{x}) = 1$ *et* $f''(\overline{x}) > 0$, *on dit que* $\overline{x}$ *est un point fixe semi-stable à gauche.*

$-$*Si* $f'(\overline{x}) = 1$ *et* $f''(\overline{x}) < 0$, *on dit que* $\overline{x}$ *est un point fixe semi-stable à droite.*

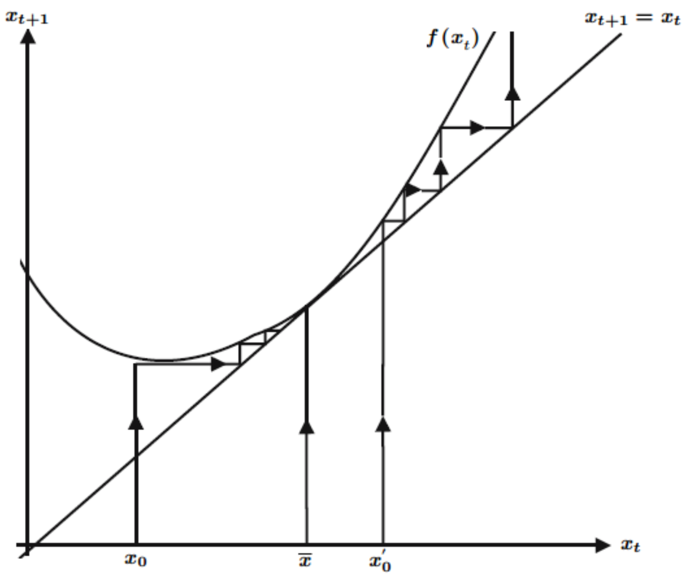

Fig. 1.14 – Point fixe semi-stable à gauche

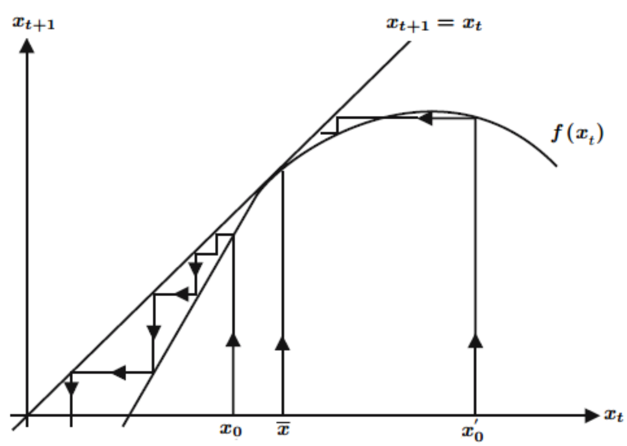

Fig. 1.15 – Point fixe semi-stable à droite

Définition 1.3.3 *La dérivée Schwartzienne d'une fonction $f \in C^3$ est définie par :*

$$Sf(x) = \frac{f^{'''}(x)}{f^{'}(x)} - \frac{3}{2}\left(\frac{f^{''}(x)}{f^{'}(x)}\right)^2$$

Notons que si $f^{'}(x) = -1$, alors

$$Sf(x) = -f^{'''}(x) - \frac{3}{2}\left[f^{''}(x)\right]^2$$

Théorème 1.3.3 *Si $\overline{x}$ est un point fixe de le système* (1.4) *avec $f \in C^3$ et $f^{'}(x) = -1$ alors :*

$-$Si $Sf(\overline{x}) > 0$ alors $\overline{x}$ est instable.

$-$Si $Sf(\overline{x}) < 0$ alors $\overline{x}$ est localement asymptotiquement stable.

Preuve. Soit le système dynamique

$$x_{t+1} = g(x_t), \text{ où } g(x) = f^2(x) \tag{1.5}$$

On remarque que le point fixe $\overline{x}$ de (1.4) est aussi un point fixe de (1.5) et si $\overline{x}$ est asymptotiquement stable (instable) par rapport à (1.5), il est aussi asymptotiquement stable (instable) par rapport à (1.4).On a :

$$g^{'}(x) = [f(f(x))]^{'} = f^{'}(x)f^{'}(f(x)) \Rightarrow g^{'}(\overline{x}) = [f^{'}(\overline{x})]^2 = 1$$

