

République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

UNIVERSITÉ MOHAMED KHIDER, BISKRA

FACULTÉ des SCIENCES EXACTES et des SCIENCES de la NATURE et de la VIE

DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES



Mémoire présenté en vue de l'obtention du Diplôme :

MASTER en Mathématiques

Option : **Analyse**

Par

ACHOUR Imane

Titre :

Application Des Polynômes D'Adomian

Membres du Comité d'Examen :

Dr. BELLAGOUNE Abdelghani	UMKB	Encadreur
Dr. BERBICHE Mohamed	UMKB	Président
Dr. GHODJMIS Fatiha	UMKB	Examineur

Juin 2019

DÉDICACE

Je dédie ce mémoire à :

ma mère et à mon père.

mon frère Ahmed et ma sœur Salma

ma grande famille et mes amies Sara, Karima, Nadia, Maria, Fatima.

tous mes collègues de la promotion "2018-2019".

tous ceux qui sont proches à mon cœur.

ACHOUR Imane

REMERCIEMENTS

J'aimerais en premier lieu remercier mon dieu Allah qui m'a donné la volonté et le courage pour la réalisation de ce travail.

Je tiens à remercier tout d'abord mon encadreur **M.BELLAGOUN ABDELGHANI** pour m'avoir proposé le thème de ce mémoire et m'avoir dirigé tout le long de mon travail, ses critiques et les conseils m'ont été précieux..

Je voudrais également remercier les membres du jury d'avoir accepté d'évaluer ce travail et pour toutes leurs remarques et critiques, ainsi que le personnel administratif et les enseignants du département de mathématiques de l'université **MOHAMED KHIDER, BISKRA** et tous mes compagnons de promotion.

Et enfin j'adresse mes sincères remerciements à mes parents, mon frère et ma soeur, mes amis et à tous qui sont contribué de près ou de loin à l'élaboration de ce travail.

Table des matières

Dédicace	i
Remerciements	ii
Table des matières	iii
Liste des figures	v
Introduction	1
1 Les opérateurs	3
1.1 Opérateurs	3
1.1.1 Espace vectoriel normé	3
1.1.2 Opérateurs linéaires	4
1.1.3 Espace de Banach	5
1.1.4 Opérateurs et Espaces de Banach	5
1.1.5 Théorème des applications ouvertes	6
1.1.6 Opérateurs contractants	6
1.1.7 Opérateurs différentiels	6
1.1.8 Opérateurs intégrales	7
1.1.9 Opérateurs compacts	8
1.1.10 Opérateurs inversibles	9
1.2 Concepts de base de la théorie décompositionnelle	9
1.2.1 Série décompositionnelle	9

1.2.2	Schéma décompositionnelle	10
1.2.3	Méthode décompositionnelle	10
2	Théorie de décomposition d'Adomian	11
2.1	Description de l'ADM	12
2.2	Les polynômes d'Adomian	18
2.2.1	Tableau de référence des polynômes d'Adomian	18
2.3	Convergence de la méthode	23
3	Applications	28
3.1	Résolution des équations différentielles fractionnaires par ADM	28
3.1.1	vérification de la solution	35
3.2	Résolution de certaines équations de Bilan de Populations par ADM	35
3.2.1	les équations de Bilan de Populations (EBPs)	35
3.2.2	application	37
	Conclusion	50
	Bibliographie	51
	Annexe A : Les Fonctions mathématiques	53
	Annexe B : Logiciel MATLAB	56
	Annexe C : Abréviations et Notations	61

Table des figures

2.1	George Adomian (1923-1996)	12
2.2	la solution exacte et les solutions tronquées pour $n = 1, n = 2, \dots, n = 5$. . .	17
2.3	Yves Cherruault	23
3.1	Les différentes solutions tronquées pour $n = 0, n = 1, n = 2, \dots, n = 10$. . .	31
3.2	La solution tronquée en $n = 2$	40
3.3	La solution tronquée en $n = 3$	41
3.4	L'erreur $ S_3 - S_2 $	41
3.5	La solution tronquée en $n = 20$	42
3.6	La solution tronquée en $n = 30$	42
3.7	La solution tronquée en $n = 50$	43
3.8	L'erreur $ n(v, t) - S_{50} $	43
3.9	La solution tronquée en $n = 70$	44
3.10	La solution analytique	44
3.11	La solution tronquée en $n = 1$	46
3.12	La solution tronquée en $n = 2$	47

Introduction

La plupart des phénomènes dans notre monde sont essentiellement non linéaires et sont décrits par des équations non linéaires. Il est bien connu que les équations ordinaires non linéaire (EDO) et les équation aux dérivées partielles (EDP) et les équations intégral-différentielles (EID) avec conditions aux limites (aux bords) sont beaucoup plus difficiles à résoudre que les EDO, les EDP et EID linéaires, comme il est difficile d'obtenir des solutions exactes des problèmes non linéaires. Donc, nous essayons de trouver des solutions approximatives.

Dans ce mémoire, on va introduire une méthode analytique pour les problèmes des équations fonctionnelles, à savoir la méthode décompositionnelle d'Adomian (Adomian decomposition method) (ADM), **George Adomian** a proposé une méthode d'approximation analytique en **1981** cette méthode est appelée la méthode décompositionnelle d'Adomian

Elle est basée sur la décomposition de la fonction inconnue en une somme infinie de fonctions définies par relation récurrente. Le terme non linéaire est écrit sous forme d'une somme infinie de polynômes spéciaux appelés polynômes d'Adomian. si la série converge et le calcul de la somme est possible, la méthode conduit à une expression analytique de la solution.

Ce mémoire se décompose de trois chapitres partagés de la manière suivante :

Premier chapitre : Ce chapitre est consacré aux notions, définitions des opérateurs et quelques concepts de base d'une théorie décompositionnelle.

Deuxième chapitre : Ce chapitre commence par une description de la méthode décompositionnelle d'Adomian, avec quelques formules pour les polynômes d'Adomian, on termine par l'étude de convergence pour cette méthode.

Dans le dernier chapitre, on applique cette méthode à deux types des équations, équations différentielles fractionnaires et certaines équations de Bilan de Populations.

une bibliographie est apportée à la fin de ce mémoire.

Chapitre 1

Les opérateurs

Dans ce chapitre, on s'intéresse aux opérateurs linéaires et non linéaires dans les espaces de Banach, parmi ces opérateurs, les opérateurs intégraux, opérateurs différentiels, opérateurs contractants, opérateurs inversibles, puis les opérateurs compacts [1] [2] [3] [4].

1.1 Opérateurs

1.1.1 Espace vectoriel normé

Définition 1.1 Soit E un \mathbb{k} -espace vectoriel (e.v), une norme est une application

$\|\cdot\| : E \longrightarrow \mathbb{R}^+$ vérifiant les propriétés suivantes :

1. $\|v\| = 0 \iff v = 0$.
2. $\forall \lambda \in \mathbb{k}, \forall v \in E, \|\lambda v\| = |\lambda| \|v\|$.(Homogénéité)
3. $\forall u, v \in E, \|u + v\| \leq \|u\| + \|v\|$.(inégalité triangulaire)

L'espace E muni de la norme $\|\cdot\|$ appelé espace vectoriel normé (e.v.n) (où tout simplement espace normé), on le note par $(E, \|\cdot\|)$.

Exemple 1.1 Soit $C([a, b], \mathbb{R})$, l'espace vectoriel des fonctions continues sur $[a, b]$ à valeurs réelles. pour tout $f \in C([a, b], \mathbb{R})$, on pose

$$\|f\|_1 = \int_a^b f(x)dx \quad \text{et} \quad \|f\|_\infty = \sup_{x \in [a, b]} |f(x)|.$$

les applications $\|\cdot\|_1$ et $\|\cdot\|_\infty$ sont des normes sur $C([a, b], \mathbb{R})$.

1.1.2 Opérateurs linéaires

Définition 1.2 Soient V et W deux \mathbb{k} -e.v, un opérateur $L : V \longrightarrow W$ est dit linéaire si

$$\forall \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{k}, \forall u, v \in V, \quad L(\lambda_1 u + \lambda_2 v) = \lambda_1 L(u) + \lambda_2 L(v).$$

Pour un opérateur linéaire L , on écrit généralement $L(u)$ comme Lu .

Proposition 1.1 Soient V et W deux e.v.n, $L : V \longrightarrow W$ un opérateur linéaire. alors L est borné si et seulement s'il existe une constante $\lambda \geq 0$ telle que :

$$\|Lu\|_W \leq \lambda \|u\|_V \quad \forall u \in V \quad (1.1)$$

Preuve. évidemment (1.1) implique la bornitude. inversement, supposant que L est borné, alors

$$\lambda \equiv \sup_{u \in B} \|Lu\|_W < +\infty$$

où $B = \{u \in V, \|u\|_V \leq 1\}$ est la boule unité de centre 0. maintenant pour $u \neq 0$,

$\frac{u}{\|u\|_V} \in B$ et par la linéarité de L ,

$$\|Lu\|_W = \|u\|_V \left\| L \left(\frac{u}{\|u\|_V} \right) \right\|_W \leq \lambda \|u\|_V$$

■

Théorème 1.1 Soient V et W deux e.v.n, $L : V \longrightarrow W$ un opérateur linéaire. alors L est continu sur V s'il et seulement si est borné sur V .

Proposition 1.2 Si l'opérateur $L : V \longrightarrow W$ est linéaire et continu, on a

$$C = \sup_{\substack{v \neq 0 \\ v \in V}} \frac{\|Lv\|_W}{\|v\|_V} = \sup_{\|v\|_V \leq 1} \|Lv\|_W = \sup_{\|v\|_V = 1} \|Lv\|_W < +\infty$$

et

$$C = \inf \{ \alpha \geq 0, \|Lv\|_W \leq \alpha \|v\|_V, \forall v \in V \}$$

le nombre C appelé la norme de l'opérateur L

1.1.3 Espace de Banach

Définition 1.3 Soit V un e.v.n, une suite $\{v_n\} \subseteq V$ est appelé suite de Cauchy si :

$$\lim_{m,n \rightarrow +\infty} \|v_m - v_n\| = 0$$

évidement, toute suite convergente est une suite de Cauchy.

Définition 1.4 Un e.v.n dit complet si tout suite de Cauchy de E converge vers un élément dans E , un espace normé complet est appelé espace de Banach.

Exemple 1.2 Soit V un e.v.n, et W un espace de Banach. alors $\mathcal{L}(V, W)$ est un espace de Banach

1.1.4 Opérateurs et Espaces de Banach

Soient V et W deux espaces de Banach.

Définition 1.5 Soit $D(A)$ un s.e.v de V . l'ensemble $\{(x, Ax); x \in D\} \subset V \times W$ est appelé graphe de l'opérateur A . il sera noté $Gr(A)$.

Proposition 1.3 1- Si $D(A) = V$, on vérifie que $Gr(A)$ est un s.e.v de $V \times W$.

2- Si l'opérateur A est continu, alors le s.e.v $Gr(A)$ est fermé.

Théorème 1.2 (Théorème de graphe fermé) Si le graphe d'un opérateur linéaire $A : V \longrightarrow W$ est fermé dans $V \times W$ alors l'opérateur A est continu.

1.1.5 Théorème des applications ouvertes

Théorème 1.3 Soient E et F deux espaces de Banach. tout opérateur linéaire, continu et surjectif de E dans F est ouvert.

1.1.6 Opérateurs contractants

Soit K un sous-ensemble de V

Pour un opérateur $T : K \subseteq V \longrightarrow V$, on dit qu'il est λ -contractant avec $\lambda \in]0, 1[$ si :

$$\forall \varphi, \psi \in K \quad \|T(\varphi) - T(\psi)\| \leq \lambda \|\varphi - \psi\|$$

1.1.7 Opérateurs différentiels

Soit V un ouvert de \mathbb{R}^n .

Un opérateur différentiel sur V est une combinaison linéaire finie de dérivatives d'ordre arbitraires à coefficients dans $C^\infty(V)$. il est dit d'ordre m si les dérivations d'ordre supérieur n'y apparaissent pas, en d'autre terme un opérateur différentiel d'ordre m sur V s'il est de la forme :

$$L = \sum_{|\beta| \leq m} a_\beta(u) D^\beta$$

où $a_\beta \in C^\infty(V)$ sont les coefficients de L

et

$$D^\beta = D_1^{\beta_1} D_2^{\beta_2} \dots D_n^{\beta_n}$$

$$D_j = -i \frac{\partial}{\partial x_j}$$

$\beta = (\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n) \in \mathbb{N}^n$ un multi-indice et $|\beta| = \beta_1 + \beta_2 + \dots + \beta_n$ son module.

Exemple 1.3 les espaces $C[0, 1]$ et $C^1[0, 1]$ sont associés à leurs normes standards

$$\|v\|_{C[0,1]} = \max_{0 \leq x \leq 1} |v(x)|$$

et

$$\|v\|_{C^1[0,1]} = \|v\|_{C[0,1]} + \|v'\|_{C[0,1]} \quad (1.2)$$

l'opérateur

$$L_1 = \frac{d}{dx} : C^1[0, 1] \subseteq C[0, 1] \longrightarrow C[0, 1]$$

est un opérateur différentiel n'est pas continu en utilisant la norme infinie de $C[0, 1]$, tandis que l'opérateur différentiel

$$L_2 = \frac{d}{dx} : C^1[0, 1] \longrightarrow C[0, 1]$$

est continu en utilisant la norme de (1.2).

