République Algérienne Démocratique et Populaire

Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

UNIVERSITÉ MOHAMED KHIDER, BISKRA

FACULTÉ des SCIENCES EXACTES et des SCIENCES de la NATURE et de la VIE

DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES

Mémoire présenté en vue de l'obtention du Diplôme **:**

MASTER en Mathématiques

Option : **ANALYSE**

Par

Boualam Hadjer

Titre :

PROBLEME INVERSE DE CONDUCTION DE LA CHALEUR

Membres du Comité d'Examen :

Dr.	**ChemchAm El Madani**	UMKB	Président
Dr.	**Dakhia Ghania**	UMKB	Encadreur
Dr.	**Ghodjmis Fatiha**	UMKB	Examinateur

Juin 2019

Dedicace

J'*offre le fruit de ce travail à la source d'espoir dans ma vie, mon père, je t'aime papa.*

À ma trés chère mère et à la lumière de mon chemin, je t'aime

*À mon cher oncle "**Cherif**", merci beaucoup pour votre soutien et vos encouragements.*

*À la source du bonheur, ma sœur "**Maroua**".*

*À mes trés chers frères : "**Mohamed El Amin**", "**Abed El Basset**", "**Mossaab**", "**Abed El Samed**" .*

À mon compagnon de vie, mon fiancé, et toute ma famille.

*À ma cher amie "**Dalila**", et à tous mes amies ainsi que mes proches.*

REMERCIEMENTS

Au début et avant tous, je rends grâce à **ALLAH** le tout puissant de m'a aidé à terminer ce travail .

Je tiens à souligner l'excellent remerciement à **Mme Dakhia Ghania** pour l'honneur qu'il me fait en proposant ce thème. M'encourager et me diriger pour sa bonne réalisation, et en encadrant ce mémoire et pour toute l'aide et les conseils et encore plus pour tous le temps qu'il m'a consacré pour me suivre pendant la rédaction de ce travail.

Également, je remercie les membres du jury : **Dr.Chemcham El Madani** et **Dr.Ghodjmis Fatiha**, pour examiner et juger mon travail.

Je profite aussi de cette occasion pour remercier tous les enseignents ainsi que mes collègues du département de mathématique et informatique de **L'UNIVERSITÉ MOHAMED KHIDER, BISKRA.**

Table des matières

Introduction

L'équation de la chaleur est une équation aux dérivées partielles parabolique, pour décrire le phénomène physique de conduction thermique, introduite initialement en *1807* par *Joseph Fourier*, après des expériences sur la propagation de la chaleur, suivies par la modélisation de l'évolution de la température avec des séries trigonométriques, appelées séries de *Fourier* et transformées de *Fourier*. Il a permi ainsi une grande amélioration de la modélisation mathématique des phénomènes physiques.

Dans des nombreuses applications d'ingénierie, nous devons déterminer la température des deux côtés d'un mur épais, mais un côté est inaccessible aux mesures(voir : [8]). Ce problème conduit à l'équation parabolique suivante dans le quart du plan :

$$\begin{cases} U_{xx} = U_t & x > 0, \quad t > 0, \\ U(1.t) = g(t) & t \geq 0, \\ U(x, 0) = 0 & x \geq 0. \end{cases}$$

Notre but est de déterminer la condition aux limites source $f(t) = U(0, t)$ à partir de la température $g(t) = U(1, t)$ au point intérieur $x = 1$. Ce problème est mal posé. La solution (si elle existe) ne dépend pas continûment des données. Le problème de la détermination de la température sur la surface a été considéré par plusieurs auteurs avec différentes méthodes (voir : [1], [3]). Notre mémoire est une lecture d'une partie de l'article ([9]), où les auteurs ont donné un algorithme stable pour identifier cette source en combinant deux metodes : la méthode de régularisation de Fourier et la méthode des différences finis.

Le manuscrit est composé de deux chapitres.

- Dans le premier chapitre, on définit les problèmes inverses et on donne quelques exemples sur l'équation de la chaleur. On définit aussi les problèmes mal posés et leurs étude par la régularisation (on cite ici la méthode de *Tikhonov* et la méthode de *Fourier*). A la fin, on donne une petite introduction au problème de *Cauchy* pour l'équation de la chaleur.
- Le deuxième chapitre est consacré à l'étude de notre problème. On utilise deux méthodes de régularisation : la régularisation de *Fourier* et la semi-discrétisation.

Chapitre 1

Notions préliminaires

Dans ce chapitre, on donne quelques notions préliminaires. Pour plus de détail voir : [1], [2], [3], [10] et [11].

1.1 Problèmes inverse et direct

Un problème inverse consiste à déterminer une ou plusieurs causes de ce problème en ayant connaissance des effets. On peut opposer les problèmes inverses aux problèmes directs dans lesquels on cherche une solution à partir de paramètres connus. Les problèmes directs nous semblent plus naturels car les mêmes causes conduisent au mêmes effets. En revanche, il semble moins évident qu'un effet soit la conséquence d'une unique cause. C'est cette caractéristique qui fait la difficulté des problèmes inverses. Les problèmes inverses interviennent dans plusieurs domaines :

- l'imagerie médicale (échographie, scanners, etc...),
- le radar (détermination de la forme d'un obstacle),
- le traitement d'image (restauration d'images floues),
- la chimie (détermination des constantes de réaction),etc...

Du point de vue mathématique, ces problèmes se répartissent en deux grands groupes. D'une part, il y a les problèmes *linéaires* ($Kx = y$) qui se ramènent à la résolution d'une équation intégrale de première espèce dans le cas continu ou à la résolution d'un système dans le cas discret. Le recours à l'analyse fonctionnelle et à l'algèbre linéaire permet d'obtenir des résultats précis et des algorithmes efficaces. D'autre part, il y a les problèmes *non-linéaires*, qui sont le plus souvent des questions d'estimation de paramètres dans des équations différentielles ou aux dérivées partielles. Les problèmes *non-linéaires* peuvent se diviser en deux catégories selon que le paramètre que l'on cherche à estimer est un vecteur ou une fonction.