Le théorème (1.3.1) s'applique donc à cette situation.Nous devons évaluer $g^{''}(\overline{x})$:

$$g^{''}(x) = [f^{'}(x)f^{'}(f(x)]^{'} = [f^{'}(x)]^2 f^{''}(f(x)) + f^{'}(f(x))f^{''}(x) \Rightarrow g^{''}(\overline{x}) = 0$$

Le théorème (1.3.1) dit que la stabilité asymptotique de $\overline{x}$ est déterminée par le signe de

$g^{'''}(\overline{x})$. On a :

$$\begin{aligned} g^{'''}(x) &= [[f^{'}(x)]^2 f^{''}(f(x)) + f^{'}(f(x)) f^{''}(x)]' \\ &= 2f^{'}(x)f^{''}(x)f^{''}(f(x)) + f^{'}(x)f^{'''}(f(x))[f^{'}(x)]^2 + f^{'}(x)f^{''}(f(x))f^{''}(x) + f^{'''}(x)f^{'}(f(x)) \end{aligned}$$

Alors

$$g^{'''}(\overline{x}) = -2f^{'''}(\overline{x}) - 3[f^{''}(\overline{x})]^2$$

Donc

$$g^{'''}(\overline{x}) \succ 0 \Longleftrightarrow Sf(\overline{x}) > 0 \text{ et } g^{'''}(\overline{x}) \prec 0 \Longleftrightarrow Sf(\overline{x}) \prec 0$$

■

Exemple 1.3.3 *Soit le système dyanmique $x_{t+1} = x_t^2 + 3x_t$.On a :*

$$f(\overline{x}) = \overline{x} \Longleftrightarrow \overline{x}^2 + 3\overline{x} = \overline{x} \Longleftrightarrow \overline{x} = 0 \text{ } ou \text{ } \overline{x} = -2$$

Alors, les points fixes de ce système sont : $\overline{x} = 0$ et $\overline{x} = -2$

D'autre part on a : $f^{'}(0) = 3 \succ 1$

Donc d'aprés la proposition (1.3.1) le point fixe $\overline{x} = 0$ est instable.

et on a $f^{'}(-2) = -1$ et $Sf(-2) = -6 \prec 0$

D'aprés le théorème (1.3.3) on déduit que le point fixe $\overline{x} = -2$ est asymptotiquement stable.

Définition 1.3.4 *on dit que $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est contractante si $\exists \alpha \in]0, 1[$ tel que*

$$|f(x_1) - f(x_2)| \leq \alpha |x_1 - x_2|, \forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}.$$

Corollaire 1.3.1 *Le point fixe de (1.4) existe et est unique et globalement asymptotiquement stable si f est contractante ou si $|f^{'}(x_t)| \prec 1$, $\forall x_t \in \mathbb{R}$.*

Preuve. Nous allons d'abord démontrer que la suite (x_t) est une suite de Cauchy :

Observons que pour tout entier naturel t :

$$|x_{t+1}-x_t|=|f(x_t)-f(x_{t-1})|\leq\alpha|x_t-x_{t-1}|\leq\alpha^2|x_{t-1}-x_{t-2}|\leq\cdots\leq\alpha^t|x_1-x_0|$$

Par inégalité triangulaire,on peut écrire :

$$|x_{t+p}-x_t|\leq\sum_{i=0}^{p-1}|x_{t+i+1}-x_{t+i}|\leq\sum_{i=0}^{p-1}\alpha^{t+i}|x_1-x_0|\leq\alpha^t\frac{1-\alpha^p}{1-\alpha}|x_1-x_0|\leq\frac{\alpha^t}{1-\alpha}|x_1-x_0|$$

Comme α^t tend vers 0 quand t tend vers l'infini (car $0<\alpha<1$), on en conclut que $|x_{t+p}-x_t|$ peut être rendu aussi petit que l'on veut pourvu que t soit suffisamment grand.Ceci prouve que la suite (x_t) est une suite de Cauchy.Donc La suite (x_t) converge donc vers $\overline{x}\in\mathbb{R}$, $\forall x_0\in\mathbb{R}$

Montrons que $\overline{x}$ est un point fixe de f :

On a par définition $\forall t\in\mathbb{N}\ \ x_{t+1}=f(x_t)$ Comme f est une application contractante elle est continue donc par passage à la limite $(t\to\infty)$on obtient $\overline{x}=f(\overline{x})$

Montrons maintenant que ce point fixe est unique. Supposons donc qu'il existe deux points fixes $\overline{x_1},\overline{x_2}\in\mathbb{R}$ de (1.4). On peut alors écrire :

$$|\overline{x_1}-\overline{x_2}|=|f(\overline{x_1})-f(\overline{x_2})|\leq\alpha|\overline{x_1}-\overline{x_2}|\prec|\overline{x_1}-\overline{x_2}|$$

ce qui est impossible. En conséquence, le point fixe est nécessairement unique.