1.1.8 Opérateurs intégrales

Un opérateur intégral linéaire A est un opérateur qui s'écrit sous la forme suivante :

$$(A\phi)u = \int_a^b k(u, v)\phi(v)dv$$

la fonction k s'appelle noyau de l'opérateur A .

Exemple 1.4 Soient $V = W = C[a, b]$ avec la norme infinie $\|\cdot\|_\infty$ et $k \in C([a, b]^2)$

et défini $A : C[a, b] \longrightarrow C[a, b]$ par

$$(A\phi)u = \int_a^b k(u, v)\phi(v)dv \quad (1.3)$$

l'opérateur A en (1.3) est un exemple d'opérateur intégral linéaire

Sur l'hypothèse de continuité sur $k(., .)$, l'opérateur intégral A est continu. de plus,

$$\|A\| = \max_{a \leq u \leq b} \int_a^b k(u, v)dv$$

c'est la norme de cet opérateur.

1.1.9 Opérateurs compacts

Définition 1.6 Soient E et F deux espaces de Banach. Un opérateur linéaire A de E dans F est dit compact si et seulement si $A(B_E)$ est relativement compact, ou encore A est compact si et seulement si pour tout partie bornée M de E , $A(M)$ est relativement compact

Définition 1.7 Soient E et F deux e.v.n, l'opérateur linéaire A de E dans F est un opérateur de rang finie si, le rang de A de dimension finie.

Définition 1.8 Soit E un espace de Hilbert séparable de dimension infinie. si $(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une base hilbertienne de E . on dit qu'un opérateur $A \in \mathcal{L}(E)$ est un opérateur d'Hilbert Schmidt si la série numérique est $\sum_{n \in \mathbb{N}} \|Ae_n\|^2$ convergente.

Exemple 1.5 1- tout opérateur continu et de rang fini est un opérateur compact.

2- tout opérateur d'Hilbert Schmidt est un opérateur compact

3- l'opérateur intégral A de $C[a, b]$ dans $C[a, b]$ à noyau continu est un opérateur compact.

4- une combinaison linéaire $A = \alpha A_1 + \beta A_2$ des opérateurs compacts est un opérateur compact.

5- Le produit $A_1 A_2$ de deux opérateurs bornés A_1 et A_2 est compact si l'un des opérateurs A_1 ou A_2 est compact.

1.1.10 Opérateurs inversibles

Soient E et F deux e.v.n, et soit $A \in \mathcal{L}(E, F)$

Définition 1.9 *On dit que A est inversible s'il existe $B \in \mathcal{L}(F, E)$ telle que $AB = Id_F$ (inversible à droite) et $BA = Id_E$ (inversible à gauche), un tel opérateur (lorsqu'il existe) est unique. on l'appelle opérateur inverse de A , et on le note $B = A^{-1}$.*

Théorème 1.4 (Théorème d'inverse de Banach) *Si $A \in \mathcal{L}(E, F)$ (F espace de Banach) est bijectif, alors son inverse A^{-1} est continu*

Théorème 1.5 *Soit $A \in \mathcal{L}(E)$ tel que $\|A\| < 1$; alors $Id_E - A$ est inversible et*

$$(Id_E - A)^{-1} = \sum_{n=0}^{+\infty} A^n.$$

Remarque 1.1 *Si $A \in \mathcal{L}(E)$ tel que $\|Id_E - A\| < 1$; alors A est inversible et*

$$(A)^{-1} = \sum_{n=0}^{+\infty} (Id_E - A)^n.$$

1.2 Concepts de base de la théorie décompositionnelle

1.2.1 Série décompositionnelle

Définition 1.10 *toute série des fonctions $\sum B_n$ où chaque B_n est une fonction de $(n + 1)$ variables de $E : U_0, U_1, \dots, U_n$. à valeurs dans E , s'appelle série décompositionnelle.*

1.2.2 Schéma décompositionnelle

Définition 1.11 *soit une série décompositionnelle fortement convergente $\sum B_n(U_0, U_1, \dots, U_n)$, on appelle schéma décompositionnelle associé à $\sum B_n$ le schéma récurrent :*

$$\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_{n+1} = B_n(u_0, u_1, \dots, u_n) \end{cases}$$

qui permet de construire une série $\sum u_n$ d'éléments de E

1.2.3 Méthode décompositionnelle

Définition 1.12 *on appelle méthode décompositionnelle la méthode consistant à construire la solution d'une équation à l'aide d'un schéma décompositionnelle.*

Chapitre 2

Théorie de décomposition d'Adomian

Dans les années 1980, le mathématicien américain **George Adomian** (1923-1996) a proposé une nouvelle méthode pour résoudre des équations fonctionnelles non linéaires. La méthode a été appliquée à de nombreux problèmes de frontières dans le domaine de l'ingénierie, la physique, la biologie et la chimie...etc.

La résolution de telles équations par les méthodes dites classiques, entre autres les méthodes des différences finies, des éléments finis, des volumes finis et la méthode spectrale, donnent des approximations de la solution en des points discrets. De plus, ces méthodes font appel à des techniques de discrétisation de l'espace et de temps et elles linéarisent souvent les équations.

La méthode de décomposition d'Adomian est utilisée comme méthode alternative pour résoudre un large éventail de problèmes dont les modèles mathématiques concernés, l'algèbre, différentiels, l'intégrales, l'intégré différentielle, les équations différentielles ordinaires d'ordre supérieur (EDO), les équations aux dérivées partielles (EDP).

Notre but dans ce chapitre est d'expliquer la méthode décompositionnelle d'Adomian (ADM), et de donner quelques formules pour les polynômes d'Adomian, et on termine par les principaux théorèmes de convergence de cette méthode. [5],[6],[7],[8].



FIG. 2.1 – **George Adomian** (1923-1996)

2.1 Description de l'ADM

Soit l'équation fonctionnelle générale

$$v - Nv = g \tag{2.1}$$

telle que :

- N est un opérateur non linéaire analytique d'un espace de Hilbert H dans lui même.
- g est une fonction donnée.
- $v \in H$ c'est la solution de l'équation (2.1).

La méthode décompositionnelle d'Adomian consiste **à trouver** la solution v sous forme d'une série

c-à-d :

$$v = \sum_{i=0}^{\infty} v_i \quad (2.2)$$

Et, Aussi à **décomposer** le terme non linéaire Nv sous la forme d'une série

$$Nv = \sum_{n=0}^{\infty} A_n \quad (2.3)$$

Avec les A_n ce sont des fonctions depends de $(n + 1)$ variables v_0, v_1, \dots, v_n .

Les A_n sont appelés **polynômes d'Adomian**, et elles sont données par la formule suivante :

$$A_n = \frac{1}{n!} \left(\frac{d^n}{dt^n} \left[N \left(\sum_{i=0}^{\infty} t^i v_i \right) \right] \right) \Big|_{t=0} \quad (2.4)$$

Nous revenons à l'équation initiale (2.1), et remplaçons les relations (2.2) et (2.3) dans cette dernière. on trouve :

$$\sum_{i=0}^{\infty} v_i - \sum_{i=0}^{\infty} A_i = g \quad (2.5)$$

d'où on déduit, par identification des relations entre les v_i et les A_i :

$$\left\{ \begin{array}{l} v_0 = g \\ v_1 = A_0 \\ \vdots \\ v_n = A_{n-1} \\ \vdots \end{array} \right. \quad (2.6)$$

Maintenant la solution exacte de l'équation (2.1) est entièrement déterminée. Cependant, en pratique tous les termes de la série $\sum_{i=0}^{\infty} v_i$ ne peuvent pas être déterminés, nous utilisons donc une approximation de la solution v de la série tronquée :

$$\phi_n = \sum_{i=0}^{n-1} v_i, \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \phi_n = v$$

Remarque 2.1 – la solution v donner sous la forme d'une série en t dont les coefficients notés $(v_n)_{n \geq 0}$, c-à-d :

$$v = \sum_{n=0}^{\infty} v_n t^n$$

en utilisant le développement de Taylor

$$v = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{v^{(n)}(0)}{n!} (t-0)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{v^{(n)}(0)}{n!} t^n = \sum_{n=0}^{\infty} v_n t^n$$

avec

$$v_n = \frac{1}{n!} \left. \frac{\partial v}{\partial t^n} \right|_{t=0}$$

– le terme non linéaire Nv est définit par la relation (2.3)

$$Nv = \sum_{n=0}^{\infty} A_n$$

d'autre part, en utilisant le développement de Taylor encore une fois :

$$Nv = f(v(t)) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(t-0)^n}{n!} D^n f(v(t))|_{t=0}$$

et si on pose,

$$f(v(t)) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n t^n$$

alors on a :

$$\begin{aligned} A_n &= \frac{1}{n!} D^n f(v(t))|_{t=0} \\ &= \frac{1}{n!} D^n f\left(\sum_{n=0}^{\infty} v_n t^n\right)\Big|_{t=0} \end{aligned}$$

où les polynômes d'Adomian A_n sont donnés par :

$$A_n = \frac{1}{n!} \left. \frac{\partial^n}{\partial t^n} f(v(t)) \right|_{t=0} \quad \text{et} \quad Df = \frac{\partial f}{\partial t} = \frac{\partial f}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial t}$$

alors :

$$A_n = \frac{1}{n!} D^n f(v(t))|_{t=0} \quad / \quad f = f(v) \quad \text{et } v = v(t)$$

Exemple 2.1 Dans cet exemple on va appliquer la méthode d'Adomian pour chercher la solution d'une équation différentielle ordinaire avec une condition initiale, en faisant une comparaison avec les techniques usuelles

1- On considère le problème suivant :

$$\begin{cases} y' = y \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

comme l'on a vu dans les remarques précédentes que

$$y = y(t) = \sum_{n=0}^{\infty} y_n t^n \quad , \quad f(y(t)) = y(t) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n t^n$$

on pose :

$$L = D = \frac{d}{dt} \iff L^{-1} = D^{-1} = \int_0^t . ds$$

alors

$$Dy = f(y) \iff y(t) - y(0) = D^{-1} f(y)$$

donc

$$\begin{aligned} y &= \sum_{n=0}^{\infty} y_n t^n = y(0) + \sum_{n=0}^{\infty} A_n D^{-1} t^n \\ \sum_{n=0}^{\infty} y_n t^n &= y(0) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{A_{n-1}}{n} t^n. \end{aligned}$$

En tenant compte que les coefficients y_n sont donnés par :

$$\begin{cases} y_0 = y(0) = 1 \\ y_n = \frac{A_{n-1}}{n}, \quad \forall n \geq 1 \end{cases}$$

Alors

$$\begin{aligned} A_0 &= f(y(0)) = y(0) = 1 \\ A_1 &= \frac{df}{dy} \frac{dy}{dt} = y_1 f'(y_0) = y_1 \\ A_2 &= \frac{1}{2!} (y_2 f'(y_0) + y_1^2 f''(y_0)) = \frac{1}{2} y_2 \\ &\vdots \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} y_0 &= y(0) = 1 \\ y_1 &= A_0 = y(0) = 1 \\ y_2 &= \frac{A_1}{2} = \frac{y_1}{2} = \frac{1}{2} \\ &\vdots \end{aligned}$$

et par suite :

$$\begin{aligned} y(t) &= y_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{A_{n-1}}{n} t^n \\ &= y_0 + \frac{A_0}{1} t^1 + \frac{A_1}{2} t^2 + \frac{A_2}{3} t^3 + \dots \\ &= 1 + t + \frac{1}{2} t^2 + \frac{1}{2.3} t^3 + \frac{1}{2.3.4} t^4 + \dots \end{aligned}$$

d'où :

$$y(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} = e^t$$

2- Sachant que les méthodes directe donne :

$$\begin{aligned}
 y' = y &\iff \frac{y'}{y} = 1 \\
 &\iff \int_0^t \frac{y'(s)}{y(s)} ds = \int_0^t 1 ds \\
 &\iff \ln |y(s)| \Big|_0^t = t \\
 &\iff \ln |y(t)| - \ln |y(0)| = t \\
 &\iff e^{\ln |y(t)| - \ln |y(0)|} = e^t \\
 &\iff |y(t)| \frac{1}{|y(0)|} = e^t
 \end{aligned}$$

alors

$$y(t) = e^t$$

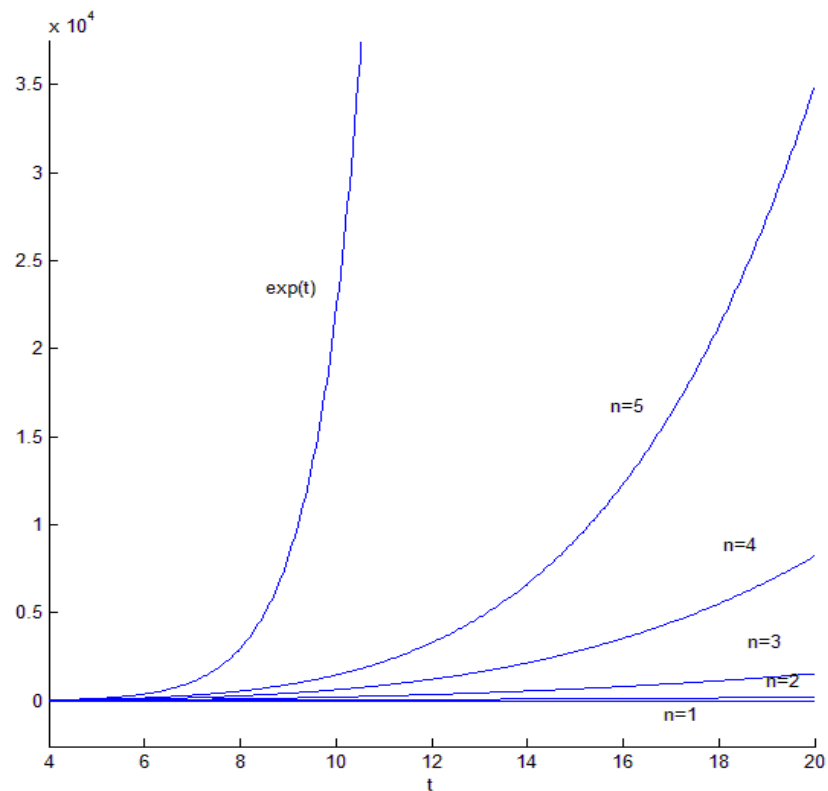


FIG. 2.2 – la solution exacte et les solutions tronquées pour $n = 1, n = 2, \dots, n = 5$

2.2 Les polynômes d'Adomian

E est un espace de Banach.