1.1.1 Différents problèmes inverses autour de l'équation de la chaleur

Reconstitution de l'état passé :

On s'intéresse ici à la répartition de la température T dans un matériau hétérogène occupant un domaine de $\Omega \subset \mathbb{R}^3$,

$$\begin{cases} \rho c \dfrac{\partial T}{\partial t}(t,x,y,z) - \operatorname{div}(K \nabla T(t,x,y,z)) = f \quad \text{dans } \Omega, \\ \\ \dfrac{\partial T}{\partial n} = g \text{ sur } \partial\, \Omega\ , \\ \\ T(0,x,y,z) = T_0(x,y,z). \end{cases}$$

On peut essayer de retrouver la condition initiale $T(0,x,y,z) = T_0(x,y,z)$ à partir d'une mesure de T à un temps donné et en connaissant les paramètres ρc et K.

Identification des conditions aux bords :

Ce problème est celui rencontré par l'entreprise *Vallourec* (à *Paris*). Pour donner une certaine structure à leurs tuyaux, il faut le refroidir à une certaine température à un moment donné. On pose donc le système suivant :

$$\begin{cases} \rho(x,y,z)c(x,y,z)\dfrac{\partial T}{\partial t}(t,x,y,z) - \operatorname{div}(K(x,y,z)\nabla T(t,x,y,z)) = f \text{ dans } \Omega, \\ \dfrac{\partial T}{\partial n} = g \text{ sur } \Omega, \\ T(0,x,y,z) = T_0(x,y,z). \end{cases}$$

Le but de ce problème inverse est de retrouver les conditions aux bords g qui sont des conditions de Neumann.

L'entreprise connaît les différents paramètres de l'équation d'état : ρ, c et K, et elle mesure la température en neuf points du tube à différents instants.

Identification de la conductivité

$$\begin{cases} \rho c\dfrac{\partial T}{\partial t}(t,x,y,z) - \operatorname{div}(K(x,y,z)\nabla T(t,x,y,z)) = f \text{ dans } \Omega, \\ \\ \dfrac{\partial T}{\partial n} = g, \\ \\ T(0,x,y,z) = T_0(x,y,z). \end{cases}$$

Pour l'identification du paramètre K, on peut par exemple prendre comme données connues : plusieurs mesures de la température à différents moments ainsi qu'en différents points en supposant également que ρ et c sont connus.

1.2 Problèmes bien et mal posés

Dans un livre célèbre, le mathématicien français *Jaques Hadamard*, a introduit dès 1923 la notion de problème bien posé. Il s'agit d'un problème dont :

- la solution existe.
- elle est unique.
- elle dépend continûment des données.

Bien entendu, ces notions doivent être précisées par le choix des espaces (et des topologies) dans lesquels les données et la solution évoluent.

Dans ce même livre *Hadamard* laissait entendre (et c'était une opinion répandue jusqu'à récemment) que seul un problème bien posé pouvait modéliser correctement un phénomène physique. Après tout, ces trois conditions semblent très naturelles. En fait, nous verrons que les problèmes inverses ne vérifient souvent pas l'une ou l'autre de ces conditions, voire les trois ensembles. Après réflexion, cela n'est pas si surprenant :

- Un modèle physique étant fixé, les données expérimentales dont on dispose sont en général bruitées, et rien ne garantit que de telles données proviennent de ce modèle, même pour un autre jeu de paramètres.
- Si une solution existe, il est parfaitement concevable (et nous le verrons sur des exemples) que des paramètres différents conduisent aux mêmes observations.

Les trois conditions dans la définition ci-dessus n'ont pas toutes la même importance :

- Le fait que la solution d'un problème inverse puisse ne pas exister n'est pas une difficulté sérieuse. Il est habituellement possible de rétablir l'existence en relaxant la notion de solution (procédé classique en mathématique).
- La non-unicité est un problème plus sérieux. Si un problème a plusieurs solutions, il faut un moyen de choisir entre elles. Pour cela, il faut disposer d'informations supplémentaires (une information a priori).

- Le manque de continuité est sans doute le plus problématique, en particulier en vue d'une résolution approchée ou numérique. Cela veut dire qu'il ne sera pas possible (indépendamment de la méthode numérique) d'approcher de façon satisfaisante la solution du problème inverse, puisque les données disponibles seront bruitées donc proches, mais différentes, des données (réelles).

Un problème qui n'est pas bien posé au sens de la définition ci-dessus est dit mal posé (ill-posed en anglais).

1.3 Régularisation

Afin de résoudre le problème de stabilité, on régularise le problème mal-posé, c'est -à -dire de le remplacer par un autre, bien-posé de sorte que l'erreur commise soit compensée par le gain de stabilité. La principale difficulté dans l'application d'une méthode de régularisation à un problème particulier est la détermination du paramètre de régularisation lui-même. On cite par exemple la méthode de régularisation de *Tikhonov* et la méthode de *Fourier.* On désigne par $K : X \to Y$ un opérateur linéaire et borné défini entre deux espaces de *Hilbert* X et Y. La méthode de*Tikhonov* consiste à résoudre le système linéaire :

$$Kx = y$$

qui revient à minimiser :

$$\|Kx - y\|_y$$

tels que $x \in X$, $y \in Y$, en ajoutant un terme dépend d'un paramètre α,puis fait tendre α vers 0. Ce qui conduit à la minimisation du problème $J_\alpha(x) = \|Kx - y\|^2 + \alpha \|x\|^2$ pour $x \in X$.

La deuxième méthode est la méthode de *Fourier,* qui consiste à éliminer toutes les hautes fréquences dans l'intégrale de *Fourier.* Nous tronquons l'intégrale en considérant seulment l'ensemble $|\xi| \leq \xi_m$, où ξ_m est un constant positif.

Pour une lecture plus approfondie, on propose de voir : [?] et [3].

1.4 Problème de Cauchy pour l'équation de la chaleur

Le problème de Cauchy parabolique (problème aux limites initiale) est une EDP qui verifie certaines conditions qui sont données sur la frontière du domaine.

Comme un exemple simple d'un problème de *Cauchy* unidimensionnel mal posé pour l'équation de la chaleur, nous avons :

$$\begin{cases} U_t = U_{xx} & 0 < x < 1, \\ U(x,0) = 0 & 0 < x < 1, \\ U(0,t) = g(t) & 0 < t < 1, \\ U_x(0,t) = h(t) & 0 < t < 1. \end{cases} \tag{1.1}$$

A partir des données de la limites gauche, nous voulons déterminer la solution à la limite droite $U(1,t) = f(t)$. C'est une équation de chaleur latérale dans un domaine borné, nous considérons désormais que toutes les fonctions impliquées sont en L^2.