La condition $|f'(x)|\leq k\prec 1$, $\forall x\in\mathbb{R}$ implique que f est contractante.

Soient x,$y\in\mathbb{R}$, d'après le théorème des accroissements finis, on peut écrire : $f(x)-f(y)=f'(c)(x-y)$ ou $c\in\,]x,y[$ et par suite :

$$|f(x)-f(y)|=|f'(c)||x-y|\prec k|x-y|$$

ce qui prouve que f est contractante. ■

Chapitre 2

Systèmes dynamiques discrets de dimension n

2.1 Systèmes dynamiques discrets linéaires

Définition 2.1.1 *Un système dynamique discret linéaire de dimension n est un systèmes de n équation aux différences linéaires d'ordre 1 i.e :*

$x_{1t+1} = a_{11}x_{1t} + a_{12}x_{2t} + \cdots + a_{1n}x_{nt} + b_1$

$x_{2t+1} = a_{21}x_{1t} + a_{22}x_{2t} + \cdots + a_{2n}x_{nt} + b_2$

$\vdots$

$x_{nt+1} = a_{n1}x_{1t} + a_{n2}x_{2t} + \cdots + a_{nn}x_{nt} + b_2$

Où $t \in \mathbb{N}$ et $X_0 = (x_{10}, x_{20}, \cdots, x_{n0})$ sont donnés.

L'écriture matricielle d'un système dynamique discret linéaire de dimension n est :

$$\begin{cases} X_{t+1} = AX_t + B \\ X_0 \qquad \textit{donné} \end{cases}, \; t \in \mathbb{N} \tag{2.1}$$

Où

- $A \in M_n(\mathbb{R})$:*matrice de constantes réelles de taille* $n \times n$.
- $B \in \mathbb{R}^n$:*vecteur de constantes.*
- $X_t \in \mathbb{R}^n$:*vecteur des états du système.*
- $X_0 \in \mathbb{R}^n$:*vecteur initial.*
- $x_{it} \in \mathbb{R}$:*variable d'état.*

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}, \quad X_t = \begin{pmatrix} x_{1t} \\ x_{2t} \\ \vdots \\ x_{nt} \end{pmatrix}, \quad X_0 = \begin{pmatrix} x_{10} \\ x_{20} \\ \vdots \\ x_{n0} \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

A partir d'un point X_0, le système (2.1) donne :

pour $t = 1$: $X_1 = AX_0 + B$.

pour $t = 2$: $X_2 = AX_1 + B = A(AX_0 + B) + B = A^2X_0 + AB + B$.

pour $t = 3$: $X_3 = AX_2 + B = A(A^2X_0 + AB + B) + B = A^3X_0 + A^2B + AB + B$.

$\vdots$

En general $X_t = A^tX_0 + A^{t-1}B + A^{t-2}B + \cdots + AB + B$.

$= A^tX_0 + \sum_{i=0}^{i=t-1} A^iB$, $\forall t \in \mathbb{N}^*$.

Lemme 2.1.1 *Si* $\det(I - A) \neq 0$ *alors,* $\sum_{i=0}^{i=t-1} A^i = (I - A^t)(I - A)^{-1}$.

Preuve. *On a :*

$$\sum_{i=0}^{i=t-1} A^i (I - A) = I + A + A^2 + \cdots + A^{t-1} - (A + A^2 + \cdots + A^t) = I - A^t.$$

Alors :

$$\sum_{i=0}^{i=t-1} A^i = \left(I - A^t\right)(I - A)^{-1}.$$

■

Selon le lemme précédent, on peut écrire la solution de (2.1) comme suit :

$$X_t = A^t(X_0 - (I - A)^{-1}B) + (I - A)^{-1}B, \text{ si } \det(I - A) \neq 0.$$

2.1.1 Point fixe

Définition 2.1.2 *Un point fixe d'un système dynamique* $X_{t+1} = f(X_t)$ *est* $\overline{X} \in \mathbb{R}^n$ *tel que* $\overline{X} = f(\overline{X})$ *où* $\overline{X} = (\overline{x_1}, \overline{x_2}, \cdots, \overline{x_n})^t$.