Définition 2.1 *étant donné un opérateur analytique N , et une série convergente $\sum v_i$ d'élément de E , on définit les polynômes d'Adomian par*

$$A_n = \frac{1}{n!} \left(\frac{d^n}{dt^n} \left[N \left(\sum_{i=0}^{\infty} t^i v_i \right) \right] \right) \Big|_{t=0} \quad (2.7)$$

2.2.1 Tableau de référence des polynômes d'Adomian

$$A_0 = N(v_0)$$

$$A_1 = v_1 N^{(1)}(v_0)$$

$$A_2 = v_2 N^{(1)}(v_0) + \frac{1}{2!} v_1^2 N^{(2)}(v_0)$$

$$A_3 = v_3 N^{(1)}(v_0) + v_1 v_2 N^{(2)}(v_0) + \frac{1}{3!} v_1^3 N^{(3)}(v_0)$$

$$A_4 = v_4 N^{(1)}(v_0) + \left(\frac{1}{2!} v_2^2 + v_1 v_3 \right) N^{(2)}(v_0) + \frac{1}{2!} v_1^2 v_2 N^{(3)}(v_0) + \frac{1}{4!} v_1^4 N^{(4)}(v_0)$$

$$A_5 = v_5 N^{(1)}(v_0) + (v_2 v_3 + v_1 v_4) N^{(2)}(v_0) + \left(\frac{1}{2!} v_1 v_2^2 + \frac{1}{2!} v_1^2 v_3 \right) N^{(3)}(v_0) + \frac{1}{3!} v_1^3 v_2 N^{(4)}(v_0) + \frac{1}{5!} v_1^5 N^{(5)}(v_0)$$

$$A_6 = v_6 N^{(1)}(v_0) + \left(\frac{1}{2!} v_3^2 + v_2 v_4 + v_1 v_5 \right) N^{(2)}(v_0) + \left(\frac{1}{3!} v_2^3 + v_1 v_2 v_3 + \frac{1}{2!} v_1^2 v_4 \right) N^{(3)}(v_0) + \left(\frac{1}{2!} v_1^2 \frac{1}{2!} v_2^2 + \frac{1}{3!} v_1^3 v_3 \right) N^{(4)}(v_0) + \frac{1}{4!} v_1^4 v_2 N^{(5)}(v_0) + \frac{1}{6!} v_1^6 N^{(6)}(v_0)$$

$$A_7 = v_7 N^{(1)}(v_0) + (v_3 v_4 + v_2 v_5 + v_1 v_6) N^{(2)}(v_0) + \left(\frac{1}{2!} v_2^2 v_3 + v_1 \frac{1}{2!} v_3^2 + v_1 v_2 v_4 + \frac{1}{2!} v_1^2 v_5 \right) N^{(3)}(v_0) + \left(\frac{1}{3!} v_1 v_2^3 + \frac{1}{2!} v_1^2 v_2 v_3 + \frac{1}{3!} v_1^3 v_4 \right) N^{(4)}(v_0) + \left(\frac{1}{3!} v_1^3 \frac{1}{2!} v_2^2 + \frac{1}{4!} v_1^4 v_3 \right) N^{(5)}(v_0) + \frac{1}{5!} v_1^5 v_2 N^{(6)}(v_0) + \frac{1}{7!} v_1^7 N^{(7)}(v_0).$$

⋮

Théorème 2.1 *pour une fonction composée $B(t) = N(v_n(t))$, où nous supposons que Nv est différentiable jusqu'à l'ordre n , A_n sont donnés par*

$$\left\{ \begin{array}{l} A_0 = N(v_0) \\ A_n = \sum_{k_1+2k_2+\dots+nk_n=n} \left(\frac{d^{(k_1+k_2+\dots+k_n)} N}{dv^{(k_1+k_2+\dots+k_n)}} \right) \Big|_{v=v_0} \cdot \frac{v_1^{k_1}}{k_1!} \cdot \frac{v_2^{k_2}}{k_2!} \cdot \frac{v_3^{k_3}}{k_3!} \cdots \frac{v_n^{k_n}}{k_n!}, \quad n \geq 1 \end{array} \right. \quad (2.8)$$

Preuve. en appliquant la formule classique [11], donnant le $n^{\text{ième}}$ dérivée de la fonction $B(t) = N(v_n(t))$, on obtient

$$\begin{aligned} A_n(v_0, v_1, \dots, v_n) &= \frac{1}{n!} \sum_{k_1+2k_2+\dots+nk_n=n} \left(\frac{d^{(k_1+k_2+\dots+k_n)} N}{dv^{(k_1+k_2+\dots+k_n)}} \right) \Big|_{v=v_0} \\ &\quad \cdot \frac{n! \cdot (v_1)^{k_1} \cdot (2!v_2)^{k_2} \cdot (3!v_3)^{k_3} \dots (n!v_n)^{k_n}}{(1!)^{k_1} \cdot (2!)^{k_2} \cdot (3!)^{k_3} \dots (n!)^{k_1} \cdot k_1! \cdot k_2! \cdot k_3! \dots k_n!}, \\ &= \sum_{k_1+2k_2+\dots+nk_n=n} \left(\frac{d^{(k_1+k_2+\dots+k_n)} N}{dv^{(k_1+k_2+\dots+k_n)}} \right) \Big|_{v=v_0} \cdot \frac{v_1^{k_1}}{k_1!} \cdot \frac{v_2^{k_2}}{k_2!} \cdot \frac{v_3^{k_3}}{k_3!} \cdots \frac{v_n^{k_n}}{k_n!}, \end{aligned}$$

■

D'où le corollaire suivant [7] [5]

Corollaire 2.1 *La formule suivante permet également de déterminer les polynômes d'Adomian :*

$$\left\{ \begin{array}{l} A_0 = N(v_0) \\ A_n(v_0, v_1, \dots, v_n) = \sum_{\alpha_1+\alpha_2+\dots+\alpha_n=n} \left(\frac{d^{\alpha_1} N}{dv^{\alpha_1}} \right) \Big|_{v=v_0} \cdot \frac{v_1^{\alpha_1-\alpha_2}}{(\alpha_1-\alpha_2)!} \cdot \frac{v_2^{\alpha_2-\alpha_3}}{(\alpha_2-\alpha_3)!} \cdot \frac{v_3^{\alpha_3-\alpha_4}}{(\alpha_3-\alpha_4)!} \cdots \frac{v_{n-1}^{\alpha_{n-1}-\alpha_n}}{(\alpha_{n-1}-\alpha_n)!} \cdot \frac{v_n^{\alpha_n}}{(\alpha_n)!}, \quad n \geq 1 \end{array} \right. \quad (2.9)$$

où $(\alpha_i)_{i=1,\dots,n}$ est une suite décroissante.

Preuve. il suffit de choisir

$$\begin{aligned} k_1 &= \alpha_1 - \alpha_2 \\ k_2 &= \alpha_2 - \alpha_3 \\ &\vdots \\ k_{n-1} &= \alpha_{n-1} - \alpha_n \\ k_n &= \alpha_n; \end{aligned}$$

ce qui conduit à :

$$k_1 + 2k_2 + \dots + nk_n = \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n = n$$

et

$$k_1 + k_2 + \dots + k_n = \alpha_1$$

■

Remarque 2.2 1- la somme dans le corollaire doit être faite sur toutes les solutions de l'équation

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n = n, \quad \alpha_1 \geq \alpha_2 \geq \dots \geq \alpha_n \quad (2.10)$$

2- appelons $P(n)$ le nombre de solutions de (2.10) , l'utilisation de la théorie des nombres nous permet d'évaluer $P(n)$.

Théorème 2.2

$$P(n) < e^{\pi\sqrt{\frac{2}{3}n}}, \quad \forall n \in \mathbb{N}^*. \quad (2.11)$$

Preuve. posons la fonction f

$$f(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} P(n)t^n = \prod_{k=1}^{+\infty} (1 - t^k)^{-1}, \quad |t| < 1 \quad (2.12)$$

Pour $0 < t < 1$, on définit $g(t)$ par

$$g(t) = \log(f(t)) \quad (2.13)$$

alors on a :

$$g(t) = - \sum_{k=1}^{+\infty} \log(1 - t^k) = \sum_{k=1}^{+\infty} \sum_{j=1}^{+\infty} \frac{t^{kj}}{j} = \sum_{j=1}^{+\infty} \frac{t^j}{1 - t^j} \frac{1}{j} \quad (2.14)$$

si $j \geq 1$, et $0 \leq t \leq 1$, on obtient

$$\frac{1 - t^j}{1 - t} = 1 + t + t^2 + \dots + t^{j-1} \quad (2.15)$$

et donc

$$jt^{j-1} < \frac{1-t^j}{1-t} < j, \quad 0 < t < 1, \quad j \geq 1 \quad (2.16)$$

remplaçons (2.16) dans (2.14) , ce qui donne

$$\sum_{j=1}^{+\infty} \frac{t^{j-1}}{j^2} < \frac{1-t}{t} g(t) < \sum_{j=1}^{+\infty} \frac{1}{j^2} \quad (2.17)$$

mais on sait que

$$\lim_{t \rightarrow 1} \frac{1-t}{t} g(t) = \frac{\pi^2}{6} \quad (2.18)$$

et, donc

$$P(n) t^n < f(t), \quad \text{si } 0 < t < 1, \quad \text{pour } n \geq 0 \quad (2.19)$$

d'après ces inégalités, on déduit que :

$$\log(P(n)) < \frac{\pi^2}{6} \frac{t}{1-t} + n \log\left(\frac{1}{t}\right) \quad (2.20)$$

Posons $1 + u = \frac{1}{t}$; alors $0 < u < \infty$, pour $0 < t < 1$; et on obtient

$$\log(P(n)) < \frac{\pi^2}{6} \frac{1}{u} + n \log(u) \quad (2.21)$$

la fonction $\frac{\pi^2}{6u} + nu$ à un minimum (par rapport à u), pour $u = \frac{\pi}{\sqrt{6n}}$, et ainsi

$$\log(P(n)) < \pi \sqrt{\frac{2}{3}n} \quad (2.22)$$

alors

$$P(n) < e^{\pi\sqrt{\frac{2}{3}n}} \quad (2.23)$$

■

Théorème 2.3 1-

$$\frac{\partial}{\partial v_0} A_{n-k} = \frac{\partial}{\partial v_k} A_n, \quad \forall n, k, n \geq k \quad (2.24)$$

en particulier, pour $n = k$ on trouve

$$\frac{\partial}{\partial v_0} A_0 = \frac{\partial}{\partial v_n} A_n, \quad \forall n, \quad (2.25)$$

2-

$$A_{n+1} = \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n (k+1) v_{k+1} \frac{\partial}{\partial v_k} A_n \quad (2.26)$$

Preuve. le premier résultat est une conséquence directe de la définition de A_n

pour le second résultat, on a, par définition

$$\begin{aligned} A_{n+1} &= \frac{1}{(n+1)!} \frac{d^{n+1}}{dt^{n+1}} \left[N \left(\sum_{i=0}^{n+1} t^i v_i \right) \right] \Big|_{t=0} \\ &= \frac{1}{(n+1)!} \sum_{k=0}^n C_n^k (k+1)! v_{k+1} (n-k)! \frac{\partial}{\partial v_0} A_{n-k} \\ &= \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n (k+1) v_{k+1} \frac{\partial}{\partial v_0} A_{n-k} \\ &= \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n (k+1) v_{k+1} \frac{\partial}{\partial v_k} A_n \end{aligned}$$

■

Théorème 2.4

$$A_n = \sum_{\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n = n} c_{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n} (N(v_0))^{n+1-\alpha_1} (N'(v_0))^{\alpha_1-\alpha_2} \dots (N^{n-1}(v_0))^{\alpha_{n-1}-\alpha_n} (N^{(n)}(v_0))^{\alpha_n} \quad (2.27)$$

où

$$c_{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n} = \frac{n!}{(\alpha_1 - \alpha_2)! \cdot (\alpha_{n-1} - \alpha_n)! \cdot \alpha_n! \cdot (1!)^{\alpha_1 - \alpha_2} \dots ((n-1)!)^{\alpha_{n-1} - \alpha_n} (n+1 - \alpha_1)!} \quad (2.28)$$

Preuve. voir [5] ■

2.3 Convergence de la méthode

La méthode d'Adomian pose des problèmes difficilement solubles, parmi ces problèmes :

- sous quelles conditions les séries $\sum v_i$ et $\sum A_i$ convergent-elle ?
- $\sum v_i$ est-elle solution de l'équation (2.1) du départ ?

Les premières preuves de convergence ont été précisées par **Yves Cherruault** . Elles sont basées sur la méthode du point fixe. Donnons les grandes lignes de la démonstration .