Chapitre 2

Etude d'un problème inverse de l'équation de la chaleur

2.1 Enoncé du problème

On considère le problème suivant :

$$\begin{cases} U_{xx} & = U_t & x > 0,\ t > 0, \\ U(1.t) & = g(t) & t \geq 0, \\ U(x,0) & = 0 & x \geq 0. \end{cases} \tag{2.1}$$

Comme la donnée g est basée sur les observations physiques, nous avons une fonction de donnée pertubuée $g^\delta \in L^2(\mathbb{R})$ qui verifie $\left\|g^\delta - g\right\| \leq \delta$ où$\|.\|$ désigne la norme L^2, et la constante $\delta > 0$ représente le niveau de bruit. Le problème d'identification de la source f est mal posé dans le sens que la solution (si elle existe) ne dépend pas en continument de la donnée g. Ceci peut être vu en résolvant (2.1) dans le domaine de fréquentiel.

Soit $\hat{v}$ la transformée de *Fourier* de la fonction $v(t) \in L^2(R)$ définie par :

$$\hat{v}(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} v(t)\, e^{-i\xi t} dt,\ \xi \in \mathbb{R},$$

et $\|.\|_s$ représente la norme dans l'espace de *Sobolev* $H^s(R)$ définie par :

$$\|v\|_s = \left(\int_{-\infty}^{+\infty} \left(1+\xi^2\right)^s |\hat{v}(\xi)|^2 \, d\xi\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Lorsque $s = 0$, $\|.\|_0 = \|.\|$ représente la norme $L^2(R)$.

Pour utiliser les techniques de *Fourier*, nous étendons les fonctions $U(x,t)$ et $g(t)$ à tout l'axe t réel en les définissant comme nuls pour $t < 0$. Le problème (2.1) peut être maintenant formulé, dans l'espace de fréquences, comme suit :

$$\begin{cases} \hat{U}_{xx}(x,\xi) = i\xi\hat{U}(x,\xi) \;\; x > 0, \;\; \xi \in \mathbb{R}, \\ \hat{U}(1,\xi) = \hat{g}(\xi), \;\; \xi \in \mathbb{R}, \\ \hat{U}(.,\xi), \;\; x \to +\infty. \end{cases} \tag{2.2}$$

La solution (formelle) du problème précédent est :

$$\hat{U}(x,\xi) = e^{\sqrt{i\xi}(1-x)}\hat{g}(\xi). \tag{2.3}$$

où :

$$\sqrt{i\xi} = \begin{cases} (1+i) = \sqrt{\xi/2}, \;\; \xi \geq 0, \\ (1-i) = \sqrt{\xi/2}, \;\; \xi < 0. \end{cases}$$

Proof. Dans ce problème, on a une équation différentielle d'ordre deux par rapport à la variable x :

$$\xi i\hat{U} = \hat{U}_{xx} \Longleftrightarrow i\xi\hat{U} - \hat{U}_{xx} = 0 \tag{2.4}$$

Son polynome caractéristique est :

$$i\xi - p^2 = 0 \Rightarrow p = \pm\sqrt{i\xi}, \tag{2.5}$$

alors, la solution $\hat{U}(x,\xi)$ est donnée par :

$$\hat{U}(x,\xi) = A\exp\left(\sqrt{i\xi x}\right) + B\exp\left(-\sqrt{i\xi x}\right), \tag{2.6}$$

où $\sqrt{i\xi}$ dénote la racine carrée principale,

$$\sqrt{i\xi} = \begin{cases} (1+i)\sqrt{|\xi|/2}, \ \xi \geq 0, \\ (1-i)\sqrt{|\xi|/2}, \ \xi < 0. \end{cases}$$

A partir des conditions aux limites, on obtient :

$$\hat{U}(x,\xi) = e^{\sqrt{i\xi}(1-x)}\hat{g}(\xi) \tag{2.7}$$

et en particulier pour $x = 0$,

$$\hat{f}(\xi) = e^{\sqrt{i\xi}}\hat{g}(\xi). \tag{2.8}$$

■

Remarque 2.1.1 *Il est clair, d'après l'équation (2.8), que la transformation* $\hat{g}$ *doit décroître plus rapidement que le facteur* $\exp\left(-\sqrt{\frac{|\xi|}{2}}\right)$. *Cela implique que* g *doit appartenir à l'espace de Sobolev* $H^s(\mathbb{R})$ *pour tout* $s > 0$. *Cepandant, en général, les données bruitées* g^δ *ne possèdent pas une telle propriété de décroissance. Ainsi, la simulation numérique est très difficile et une régularisation spéciale est requise. Certains articles ont présenté des algorithmes mathématiques et efficaces de ces problèmes. Voir : [3] , [4] et [5].*

2.2 Problème direct

L'étude du problème inverse passe par le problème direct. Nous avons besoin de la solution du problème direct sous une forme explicite. Le problème direct se pose comme suit : étant donné la source f, déterminer U qui satisfait le système suivant :

$$\begin{cases} U_{xx}(x,t) = & U_t(x,t) \quad x>0, t>0, \\ U(x,0) = & 0 \qquad\quad \forall x \geq 0, \\ U(0,t) = & f(t) \qquad t>0, \lim\limits_{x\to+\infty} U(x,t) = 0. \end{cases} \tag{2.9}$$

En appliquant la transformée de *Fourier-sinus* par rapport à la variable x,

$$\hat{U}(\xi,t) = \int_0^{+\infty} U(x,t)\sin(\xi x)\,dx,\ \xi \geq 0,$$

et son inverse :

$$U(x,t) = \frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty} \hat{U}(\xi,t)\sin(\xi x)\,d\xi,\ \ x \geq 0.$$

ce qui conduit au problème en fréquence et en temps suivant :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \hat{U}}{\partial t}(\xi,t) + \xi^2\hat{U}(\xi,t) & = \xi f(t), t>0, \\ \hat{U}(\xi,0) = 0. \end{cases} \tag{2.10}$$

Remarque 2.2.1 *On a utilisé la transformée de Fourier-sinus car $x \in \mathbb{R}^+$ et la condition de Dirichlet a été considérée (pour $x = 0$).*

Proposition 2.2.1 *La solution de problème (2.10) est donnée par :*

$$\hat{U}(\xi,t) = \int_0^t \xi f(s)\exp\left[\xi^2(s-t)\right]ds. \tag{2.11}$$

Proof. Dans ce problème, on a une équation différentielle d'ordre 1 non homogène par rapport à la variable t.