Existence du point fixe

On suppose que le systeme (2.1) est a l'état equilibre c-à-d :$\overline{X} = A\overline{X} + B$. Alors :

$$\overline{X} = (I - A)^{-1}B, \text{ si } \det(I - A) \neq 0.$$

Donc l'unique point fixe de (2.1) si $\det(I - A) \neq 0$ est :

$$\overline{X} = (I - A)^{-1}B$$

Si $\det(I - A) = 0$, il ya un nombre infini de points fixes.

La solution de (2.1) peut être écrite en termes de son point fixe $\overline{X}$ el la valeur initiale X_0 comme suit :

$$X_t = A^t(X_0 - \overline{X}) + \overline{X}.$$

si $\det(I - A) \neq 0$ où $\overline{X} = (I - A)^{-1}B$.

Proposition 2.1.1 *Le point fixe de systeme* (2.1) *est unique si et seulement si* $\det(I - A) \neq 0$.

2.1.2 Stabilité du point fixe

Maintenant dans tout ce que suit nous ne considérons que $\det(I - A) \neq 0$.

Définition 2.1.3 *On dit que le point fixe* $\overline{X}$ *d'un système dynamique* $X_{t+1} = f(X_t)$ *où* f

est une fonction de $\mathbb{R}^n$ vers $\mathbb{R}^n$ est stable si :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 \ tq \ si \ ||X_0 - \overline{X}|| < \delta \Rightarrow ||f^t(X_0) - \overline{X}|| \prec \varepsilon, \ \forall t \in \mathbb{N}^*.$$

(Dans le cas où $f(X_t) = AX_t + B$ on parle d'un système dynamique linéaire).

Définition 2.1.4 *Le point fixe $\overline{X}$ est localement asymptotiquement stable s'il est stable et si : $\exists V$ voisinage de $\overline{X}$ tq $\forall X_0 \in V \ \lim\limits_{t\to\infty} X_t = \overline{X}$.*

Définition 2.1.5 *Le point fixe $\overline{X}$ est globalement asymptotiquement stable s'il est stable et si :$\lim\limits_{t\to\infty} X_t = \overline{X}$, $\forall X_0 \in \mathbb{R}^n$.*

L'étude de la stabilité du point fixe $\overline{X}$ de (2.1) n'est pas facile parce que nous avons une difficulté à la formule de solution de ce systeme dynamique, qui est dans la formule de la matrice A^t. Pour cela nous allons utiliser la décomopsition de Jordan

Théorème 2.1.1 *Pour toute matrice A de taille $n \times n$ il existe une matrice P de taille $n \times n$ non singuliére tel que $A = PJP^{-1}$ où J est une matrice diagonale par bloc c-à-d :*

$$J = \begin{pmatrix} J_{\lambda_1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & J_{\lambda_2} & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & J_{\lambda_d} \end{pmatrix}$$

La matrice J est appelée forme normale de Jordan et

$$J_{\lambda_k} = \begin{pmatrix} \lambda_k & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_k & 1 & \cdots & 0 \\ & & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & & \lambda_k & 1 \\ 0 & & \cdots & 0 & \lambda_k \end{pmatrix}$$

s'appelle bloc de Jordan associé à la valeur propre λ_k de A.

Remarque 2.1.1

•Les valeurs propres $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_d$ ne sont pas nécessairement distinctes.

•Chaque bloc J_{λ_k} $k = 1, \cdots, d$ $(d \leq n)$ est de taille $m_k \times m_k$ $(m_k \succeq 1)$, avec $\sum_{k=1}^{d} m_k = n$.

•La taille d'un bloc de Jordan J_{λ_k} peut être égale a 1.