D'importants théorèmes ont été donnés impliquant des conditions suffisantes pour la convergence. toutes ces conditions portent sur l'opérateur non linéaire N .



FIG. 2.3 – Yves Cherruault

Pour toute série convergente $\sum_{i=0}^{\infty} v_i$, on définit le terme non linéaire $N(v)$ comme suit :

$$N(v) = \sum_{i=0}^{\infty} A_i(v_0, v_1, v_2, \dots, v_i) \quad (2.29)$$

avec les A_i de (2.29) étant déterminés grâce à les relations (2.4)

Nous verrons plus tard une hypothèse assurant la convergence de la série $\sum A_i$.

Pour toute suite $U_n = \sum_{i=0}^n v_i$ on approxime $N(U_n)$ par :

$$N_n(U_n) = \sum_{i=0}^n A_i(v_0, v_1, v_2, \dots, v_i) \quad (2.30)$$

Dans ce qui suit nous noterons $N_n(U_n)$ par $N(U_n)$

donc la méthode d'Adomian revient à trouver la suite

$$S_n = v_1 + v_2 + \dots + v_n \quad (2.31)$$

en utilisant un schéma itératif

$$\begin{cases} S_0 = 0 \\ S_{n+1} = N(v_0 + S_n) \end{cases} \quad (2.32)$$

la relation itérative (2.32) permet de retrouver toutes les relations initiales d'Adomian (2.6), donc en remarque qu'il y a une équivalence entre la méthode d'Adomian et le schéma (2.32).

Théorème 2.5 *si l'opérateur N est un opérateur contractant ($\delta < 1$) et si on suppose que*

$$\|N_n - N\| = \varepsilon_n \longrightarrow 0 \text{ quand } n \longrightarrow +\infty$$

alors la suite $(S_n)_{n \geq 0}$ donné par

$$\begin{cases} S_0 = 0 \\ S_{n+1} = N_n(v_0 + S_n) \end{cases} \quad (2.33)$$

converge vers S la solution de l'équation

$$S = N(v_0 + S) \quad (2.34)$$

Preuve. de la relation (2.33) et (2.34), on a :

$$\begin{aligned} \|S_{n+1} - S\| &= \|N_n(v_0 + S_n) - N(v_0 + S)\| \\ &= \|N_n(v_0 + S_n) - N(v_0 + S_n) + N(v_0 + S_n) - N(v_0 + S)\| \\ &\leq \|N_n - N\| \|v_0 + S_n\| + \delta \|S_n - S\| \\ &\leq \varepsilon_n (\|v_0\| + \|S_n\|) + \delta \|S_n - S\| \end{aligned} \quad (2.35)$$

où $\delta < 1$ est le paramètre de la contraction N .

faisons les hypothèses

$$\|S\| \leq \frac{N_0}{2}; \quad \text{et} \quad \|v_0\| \leq N_0$$

nous posons une autre l'hypothèse récurrente :

$$\|S_n - S\| \leq \frac{N_0}{2} \quad (2.36)$$

Ce qui implique

$$\|S_n\| \leq N_0 \quad (2.37)$$

cela conduit à l'inégalité :

$$\|S_{n+1} - S\| \leq \delta \frac{N_0}{2} + 4\varepsilon_n \frac{N_0}{2} \quad (2.38)$$

si nous avons besion de

$$\|S_{n+1} - S\| \leq (\delta + \varepsilon) \frac{N_0}{2}$$

où $(\delta + \varepsilon)$ est tel que $(\delta + \varepsilon) < 1$

il suffit de choisir $n > m$ (où m dépend de ε) tel que

$$\|N_n - N\| = \varepsilon_n < \frac{\varepsilon}{4}$$

L'hypothèse récurrente est donc satisfaite et le théorème est prouvé. ■

Théorème 2.6 avec les hypothèses suivantes

i. N est C^∞ dans le voisinage de v_0 et $\|N^{(n)}(v_0)\| \leq M'$, pour tout n

ii. $\|v_i\| \leq M \leq 1, i = 1, 2, \dots$

la série $\sum_{n=0}^{+\infty} A_n$ est absolument convergente et, de plus

$$\|A_n\| \leq \left(e^{\pi\sqrt{\frac{2}{3}n}}\right) M' M^n$$

Preuve. on sait que d'après le corollaire (2.1)

$$A_n = \sum_{\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n = n} N^{(\alpha_1)}(v_0) \frac{v_1^{\alpha_1 - \alpha_2}}{(\alpha_1 - \alpha_2)!} \cdots \frac{v_{n-1}^{\alpha_{n-1} - \alpha_n}}{(\alpha_{n-1} - \alpha_n)!} \frac{v_n^{\alpha_n}}{(\alpha_n)!}$$

appliquons le théorème (2.1) implique

$$\|A_n\| \leq \left(e^{\pi\sqrt{\frac{2}{3}n}}\right) M' M$$

qui est le terme générale d'une série convergente. ■

Mais une difficulté demeure. en effet, la convergence de la série $\sum A_n$ dépend des v_i par l'hypothèse et les v_i sont également obtenus à partir des A_i . pratiquement, il sera difficile de prouver que v_i est borné en norme.

Le résultat suivant est plus utile en prouvant directement que la série $\sum A_n$ converge.

Théorème 2.7 Si N est C^∞ et satisfait $\|N^{(n)}(v_0)\| \leq M \leq 1$ pour tout n

Alors la série décompositionnelle $\sum_{n=0}^{+\infty} v_n$ est absolument convergente et on a

$$\|v_{n+1}\| = \|A_n\| \leq M^{n+1} n^{\sqrt{n}} e^{\pi\sqrt{\frac{2}{3}n}}$$

Preuve. en utilisant les théorème (2.2) et (2.4), on peut montrer que

$$\sum_{\alpha_1+\alpha_2+\dots+\alpha_n=n} |c_{\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_n}| \leq n^{\sqrt{n}} e^{\pi\sqrt{\frac{2}{3}n}}$$

et de plus,

$$\|A_n\| \leq M^{n+1} n^{\sqrt{n}} e^{\pi\sqrt{\frac{2}{3}n}}$$

$\|A_n\|$ est majoré par le terme général d'une série convergente. ■

Chapitre 3

Applications

3.1 Résolution des équations différentielles fractionnaires par ADM

La théorie des équations différentielles fractionnaires a émergé comme un domaine intéressant à explorer ces dernières années. Notons que cette théorie a de nombreuses applications dans la description de nombreux évènements dans le monde réel. Par exemple, les équations différentielles fractionnaires sont souvent applicables dans l'ingénierie, la physique, la chimie, la biologie, ...etc.

Dans cette section, nous donnons la définition de dérivée et intégrale fractionnaires, et puis on résout quatre problème des équations différentielles fractionnaires par l'ADM.[9].

Définition 3.1

$$\frac{d^q f(x)}{[d(x-a)]^q} = \Big|_a^{x-q} f = \frac{1}{\Gamma(n-q)} \frac{d^n}{dx^n} \int_a^x (x-a)^{-q+n-1} f(t) dt \quad (3.1)$$

où n est le plus petit entier positive telle que $n - q > 0$; ($n = 0$) si $q < 0$) et Γ est la fonction Gamma.

En particulier, lorsque $0 < \alpha < 1$, $a = 0$

$$\frac{d^\alpha f}{dx^\alpha} = \Big|_0^{x-\alpha} f = |^{-\alpha} f(x) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{d}{dx} \int_0^x \frac{f(t)}{(x-t)^\alpha} dt \quad (3.2)$$

et

$$\frac{d^{-\alpha} f}{dx^{-\alpha}} = \Big|_a^{x^\alpha} f = |^\alpha f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^x \frac{f(t)}{(x-t)^{1-\alpha}} dt \quad (3.3)$$

Resultat

1.

$$|^{-\alpha} |^\alpha f(x) = f(x), \quad \text{pour } \alpha > 0 \quad (3.4)$$

2.

$$|^\alpha |^\beta f(x) = |^{\alpha+\beta} f(x), \quad \text{pour } \alpha > 0, \beta > 0 \quad (3.5)$$

3.

$$[|^\alpha]^2 f(x) = |^\alpha |^\alpha f(x) = |^{2\alpha} f(x), \quad \text{pour } \alpha > 0 \quad (3.6)$$

et généralement

$$[|^\alpha]^n f(x) = |^{n\alpha} f(x), \quad (3.7)$$

4.

$$|^\alpha |^{-\alpha} f(x) = f(x) - C \frac{x^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}, \quad (0 < \alpha < 1, x > 0) \quad (3.8)$$

où C est une constante arbitraire.

5.

$$|^\mu [x^p] = \frac{\Gamma(p+1)}{(p+1+\mu)} x^{p+\mu}, \quad p > -1, \text{ pour tout } \mu \quad (3.9)$$

6.

$$|^\alpha [\varphi y] = \sum_{j=0}^{+\infty} \binom{-\alpha}{j} \varphi^{(j)} |^{\alpha+j} y, \quad \alpha > 0 \quad (3.10)$$

où $\varphi = \varphi(x)$ et $y = y(x)$ sont des fonctions analytique de x , aussi, $\varphi^{(0)} = \varphi(x)$.

Dans tous les problèmes suivantes, on a $0 < \alpha < 1$. et les fonctions $a(x), b(x)$ et

$f(x)$ sont des fonctions analytiques non nulles sur l'intervalle $[0, +\infty[$, aussi λ et μ sont des constantes.

Problème 3.1

$$\frac{d^\alpha y}{dx^\alpha} + y = f(x) \quad (3.11)$$

Solution 1 opérant par $|\alpha$, les deux côtés de l'équation (3.11) et en utilisant la relation (3.8), on obtient

$$y(x) = g(x) - |\alpha y(x) \quad (3.12)$$

où $g(x) = Cx^{\alpha-1} + |\alpha f(x)$ et C est une constante arbitraire.

comme nous l'avons vu dans le chapitre précédant la solution de l'équation (3.11) par la méthode d'Adomian s'écrit comme :

$$y(x) = y_0(x) + y_1(x) + y_2(x) + \dots \quad (3.13)$$

où

$$\begin{aligned} y_0(x) &= g(x) \\ y_1(x) &= -|\alpha y_0(x) \\ y_2(x) &= -|\alpha y_1(x) \\ &\vdots \end{aligned} \quad (3.14)$$

alors la solution prend la forme :

$$\begin{aligned} y(x) &= g(x) - |\alpha g(x) + |^{2\alpha} g(x) - \dots \\ &= C\Gamma(\alpha) \left[\frac{x^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} - \frac{x^{2\alpha-1}}{\Gamma(2\alpha)} + \frac{x^{3\alpha-1}}{\Gamma(3\alpha)} - \dots \right] + [|\alpha f - |^{2\alpha} f + |^{3\alpha} f \dots] \end{aligned} \quad (3.15)$$

Exemple 3.1 si $\alpha = \frac{1}{2}$, et $f(x) = x$, on obtient la solution de l'équation

$$\frac{d^{\frac{1}{2}} y}{dx^{\frac{1}{2}}} + y = x \quad (3.16)$$

donnée par

$$\begin{aligned}
 y(x) &= C\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) \left[\frac{x^{\frac{1}{2}}}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)} - \frac{x^0}{\Gamma(1)} + \frac{x^{\frac{1}{2}}}{\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)} - \dots \right] + \left[\left| \frac{1}{2}x - \right| x + \left| \frac{3}{2}x \dots \right] \quad (3.17) \\
 &= C\sqrt{\pi} \left[\frac{1}{\sqrt{\pi x}} - e^x \operatorname{erf} c(\sqrt{x}) \right] + e^x \operatorname{erf}(\sqrt{x}) - 2\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{\pi}} - e^x + x + 1
 \end{aligned}$$

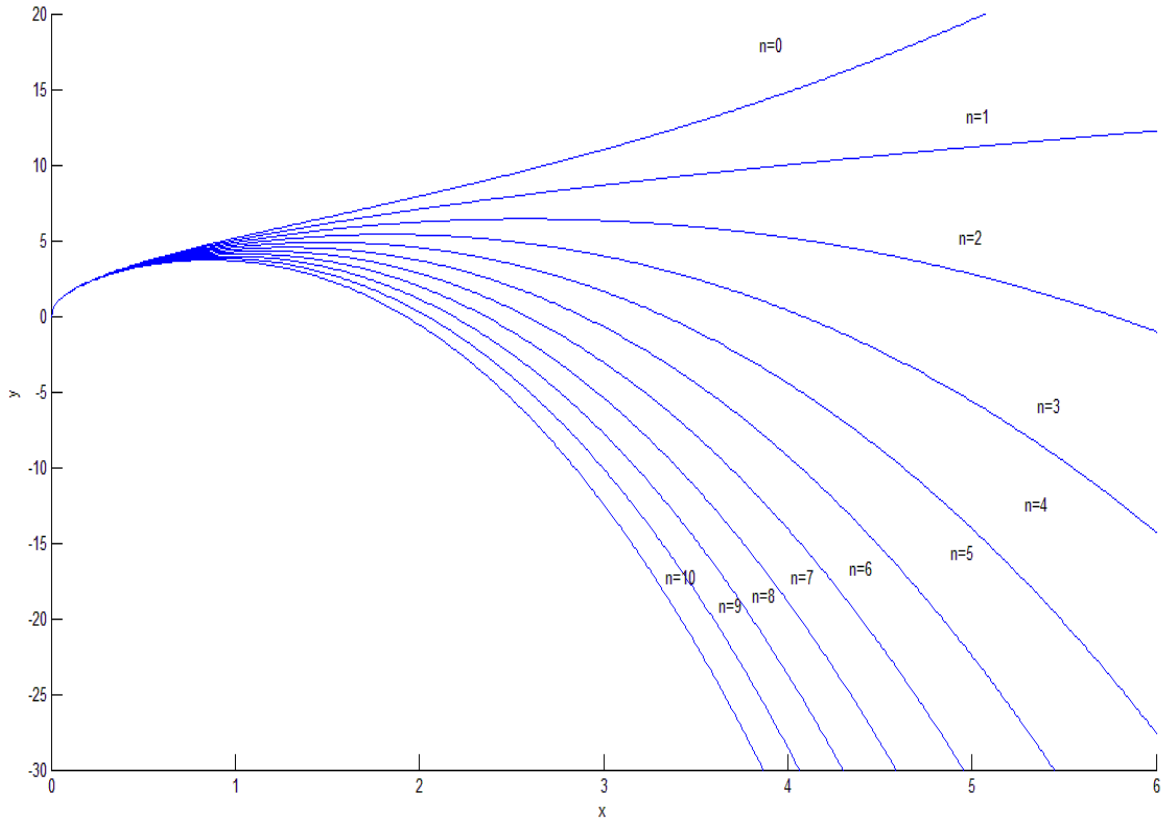


FIG. 3.1 – Les différentes solutions tronquées pour $n = 0, n = 1, n = 2, \dots, n = 10$