La solution de l'équation différentielle homogène est donnée par :

$$\hat{U}_H(\xi,t) = C(\xi)\exp\left(-\xi^2 t\right) \tag{2.12}$$

Maintenant trouvons une solution particulière de l'équation différentielle non homogène en utilisant la méthode de variation des constantes ;

$$\hat{U}_P(\xi,t) = C(\xi,t)\exp\left(-\xi^2 t\right) \tag{2.13}$$

En substituant cette expression dans cette dernière, nous obtenons :

$$\frac{\partial C}{\partial t}(\xi,t) = \xi \exp\left(\xi^2 t\right) f(t), \tag{2.14}$$

ce qui conduit à :

$$C(\xi,t) = C(\xi,0) + \int_0^t \xi f(s)\exp\left(\xi^2 s\right) ds.$$

Sachons que :

$$\hat{U}_P(\xi,0) = C(\xi,0) = 0, \tag{2.15}$$

alors :

$$\hat{U}(\xi,t) = \hat{U}_H + \hat{U}_P = \int_0^t \xi f(s)\exp\left(\xi^2(s-t)\right) ds \tag{2.16}$$

■

Proposition 2.2.2 *La solution du problème(2.9) est donnée par l'integrale :*

$$U(x,t) = \int_0^t \frac{x}{t-s} k(x,t-s) f(s)\, ds \tag{2.17}$$

telle que :

$$k\left(x,t\right)=\frac{1}{2\sqrt{\pi t}}\exp(\frac{-x^2}{4t}).$$

Proof. Par la transformée de *Fourier* inverse et le théorème de *Fubini*, on a :

$$\begin{aligned}
U\left(x,t\right) &= \frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty}\hat{U}\left(x,t\right)\sin\left(\xi x\right)d\xi \\
&= \frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty}\left(\int_0^t \xi f\left(s\right)\exp\left(\xi^2\left(s-t\right)ds\right)\right)\sin\left(\xi s\right)d\xi \\
&= \frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty}\left(\int_0^t f\left(s\right)\exp\left(\xi^2\left(s-t\right)\right)ds\right)\xi\sin\left(\xi s\right)d\xi \\
&= -\frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty}\left(\int_0^t \exp\left(\xi^2\left(s-t\right)\right)ds\right)\frac{\partial}{\partial x}\cos\left(\xi x\right)d\xi \\
&= -\frac{2}{\pi}\frac{\partial}{\partial x}\int_0^t\left(\int_0^{+\infty}\exp\left(\xi^2\left(s-t\right)\right)\cos\left(\xi x\right)d\xi\right)f\left(s\right)ds
\end{aligned}$$

Sachons que :

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\exp\xi^2\left(s-t\right)\cos d\xi=\frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{t-s}}\exp\left(\frac{-x^2}{4\left(t-s\right)}\right), \tag{2.18}$$

alors :

$$\int_0^{+\infty}\exp\left(\xi^2\left(s-t\right)\right)\cos\left(\xi x\right)=\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}\exp\xi^2\left(s-t\right)\cos d\xi=\frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{t-s}}\exp\left(\frac{-x^2}{4\left(t-s\right)}\right) \tag{2.19}$$

et par suite :

$$\begin{aligned}
U\left(x,t\right) &= -\frac{\partial}{\partial x}\int_0^t\frac{1}{\sqrt{\pi\left(t-s\right)}}\exp\left(\frac{-x^2}{4\left(t-s\right)}\right)f\left(s\right)ds \\
&= -2\int_0^t\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{2\sqrt{\pi\left(t-s\right)}}\exp\left(\frac{-x^2}{4\left(t-s\right)}\right)\right)f\left(s\right)ds \\
&= -2\int_0^t\left(\frac{-1}{2}\right)\frac{x}{t-s}\frac{1}{2\sqrt{\pi\left(t-s\right)}}\exp\left(\frac{-x^2}{4\left(t-s\right)}\right)f\left(s\right)ds
\end{aligned}$$

Posons :

$$k(x,t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi t}} \exp\left(\frac{-x^2}{4t}\right),$$

alors la solution du problème (2.9) est donnée par la convolution :

$$U(x,t) = \int_0^t \frac{x}{t-s} k(x,t-s) f(s)\, ds, \tag{2.20}$$

où $k(x,t)$ est appelé le noyeau de la chaleur. ■

Le flux de la chaleur dans un point intérieur $x = 1$ est défini par :

$$h(t) := U_x(1,t) = \int_0^t \left(1 - \frac{1}{2(t-s)}\right) \frac{1}{t-s} k(1,t-s) f(s)\, ds.$$

Pour plusieur de détail, voir ([6]).

Le problème (2.9) est bien posé dans le sens du théorème suivant :

Théorème 2.2.1 *On a :*

a) La solutiont $t \longrightarrow U(.,t)$ est unique dans l'espace :

$$H = C^0\left([0,+\infty[\,, H^2\left(\mathbb{R}^+\right)\right) \cap C^1\left(]0,+\infty[\,, L^2\left(\mathbb{R}^+\right)\right).$$

b) On suppose que $f \in L^2(\mathbb{R})$. Alors, pour tout $s \geq 0$:

$$U(x,.) \in C^0\left([0,+\infty[\,, L^2(\mathbb{R})\right) \cap C^\infty\left(]0,+\infty[\,, H^s(\mathbb{R})\right),$$

et on a l'estimation de stabilité :

$$\|U(x,.)\|_s \leqslant C(s,x_0)\,\|f\| \text{ pour tout } x \geqslant x_0 > 0. \tag{2.21}$$

Proof.

a) Supposons que : $t \to U(.,t)$ est dans l'espace H. Après multiplier dans lEDP avec U, intégrer par rapport à x, on obtient le résultat d'identité suivant :

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_0^{+\infty} |U(x,t)|^2\,dx + \int_0^{\infty} |U_x(x,t)|^2\,dx = -f(t)\,U_x(0,t)\,.$$

Si $f = 0$, Il s'ensuit que $E(t) = \dfrac{1}{2}\|u(.,t)\|^2$ est une fonction décroissante. Puisque $E(0) = 0$, U doit être nulle.

b) En utilisant (2.3) et (2.8) on obtient $\hat{U}(x,\xi) = \exp\left(-x\sqrt{i\xi}\right)\hat{f}(\xi)$. Puisque $\left|\exp\left(-x\sqrt{i\xi}\right)\right| = \exp\left(-x\sqrt{\dfrac{|\xi|}{2}}\right)$, on voit que $U(x,.) \in H^s(\mathbb{R})$ pour tout $s \geq 0$.Si $x \geq x_0 > 0$, on a :

$$\|U(x,.)\|_s \leq \left[\sup_{\xi\geq 0}\left(1+\xi^2\right)^s\right]^{1/2}\left\|\hat{f}\right\| \leq C(s,x_0)\,\|f\|\,,$$

avec $C(s,x_0) = \left(\dfrac{5s}{x_0}\right)^s$.