Étude de la stabilité a l'aide de forme normale de Jordan

D'aprés le théorème (2.1.1) on a :

$X_t = A^t(X_0 - \overline{X}) + \overline{X} = PJ^tP^{-1}\left(X_0 - \overline{X}\right) + \overline{X}$

Proposition 2.1.2 *La solution de* (2.1) *est donné par :*

$$X_t = PJ^tP^{-1}\left(X_0 - \overline{X}\right) + \overline{X}$$

où J est la matrice de Jordan.

Il n'est pas difficile de trouver une formule pour la matrice J^t. On a :

$$J^t = \begin{pmatrix} J_{\lambda_1}^t & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & J_{\lambda_2}^t & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & J_{\lambda_d}^t \end{pmatrix}$$

Il reste de trouver la formule de chaque bloc.

- Si chaque bloc J_{λ_k} est de taille 1×1 $\forall k = 1, \cdots, d$ (dans ce cas $d = n$) on di que A est diagonalisable et ona :

$$J^t = \begin{pmatrix} \lambda_1^t & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2^t & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_n^t \end{pmatrix}$$

Le système dynamique (2.1) est globalement asymptotiquement stable si : $\lim\limits_{t\to\infty} X_t = \overline{X}$, $\forall X_0 \in \mathbb{R}^n$.

$\forall X_0 \in \mathbb{R}^n$, on a : $\lim\limits_{t\to\infty} X_t = \overline{X} \Longleftrightarrow \lim\limits_{t\to\infty} PJ^tP^{-1}\left(X_0 - \overline{X}\right) + \overline{X} = \overline{X} \Longleftrightarrow \lim\limits_{t\to\infty} J^t = 0.$

Dans ce cas

$$\lim_{t\to\infty} J^t = 0 \Longleftrightarrow |\lambda_k| < 1,\ \forall k = 1, \cdots, n.$$

- S'il existe un bloc J_{λ_k} de taille $m_k \times m_k$ $(m_k \succeq 2)$ alors $J_{\lambda_k} = \lambda_k I_{d_k} + N_k$

  où

  I_{m_k} : La matrice identitie de taille $m_k \times m_k$.

  N_k : Une matrice de taille $m_k \times m_k$ tq :

$$N_k = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & 0 \\ & \mathbf{0} & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 1 \\ 0 & & & \mathbf{0} \end{pmatrix},\ N_k^{m_k-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 1 \\ \vdots & \ddots & & 0 \\ & & & \vdots \\ 0 & & \cdots & \mathbf{0} \end{pmatrix} \text{ et } N_k^t = 0, \forall t \geq m_k.$$

  Pour $t \geq m_k$, on a :

$$J_{\lambda_k}^t = (\lambda_k I_{m_k} + N_k)^t = \sum_{i=0}^{m_k-1} C_t^i \lambda_k^{t-i} N_k^i$$

Pour que le systéme dynamique (2.1) est globalement asymtotiquement stable il faut et il suffit que : $\lim\limits_{t\to\infty} J^t = 0$. Dans ce cas :

$$\lim_{t\to\infty} J^t = 0 \Longleftrightarrow \lim_{t\to\infty} J_{\lambda_k}^t = 0, \forall k = 1, \cdots, d \ \ (d \leq n) \Longleftrightarrow |\lambda_k| < 1, \forall k = 1, \cdots, d.$$

Corollaire 2.1.1

- *Le systeme dynamique* (2.1) *est globalement asymptotiquement stable si et seulement si le module de chaque valeur propre de la matrice A est inférieur à* 1*.*
- *Le systeme dynamique* (2.1) *est instable si et seulement s'il existe un valeur propre de la matrice A est de module supérieur à* 1*.*

2.2 Systèmes dynamiques discrets non linéaires

Définition 2.2.1 *Un système dynamique discret non linéaire de dimension n est un systèmes de n équations aux différences non linéaires d'ordre* 1 *i.e :*

$x_{1t+1=}f_1\left(x_{1t}, x_{2t}, \cdots, x_{nt}\right)$

$x_{2t+1=}f_2\left(x_{1t}, x_{2t}, \cdots, x_{nt}\right)$

$\vdots$

$x_{nt+1=}f_n\left(x_{1t}, x_{2t}, \cdots, x_{nt}\right)$

où $t \in \mathbb{N}$ et $X_0 = (x_{10}, x_{20}, \cdots, x_{n0})$ sont donnés.