Problème 3.2

$$\lambda \frac{d^\alpha y}{dx^\alpha} + \mu y = f(x) \quad (3.18)$$

Solution 2 posons $\frac{\mu}{\lambda} = q$ et $\frac{f(x)}{\lambda} = f_1(x)$ et de la même manière que le problème (3.1) , on opérant les deux côtés par $|\cdot|^\alpha$ on obtient :

$$y = g(x) - q |\cdot|^\alpha y \quad (3.19)$$

où $g(x) = Cx^{\alpha-1} + |^\alpha f_1(x)$ et C est une constante arbitraire.

procédes comme dans le cas du problème (3.1) , la méthode d'adomian donne lieu à la solution du problème (3.2) , donnée par

$$y(x) = C\Gamma(\alpha) \left[\frac{x^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} - q \frac{x^{2\alpha-1}}{\Gamma(2\alpha)} + q^2 \frac{x^{3\alpha-1}}{\Gamma(3\alpha)} - \dots \right] + \frac{1}{\lambda} \left[|^\alpha f(x) - q |^{2\alpha} f(x) + q^2 |^{3\alpha} f(x) - \dots \right] \quad (3.20)$$

Exemple 3.2 si on prend $\alpha = \frac{1}{2}$, et $f(x) = x$, $\lambda = 2$ et $\mu = 4$, l'équation (3.18) prend la forme :

$$\frac{d^{\frac{1}{2}}y}{dx^{\frac{1}{2}}} + 2y = \frac{x}{2} \quad (3.21)$$

la solution de l'équation (3.18) est :

$$y(x) = C\sqrt{\pi} \left[\frac{1}{\sqrt{\pi x}} - 2e^{4x} \operatorname{erf} c(2\sqrt{x}) \right] + \frac{1}{16} \left[e^{4x} \operatorname{erf}(2\sqrt{x}) - 4 \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{\pi}} \right] - \frac{1}{16} [e^{4x} - 4x - 1] \quad (3.22)$$

Problème 3.3

$$a(x) \frac{d^\alpha y}{dx^\alpha} + b(x) y = 0 \quad (3.23)$$

Solution 3 le problème (3.3) peut être écrit dans la forme :

$$\frac{d^\alpha y}{dx^\alpha} + \varphi(x) y = 0 \quad (3.24)$$

où $\varphi(x) = \frac{b(x)}{a(x)}$ est une fonction analytique, opérant par $|^\alpha$ les deux côtés, on trouve

$$y - Cx^{\alpha-1} + |^\alpha (\varphi y) = 0$$

où C est une constante arbitraire, i.e :

$$y = Cx^{\alpha-1} - My \quad (3.25)$$

où

$$My = \sum_{j=0}^{+\infty} \binom{-\alpha}{j} \varphi^{(j)} |^{\alpha+j} y$$

(voir la relation (3.10)) , la solution de l'équation ci-dessus (3.24) peut être exprimé, après l'utilisation de la méthode d'Adomian sous la forme

$$y(x) = C [x^{\alpha-1} - Mx^{\alpha-1} + M^2x^{\alpha-1} - \dots] \quad (3.26)$$

où

$$M^n y = MM^{n-1}y; \text{ pour } n = 1, 2, 3, \dots \quad (3.27)$$

Exemple 3.3 si $\alpha = \frac{1}{2}$, et $\varphi(x) = x$, la solution de l'équation

$$\frac{d^{\frac{1}{2}}y}{dx^{\frac{1}{2}}} + xy = 0 \quad (3.28)$$

est sous la forme

$$y(x) = C\sqrt{\pi} \left[\frac{1}{\sqrt{\pi x}} - \frac{x}{2} + \frac{x^{\frac{5}{2}}}{\Gamma(\frac{7}{2})} - \frac{7x^4}{2\Gamma(5)} + \frac{7.10}{2^2} \frac{x^{\frac{11}{2}}}{\Gamma(\frac{13}{2})} - \dots \right] \quad (3.29)$$

en dérivant la solution ci-dessus (3.29), nous avons utilisé la relation

$$\left| \frac{1}{2} (xy) \right| = \left[x \left| \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \left| \frac{3}{2} \right| \right] y \quad (3.30)$$

Problème 3.4

$$a(x) \frac{d^\alpha y}{dx^\alpha} + b(x) y = f(x) \quad (3.31)$$

Solution 4 le problème (3.4) peut être réécrit comme :

$$\frac{d^\alpha y}{dx^\alpha} + \varphi(x) y = f_1(x) \quad (3.32)$$

où $\varphi(x) = \frac{b(x)}{a(x)}$ et $f_1(x) = \frac{f(x)}{a(x)}$ sont des fonctions analytique, ainsi, appliquer l'opérateur

$|^\alpha$ sur les deux côtés, nous obtenons :

$$y(x) = g(x) - My(x)$$

où

$$g(x) = Cx^{\alpha-1} + |^\alpha f_1(x)$$

$$My = \sum_{j=0}^{+\infty} \binom{-\alpha}{j} \varphi^{(j)} |^{\alpha+j} y$$

et C est une constante arbitraire, en utilisant la même méthode d'Adomian que précédemment, on obtient la solution de l'équation (3.32) donnée par :

$$y(x) = C [x^{\alpha-1} - Mx^{\alpha-1} + M^2x^{\alpha-1} - \dots] + [|^\alpha f_1(x) - M |^\alpha f_1(x) + M |^\alpha f_1(x) - \dots] \quad (3.33)$$

où il a été fait usage de la relation du type (3.27)

Exemple 3.4 lorsque $\alpha = \frac{1}{2}$, $\varphi(x) = x$ et $f_1(x) = x$, on trouve la solution de l'équation différentielle fractionnaire

$$\frac{d^{\frac{1}{2}}y}{dx^{\frac{1}{2}}} + xy = x$$

peut être exprimé comme :

$$y_p(x) = C\sqrt{\pi} \left[\frac{1}{\sqrt{\pi x}} - \frac{x}{2} \right] + C\sqrt{\pi} \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \left(\frac{3}{2} \right)^n A_n \frac{x^{\frac{3n+5}{2}}}{\Gamma\left(\frac{3n+7}{2}\right)} + C\sqrt{\pi} \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \left(\frac{3}{2} \right)^n B_n \frac{x^{\frac{3n+3}{2}}}{\Gamma\left(\frac{3n+5}{2}\right)}$$

où

$$A_0 = 1 \quad , \quad B_0 = 1$$

$$A_n = \frac{7}{3} \left(\frac{7}{3} + 1 \right) \dots \left(\frac{7}{3} + n - 1 \right) \quad , \quad B_n = \frac{5}{3} \left(\frac{5}{3} + 1 \right) \dots \left(\frac{5}{3} + n - 1 \right)$$

3.1.1 vérification de la solution

appliquons $\left| \frac{1}{2} \right.$ des deux côtés de l'équation (3.16), on trouve

$$y - \frac{C}{\sqrt{x}} - \frac{4}{3} \frac{x^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{\pi}} = -\frac{d^{-\frac{1}{2}}y}{dx^{-\frac{1}{2}}} \quad (3.34)$$

où C est une constante arbitraire.

en dérivant l'équation (3.34) et de l'utilisation de la relation (3.16), on obtient l'équation différentielle ordinaire

$$\frac{dy}{dx} - y = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\sqrt{x} - x - \frac{C}{2}x^{-\frac{3}{2}} \quad (3.35)$$

la solution de cette équation (3.35) est

$$y(x) = -\frac{2}{\sqrt{\pi}}\sqrt{x} + (1 + \sqrt{\pi}C) e^x \operatorname{erf}(\sqrt{x}) + x + 1 + \frac{C}{\sqrt{x}} + C_1 e^x \quad (3.36)$$

où C et C_1 sont des constantes arbitraires

la fonction $y(x)$ donnée dans l'équation (3.36) sera une solution de l'équation (3.16) si $C_1 = -(1 + \sqrt{\pi}C)$, la solution de l'équation (3.16), dérivée de (3.36), correspond à la solution (3.17).

3.2 Résolution de certaines équations de Bilan de Populations par ADM

3.2.1 les équations de Bilan de Populations (EBPs)

Les équations de Bilan de Population (EBPs) sont similaires aux équations du bilan de masse et d'énergie. il décrivent une loi du bilan pour un nombre d'individu d'une population donnée, tels que des gouttelettes, des bactéries...etc

Ce qui rend l'EBPs plus intéressants que les équations de bilan de masse c'est l'incor-

poration de plusieurs phénomènes qui sont responsables de l'évolution de la population des individus. en plus par rapport aux flux d'entrée et de sortie de particules, c'est à dire le système d'écoulement soit continu ou bien discontinu, et qu'il existe plusieurs autre mécanismes qui sont responsables de la variation de la population des particules dans le même volume considéré. De nouvelles particules peuvent être nées d'une solution sursaturée donnée. Ce processus augmente la population de petite particules. Donc la particule de taille inférieure peut se développer pour former une plus grand particule par le processus d'agrégation et une plus grosse peut subir la rupture pour former des particules de tailles inférieures.

En raison des phénomènes mentionnés ci-dessus pour la description du comporetement dynamique des processus des particules qui consiste essentiellement à préciser l'évolution temporelle de la distribution des particules.

le changement de la fonction densité en nombre est donné par l'équation de Bilan de population (EBP), qui est une équation intégro-différentielle partielle.

Le Bilan de population pour la rupture est largement connu à fort cisaillement de la granulation humide, la cristallisation , la science de l'atmosphère et de nombreuses autres problèmes de l'ingénierie de particules liées, la forme générale de l'équation de Bilan de la population pour la rupture est donnée par :

$$\frac{\partial n(v, t)}{\partial t} = -S(v) n(v, t) + \int_v^{+\infty} \rho(v, v') S(v') n(v', t) dv' \quad (3.37)$$

où

- $n(v, t)$ représente la densité de paticules de dimension v au temps t .
- $\rho(v, v')$ est la fonction de rupture.
- $S(v)$ le taux de rupture de noyau.

Le modèle a été proposé par **Ziff** et **McGrady** [12] et est couramment utilisé comme problème de repère pour les méthodes numériques. l'autre modèle qui représente la coalgu-

lation des particules est de la forme :

$$\frac{\partial n(v, t)}{\partial t} = \frac{1}{2} \int_0^v \omega(v - v', v') n(v - v', t) n(v', t) dv' - n(v, t) \int_0^{+\infty} \omega(v, v') n(v', t) dv' \quad (3.38)$$

Dans le cas générale, l'équation de Bilan de population (EBP) représente le taux de particules qui se forment par différent processus physiques comme la rupture, la coalescence ou et la croissance, le modèle est du à **Ramkrishna** [13]. l'autre expression proposée pour la densité de la population de particules dans un espace continu est décrit par une équation de la forme :

$$\frac{\partial n(v, t)}{\partial t} + \frac{\partial (Gn(v, t))}{\partial v} = \frac{1}{k} (n^{feed}(v, t) - n(v, t)) + \phi(n(v, t), v, t) \quad (3.39)$$

où

- $\frac{\partial n(v, t)}{\partial t}$: représente le taux d'accumulation de gouttelettes de volume v .
- $\frac{\partial (Gn(v, t))}{\partial v}$: représente la convection le long de goutte de coordonnées interne avec la vitesse de croissance.
- $\frac{1}{k} (n^{feed}(v, t) - n(v, t))$: représente le flux globale dans une cuve.
- $\phi(n(v, t), v, t)$: représente le taux de génération de gouttelettes formées par coalescence et rupture.

$$\left\{ \begin{array}{l} \phi(n(v, t), v, t) = \frac{\partial n(v, t)}{\partial t} = -S(v) n(v, t) - \int_0^{+\infty} \omega(v, v') n(v, t) n(v', t) dv' \\ + \int_v^{+\infty} \rho(v, v') S(v') n(v', t) dv' + \frac{1}{2} \int_0^v \omega(v - v', v') n(v - v', t) n(v', t) dv' \\ n(v, 0) = n_0(v) \end{array} \right. \quad (3.40)$$

3.2.2 application

1- Le cas pour $n_0(v) = e^{-v}$, $S(v) = v$, $\rho(v, v') = \frac{2}{v'}$ et $\omega(v, v') = 0$