D'après la représentation (2.20), nous voyons que $U(.,t)$ est C^∞ pour $x > 0$ et décroit rapidement lorsque $t \to \infty$.

D'autre part $\hat{U}(.,\xi)$ est C^∞ pour $x > 0$ et on a pour tout $n \in N$,

$$\widehat{\frac{\partial^n U}{\partial^n x}}(x,\xi) = \frac{\partial^n}{\partial^n x}\hat{U}(x,\xi) = \left(-\sqrt{i\xi}\right)^n \exp\left(-x\sqrt{i\xi}\right)\hat{f}(\xi)\,.$$

En utilisant la décroissance rapide du facteur $\exp\left(-x\sqrt{\dfrac{|\xi|}{2}}\right)$, on prouve que

$$\frac{\partial^n}{\partial^n x}U(x,.) \in H^s(\mathbb{R})\,.$$

Il reste à montrer que l'application $x \to U(x,.)$ est continue à $x = 0$, c'est-à-dire :

$$\lim_{x\to 0}\left\|\left(1-\exp\left(-x\sqrt{i\xi}\right)\hat{f}\right)\right\| = 0$$

En utilisant les inégalités :

$$\begin{aligned}
&\left|1-\exp\left(-x\sqrt{i\xi}\right)\right| \leq 2 && \text{pour } x \geq 0 \text{ et } \xi \in \mathbb{R}, \\
&\left|1-\exp\left(-x\sqrt{i\xi}\right)\right| \leq x\sqrt{A}\exp\left(x\sqrt{A}\right) && \text{pour } x \geq 0 \text{ et } |\xi| \leq A,
\end{aligned}$$

Il s'ensuit que pour tout $x \in [0,1]$ et pour tout $A \geq 1$,

$$\int_{\mathbb{R}} \left(1-\exp\left(-x\sqrt{i\xi}\right)\right)^2 \left\|\hat{f}\right\|^2 d\xi \leq x^2 A \exp\left(2x\sqrt{A}\right) \left\|\hat{f}\right\|^2 + 4 \int_{|\xi|\geq A} \left|\hat{f}\right|^2 d\xi.$$

Pour tout $\epsilon > 0$, si on choisit $Ax \leq 1$ et A assez grand, on peut obtenir le coté droite inferieure à ϵ.

■

On remarque que notre problème inverse est équivalent à l'équation intégrale de type de *Volterra* suivant :

$$g(t) = \int_0^t \frac{k(1, t-s)}{(t-s)} f(s)\, ds,$$

avec un noyeau de classe C^∞. Ce qui prouve une autre fois que le problème (2.1) est mal posé.

Cette équation est regularisé par la méthode de *Tikhonov* dans l'article [7].

2.3 Problème inverse

2.3.1 Problème de *Cauchy*

On considère le problème bien posé suivant :

$$\begin{cases}
U_{xx} = U_t & x > 1, \quad t > 0, \\
U(1,t) = g(t) & t > 0, \\
U(x,0) = 0 & x \geq 1.
\end{cases} \tag{2.22}$$

Si $g \in H^s(\mathbb{R})$, $s \geq \frac{1}{2}$, la solution est donnée par :

$$U(x,t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{U}(x,t) \exp(i\xi t)\, d\xi.$$

avec :

$$\hat{U}(x,t) = \hat{g}(\xi) \exp\left[\sqrt{i\xi}\,(1-x)\right].$$

alors on a :

$$U(x,t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{g}(\xi) \exp\left[\sqrt{i\xi}\,(1-x)\right] \exp(i\xi t)\, d\xi. \text{ pour tout } x \geq 1. \tag{2.23}$$

Puisque $\left|\exp\left[\sqrt{i\xi}\,(1-x)\right]\right| = \exp\left[-(x-1)\sqrt{\left|\frac{\xi}{2}\right|}\right]$, l'intégrale (2.23) est converge pour tout $x > 1$ et $U(x,.) \in H^\sigma(\mathbb{R})$ pour tout $\sigma > 0$.

Le flux $h(t)$ dans le point $x = 1$ est donnée par :

$$h(t) = U_x(1,t) \in H^{s-1/2}(\mathbb{R}),$$

alors :

$$h(t) = Hg(t) = -\int_{-\infty}^{+\infty} \sqrt{i\xi}\,\hat{g}(\xi) \exp(i\xi t)\, d\xi. \tag{2.24}$$

Remarque 2.3.1 *Nous allons voir que (2.1) est equivallent au problème de Cauchy suivant :*

$$\begin{cases} U_{xx}(x,t) & = U_t(x,t) \quad 0 < x < 1, \qquad t > 0, \\ U(1,t) & = g(t) \qquad U_x(1,t) = h(t), \quad t > 0, \\ U(x,0) & = 0 \qquad 0 < x < 1. \end{cases} \tag{2.25}$$

2.3.2 La régularisation de *Fourier* pour le flux de la chaleur

Puisque la donnée g^δ n'est pas régulière, pour calculer h numériquement, il est nécessaire de considérer l'intégrale de *Fourier* (*2.24*) seulement pour $|\xi| \leq \xi_m$, où ξ_m est un constant positif, c'est-à-dire éliminer toutes les hautes fréquences dans l'intégrale de *Fourie*r. Alors pour n'importe qu'elle donnée pertubée g^δ vérifie :

$$\left\| g - g^\delta \right\| \leq \delta,$$

on obtient un flux approximatif regularisé de h :

$$h_m(t) = H_m g = -\int_{-\infty}^{+\infty} \sqrt{i\xi}\hat{g}(\xi)\exp(i\xi t)\chi_m(\xi)\,d\xi, \tag{2.26}$$

et un flux approximatif regularisé perturbé :

$$h_{m,\delta}(t) = -\int_{-\infty}^{+\infty} \sqrt{i\xi}\hat{g}^\delta(\xi)\exp(i\xi t)\chi_m(\xi)\,d\xi. \tag{2.27}$$

où χ_m est la fonction caractéristique de l'intervalle $[-\xi_m, \xi_m]$.