Ce système dynamique est écrit comme suit.

$$\begin{cases} X_{t+1} = f\left(X_t\right) \\ X_0 \qquad \text{donné} \end{cases} t \in \mathbb{N}. \tag{2.2}$$

où :

- $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ une fonction différentiable.
- $f\left(X_t\right) = \left(f_1\left(X_t\right), f_2\left(X_t\right), \cdots, f_n\left(X_t\right)\right)$.
- $f_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}\ \forall i = 1, \cdots, n$ une fonction différentiable.
- $X_t \in \mathbb{R}^n$: vecteur des états du système.
- $X_0 \in \mathbb{R}^n$: valeur initial.

2.2.1 Stabilité du point fixe

Stabilité locale

Comme nous l'avons vu dans le cas d'un système dynamique de dimension 1, le système dynamique (2.2) peut être aussi approximé par un système linéaire.

On suppose que le systéme dynamique (2.2) a un point fixe $\overline{X}$ alors le développement de Taylor d'ordre 1 de $f_i(X_t) = x_{it+1}$ au voisinage $\overline{X}$ est :

$$\begin{aligned} x_{it+1} = f_i(X_t) &= f_i(\overline{X}) + \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial f_i(\overline{X})}{\partial x_{kt}}(x_{kt} - \overline{x_k}) + o(||X_t - \overline{X}\ ||) \\ &= \frac{\partial f_i(\overline{X})}{\partial x_{1t}} x_{1t} + \frac{\partial f_i(\overline{X})}{\partial x_{2t}} x_{2t} + \cdots + \frac{\partial f_i(\overline{X})}{\partial x_{nt}} x_{nt} + f_i(\overline{X}) - \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial f_i(\overline{X})}{\partial x_{kt}} \overline{x_k} + o(||X_t - \overline{X}\ ||) \end{aligned}$$

Où : $o(||X_t - \overline{X}\ ||) \underset{X_t \to \overline{X}}{\longrightarrow} 0$

Donc le développement de Taylor d'ordre 1 de $f(X_t) = X_{t+1}$ au voisinage $\overline{X}$ est :

$$\begin{pmatrix} x_{1t+1} \\ x_{2t+1} \\ \vdots \\ x_{nt+1} \end{pmatrix} \simeq \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1(\overline{X})}{\partial x_{1t}} & \frac{\partial f_1(\overline{X})}{\partial x_{2t}} & \cdots & \frac{\partial f_1(\overline{X})}{\partial x_{nt}} \\ \frac{\partial f_2(\overline{X})}{\partial x_{1t}} & \frac{\partial f_2(\overline{X})}{\partial x_{2t}} & \cdots & \frac{\partial f_2(\overline{X})}{\partial x_{nt}} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n(\overline{X})}{\partial x_{1t}} & \frac{\partial f_n(\overline{X})}{\partial x_{2t}} & \cdots & \frac{\partial f_n(\overline{X})}{\partial x_{nt}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{1t} \\ x_{2t} \\ \vdots \\ x_{nt} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} f_1(\overline{X}) - \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial f_1(\overline{X})}{\partial x_{kt}} \\ f_2(\overline{X}) - \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial f_2(\overline{X})}{\partial x_{kt}} \\ \vdots \\ f_n(\overline{X}) - \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial f_n(\overline{X})}{\partial x_{kt}} \end{pmatrix}$$

Le système non linéaire est approximée au voisinage du point fixe $\overline{X}$ par un système linéaire $X_{t+1} \simeq AX_t + B$. Où :

$$A = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1(\overline{X})}{\partial x_{1t}} & \frac{\partial f_1(\overline{X})}{\partial x_{2t}} & \cdots & \frac{\partial f_1(\overline{X})}{\partial x_{nt}} \\ \frac{\partial f_2(\overline{X})}{\partial x_{1t}} & \frac{\partial f_2(\overline{X})}{\partial x_{2t}} & \cdots & \frac{\partial f_2(\overline{X})}{\partial x_{nt}} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n(\overline{X})}{\partial x_{1t}} & \frac{\partial f_n(\overline{X})}{\partial x_{2t}} & \cdots & \frac{\partial f_n(\overline{X})}{\partial x_{nt}} \end{pmatrix} \text{ et } B = \begin{pmatrix} f_1(\overline{X}) - \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial f_1(\overline{X})}{\partial x_{kt}} \\ f_2(\overline{X}) - \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial f_2(\overline{X})}{\partial x_{kt}} \\ \vdots \\ f_n(\overline{X}) - \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial f_n(\overline{X})}{\partial x_{kt}} \end{pmatrix}$$

La matrice A s'appelle la matrice jacobienne de f au point $\overline{X}$ et on la note par $J(\overline{X})$.