L'équation (3.40) devient :

$$\frac{\partial n(v, t)}{\partial t} = -vn(v, t) + \int_v^{+\infty} \frac{2}{v'} v' n(v', t) dv' \quad (3.41)$$

Intégrant l'équation (3.41) par rapport à t nous avons :

$$n(v, t) - n(v, 0) = \int_0^t \left(-vn(v, t) + \int_v^{+\infty} \frac{2}{v'} v' n(v', t) dv' \right) dt$$

Alors

$$n(v, t) = n(v, 0) + \int_0^t \left(-vn(v, t) + \int_v^{+\infty} \frac{2}{v'} v' n(v', t) dv' \right) dt$$

Nous ne supposons que la solution de l'équation. (3.41) a la forme de la série de décomposition d'Adomian

$$n(v, t) = \sum_{m=0}^{+\infty} n_m(v, t)$$

Où les composants de la solution $n_m(v, t)$ sont déterminés par le schéma de récursion d'Adomian suivant :

$$n_0(v, t) = n(v, 0) = e^{-v}$$

$$\begin{aligned} n_1(v, t) &= \int_0^t \left(-n_0(v, t) v + \int_v^{+\infty} \frac{2}{v'} v' n_0(v', t) dv' \right) dt \\ &= e^{-v} (2t - vt) \end{aligned}$$

Et en général, $n_m(v, t)$ est la solution de :

$$n_m(v, t) = \int_0^t \left(-vn_{m-1}(v, t) + \int_v^{+\infty} \frac{2}{v'} v' n_{m-1}(v', t) dv' \right) dt$$

Enfin nous calculons le terme général comme suit :

$$n_m(v, t) = \frac{(-1)^m}{m!} t^m v^{m-2} (m(m-1) - 2mv + v^2) e^{-v}$$

Alors

$$\begin{aligned} n(v, t) &= \sum_{m=0}^{+\infty} n_m(v, t) \\ &= \sum_{m=0}^{+\infty} \frac{(-1)^m}{m!} t^m v^{m-2} (m(m-1) - 2mv + v^2) e^{-v} \\ &= (1+t)^2 e^{-v(1+t)}. \end{aligned}$$

donc la solution de l'équation (3.41) est :

$$n(v, t) = (1+t)^2 e^{-v(1+t)}.$$

En effet, la solution tronquée en n s'écrit :

$$S_n = e^{-v} \left((1 + 2t - vt) + \sum_{m=2}^n \frac{(-1)^m}{m!} t^m v^{m-2} (m(m-1) - 2mv + v^2) \right)$$

on a :

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{i=2}^n \frac{(-1)^i}{i!} t^i v^{i-2} (i(i-1)) &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{i=2}^n \frac{(-1)^i}{(i-2)!} t^i v^{i-2} \\ &= \lim_{n \rightarrow +\infty} t^2 \sum_{i=2}^n \frac{(-1)^i}{(i-2)!} t^{i-2} v^{i-2} \\ &= \lim_{n \rightarrow +\infty} t^2 \sum_{k=0}^{n-2} \frac{(-tv)^k}{k!} \\ &= t^2 e^{-vt} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{i=2}^n \frac{(-1)^i}{i!} t^i v^{i-2} (-2iv) &= \lim_{n \rightarrow +\infty} 2t \sum_{i=2}^n \frac{(-1)^{i-1}}{(i-1)!} t^{i-1} v^{i-1} \\
 &= \lim_{n \rightarrow +\infty} 2t \sum_{k=0}^{n-2} \frac{(-vt)^k}{(k)!} \\
 &= 2te^{-vt}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{i=2}^n \frac{(-1)^i}{i!} t^i v^{i-2} (v^2) &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{i=2}^n \frac{(-1)^i}{i!} t^i v^i \\
 &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=2}^n \frac{(-vt)^k}{k!} \\
 &= e^{-vt} - (1 - vt)
 \end{aligned}$$

ce qui donne la forme analytique :

$$S = \lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = (1+t)^2 e^{-v(1+t)}.$$