Dans ce qui suit, nous allons obtenir une estimation d'erreur pour l'approximation (2.27).

Nous supposons qu'il existe une borne a priori pour $f(t) = U(0,t)$,

$$\|f\| \leq E.$$

Selon l'estimation (2.21), il s'ensuit que $\|g\|_s \leq M = C(s,1)E$. Sous cette condition, on estime la distance L^2 entre h et $h_{m,\delta}$ dans le théorème suivant :

Théorème 2.3.1 *Supposons que* $\|g\|_s \leq M$, $s \geq 1/2$, *et* $g^\delta \in L^2(\mathbb{R})$ *satisfaisant :*

$\left\|g-g^{\delta}\right\| \leq \delta$. *Si on choisit* $\xi_m = \left(\dfrac{M}{\delta}\right)^{1/S}$ *alors on obtient :*

$$\left\|h-h_{m,\delta}\right\| \leq 2M^{\frac{1}{2s}}\delta^{1-\frac{1}{2s}}. \tag{2.28}$$

Proof. On a :

$$h_m(t) = -\int_{-\infty}^{+\infty}\left[\sqrt{i\xi}\hat{g}(\xi)\chi_m(\xi)\right]\exp(i\xi t)\,d\xi,$$

et :

$$h_{m,\delta}(t) = -\int_{-\infty}^{+\infty}\left[\sqrt{i\xi}\hat{g}^{\delta}(\xi)\chi_m(\xi)\right]\exp(i\xi t)\,d\xi,$$

c'est à dire :

$$\hat{h}_m(\xi) = -\sqrt{i\xi}\hat{g}(\xi)\chi_m(\xi),$$

et :

$$\hat{h}_{m,\delta}(\xi) = -\sqrt{i\xi}\hat{g}^{\delta}(\xi)\chi_m(\xi).$$

D'après *Parseval*, on a d'une part :

$$\begin{aligned}
\left\|h-h_m\right\|^2 &= \left\|\hat{h}-\hat{h}_m\right\|^2 \\
&= \left\|-\sqrt{i\xi}\exp(i\xi t)\,\hat{g}(\xi)\left(1-\chi_m(\xi)\right)\right\|^2 \\
&= \int_{|\xi|>\xi_m}\left|\sqrt{i\xi}\hat{g}(\xi)\exp(i\xi t)(\xi)\right|^2 d\xi \\
&= \int_{|\xi|>\xi_m}|\xi|\left|\hat{g}(\xi)\right|^2 d\xi \\
&\leq \max_{\xi>\xi_m}\frac{\xi}{\left(1+\xi^2\right)^s}\left(\int_{|\xi|>\xi_m}\left(1+\xi^2\right)^s\left|\hat{g}(\xi)\right|^2\right)^{1/2} \\
&= \max_{\xi>\xi_m}\frac{\xi}{\left(1+\xi^2\right)^s}\left\|g\right\|_s^2 \\
&\leq M^2\xi_m^{1-2s}
\end{aligned}$$

D'autre part :

$$
\begin{aligned}
\|h_m - h_{m,\delta}\| &= \left\|\hat{h}_m - \hat{h}_{m,\delta}\right\| \\
&= \left\|\sqrt{i\xi}\exp(i\xi t)\left(\hat{g}(\xi) - \hat{g}^{\delta}(\xi)\right)\chi_m(\xi)\right\| \\
&= \left(\int\limits_{|\xi|\le\xi_m}\left|\sqrt{i\xi}\exp(i\xi t)\left(\hat{g}(\xi) - \hat{g}^{\delta}(\xi)\right)d\xi\right|^2 d\xi\right)^{1/2} \\
&\le \sqrt{\xi_m}\left\|g - g^{\delta}\right\| \\
&\le \sqrt{\xi_m}\delta
\end{aligned}
$$

Si on choisit $\xi_m = \left(\dfrac{M}{\delta}\right)^{1/S}$, alors :

$$
\|h - h_{m,\delta}\| \le \|h - h_m\| + \|h_m - h_{m,\delta}\| \le 2M^{1/2S}\delta^{1-1/2S}. \tag{2.29}
$$

■

2.4 La discrétisation du problème de *Cauchy*

Pour passer d'un problème exact continu réagit par une EDP au problème approché discret, il existe des méthodes de discrétisation. Parmis ces méthodes les plus connus, nous citons par exemples : méthodes de diffèrences finies, volumes finis et méthodes des éléments finis. Dans ce présent travail, on s'intéressera aux méthodes des différences finies. La méthode consiste à remplacer les dérivées partielles par des différences divisées ou combinaisons de valeurs ponctuelles de la fonction en un nombre fini de points discrets ou noeuds du maillage.

- Avantages : grande simplicité d'écriture et faible coût de calcul.
- Inconvénients : limitation à des géométries simples, difficultés de prise en compte des conditions aux limites de type Neumann.

Pour la résolution d'une EDP de dimension $n+1$ (espace+temps), on introduit un maillage de l'espace $\mathbb{R}^n$ de pas Δx_i et du temps de pas Δ_t.

On construit ainsi une grille. On note :

$$\begin{cases} x_{i_j} = j\Delta x_i \text{ pour } j \in \mathbb{Z}, \\ t^k = k\Delta t \text{ pour } k \in N. \end{cases}$$

Les noeuds de la grille sont les coordonnées $(x_{1_j}, x_{2_j}, ..., x_{n_j}; t^k)$, où $U\left(t^k, x_{1_j}\right)$ est l'approximation de U, la fonction continue régie par l'EDP au point $(t_0 + k\Delta t, x_0 + j\Delta x)$.
Les différences finies consistent à approcher les opérateurs de dérivation par des opérateurs discrets de dérivation.On a pour $n = 1$,

$$\frac{\partial U}{\partial x_1}\left(t^k, x_{1_j}\right) \simeq \frac{U\left(t^k, x_{1_j} + \Delta x_1\right) - U\left(t^k, x_{1_j}\right)}{\Delta x_1}.$$

2.4.1 La semi discrétisation

Dans la semi discrétisation des différences finies, on considère un maillage (t_n), $n = 0, 1, 2, ...N$, et on concentre sur l'évolution de la fonction $U(x, t_n)$ en ces points. Autrement dit, nos inconnues sont les M fonctions $U(x, t_1)$, $U(x, t_2)$, $U(x, t_3), ...,$ $U(x, t_N)$, (discrétiser la variable de temps) c'est-à-dire la discrétisation du temps.
Le problème pour $0 \leq t \leq T$ peut être discrétisé par remplacer la dérivée par rapport au temps U_t par un schéma arrière des différences fnies avec un pas de longeure τ. En effet :

$$t_n = n\tau, \ n = 0, ..., N,$$

avec : $\tau = \dfrac{T}{N}$ est le pas de temps, alors on trouve l'approximation pour $n \geq 1$,

$$U_t(x, t_n) \approx \frac{U(x, t_n) - U(x, t_{n-1})}{\tau}.$$

On note $U_n(x,t) = U(x,t_n)$ par l'approximation de la dérivée.