Nous pouvons donc utiliser les résultats du système linéaire pour étudier la stabilité du système non linéaire au voisinage du point fixe $\overline{X}$. Ceci est basé sur les valeurs propres du Jacobien $J(\overline{X})$ de l'application f.

Théorème 2.2.1 *Soit le système* (2.2)*, on suppose que ce système a un point fixe* $\overline{X}$ *et soit* $\lambda_1, \cdots, \lambda_p$ $(p \leq n)$ *les valeurs propres de* $J(\overline{X})$ *la matrice jacobienne de* f *au point* $\overline{X}$*. Alors :*

1) *Si* $|\lambda_i| < 1$ $\forall i = 1, \cdots, p$*, alors* $\overline{X}$ *est localement asymptotiquement stable.*

2) *S'il existe une valeur propre* λ_i*,* $i = 1, \cdots, p$ *tel que* $|\lambda_i| > 1$*, alors* $\overline{X}$ *est instable.*

3) *Si* $\max\limits_{1 \leq i \leq p} |\lambda_i| = 1$ *nous ne pouvons rien conclure.*

Théorème 2.2.2 *Le point fixe de* (2.2) *existe et est unique et globalement asymptotiquement stable si* $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ *est contractante.*

2.2.2 Méthode de Liapunov

Soit le système dynamique (2.2) où $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ une fonction continue. On suppose que $\overline{X}$ est un point fixe de ce système dynamique.

Soit $V : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. La variation de$V$ par rapport à le système dynamique (2.2) est définie par :

$$\Delta V(X_t) = V(f(X_t)) - V(X_t) = V\left(X_{t+1}\right) - V\left(X_t\right).$$

Définition 2.2.2 *Soit* G *un ouvert de* $\mathbb{R}^n$*, une fonction* V *de* G *vers* $\mathbb{R}$ *est une fonction de Liapunov sur l'ensemble* G *si :*

1) V *est continue sur* G*.*

2) $\Delta V(X_t) \leq 0$*,* $\forall X_t, X_{t+1} \in G$*.*

Définition 2.2.3 *La fonction de Lyapunov* V *est dite définie positive au point fixe* $\overline{X}$ *s'il existe une boule ouverte* $B_\varepsilon(\overline{X})$ *de centre* $\overline{X}$ *et de rayon* ε $\left(B_\varepsilon(\overline{X}) = \left\{Y \in \mathbb{R}^n, \left\|\overline{X} - Y\right\| < \varepsilon\right\}\right)$ *telle que :*

1)$V(\overline{X}) = 0$*.*

2)$V(X_t) > 0$ *pour tout* $X_t \in B_\varepsilon(\overline{X}), X_t \neq \overline{X}$*.*

Théorème 2.2.3 *S'il existe V une fonction de Lyapunov sur un boule ouverte $B_r(\overline{X})$ définie positive au $\overline{X}$ où $\overline{X}$ est le point fixe de (2.2) alors $\overline{X}$ est stable.*

Si en plus, $\Delta V(X_t) < 0, \forall X_t, X_{t+1} \in G$, $X_t \neq \overline{X}$ alors $\overline{X}$ est localement asymptotiquement stable.

Si cela est vrai quand $B_r(\overline{X})$ est étendu à tout $\mathbb{R}^n$ et $\underset{||X_t|| \to \infty}{V(X_t)} \to \infty$ alors $\overline{X}$ est globalement asymptotiquement stable.