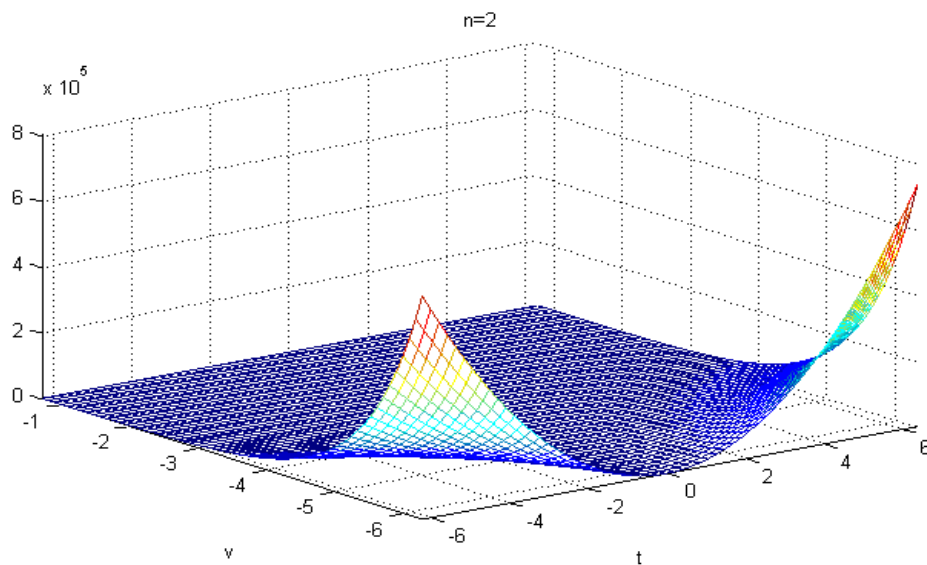


FIG. 3.2 – La solution tronquée en $n = 2$

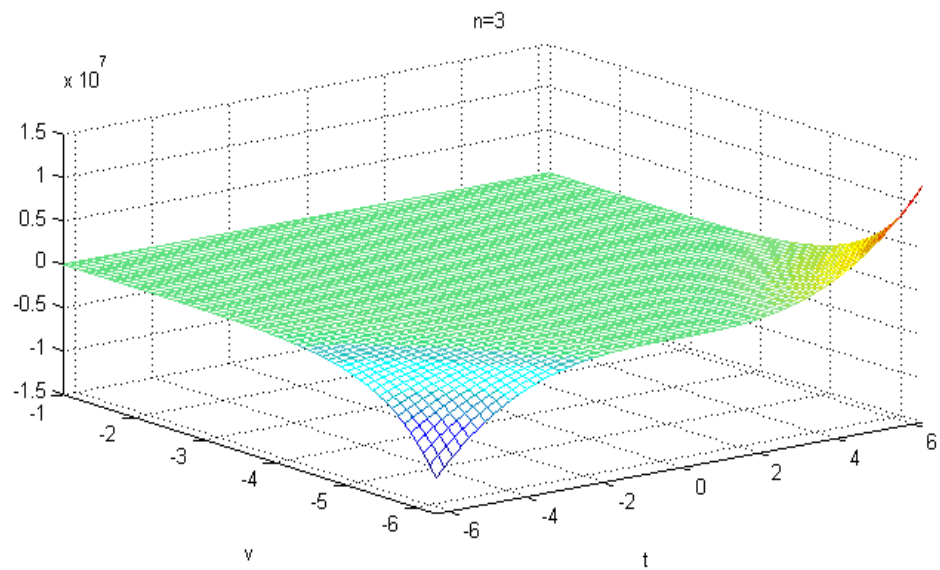


FIG. 3.3 – La solution tronquée en $n = 3$

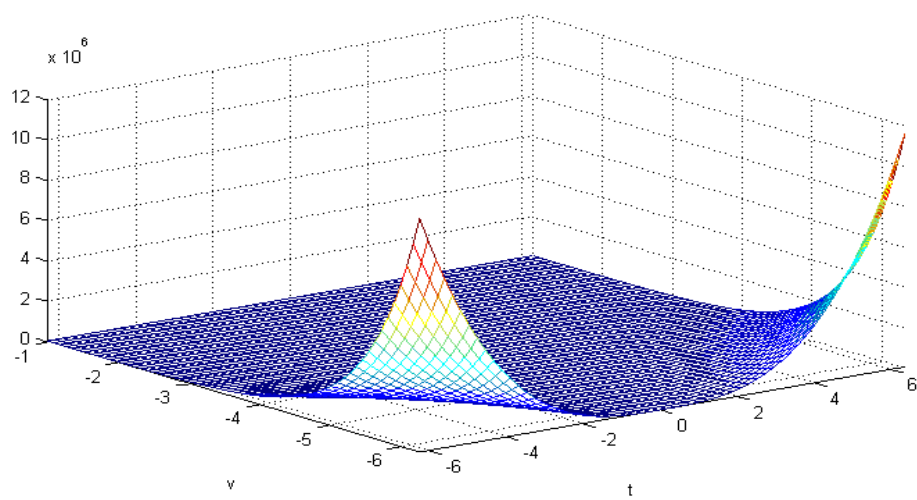


FIG. 3.4 – L'erreur $|S_3 - S_2|$

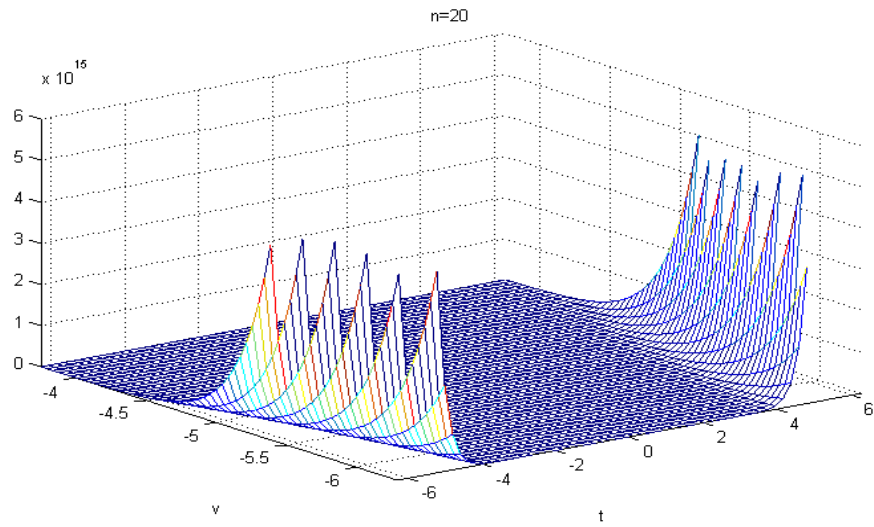


FIG. 3.5 – La solution tronquée en $n = 20$

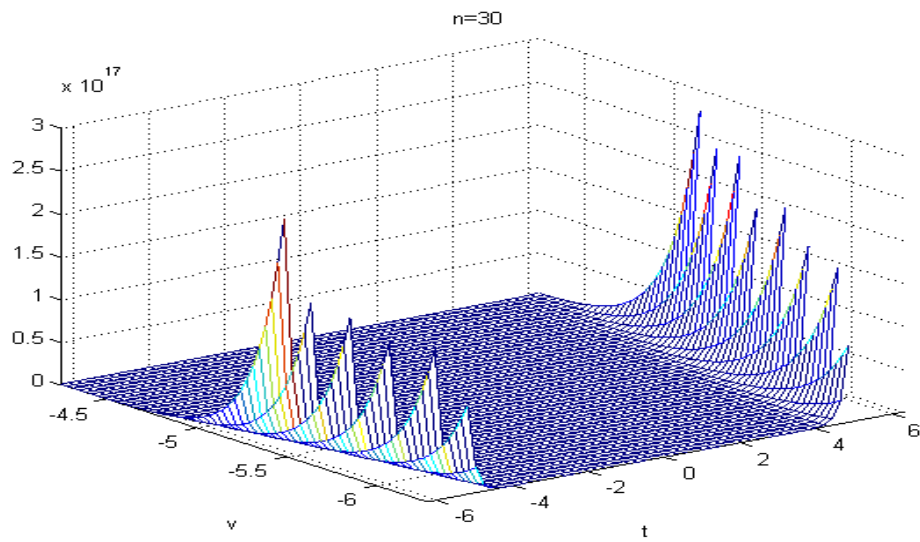


FIG. 3.6 – La solution tronquée en $n = 30$

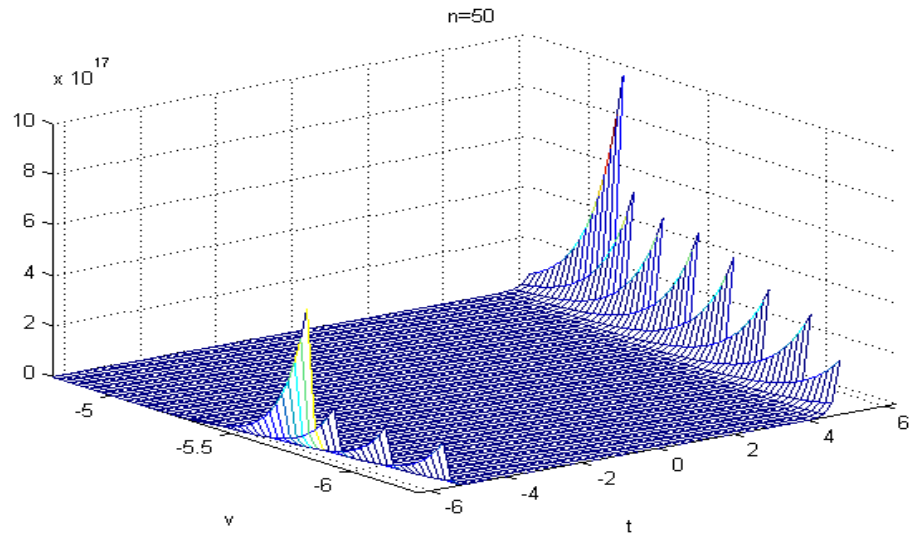


FIG. 3.7 – La solution tronquée en $n = 50$

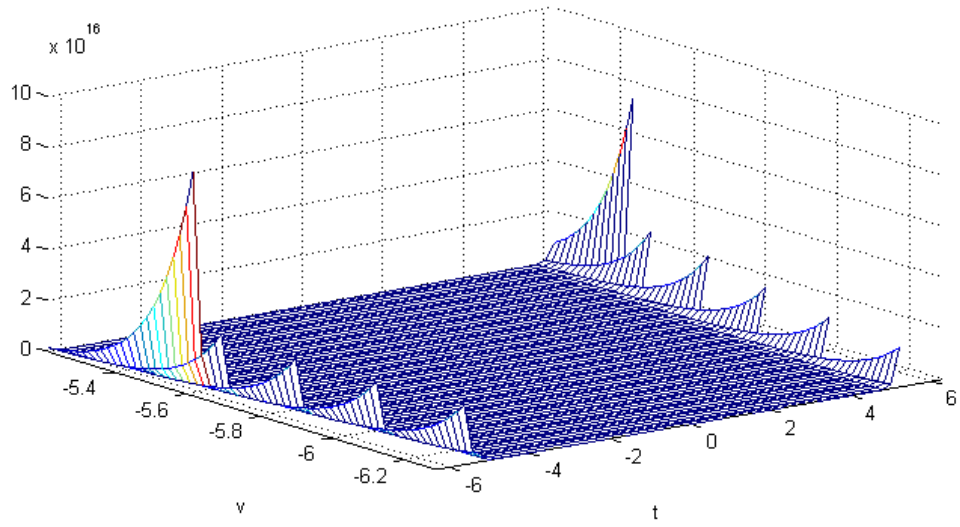


FIG. 3.8 – L'erreur $|n(v, t) - S_{50}|$

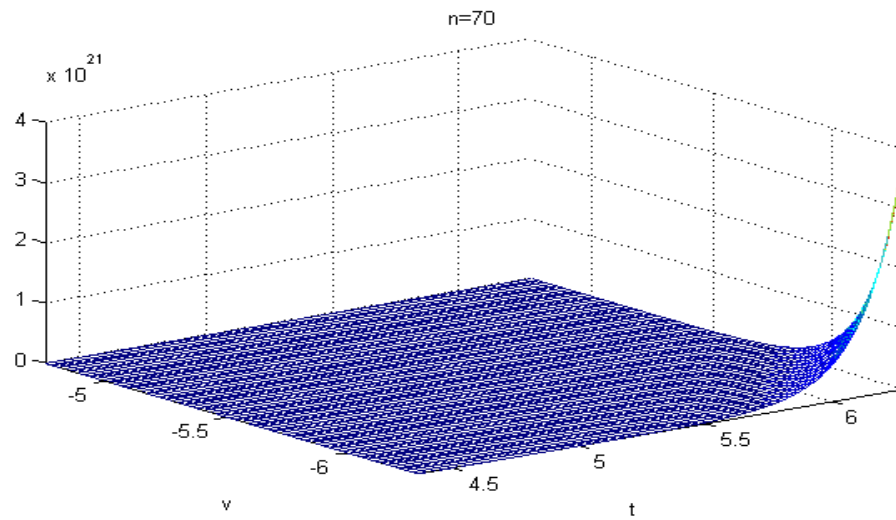


FIG. 3.9 – La solution tronquée en $n = 70$

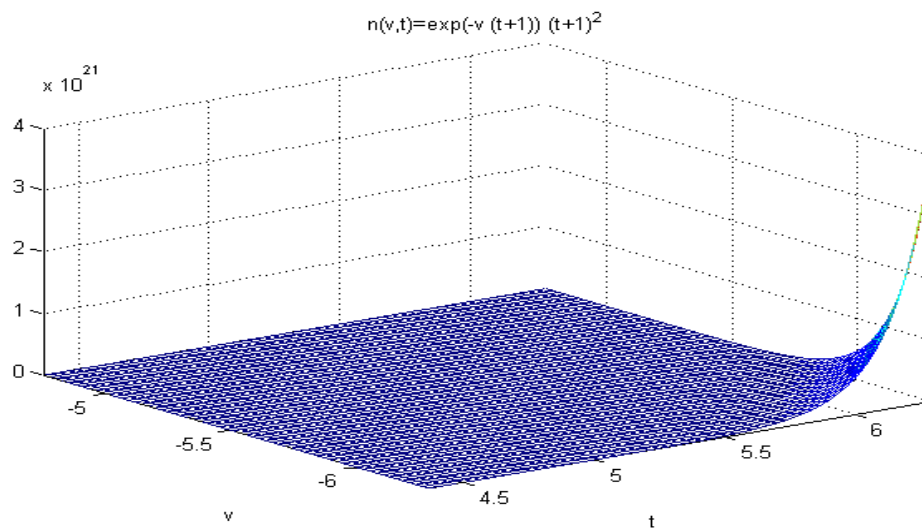


FIG. 3.10 – La solution analytique

2- Le cas pour $n_0(v) = e^{-v}$, $S(v) = v^2$, $\rho(v, v') = \frac{2}{v'}$ et $\omega(v, v') = 0$

L'équation (3.40) devient :

$$\frac{\partial n(v, t)}{\partial t} = -v^2 n(v, t) + \int_v^{+\infty} \frac{2}{v'} (v')^2 n(v', t) dv' \quad (3.42)$$

De la même manière que dans l'exemple précédent :

les composants de la solution $n_m(v, t)$ sont déterminés par le schéma de récursion d'Adomian suivant :

$$n_0(v, t) = n(v, 0) = e^{-v}$$

$$\begin{aligned} n_1(v, t) &= \int_0^t \left(-n_0(v, t) v^2 + \int_v^{+\infty} \frac{2}{v'} (v')^2 n_0(v', t) dv' \right) dt \\ &= e^{-v} (2t + 2vt - v^2 t) \end{aligned}$$

Le terme général est :

$$\begin{aligned} n_m(v, t) &= \int_0^t \left(-v^2 n_{m-1}(v, t) + \int_v^{+\infty} \frac{2}{v'} (v')^2 n_{m-1}(v', t) dv' \right) dt \\ &= \frac{(-1)^m}{m!} t^m v^{2m-2} (-2m - 2mv + v^2) e^{-v} \end{aligned}$$

Alors

$$\begin{aligned} n(v, t) &= e^{-v} + \sum_{m=1}^{+\infty} n_m(v, t) \\ &= \sum_{m=0}^{+\infty} \left(\frac{(-1)^m}{m!} t^m v^{2m-2} (-2m - 2mv + v^2) e^{-v} \right) e^{-v} \\ &= (1 + 2t + 2tv) e^{-v(1+tv)}. \end{aligned}$$

donc la solution de l'équation (3.42) est :

$$n(v, t) = e^{v^2 t - v} (1 + 2t + 2tv).$$

En effet,

pour le 2^{ème} exemple , la solution tronquée en n s'écrit :

$$S_n = e^{-v} \sum_{m=2}^n \left(\frac{(-1)^m}{m!} t^m v^{2m-2} \left((-1)^m 2m + (-1)^m 2mv + v^2 \right) e^{-v} \right)$$

un calcul similaire abouti à :

$$S = \lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = e^{v^2 t - v} (1 + 2t + 2tv).$$

alors

$$n(v, t) = e^{v^2 t - v} (1 + 2t + 2tv).$$

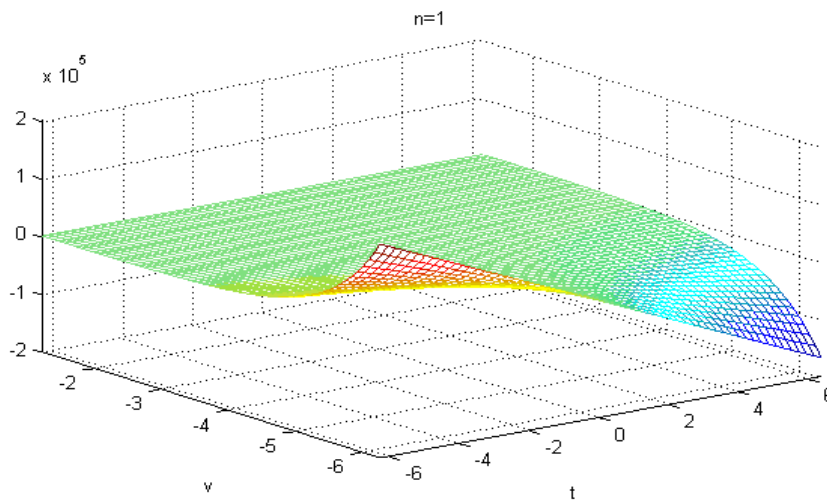
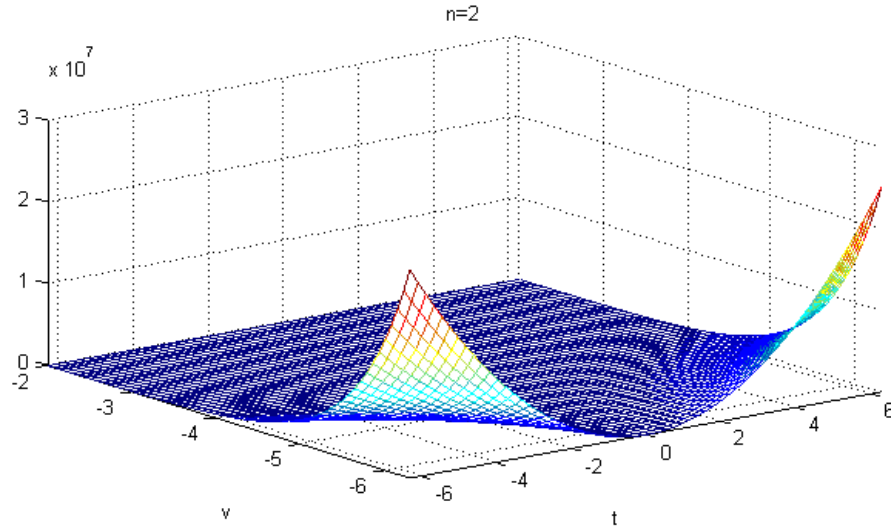


FIG. 3.11 – La solution tronquée en $n = 1$


 FIG. 3.12 – La solution tronquée en $n = 2$

3- Le cas pour l'équation

$$\frac{\partial n(v, t)}{\partial t} = \frac{1}{k} (n^{feed}(v) - n(v, t)) - S(v) n(v, t) + \int_v^{+\infty} \rho(v, v') S(v') n(v', t) dv' \quad (3.43)$$

Où $\rho(v, v') = \frac{2}{v}$, $S(v) = v$, $\omega(v, v') = 0$ et $n^{feed}(v) = \delta(v - 2)$

δ : fonction delta de dirac.

L'équation (3.43) peut être s'écrit

$$\frac{\partial n(v, t)}{\partial t} = \frac{n^{feed}(v)}{k} + \int_v^{+\infty} \rho(v, v') S(v') n(v', t) dv' - \left(\frac{1}{k} + S(v) \right) n(v, t) \quad (3.44)$$

Intégrant l'équation (3.44) par rapport à t nous avons :

$$n(v, t) = \frac{n^{feed}(v)}{k} t + \int_0^t \left(\int_v^{+\infty} \rho(v, v') S(v') n(v', t) dv' - \left(\frac{1}{k} + S(v) \right) n(v, t) \right) dt$$

le terme n_0 est :

$$n_0(v, t) = \frac{t \cdot \delta(v - 2)}{k}$$

le terme suivant est :

$$n_1(v, t) = \frac{t^2 (1 + kv) \cdot \delta(v - 2) - 2k \cdot H(2 - v)}{2k^2}$$

avec H c'est la fonction d'Heaviside.

le terme générale :

$$n_{m+1}(v, t) = \frac{(-1)^m t^{m+1}}{(m+1)! k^{m+1}} (1 + kv)^{m-2} ((1 + kv)^2 \cdot \delta(v - 2) - (2mk - 2k^2 m(m-1) + k^2 v m(m+1)) \cdot H(2 - v))$$

la solution est :

$$n(v, t) = n_0(v, t) + n_1(v, t) + \sum_{m=2}^{+\infty} \frac{(-1)^m t^{m+1}}{(m+1)! k^{m+1}} (1 + kv)^{m-2} ((1 + kv)^2 \cdot \delta(v - 2) - (2mk - 2k^2 m(m-1) + k^2 v m(m+1)) \cdot H(2 - v))$$

ou encore

$$n(v, t) = \frac{1}{(1 + kv)^2} e^{-\frac{t(1+kv)}{k}} \left(\left(-1 + e^{\frac{t(1+kv)}{k}} \right) (1 + kv)^2 \cdot \delta(v - 2) \cdot (-2k + 2ke^{\frac{t(1+kv)}{k}} - 4k^2 e^{\frac{t(1+kv)}{k}} - 2t - 4kt - 2t^2 - 2ktv - 4k^2 tv + t^2 v - 4kt^2 v + 2kt^2 v^2 - 2k^2 t^2 v^2 + k^2 t^2 v^3) \cdot H(2 - v) \right)$$

l'expression ci-dessus peut être réduite encore sous la forme :

$$n(v, t) = \frac{\left(\left(1 - e^{-t\left(v+\frac{1}{k}\right)} \right) (2k^2 + (1 + 2k) \cdot \delta(v - 2)) \right)}{(1 + 2k)^2} + \frac{e^{-t\left(v+\frac{1}{k}\right)}}{(1 + 2k)^2} \cdot (t^2 (-2 + v) (1 + kv) + 2t (1 + 2k)) \cdot H(2 - v)$$

Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons examiné l'application de la méthode décompositionnelle d'Adomian pour résoudre quelques équations différentielles fractionnaires et l'équation intégral-différentielle de bilan de population pour la rupture dans le système continu.