De plus, si nous supposons que $|U(x,t)|, |U_t(x,t)|, |U_{tt}(x,t)| \leq M$, pour tout $(x,t) \in [0,1] \times [0,T]$ alors :

$$\begin{aligned}\frac{\partial U}{\partial t}(x,t_n) = &\ U_t(x,t_n) \\ = &\ \frac{U(x,t_n) - U(x,t_{n-1})}{\tau} + \Psi(x,t_n) \text{ avec } \Psi(x,t_n) = O(\tau).\end{aligned}$$

Notation 2.4.1 *Notons $\omega_n(x) = U(x,t_n)$ et $\Psi_n(x) = \Psi(x,t_n)$, l'équation $U_{xx} = U_t$ devient une équation diférentielle ordinaire :*

$$\omega_n'' - \theta^2 \omega_n = -\theta^2 \omega_{n-1} + \Psi_n(x),$$

avec : $\theta^2 = \dfrac{1}{\tau}$.

Proposition 2.4.1 *Soit le problème semi discrétisé suivant :*

$$\begin{cases} v_n''(x) - \theta^2 v_n(x) = -\theta^2 v_{n-1} & \text{pour } 0 \leq x \leq 1, \ \ (v_0 = 0), \\ v_n(1) = g_n & \acute{v}_n(1) = h_n, \ \ (g_n = g(t_n), \ h_n = h(t_n)). \end{cases} \tag{2.30}$$

La solution v_n a la représentation donnée par :

$$v_n(x) = g_n \cosh(\theta(1-x)) - \frac{h_n}{\theta}\sinh(\theta(1-x)) + \theta \int_x^1 \sinh\theta(x-s)\, v_{n-1}(s)\, ds. \tag{2.31}$$

Proof. Le problème (2.1) est écrit comme suit :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 v_n(x)}{\partial x^2} = \theta^2 v_n(x) - \theta^2 v_{n-1}(x), & n = 1, ..., N \\ v_0(x) = 0, & \\ v_n(1) = g_n, & n = 1...N, \\ \acute{v}_n(1) = h_n, & n = 1...N. \end{cases}$$

où $g_n = g(t_n), n = 1, ..., N$.

Ceci équivalent au problème suivant :

$$\begin{cases} v_0(x) = 0, & \\ v_1''(x) - \theta^2 v_1(x) = 0, & \text{avec } v_1(1) = g_1, \acute{v}_1(1) = h_1, \\ v_2''(x) - \theta^2 v_2(x) = -\theta^2 v_1(x), & \text{avec } v_2(1) = g_2, \acute{v}_1(1) = h_2, \\ \vdots & \vdots \\ v_n''(x) - \theta^2 v_n(x) = -\theta^2 v_{n-1}(x), & \text{avec } v_n(1) = g_n, \acute{v}_n(1) = h_n. \end{cases}$$

■

Résolution numérique On commence par $n = 1$:

$$\begin{cases} v_1''(x) - \theta^2 v_1(x) = 0, \\ v_1(1) = g_1, \\ \acute{v}_1(1) = h_1. \end{cases}$$

C'est une équation différentielle linéaire homogène d'ordre 2 à cofficients constants, le polynôme caractéristique équivalent à :

$$p^2 - \theta^2 = 0 \Rightarrow p = \pm\theta.$$

Alors, la solution donnée est :

$$v_1(x) = C_1 \exp(\theta x) + C_2 \exp(-\theta x).$$

à partir des conditions ($v_1(1) = g_1$ et $\acute{v}_1(1) = h_1$) on obtient :

$$\begin{cases} v_1(1) = C_1 \exp(\theta) + C_2 \exp(-\theta) = g_1, \\ \acute{v}_1(1) = \theta C_1 \exp(\theta) - \theta C_2 \exp(-\theta) = h_1. \end{cases}$$

alors :

$$\begin{cases} C_1 = \dfrac{\exp(-\theta)}{2}\left(g_1 + \dfrac{h_1}{\theta}\right), \\ C_2 = \dfrac{\exp(\theta)}{2}\left(g_1 - \dfrac{h_1}{\theta}\right). \end{cases}$$

Finalement, la solution de la première équation est donnée par :

$$v_1(x) = g_1 \cosh(\theta(1-x)) - \frac{h_1}{\theta}\sinh(\theta(1-x)).$$

Pour $n = 2$:

$$\begin{cases} v_2''(x) - \theta^2 v_2(x) = -\theta^2 v_1(x), \\ v_2(1) = g_2, \\ v_2'(1) = h_2. \end{cases} \tag{2.32}$$

C'est une équation différentielle linéaire non homogène d'ordre 2 à cofficients constants

$$v_2(x) = v_P(x) + v_H(x). \tag{2.33}$$

où $v_H(x)$ est la solution homogène ($v_2(x) = 0$).

$$v_H(x) = g_2 \cosh(\theta(1-x)) - \frac{h_2}{\theta}\sinh(\theta(1-x)).$$

Maintenant, de façon analogue à une équation différentielle lineaire a premier ordre, nous cherchons une solution particulière $v_p(x)$ de la forme :

$$v_p(x) = C_1(x)\, y_1(x) + C_2(x)\, y_2(x),$$

où $y_1(x)$ et $y_2(x)$ forment un ensemble fondamentale des solutions de l'équation homogène associée. $C_1(x)$ et $C_2(x)$ sont deux fonctions de la forme :

$$C_i(x) = \int_x^1 \frac{W_i(y_1, y_2)}{W(y_1, y_2)} ds.$$

On défini le *Wronskien de* $y_1(x)$ et $y_2(x)$ (Noté : $W(y_1;y_2)$) par :

$$W(y_1,y_2) = \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ \acute{y}_1(x) & \acute{y}_2(x) \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} \exp(\theta x) & \exp(-\theta x) \\ \theta\exp(\theta x) & -\theta\exp(-\theta x) \end{vmatrix}$$
$$= -2\theta \neq 0.$$

Le *Wronskien* ne s'annule pas, (parce que $y_1(x)$ et $y_2(x)$ sont linéairement indépendants).