Preuve. Pour la démonstration de ce théorème voir Elaydi Saber[2] ■

Exemple 2.2.1 *Soit le système dynamique*

$$\begin{cases} x_{1t+1} = & \dfrac{x_{2t}}{1+x_{2t}^2} \\ x_{2t+1} = & \dfrac{x_{1t}}{1+x_{2t}^2} \end{cases}$$

On a :

$$\begin{array}{l} \overline{x_1} = \dfrac{\overline{x_2}}{1+\overline{x_2}^2} \\ \overline{x_2} = \dfrac{\overline{x_1}}{1+\overline{x_2}^2} \end{array} \Longleftrightarrow (\overline{x_1}, \overline{x_2}) = (0,0)\,.$$

Donc le point fixe de ce système est $\overline{X} = (\overline{x_1}, \overline{x_2}) = (0,0)$.

On définit la fonction

$$V\,(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2.$$

On a la fonction V est continue sur $\mathbb{R}^2$ et

$V(X_{t+1}) = \dfrac{x_{2t}^2}{(1+x_{2t}^2)^2} + \dfrac{x_{1t}^2}{(1+x_{2t}^2)^2} = \dfrac{V(X_t)}{(1+x_{2t}^2)^2} \leq V(X_t),\ \forall X_t, X_{t+1} \in \mathbb{R}^2.$

Donc V est une fonction de Liapunov.

On a aussi $V(\overline{X}) = 0$ et $V(X_t) > 0\,;\ \forall X_t \in \mathbb{R}^2, X_t \neq \overline{X}$.

Alors V est définie positive, en déduit de le théorème (2.2.3) que le point fixe $\overline{X} = (0,0)$ est asymptotiquement stable.

Conclusion

Le but de la théorie des systèmes dynamiques est de modéliser des processus qui évoluent dans le temps et d'étudier leur comportement.

L'étude de l'évolution d'un système nécessite donc la connaissance :

• de son état initial, c'est-à-dire son état à l'instant t_0

• de sa loi d'évolution.

Un système dynamique peut être :

• à temps continu : dans ce cas le système est modélisé par une équation différentielle

• à temps discret : (Qui est le sujet de notre étude dans cette mémoire) le système est modélisé par équation aux différance

Il peut également être :

• autonome, si sa loi d'évolution ne dépend pas du temps.

• non autonome ; sa loi d'évolution dépend alors du temps.

Pour un système dynamique discret autonome de dimension 1 la stabilité dépend de paramètre a dans le cas linéaire et de la valeur de dérivés de f dans le cas non linéaire. Pour un système multidimensionnel la stabilité dépend de la valeur propre de la matrice A dans le cas linéaire et de la valeur propre de la matrice jacobienne de f dans le cas non linéaire et nous avons également utilisé la théorie de Lyapunov pour étudier la stabilité.

Bibliographie

[1] Anna, D. (2003). Introduction à la théorie des systèmes dynamiques à temps discret.

[2] Elaydi, S. (2005). An Introduction to Difference Equations. Third edition. Springer.

[3] Emmanuel, D. Systèmes dynamiques pour les sciences cognitives.

[4] Frédéric, F. (2018). Cours de Systèmes dynamiques, chaos et applications.

[5] John, S. (2009). Economic dynamics : theory and computation. The MIT Press Cambridge, Massachusetts London, England.

[6] Jonathan, L.H. (2015). Applications of Stability Analysis to Nonlinear Discrete Dynamical Systems Modeling Interactions. Virginia Commonwealth University.

[7] Oded, G. (2007). Discrete Dynamical Systems. Springer.

[8] Saidi, M. (2012). Etude dynamique d'une application discrète du plan. UNIVERSITE DE M'SILA.

[9] Wei-Bin Zhang. (2006). Discrete Dynamical Systems, Bifurcations and Chaos in Economics. First edition. ELSEVIER.

Annexe A : Abréviations et Notations

Les différentes abréVariations et notations utilisées tout au long de ce mémoire sont expliquées ci-dessous.

$f^t\,(x_0)$	$t^{ième}$ itération de X_0 par la fonction f.
$V_\varepsilon(\overline{x})$	voisinage de $\overline{x}$.
$M_n(\mathbb{R})$	ensemble des matrices carrées à coefficients dans $\mathbb{R}$.
$\|\| \cdot \|\|$	norme dans $\mathbb{R}^n$.
$B_\varepsilon(\overline{X})$	une boule ouverte de centre $\overline{X}$ et de rayon ε
$J(\overline{X})$	matrice jacobienne au point $\overline{X}$.
$\Delta V(X_t)$	variation de la foncion V.