Conclusion

L'ADM est une nouvelle méthode très efficace pour la résolution des équations différentielles fractionnaires et des équations intégro-différentielles, la méthode peut être généralisée à tous types d'équations fonctionnelles, les résultats sont d'une grande importance, sinon la troncature de la série approxime la solution analytique avec une grande précision. Certes, toutes "nouvelle méthode" conduit à des problèmes ouverts. pour l'ADM, les problèmes se situent, d'une part au niveau de la prise en compte des conditions initiales et aux limites et d'autre part dans la recherche d'une forme canonique d'Adomian standard valable pour tous les types d'équations.

Bibliographie

- [1] Serge Alinac et Batrick Gérard, Opérateurs pseudo-différentiels et Théorème de Nash Moser, Paris (1991)
- [2] Kendall Atkinson et Weimin Han, Theoretical Numerical Analysis, Springer (2001)
- [3] A.Intissar, Analyse Fonctionnelle et Théorie Spectrale pour les Opérateurs compacts auto-adjoints, (1997)
- [4] Saïdi Soumia, Cours sur La théorie spectrale des opérateurs, Université Mohamed Seddik Ben Yahia Jijel, Année universitaire 2016/2017
- [5] K.Abbaoui et Y.Cherruault , New Ideas for Proving Convergence of Decomposition Methods, computers Math.applic.vol.29 (1995), 103-108
- [6] Y.Cherruault , sur la convergence de la méthode d'Adomian, RAIRO. Recherche opérationnelle, tome 22, (1988), 291-299
- [7] K.Abbaoui et Y.Cherruault , Convergence of Adomian's Method Applied to differential Equations, computers Math.applic.vol.28 (1994), 103-109
- [8] Y.Cherruault , Convergence of Adomian's Method, Mathl Comput. Modelling. vol 14, (1990) 83-86
- [9] A.J.George et A.Chakrabarti, The Adomian Method Applied to Some Extraordinary Differential Equations, Appl. Math, Vol. 8 (1995), 91-97.
- [10] A. Hasseine, A. Bellagoun et H.-J. Bart, Analytical solution of the droplet breakup equation by the Adomian decomposition method, Applied Mathematics and Computation 218, 2249–2258, (2011)

- [11] L.Schwartz, cours d'analyse, Hermann, Paris, 1981.
- [12] Ziff R.M et McGrady E.D, the kinetics of cluster fragmentation and depolymerization.
journal of physics A : Mathematical and General, vol 18, 3027-3037, 1985
- [13] Ramkrishna.D, Population Balances Theory and Application to Particulate Systems in
Engineering, Academic Press, San Diego, 2000

Annexe A :

Les Fonctions mathématiques

On présente un rappel sur Les Fonctions mathématiques utilisées dans les chapitres précédents.

Fonction Gamma

La Fonction Gamma d'Euler est définie par l'intégrale suivante :

$$\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} dt, \quad \text{pour } x \in \mathbb{R}^+$$

Fonction erreur

la fonction erreur est définie par l'intégrale suivante :

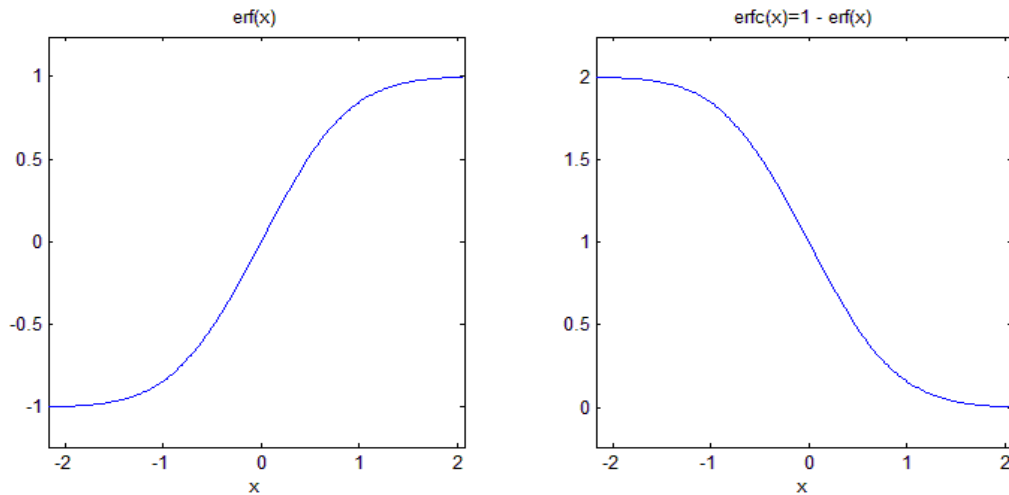
$$\operatorname{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2} dt, \quad x \in \mathbb{R}$$

la fonction erreur complémentaire notée erfc est définie par :

$$\operatorname{erfc}(x) = 1 - \operatorname{erf}(x)$$

par conséquent

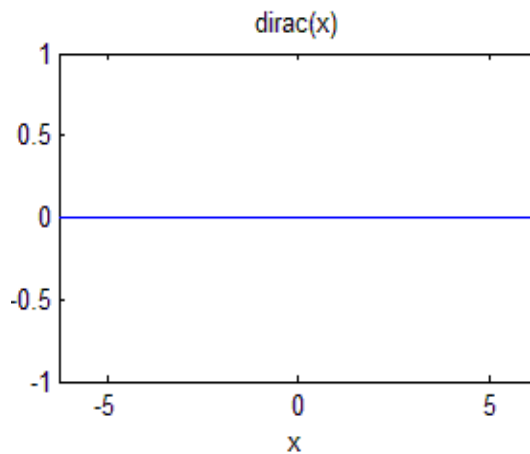
$$\operatorname{erf}(0) = 0 \quad \text{et} \quad \operatorname{erf}(\infty) = 1$$



Fonction Delta de Dirac

La fonction Delta de Dirac en a est définie par :

$$\delta(x - a) = \begin{cases} \infty & , si \ x = a \\ 0 & , si \ x \neq a \end{cases}$$



Fonction d'Heaviside

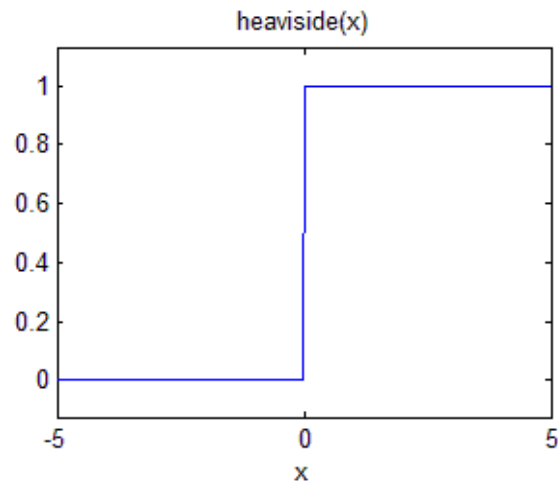
la fonction d'Heaviside à pas centrée en a est définie de la manière suivante :

$$H(x - a) = \begin{cases} 1 & , si \ x > a \\ 0 & , si \ x < a \end{cases}$$

pour $a = 0$ la discontinuité en $x = 0$

$$H(x) = \begin{cases} 1 & ,si \ x > 0 \\ 0 & ,si \ x < 0 \end{cases}$$

la figure suivante c'est la représentation graphique de la fonction d'Heaviside



la relation entre la fonction Delta de Dirac et la fonction d'Heaviside est

$$\frac{dH(x-a)}{dx} = \delta(x-a)$$

Annexe B :

Logiciel MATLAB

Mat (rix) **lab**(oratory) est un logiciel puissant doté à la fois d'un langage de programmation haut niveau et d'outil dédiés au calcul numérique et à la visualisation numérique. Développé en c par la société mathworks, Matlab était destinée initialement à faire du calcul matriciel simplement.

Actuellement, Matlab recouvre d'autre domaine d'application de l'informatique scientifique :

- Visualisation graphique 2D et 3D.
- Résolution d'équation aux dérivées partielle
- Optimisation
- Simulation

Le système Matlab se divise en deux parties :

– Le noyau Matlab, qui comprend :

1. l'environnement de travail offrant plusieurs facilité pour la manipulation des données. Son interpréteur permet de tester rapidement ses propres programmes Matlab.
2. Le système graphique Matlab.
3. Le langage de programmation Matlab.
4. Une librairie de fonction mathématique Matlab.
5. Un système d'interface facilitant l'exécution de programme C ou fortran sous Matlab.

- Une collection de toolboxes (boîtes d’outils) regroupant un ensemble de fonction spécifiques.

Les fonctions Matlab suivantes sont utilisées pour obtenir la solution tronquée en n des équations dans les chapitres 2 et 3 par la méthode d’Adomian

```
function [m] = adomianm(n)

syms t
y0=1;
ss=y0;
for i=1 :n
    y1=int(y0,t);
    uu=y1;
    y0=y1;
    ss=uu+ss;
end
m=simplify(ss);
end
```

```
function [ z] = adomfrac( n,c)

syms x t
f=x;
f1=subs(f,x,t);
h=(1/gamma(1/2))*int(f1.*((x-t).^(1/2)),t,0,x);
g=c.*sqrt(x)+h;
y0=g;
ss=y0;
for i=1 :n
    y1=-subs(h,f1,y0);
```

```
yy=y1 ;
ss=yy+ss ;
end
z=simplify(ss) ;
end
```

```
function [h]=adomm1(n)
syms u v t
ro = 2./u ;
gama = u ;
nn = exp(-u) ;
f0 =gama ;
ss = subs(nn,u,v) ;
for i=1 :n
    ff0=int(f0.*nn.*ro,u,v,Inf) ;
    nn1=subs(nn,u,v) ;
    gama1=subs(gama,u,v) ;
    f1=int(ff0-gama1.*nn1,t) ;
    uu=f1 ;
    nn=subs(f1,v,u) ;
    ss=uu+ss ;
end
h=simplify(ss) ;
end
```

```
function [h]=ado1(n)
syms u v t
ro = 2./u ;
```



```
gama = u.^2;
nn = exp(-u);
f0 =gama;
ss = subs(nn,u,v);
for i=1 :n
    ff0=int(f0.*nn.*ro,u,v,Inf);
    nn1=subs(nn,u,v);
    gama1=subs(gama,u,v);
    f1=int(ff0-gama1.*nn1,t);
    uu=f1;
    nn=subs(f1,v,u);
    ss=uu+ss;
end
h=simplify(ss);
end
```

```
function [h]=adomiang(n,k)
syms u v t
ro = 2./u;
gama = u;
nfeed=dirac(v-2);
nn = t.*dirac(u-2)./k;
f0 =gama;
ss = subs(nn,u,v);
for i=1 :n
    ff0=int(f0.*nn.*ro,u,v,Inf);
    nn1=subs(nn,u,v);
    gama1=subs(gama,u,v);
```

```
f1=int(ff0-(gama1+(1/k)).*nn1,t);  
uu=f1;  
nn=subs(f1,v,u);  
ss=uu+ss;  
end  
h=simplify(ss);  
end
```

Annexe C :

Abréviations et Notations

Notations

\mathbb{k}	corps
\mathbb{R}	les nombres réels
\mathbb{C}	les nombres complexes
$\ \cdot\ $	norme
$(E, \ \cdot\)$	e.v.n
$C([a, b], \mathbb{R})$	l'espace des fonctions continues de $[a, b]$ dans \mathbb{R}
L	opérateur linéaire
$\ \cdot\ _V$	norme de l'espace V
$\mathcal{L}(V, W)$	l'espace des opérateurs linéaires de V dans W
$Gr(A)$	le graphe de A
$D(A)$	le domaine de A
$C^\infty(V)$	l'espace des fonctions indéfiniment dérivable sur V
$C[a, b]$	l'espace des fonctions continues de $[a, b]$
$k(\cdot, \cdot)$	noyau d'un opérateur intégral
B_E	boule unité de E

Id_E	l'opérateur identité de E
A^{-1}	l'opérateur inverse de A
$\mathcal{L}(E)$	l'espace des opérateurs linéaires de E dans lui même
N	opérateur non linéaire
A_n	polynômes d'Adomian
$\frac{\partial}{\partial t}$	dérivée partielle par rapport à t
Γ	fonction Gamma
λ, μ, C	des constantes
$n(v, t)$	représente la densité de particules de dimension v au temps t .
$\rho(v, v')$	est la fonction de rupture
$S(v)$	le taux de rupture de noyau

Abréviations

ADM	Méthode Décompositionnelle d'Adomian
EDO	Equation Différentielle Ordinaire
EDF	Equation Différentielle Fractionnaire
EBP	Equation de Bilan de Population
e.v.n	Espace Vectoriel Normé