Si on calcule W_1 et W_2, on trouve :

$$W_1(y_1,y_2) = \begin{vmatrix} 0 & y_2(x) \\ -\theta^2 v_1(x) & \acute{y}_2(x) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & \exp(-\theta x) \\ -\theta^2 v_1(x) & -\theta\exp(-\theta x) \end{vmatrix}$$
$$= \theta^2 v_1(x)\exp(-\theta x).$$

$$W_2(y_1,y_2) = \begin{vmatrix} y_1(x) & 0 \\ -\theta^2 v_1(x) & \acute{y}_2(x) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \exp(\theta x) & 0 \\ \theta\exp(\theta x) & -\theta^2 v_1(x) \end{vmatrix}$$
$$= -\theta^2 v_1(x)\exp(\theta x).$$

Il s'ensuit que,

$$C_1(x) = -\int_x^1 \frac{W_1(y,y_2)}{W(y_1,y_2)}ds = -\int_x^1 \frac{\theta^2 v_1(s)\exp(-\theta s)}{-2\theta}ds$$
$$= \frac{\theta}{2}\int_x^1 v_1(s)\exp(-\theta s)\,ds.$$
$$C_2(x) = -\int_x^1 \frac{W_2(y,y_2)}{W(y_1,y_2)}ds = -\int_x^1 \frac{-\theta^2 v_1(s)\exp(\theta s)}{-2\theta}ds$$
$$= -\frac{\theta}{2}\int_x^1 v_1(s)\exp(\theta s)\,ds.$$

Alors ,la solution particulière est :

$$v_p(x) = \frac{\theta}{2}\int_x^1 v_1(s)\exp(-\theta s)\exp(\theta x)\,ds - \frac{\theta}{2}\int_x^1 v_1(s)\exp(\theta s)\exp(-\theta x)\,ds$$
$$= \frac{\theta}{2}\int_x^1 v_1(s)\exp(\theta(x-s))\,ds - \frac{\theta}{2}\int_x^1 v_1(s)\exp(-\theta(x-s))\,ds$$
$$= \theta\int_x^1 v_1(s)\sinh(\theta(x-s))\,ds.$$

Donc, la solution générale de $v_2(x)$ est :

$$v_2(x) = v_h(x) + v_P(x),$$

alors :

$$v_2(x) = g_2\cosh(\theta(1-x)) - \frac{h_2}{\theta}\sinh(\theta(1-x)) + \theta\int_x^1 v_1(s)\sinh(\theta(x-s))\,ds. \quad (2.34)$$

On peut généraliser ce résultat pour $n = 1, ..., N$.

$$v_n(x) = g_n \cosh(\theta(1-x)) - \frac{h_n}{\theta}\sinh(\theta(1-x)) + \theta\int_x^1 v_n(s)\sinh(\theta(x-s))\,ds. \tag{2.35}$$

alors, le système équivalent de système (2.25),

$$\begin{cases} v_0(x) & = 0, \\ v_1''(x) & = g_1 \cosh(\theta(1-x)) - \dfrac{h_1}{\theta}\sinh(\theta(1-x)), \\ \vdots & \vdots \\ v_n''(x) & = g_n \cosh(\theta(1-x)) + \dfrac{h_n}{\theta}\sinh(\theta(1-x)) + \theta\displaystyle\int_x^1 v_n(s)\sinh(\theta(x-s))\,ds. \end{cases} \tag{2.36}$$

Conclusion

Dans ce travail, on a réduit le problème d'identification d'une source dans l'équation de la chaleur à un problème de *Cauchy* pour $0 < x < 1$ et $t > 0$. Le flux de la chaleur au point $x = 1$ est donné par une intégrale sur $\mathbb{R}$. On la calcul par la méthode de régularisation de *Fourier*. La discrétisation par rapport au temps, nous conduit à une suite d'équations intégrales par rapport à la variable x. Reste à étudier ces équations en discrétisant l'intervalle $[0, 1]$ et en approximant l'opérateur intégral.

Bibliographie

[1] Andreas Kirsch. (2010). An introductionto the mathematical theory of inverse troblems. Second edition. Springer.

[2] *C. Charles.* Introduction aux problème inverse. (2014). Université de *Liège – Gembloux Agro*-Bio Tech Unité de Statistique, Informatique et Mathématique appliquées à la bioingénierie.

[3] *Chu-Li Fu* And Xiang-Tuang Xiong, P. Fu.* (2005). Fourier regularization method for solving the surface heat flux from enterior observations. Department of Mathematics, *Lanzhou* University, *Lanzhou*, 730000, P.R. *China.*

[4] *D. N. Hào, H. J. Reinhardt, A. Schneider.* (2001). Numerical solution to a sideways parabolic equation, Int. J. Num. Methods in Engineering.

[5] *D. N. Hào, H. J. Reinhardt.* (1997). On a sideways parabolic equation, Inverse Problems.

[6] *E.T Copson.* (1975). Partiali differentiall equations. Formerly *Regius* professor of mathematics in the University of ST *Andrews.*

[7] F. Berntsson. (2001). Numerical methods for solving a non characteristic *Cauchy* problem for a parabolic equation. Technical report, LITH-MATH-R-2001-17, *Linköping* University, *Sweden.*

[8] *Fredrik Berntsson.* (1998). Numerical solution of an inverse heat conduction problem. Department of mathematics *Linkopings* Universitet, S-581 83 Linkoping, *Sweden.*

[9] *Lahcène Chorfi, Leïla Alem.* (2015). Stable algorithme for Identifying a source in the heat equation. Electronic Journal of Differential Equations.

[10] *Michel Kern.* (2011–2012). Problème inverses. INRIA, ROCQUENCOURT, BP 105, 78153 LE CHESNAY, Michel.Kern@inria.fr.

[11] *Zohreh Ranjbar.* (2010). Numerical solution of ill-posed *Cauchy* problems for parabolic equations. Department of Mathematics Scientific Computing *Linköping* University SE *Linköping Sweden*

Annexe A : Abréviations et Notations

Les différentes abréviations et notations utilisées tout au long de ce mémoire sont expliquées ci-dessous.

$\mathbb{R}$:ensemble des nombres réels.

H :espace de Hilbert.

$\|.\|$: une norme.

$H^s(\mathbb{R})$:l'espace de *Sobolev*